

**O'zbekstan Respublikasi' Joqari' ha'm orta arnawli' bilim
ministrliqi**

Berdaq ati'ndag'i' Qaraqalpaq ma'mleketlik universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Fizika kafedrası'

Fizika-matematika fakultetinin' 4-kurs studenti
Qalilaeva Gauhardi'n' pitkeriw qa'nigelik jumi'si'

**Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' ayi'ri'm
ma'selelerin kompyuterlerde sheshiw usi'llari'**

Ilimiy basshi'si'

Kafedra basli'g'i'

Fakultet dekani'

professor B.Abdikamalov.

f.-m.i. kandidati', docent

J.Akimova.

f.-m.i. kandidati', docent

B.Otemuratov.

No'kis 2016

Mazmuni'

Kirisiw	3
1-bap. Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' fizikali'q ha'm matematikali'q tiykarlari'.	5
1-1 §. Sali'sti'rmali'q teoriyasi' ha'm kvantli'q mexanika.	5
1-2 §. Shredinger ten'lemesi.	6
1-3 §. Relyativistlik ten'lemeler haqqi'ndag'i' uli'wmali'q tu'sinikler.	8
II bap. Relyativistlik tolqi'n ten'lemeleri.	12
2-1 §. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi.	12
2-2 §. Dirak ten'lemesi.	18
2-3 §. Toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i'.	28
2-4 §. Bo'lekshenin' spinin ta'riyipleytug'i'n ag'zani'n' payda boli'wi'.	29
2-5 §. Erkin elektronni'n' tolqi'n funkciyasi'	32
2-6 §. Kulon maydani'ndag'i' spini joq bo'lekshenin' energiyasi'ni'n' qa'ddileri.	36
2-7 §. Vodorod atomi' ushi'n energiyag'a relyativistlik du'zetiwlardi esaplaw.	43
Pitkeriw qa'nigelik jumi'si' boyi'nsha uli'wmali'q juwmaqlar.	48
Paydalani'lg'an a'debiyatlardi'n' dizimi.	49

Kirisiw

Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' en' tiykarg'i' ten'lemelerinin' biri bolg'an Shredinger ten'lemesi Gamilton formalizminin' tiykari'nda relyativistlik kvantli'q mexanikadan sa'ykeslik principi boyi'nsha ali'nadi' ha'm ol Gamilton funkciyasi'ni'n' barli'q invariantli'q qa'siyetlerine iye boladi'. Mi'sali' Shredinger ten'lemesi ken'isliklik aylandi'ri'wlar menen translyaciyalarg'a qarata simmetriyag'a iye [35]. Soni'n' menen birge ten'lemenin' Galiley tu'rlendiriwlerine qarata simmetriyali' ekenligin de an'sat ko'rsetiwge boladi'. Demek Shredinger teoriyasi' boljay alatug'i'n fizikali'q qa'siyetler de koordinatalar sistemasi'n Galiley tu'rlendiriwlerine qarata invariant boli'p tabi'ladi' ha'm sonli'qtan Lorenc tu'rlendiriwlerine qarata invariant emes. Bul o'z gezeginde Shredinger ten'lemesinin' ja'rdeminde ali'natug'i'n na'tiyjelerdin' sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' postulatlari'na juwap bere almaytug'i'nli'g'i'n ko'rsetedi. Kishi tezliklerde (yag'ni'y $v \ll c$ ten'sizligi ori'nlanatug'i'n jag'daylarda, c arqali' jaqti'li'qti'n' tezligi belgilengen) Galiley tu'rlendiriwleri Lorenc tu'rlendiriwlerine aylanatug'i'n bolg'anli'qtan Shredinger teoriyasi'na tiykarlang'an kvantli'q mexanika tek kishi tezliklerde g'ana duri's na'tiyjelerdi beretug'i'nli'g'i'n ku'tiw kerek boladi'. Bul ga'plerdin' duri's ekenligi eksperimentlerde de da'lillenedi. Mi'sali' zatlar menen jaqti'li'qti'n' ta'sirlesiwine baylani'sli' bolg'an barli'q qubi'li'slardi' (fotonlardi'n' nurlani'wi', juti'li'wi' ha'm shashi'rawi' qubi'li'slari'n) relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' sheklerinde sheshiwge bolmaydi'.

Relyativistlik kvantli'q mexanikani' quri'wda (do'retiwde) payda bolatug'i'n en' tiykarg'i' qi'yi'nshi'li'qlardi'n' biri bo'lekshelerdin' sani'ni'n' saqlani'w ni'zami'ni'n' buzi'li'wi' menen baylani'sli'. Sali'sti'rmali'q principinin' en' a'hmiyetli principlerinin' biri bolg'an massa menen energiyani'n' ekvivalentliginen ta'sirlesiwde energiya almasi'wi' ori'n alg'an jag'dayda ha'm bul energiyani'n' shamasi' payda bolg'an bo'lekshelerdin' ti'ni'shli'qtag'i' energiyasi'na ten' yamasa u'lken bolg'anda jan'a bo'lekshenin' tuwi'li'wi' yamasa bar bo'lekshenin' juti'li'wdi'n' saldari'nan joq boli'wi' mu'mkin. Usi'ni'n' saldari'nan toli'q relyativistlik kvantli'q teoriya o'z ishine birden bir sxema tu'rinde bir birinen tek kvantli'q hali' boyi'nsha emes, al usi' halg'a

sa'ykes keliwshi elementar bo'lekshelerdin' tu'ri menen sani'n da qamti'wi' kerek. Usi'nday maqsette kvantlang'an maydan koncepciyasi'n basshi'li'qqa ali'w kerek boladi'. Na'tiyjede relyativistlik kvantli'q teoriyani' kvantlang'an maydanlar teoriyasi' yamasa maydanni'n' kvantli'q teoriyasi' dep te ataydi'. Usi' teoriyani'n' rawajlani'wi'ni'n' ha'zirgi waqi'tlardag'i' qa'ddinde de ko'p sanli' qi'yi'nshi'li'qlar menen qarama-qarsi'li'qlarg'a iye. Biraq ha'zirgi zaman relyativistlik kvantli'q mexanika ko'p sanli' eksperimentalli'q na'tiyjelerdi tu'sindire aladi'.

Joqari'da ayti'lg'an jag'daylarg'a baylani'sli' pitkeriw qa'nigelik jumi'si' kvantlang'an maydanlardi'n' teoriyasi'na kirisiw menen usi' teoriyani'n' bir qatar ma'selelerin Mathematica universalli'q kompyuterlik algebra sistemasi'ni'n' ja'rdeminde esaplawdi' o'z ishine aladi' [25, 39-41]. Jumi'sta elektronni'n' dinamikasi'na tiyisli bolg'an bir qatar relyativistlik effektlardi esaplaw ushi'n en' elementar usi'llar qarap shi'g'i'lg'an. Atap aytqanda relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' en' a'piwayi' bolg'an ma'selelerinin' biri bolg'an berilgen si'rtqi' maydandag'i' spini $1/2$ ge ten' bolg'an elektron qarap shi'g'i'ladi'. Bunday situaciya ushi'n a'hmiyetli mi'sal elektromagnit maydani'ndag'i' elektron boli'p tabi'ladi'. Maydan kvantlanbaydi' ha'm sistemani'n' evolyuciyasi' sali'sti'rmali'q principinen kelip shi'g'atug'i'n barli'q invariantli'q qa'siyetlerge iye tolqi'n funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde ta'riyiplenedi. Ten'leme sa'ykeslik principin de qanaatlandi'ri'wi' kerek, yag'ni'y relyativistlik emes sheklerde Pauli teoriyasi'n beriwi kerek. Bunday ten'leme bar ha'm oni' Dirak ten'lemesi dep ataydi'. Bul jumi'sta biz Dirak ten'lemesinin' fizikali'q mazmuni'n izertlew menen birge oni' vodorod atomi' ushi'n paydalanami'z.

1-bap. Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' fizikali'q ha'm matematikali'q tiykarlari'

1-1 §. Sali'sti'rmali'q teoriyasi' ha'm kvantli'q mexanika

Kvantli'q mexanika haqqi'nda ga'p etilgende a'dette Shredinger ten'lemesinin' ja'rdeminde sheshiletug'i'n relyativistlik emes kvantli'q qubi'li'slar na'zerde tuti'ladi'. Bunday jag'dayda bo'lekshelerdin' tezligi jaqti'li'qti'n' tezliginen ko'p kishi dep esaplanadi' [13-16, 26, 32-34]. Mikrobo'lekshelerdin' qozg'ali'slari'n izertlegende bunday shek u'lken qa'teliklarga ali'p keledi. Mi'sali', Bor ta'limati'ni'n' ja'rdeminde vodorod atomi'ndag'i' tiykarg'i' haldag'i' elektronni'n' tezliginin' jaqti'li'qti'n' tezliginen 137 ese g'ana kishi ekenligin esaplap tabi'wg'a boladi' [12, 18]. Al energiyasi' 5 MeV bolg'an erkin elektronni'n' tezligi jaqti'li'qti'n' tezliginin' 0,995 bo'legin g'ana quraydi'. Bunday jag'dayda tezlikni tabi'w ushi'n kinetikali'q energiya ushi'n jazi'lg'an $T = 5 \text{ MeV} = \frac{m_e v^2}{2}$ formulasi'n paydalana almaymi'z. Bunday jag'dayda tezliktin' ma'nisi $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ MeV}}{m_e}} = 1,33 \cdot 10^9 \frac{m}{s}$ shamasi'na ten' boladi', al bul shama jaqti'li'qti'n' tezliginen 4.42 ese u'lken. Sonli'qtan sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' formulalari'nan paydalani'wi'mi'z kerek boladi'.

Sali'sti'rmali'q teoriyasi' boyi'nsha massasi' m bolg'an bo'lekshenin' toli'q energiyasi'

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde ani'qlanadi' [42]. Bul formuladag'i' mc^2 shamasi' bo'lekshenin' ti'ni'shli'qtag'i' energiyasi' boli'p tabi'ladi' ha'm oni' E_0 arqali' belgileydi. Bo'lekshenin' kinetikali'q energiyasi' T bolsa $E - E_0$ shamasi'na ten' boli'p, oni'n' ma'nisin

$$T = E - E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

an'latpasi'ni'n' ja'rdeminde esaplaymi'z. Eger T ni'n' shamasi' 5 MeV ke ten' bolatug'i'n bolsa, onda $v = 2,985 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ shamasi'na iye bolami'z. Bunday jag'dayda $\frac{v}{c} = 0,995$ shamasi'na ten' boladi'.

Ha'zirgi waqi'tlarda kollayderlerde protonlardi'n' energiyasi' bir neshe TeV lerge shekem ko'teriledi ha'm olar jaqti'li'qti'n' tezligine ju'da' jaqi'n tezlikler menen qozg'aladi'. Bunday jag'daylardi'n' barli'g'i'nda da relyativistlik emes kvantli'q mexanikani' paydalani'wg'a bolmaydi'. Ekinshi ta'repten Shredinger ten'lemesinde mikrobo'lekshelerdin' spini esapqa ali'nbaydi'. Usi'ni'n' na'tiyjesinde relyativistlik kvantli'q mexanikag'a o'tiw za'ru'rli'gi tuwi'ladi'.

1-2 §. Shredinger ten'lemesi

Ta'biyatti'n' tiykarg'i' ni'zami' si'pati'nda Shredinger ten'lemesi a'dette keltirilip shi'g'ari'lmaydi' (mi'sali' Nyutonni'n' ekinshi ni'zami'ni'n' keltirilip shi'g'ari'lmaytug'i'nli'g'i' si'yaqli'). Biraq Shredinger ten'lemesindegi ten'liktin' haqi'yqati'nda da ori'nlanatug'i'nli'g'i'n ko'rsetiw ushi'n klassikali'q fizikadag'i' energiyani'n' saqlani'w ni'zami' tiykari'nda tegis tolqi'n ushi'n jazi'lg'an an'latpadan kerekli bolg'an qatnaslardi' keltirip shi'g'ari'w mu'mkin [4-11, 17, 19-24, 26-31, 36].

Klassikali'q fizikada bo'lekshenin' toli'q energiyasi' E kinetikali'q T ha'm potentsial energiyalardi'n' $U(x, y, z)$ qosi'ndasi'na ten', yag'ni'y

$$E = T + U(x, y, z).$$

Kinetikali'q energiyani'

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

formulasi'ni'n' jardeminde esaplaymi'z ha'm massani'n' relyativistlik invariant, sonli'qtan oni'n' o'zgermeytug'i'n shama ekenligin esapqa alg'an halda oni' tek m xaripinin' jardeminde belgileymiz (ko'plegen a'debiyattag'i' si'yaqli' m_0 arqali' emes). Endi kvantli'q mexanikada fizikali'q shamalar menen emes, al sol shamalarg'a sa'ykes keliwshi ermitlik operatorlardi' paydalani'latug'i'nli'g'i'n esapqa ali'p ali'p toli'q energiya ushi'n Gamilton operatori'n (gamiltoniandi') alami'z ha'm oni' bi'layi'nsha jazami'z:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = U(x, y, z) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Bul an'latpada

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) = \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \end{aligned}$$

yag'ni'y

$$\hat{T} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

an'latpasi'ni'n' jardeminde beriledi.

Kvantli'q mexanikada fizikali'q shamani'n' operatori' ushi'n a'dette

$$f\psi = f_0\psi$$

tu'rindagi operatorli'q ten'leme jazi'ladi'. Usi'g'an baylani'sli' kvantli'q mexanikani'n' en' tiykarg'i' tasti'yi'qlawlari'ni'n' birin eske tu'siremiz:

f fizikali'q shamasi' belgili bir f_0 shamasina ten' bolatug'i'n hal joqari'dag'i' operatorli'q ten'lemenin' sheshimi bolg'an ψ funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde ta'riyiplenedi.

Endi Gamilton operatori'n sa'ykes operatorli'q ten'lemege qoysaq bizge kerekli bolg'an ha'm relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemesi bolg'an Shredinger ten'lemesin alami'z:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + U(x, y, z) \psi = E_0 \psi.$$

Bul stacionar hallar ushi'n jazi'lg'an Shredinger ten'lemesi boli'p tabi'ladi', al stacionar hal dep energiyasi' o'zgeriske ushi'ramaytug'i'n haldi' aytadi'.

Shredinger ten'lemesin kompaktli' etip

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi = E_0 \psi$$

tu'rinde de jazi'w mu'mkin. Bul an'latpada a'dette Laplas operatori' dep atalatug'i'n

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

shamasini'n' orni'na Δ belgisi qoyi'lg'an.

Biz fizikali'q ma'niske bul ten'lemenin' tek shekli, bir ma'nisli, u'zliksiz ha'm tegis sheshimlerinin' iye bolatug'i'nli'g'i'n bilemiz.

Stacionar hallar ushi'n jazi'lg'an Shredinger ten'lemesinin' a'dewir uli'wma bolg'an

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

tu'rindagi Shredinger ten'lemesinin' dara jag'dayi' ekenligin atap o'temiz. Sonli'qtan Shredingerdin' stacionar ten'lemesi en' son'g'i' jazi'lg'an ten'lemenin' dara jag'dayi' si'pati'nda, atap aytqanda Gamilton operatori' waqi'ttan waqi'ttan g'a'rezsiz bolg'an jag'daylar ushi'n ali'nadi'.

Shredinger ten'lemesi dara tuwi'ndi'larg'a iye differencialli'q ten'leme ekenligine baylani'sli' Nyuton ten'lemelerinen u'lken o'zgesheliklarga iye. Bunday ten'lemeler analitikali'q jollar menen tek ayi'ri'm a'piwayi' jag'daylar ushi'n g'ana sheshiledi. Sonli'qtan kvantli'q mexanikada aqi'ri'na shekem analitikali'q tu'rde sheshiletug'i'n az sanli' g'ana ma'seleler bar. Biraq ten'lemenin' sheshimlerin da'l tu'rde ali'w mu'mkin bolmag'an jag'daylar ushi'n da ali'natug'i'n na'tiyjelerdi duri's bahalay biliw kerek boladi'.

1-3 §. Relyativistlik ten'lemeler haqqi'ndag'i' uli'wmali'q tu'sinikler

A.Eynshteynnin' sali'sti'rmali'q principi ta'biyatti'n' qubi'li'slari'n ta'riyipleytug'i'n ha'm olardi'n' ni'zamlari'n an'latatug'i'n ten'lemelerdin' barli'q esaplawlar sistemasi'nda birdey boli'wi'n talap etedi. Basqa so'z benen aytqanda ten'lemeler barli'q esaplaw sistemalari'na qarata invariant boli'wi' sha'rt. Eger bazi' bir ten'leme Lorenc tu'rlendiriwlerine qarata kovariantli' bolsa, onda ten'leme barli'q inercialli'q esaplaw sistemalari'nda ori'nli' bolg'an relyativistlik ten'leme boli'p tabi'ladi' [13-16, 2, 32-34].

A'llette, eger ten'leme Galiley tu'rlendiriwlerine qarata kovariantli' bolsa, onda ol relyativistlik emes ten'leme boli'p tabi'ladi'. Bunday ten'lemeni jaqti'li'qti'n' tezliginen a'dewir kishi bolg'an tezlikler menen qozg'alatug'i'n bo'leksheler ushi'n qollani'wg'a boladi'.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \right] \psi \quad (1.1)$$

tu'rindagi Shredinger ten'lemesi tek Galiley tu'rlendiriwlerinde g'ana o'z tu'rin

saqlaydi'. Eger Galiley tu'rlendiriwlerinin'

$$x' = x - vt, \quad (1.2)$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t$$

tu'rinde jazi'latug'i'nli'g'i'n esapqa alsaq,, onda

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (1.3)$$

ten'liklerinin' ori'n alatug'i'nli'g'i'na ha'm usi'g'an sa'ykes (1.1)-ten'lemenin' jan'a shtrixlang'an koordinatalar sistemasi'nda

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r'}^2 + U(r') \right] \psi \quad (1.1')$$

tu'rine enetug'i'nli'g'i'n, yag'ni'y o'zinin' tu'rin saqlaytug'i'nli'g'i'n ko'riwge boladi'.

Lorenc tu'rlendiriwleri bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Eger (1.1)-ten'lemeni (1.4)-tu'rlendiriw formulalari'ni'n' ja'rdeminde shtrixlang'an esaplaw sistemasi'na tu'rlendiretug'i'n bolsaq, onda Shredinger ten'lemesine pu'tkilley usamaytug'i'n ten'lemeni alami'z. Bul jag'day Shredinger ten'lemesinin' Lorenc tu'rlendiriwlerine qarata kovariantli' emes ekenligin, usi'g'an sa'ykes relyativistlik emes ten'leme ekenligin an'g'artadi'. Bul jag'daydi' Lorenc tu'rlendiriwlerin paydalanbay-aq ayqi'nlasti'ri'wg'a boladi'. (1.4)-ten'lemeler sistemasi'nda waqi't t' penen koordinata x' ti'n' simmetriya tu'rde qatnasatug'i'nli'g'i'n an'g'ari'wg'a boladi'. Eger t' shamasini'n' orni'na sali'sti'rmali'q teoriyasi'nda qabi'l etilgen $t' = ict = x_0$ belgilewin qabi'l etsek, onda (1.4)-ten'lemelerdin' birinshisi menen to'rtinshisi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + i\frac{v}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x_0' &= \frac{t - i\frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

tu'rlerine enetug'i'nli'g'i'n ha'm waqi'tli'q koordinata menen ken'isliklik koordinatalardi'n' birdey tu'rge iye ekenligin an'sat keltirip shi'g'ari'wg'a boladi'.

(1.4) tu'rlendiriwlerinde y ha'm z ko'sherleri koordinatalar sistemasi'ni'n' tezliginin' bag'i'ti'na qarata arnawli' tu'rde saylap ali'ng'anli'g'i'na baylani'sli' a'piwayi' tu'rge iye (shtrixlanbag'an koordinatalar ko'sherleri menen shtrixlang'an koorditalar ko'sherleri o'z-ara parallel, al v tezliginin' bag'i'ti' x ko'sheri menen x' ko'sherinin' bag'i'ti'na sa'ykes keledi). y ha'm z ko'sherlerinin' x ko'sherine ekvivalent ekenligi ani'q. (1.5)-an'latpalardan Lorenc tu'rlendiriwlerine koordinata menen waqi'tti'n' simmetriyali' tu'rde kiretug'i'nli'g'i' ayqi'n tu'rde ko'rinip tur. Bunnan relyativistlik invariant differencialli'q ten'lemede waqi't boyi'nsha ali'ng'an tuwi'ndi' menen koordinatalar boyi'nsha ali'ng'an tuwi'ndi'lardi'n' birdey huqi'qta kiretug'i'nli'g'i', usi'g'an sa'ykes olar boyi'nsha ali'ng'an tuwi'ndi'lardi'n' ta'rtibinin' birdey boli'wi'ni'n' sha'rt ekenligi kelip shi'g'adi'. Al Shredinger ten'lemesinde waqi't boyi'nsha ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi', al koordinatalar boyi'nsha ali'ng'an ekinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lar bar. Bunday ten'leme relyativistlik jaqtan invariant emes ten'leme boli'p tabi'ladi'.

(1.1)-Shredinger ten'lemesin operatorli'q formada jazami'z:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \quad (1.6)$$

Bul ten'lemede $\hat{H}$ arqali' Gamilton operatori' (gamiltonian), E arqali' parametr, Ψ arqali' tolqi'n funkciyasi' belgilengen. Pu'tkilley formalli'q jaqtan Shredinger ten'lemesin an'sat keltirip shi'g'ari'w mu'mkin (Shredinger ten'lemesi ta'biyatti'n' ni'zami'n sa'wlelendiredi, sonli'qtan oni' a'dette keltirip shi'g'armaydi', al sol tu'rinde qabi'l etedi. Usi'g'an baylani'sli' biz tek sonday ten'lemenin' haqi'yqati'nda da ori'nli', al bizin' ha'reketimizdin' formalli'q jaqtan g'ana duri's ekenligin ko'rsetemiz).

Bo'lekshenin' toli'q energiyasi' E , impulsi p ha'm potentsialli'q energiyasi' U arasi'ndag'i' relyativistlik emes an'latpani' jazami'z:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U. \quad (1.7)$$

Bul an'latpada $\frac{p^2}{2m}$ arqali' bo'lekshenin' kinetikali'q energiyasi' belgilengen. Endi usi' (1.7)-an'latpadag'i' klassikali'q shamalardi' kvantli'q mexanikani'n' ermitlik operatorlari' menen almasti'rami'z:

$$E \rightarrow \hat{H} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad U \rightarrow \hat{U} = U. \quad (1.8)$$

(1.8)-an'lapadag'i' operatorlardi' (1.7)-an'latpadag'i' sa'ykes fizikali'q shamalardi'n' orni'na qoyami'z ha'm na'tiyjede to'mendegidey ten'lemenini alami'z:

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \quad (1.9)$$

Ten'lemenin' eki ta'repin de Ψ tolqi'n funkciyasi'na ko'beytip Shredinger ten'lemesine iye bolami'z ha'm (1.7)-an'latpani'n' relyativistlik xarakterge iye emes ekenligini ali'ng'an ten'lemenin' de relyativistlik emes ekenligine ko'z jetkeremiz.

Biz klassikali'q an'latpalardan kvantli'q mexanikani'n' ten'lemelerin ali'wg'a bolatug'i'nli'g'i'n ko'rsettik. Tap usi'nday usi'ldi' relyativistlik kvantli'q ten'lemelerdi ali'w ushi'n uli'wmalasti'rami'z.

II bab. Relyativistlik tolqi'n ten'lemeleri

2-1 §. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi

Maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'nda ken' tu'rde paydalani'latug'i'n Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesini en' birinshi ret Ervin Shredinger o'zini' ati' menen atalatug'i'n ten'lemenini almastan buri'n jazdi'¹. Biraq ol elektronni'n' spinini o'zi alg'an ten'lemege kirgize almag'an ha'm sonli'qtan ali'ng'an ten'lemeden bas tartqan. Qalay degen menen Shredinger "keltirip shi'g'ari'lg'an Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesini" a'piwayi'lasti'ri'w arqali' relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemesi bolg'an "Shredinger ten'lemesini" tapti'. Bir qatar fizikler Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesini Kleyn-Gordon ten'lemesi, al onnan da betar da'l tu'rde Kleyn-Fok

¹ Oskar Kleyn (shved tilinde *Oskar Klein*) 1894-ji'li 15-sentyabr ku'ni tuwi'lg'an ha'm 1977-ji'li 5-fevral ku'ni qayti's bolg'an SHveciya fizigi.

ten'lemesi dep atag'an maqul bolg'an bolar edi dep esaplaydi'². Bul ten'lemeni a'dette

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi + \partial_z^2 \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

tu'rinde yamasa bir qansha qi'sqa tu'rde

$$(\uparrow + m^2)\psi = 0$$

an'latpasi' tu'rinde de jazadi'. Bul an'latpada $\uparrow$ arqali' Dalamber operatori' belgilengen. Bul ten'leme Shredinger ten'lemesinin' relyativistlik versiyasi' boli'p tabi'ladi'. U'lken tezlikler menen qozg'alatug'i'n massag'a iye bo'lekshelerdi ta'riyiplew ushi'n qollani'ladi'. Massag'a iye skalyar maydanlardi' ta'riyiplegende da'l na'tiyjelerdi beredi. Soni'n' menen birge spinleri pu'tin yamasa yari'm pu'tin bolg'an bo'leksheler ushi'n da uli'wmalasti'ri'li'wi' mu'mkin.

Erkin bo'leksheler ushi'n Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi sinusoidal'i'q tegis tolqi'n tu'rindegi a'piwayi' sheshimge iye boladi' [1-2].

Sali'sti'rmali'q teoriyasi'na sa'ykes bo'lekshenin' toli'q energiyasi' menen impulsi to'mendegidey an'latpalardi'n' ja'rdeminde ani'qlanadi':

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(2.1)

Bul an'latpalardi'n' ekewin de kvadratqa ko'teremiz ha'm an'latpalardi' bir birinen alami'z

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2.$$
(2.2)

Bul an'latpadan

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$
(2.3)

² Vladimir Aleksandrovich Fok (1898-1974) – SSSR fizigi. Ol kvantli'q mexanika, kvantli'q elektrodinamika, maydanni'n' kvantli'q teoriyasi', ko'p elektronli'q sistemalar, statistikali'q fizika, sali'sti'rmali'q teoriyasi', gravitaciya teoriyasi', radiofizika, matematikali'q fizika, a'meliy fizika, fizikani'n' filosofiyali'q mashqalalari' boyi'nsha salmaqli' ilimiy jumi'slardi' ori'nlag'an. Ilimge Fok ken'isligi, Fokti'n' funkcionallar usi'li', menshikli waqi't usi'li', Dirak-Fok-Podolskiydin' ko'p waqi'tli' formalizmi, gradientlik (kalibrovkali'q) invariantli'q, Xartir-Fok usi'li' si'yaqli' tu'siniklerdi kirgizdi ha'm u'yrendi. Vodorod atomi'ni'n' Fok boyi'nsha simmetriyasi'n ashti', Born-Fokti'n' (adiabatali'q shek haqqi'nda), Fok-Kri'lovti'n' (i'di'rawshi' hallar haqqi'nda) teoremlari'n da'lilledi.

V.A.Fokti'n' basqa da ko'p sanli' fundamentalli'q xarakterdegi jumi'slari' Jer ju'zi fiziklerine ken'nen ma'lim.

formulasi'ni'n' ori'n alatug'i'nli'g'i'na iye bolami'z. Bul bo'lekshenin' toli'q energiyasi', impulsi ha'm massasi' arasi'ndag'i' baylani'sti' ani'qlaytug'i'n en' tiykarg'i' relyativistlik an'latpa boli'p tabi'ladi'.

(1.8)-an'latpadag'i' almasti'ri'wlardi' paydalani'p si'rtqi' potentsialli'q maydan bolmag'an jag'daylarda qozg'alatug'i'n massasi' m ge ten' bolg'an bo'lekshe ushi'n

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = (-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi \quad (2.4)$$

tu'rindagi ten'lemeni alami'z. Bul ten'leme (2.3)-relyativistlik qatnasti'n' tiykari'nda ali'ndi' ha'm sonli'qtan relyativistlik ten'leme boli'p tabi'ladi'. Bul jag'daydi' ayqi'nlasti'ri'w ushi'n (2.4)-ten'lemeni $c^2 \hbar^2$ ko'beymesine bo'lemiz ha'm $k_0^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ belgilewin qabi'l etsek, onda

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - k_0^2 \Psi = 0 \quad (2.5)$$

ten'lemesin alami'z. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi dep atalatug'i'n bul ten'lemedagi birinshi eki ag'za Dalamberdin' tolqi'n ten'lemesinin' sa'ykes ag'zalari' menen birdey. Al oni'n' relyativistlik invariantli'q qa'siyetke iye ekenligi elektrodinamikadan jaqsi' belgili. $k^2 \Psi$ ag'zasi'ni'n' skalyar bolg'anli'g'i' sebepli ($k = const$) oni'n' relyativistlik invariantli'g'i' o'z-o'zinen tu'sinikli. Bul jag'daylar Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' relyativistlik invariant ekenligin da'lilleydi.

Zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n an'latpalardi' ali'w ushi'n relyativistlik emes kvantli'q mexanikadag'i' toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' j ha'm zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ρ ushi'n keltirilip shi'g'ari'lg'an

$$j = \frac{ie\hbar}{2m} (\varphi \nabla \varphi^* - \varphi^* \nabla \varphi), \quad (2.6)$$

$$\rho = e\varphi^* \varphi \quad (2.7)$$

an'latpalardi' ali'w ushi'n islangen a'mellerdi ori'nlaymi'z. Oni'n' ushi'n (1.1)-Shredinger ten'lemesinin' shep ta'repin Ψ^* kompleksli tu'yinles tolqi'n funkciyasi'na ko'beytemiz ha'm onnan kompleksli tu'yinles ten'lemeni ag'zama-ag'za alami'z. Na'tiyjede biz mi'naday an'latpag'a iye bolami'z

$$\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* - \frac{1}{c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Bunnan keyin

$$\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* = \operatorname{div}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (2.9)$$

$$\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.10)$$

ten'liklerinin' ori'n alatug'i'nli'g'i'n esapqa ali'p ha'm

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right), \quad (2.11)$$

$$j = \frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) \quad (2.12)$$

belgilewlerin paydalani'p (2.8)-ten'lemenini bi'layi'nsha ko'shirip jaza alami'z:

$$\operatorname{div} j = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Eger j toqti'n' ti'g'i'zli'g'i', al ρ zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' bolsa, onda (2.13)-an'latpa elektrodinamikadag'i' zaryadti'n' saqlani'w ten'lemesine sa'ykes keledi. Bunnan biz Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi ushi'n toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' (2.11) ha'm (2.12)-formulalar menen beriletug'i'nli'g'i'na ko'z jetkeremiz.

Toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' j ushi'n jazi'lg'an (2.6)-formula relyativistlik emes teoriyadag'i' toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n jazi'lg'an formula

$$j = \frac{ie\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$$

menen birdey. Al zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n ali'ng'an (2.11)-formula menen zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n jazi'lg'an relyativistlik emes

$$\rho = e\psi^* \psi$$

tu'rindagi formulag'a sa'ykes kelmeydi. Biraq $v \ll c$ bolg'an relyativistlik jag'daylarda formulalardi'n' bir biri menen birdey boli'wi' ori'n aladi'. Bul ga'plerdin' duri's ekenligine iseniw ushi'n kishi tezliklerde

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

ten'liginin' ori'n alatug'i'nli'g'i'n esapqa alsaq, onda juwi'q tu'rde ($\frac{v}{c}$ shamasini'n' ekinshi da'rejesine shekemgi da'llikte) biz to'mendegilerdi jaza alami'z:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \Psi_0(\mathbf{r}) = -i\frac{E}{\hbar} \Psi \approx -i\frac{mc^2}{\hbar} \Psi. \quad (2.14)$$

Sonli'qtan (2.11)-an'latpa to'mendegidey tu'rge enedi:

$$\rho = e\psi^*\psi. \quad (2.15)$$

Bul formula joqari'da keltirilgen relyativistlik emes formula menen birdey ko'rinishke iye.

Biraq zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n jazi'lg'an relyativistlik (2.11)-formula to'mendegidey qi'yi'nshi'li'qqa ali'p keledi. Ani'qlamasi' boyi'nsha zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' tu'sinigi boyi'nsha zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i'n birlik zaryad e nin' shamasina bo'lsek bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i'n ali'wi'mi'z kerek. Demek bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i'

$$\rho_m = \frac{\rho}{m} = \frac{ie\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.16)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde beriledi. Fizikali'q ma'nisi boyi'nsha bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' ma'nisi on' boli'wi' kerek. Biraq usi'nday jag'daylarg'a qaramastan Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi waqi't boyi'nsha ekinshi ta'rtpili tuwi'ndi'g'a iye ten'leme boli'p tabi'ladi'. Usi'g'an baylani'sli' Ψ ha'm $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ bazi' bir noqatlarda bir birinen g'a'rezsiz beriliwi mu'mkin. Demek (2.16)-formulani'n' ja'rdeminde esaplanatug'i'n ρ_m shamasini'n' ma'nisi nolden kishi (yag'ni'y teris ma'nisli) boli'wi' da mu'mkin. Olay bolsa sol (2.16)-an'latpani' bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n jazi'lg'an an'latpa dep qarawg'a bolmaydi'. Tap usi' jag'daydi'n' sebebinen Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi bo'lekshelerdin' qa'siyetlerin ta'riyiplewge bolatug'i'n ten'leme si'pati'nda shama menen jeti ji'lday waqi'tqa shekem qabi'l etilmedi. Tek 1934-ji'li' Pauli menen Vayskopf bul ten'lemeni Maksvell ten'lemesinin' elektromagnit maydani'n ta'riyiplegenindey maydan ushi'n jazi'lg'an ten'leme si'pati'nda "reabilitaciyaladi" (yag'ni'y "aqlandi") ha'm bul maydandi' qalay kvantlawg'a bolatug'i'nli'g'i'n ko'rsetti.

Solay etip Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi kvantli'q mexanikani'n' emes, al maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'ni'n' ten'lemesi (maydan ten'lemesi) boli'p shi'qti' Usi'ni'n' na'tiyjesinde teris ma'nisli ti'g'i'zli'qqa baylani'sli' bolg'an qi'yi'nshi'li'qlar saplasti'ri'ldi'.

Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesindegi tolqi'n funkciyasi' tek bir qurawshi'g'a iye ha'm sonli'qtan bul qurawshi' skalyar shama boladi'. Eger bo'leksheni ta'riyipleytug'i'n tolqi'n funkciyasi'nda oni'n' qozg'ali'si'na sa'ykes keliwshi qurawshi'lardan basqa da qurawshi'lar bar bolatug'i'n bolsa, onda bo'lekshede ishki

erkinlik da'rejeleri boladi' dep esaplaw kerek. Bul ishki erkinlik da'rejeleri spin tu'rinde ko'rinedi. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinde tek bir tolqi'n funkciyasi' boladi' degen so'z usi' ten'lemenin' ja'rdeminde ta'riyiplenetug'i'n bo'lekshenin' ishki erkinlik da'rejelerinin' joq ekenligin, yag'ni'y bo'lekshenin' spininin' joq ekenligin an'latadi'. Demek Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' ja'rdeminde ta'riyiplenetug'i'n bo'lekshenin' spini nolge ten' degen juwmaqqa kelemiz. Bunday bo'lekshelerdi skalyar bo'leksheler dep ataydi' (mi'sali' 2012-ji'li' U'lken adronli'q kollayderde ashi'lg'an Xiggs bo'lekshesi). Elektronni'n' spini $1/2$ ge ten' bolg'anli'qtan (a'l'bette, $\hbar$ birliklerinde) biz qarap ati'rg'an ten'lemeni elektrondi' ta'riyiplew ushi'n jaramaydi' dep esaplawi'mi'z kerek. Al spini nolge ten' bolg'an bo'lekshelerdi ta'riyiplew ushi'n (Xiggs bo'leksheleri, mezonlar) Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesin paydalani'w mu'mkin dep juwmaq shi'g'arami'z.

Paragrafti'n' aqi'ri'nda Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi menen oni'n' sheshimlerinin' fizikali'q ma'nisin teren'irek tu'sindiriw ushi'n qosi'msha mag'li'wmatlardi' beremiz.

Shredinger ten'lemesinin' uli'wmali'q sheshiminin' tegis tolqi'nlardi'n' superpoziciyasi' ekenligi ma'lim:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} C(\mathbf{p}) e^{-iEt + i\mathbf{p}\mathbf{r}}.$$

To'mendegidey ekvivalentlik ori'nli' boladi':

tolqi'n funkciyasi' de Broyl		Tolqi'n funkciyasi' Shredingerdin'
tolqi'nlari'ni'n' superpoziciyasi'	$\Leftrightarrow$	erkin ten'lemesin qanaatlandi'radi'
boli'p tabi'ladi'		

Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' uli'wmali'q sheshimi bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [C_1(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon t + i\mathbf{p}\mathbf{r}} + C_2(\mathbf{p}) e^{i\epsilon t - i\mathbf{p}\mathbf{r}}].$$

Biz bul jerde Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' o'zine ta'n o'zgesheligi teris ma'nisli jiyilikli modalardi'n' bar ekenliginde. Bunday modalar on' ma'nisli energiyag'a iye bo'lekshelerdin' de Broyl tolqi'nlari'na sa'ykes kelmeydi. Joqari'da ayti'li'p o'tilgenindey, tariyxiy jaqtan waqi'ttan bunday "duri's emes" g'a'rezliliknin' ori'n ali'wi' teoriyani'n' kemshiligi dep esapladi'. Biraq keyinirek bunday sheshimlerden' ori'n ali'wi' "antibo'lekshe" tu'siniginin' payda boli'wi'na ta'biyiy

tu'rde ali'p keletug'i'nli'g'i' belgili boldi'.

2-2 §. Dirak ten'lemesi

1928-ji'li' Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesindegi itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' teris ma'nisi menen baylani'sli' bolg'an qi'yi'nshi'li'qlardi' saplasti'ri'wg'a umti'li'wdi'n' bari'si'nda Dirak relyativistlik ten'lemeni ashti'. Bul ten'leme sali'sti'rmali'k teoriyasi'n qanaatlandi'ratug'i'n elektronni'n' qozg'ali'si'ni'n' kvantli'q tenlemesi boli'p tabi'ladi' ha'm ol ha'zirgi waqi'tlari' Dirak ten'lemesi dep ataladi'. Ko'p ji'llar dawami'nda fizikler Dirak ten'lemesin massag'a iye bo'leksheler ushi'n birden-bir duri's relyativistlik ten'leme dep esaplap keldi. Tek 1934-ji'li' Pauli menen Vayskopf Kleyn-Gordan ten'lemesin maydanni'n' ten'lemesi si'pati'nda interpretaciyalag'annan keyin g'ana ken' tarqalg'an pikir biykarlandi'. Biraq ha'tte usi' ku'nleri de Dirak ten'lemesi ayri'qsha ori'ndi' iyeleydi. Ol spini $1/2$ ge ten' bolg'an bo'lekshelerdi ta'riyipleydi. Al elektronlar menen protonlardi'n' spini $1/2$ ge ten'. Biraq bizge belgili bolg'an ko'p sanli' bo'leksheler (neytronlar xa'm basqalar da) $1/2$ ge ten' spinge iye. 1047-ji'li' ashi'lg'an π -mezonlar (pionlar) shekli massag'a iye, al spini nolge ten' bo'leksheler boli'p tabi'ladi'.

Dirakti' oni'n' ten'lemesine ali'p kelgen ideyalardi'n' ma'nisi to'mendegilerden ibarat. Teris itimalli'qlardi'n' payda boli'wi'n saplasti'ri'w ushi'n ρ ti'g'i'zli'q ushi'n jazi'lg'an an'latpada waqi't boyi'nsha tuwi'ndi'ni'n' bolmawi' kerek. Sonli'qtan tolqi'n ten'lemesinde waqi't boyi'nsha ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'dan joqari' ta'rtpili tuwi'ndi'ni'n' bolmawi' kerek. Usi'ni'n' menen bir qatarda relyativistlik invariantli'q barli'q ken'isliklik ha'm waqi'tli'q koordinatalar boyi'nsha toli'q simmetriyani'n' bar boli'wi'n talap etedi. Sonli'qtan ten'lemege koordinatalar boyi'nsha ali'ng'an tek birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lardi'n' qatnasi'wi' sha'rt. Bul talaplardi'n' barli'g'i' da Dirakti'n' tolqi'n funkciyasi'ni'n' barli'q to'rt koordinata boyi'nsha (u'shewi ken'isliklik, birewi waqi't) birinshi ta'rtpili ten'lemeni qanaatlandi'ri'wi'ni'n' kerek ekenligin bildiredi. Ten'lemenin' si'zi'qli' ekenligi kvantli'q mexanikani'n' superpoziciya principin qanaatlandi'ri'w ushi'n za'ru'rli. En' aqi'ri'nda, eger biz Ψ tolqi'n funkciyasi' massasi' m bolg'an bo'leksheni ta'riyiplewin talap etsek, onda usi' funkciyani'n'

$$\left(\nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(x) = 0$$

tu'rindagi ten'lemege bag'i'ni'wi'ni'n' kerek ekenligin an'g'ari'wi'mi'z kerek. Sebebi bul ten'leme erkin bo'lekshenin' energiyasi' menen impuls arasi'nda $p^2 = m^2 c^2$ tu'rindagi baylani'sti'n' bar ekenligin bildiredi. Al bul jag'day sa'ykeslik principine muvapi'q klassikali'q sali'sti'rmali'q teoriyasi'na ali'p keledi.

Tap usi'nday jag'day elektrodinamikada da ori'n aladi'. Bul jerde Maksvell ten'lemeleri maydanni'n' kernewliliklerin baylani'sti'ratug'i'n birinshi ta'rtpili ten'lemeler boli'p tabi'ladi'. Usi'ni'n' menen birge elektr ha'm magnit maydanlari'ni'n' kernewliliklerinin' ha'r bir qurawshi'si' tolqi'n ten'lemesine bag'i'nadi'. Elektrodinamikadag'i' tolqi'n ten'lemesi massali'q ag'zag'a iye emes ekinshi ta'rtpili ten'leme boli'p tabi'ladi'. Bul jag'day fotonni'n' massasi'ni'n' nolge ten' ekenliginen derek beredi.

Bo'lekshelerdin' teris ma'nisli ti'g'i'zli'g'i'nan quti'li'wdi'n' a'hmiyetli joli' ti'g'i'zli'q ushi'n jazi'lg'an an'latpadag'i' waqi't boyi'nsha ali'ng'an tuwi'ndi'ni' joq etiwden ibarat. Buni' a'melge asi'ri'w tolqi'n ten'lemesi waqi't boyi'nsha birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'g'a iye boli'wi' sha'rt. Al sali'sti'rmali'q teoriyasi'na sa'ykes relyativistlik invariantli'qti' saqlaw ushi'n koordinatalar boyi'nsha ali'ng'an tuwi'ndi'lar da ten'lemege birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lar tu'rinde kiriwi kerek. Ekinshi ta'repten kvantli'q mexanikasi'n' en' tiykarg'i' principi bolg'an superpoziciya principi ten'lemenin' si'zi'qli' boli'wi'n talap etedi. Na'tiyjede biz izler ati'rg'an ten'leme waqi't boyi'nsha da, koordinatalar boyi'nsha da birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'larg'a iye si'zi'qli' ten'leme boli'wi' kerek.

Joqari'da Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesin keltirip shi'g'arg'anda paydalani'lg'an ta'biyiy usi'llardan paydalanami'z. Toli'q energiya menen impuls arasi'ndag'i' relyativistlik (2.3)-qatnasti' bi'layi'nsha ko'shirip jazami'z

$$E = \pm c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (3.1)$$

Eger bul ten'lemeden (1.8)-formulalar boyi'nsha operatorli'q ten'liklarga o'tetug'i'n bolsaq, onda ali'natug'i'n ten'leme waqi't boyi'nsha birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'g'a iye, al koordinatalar boyi'nsha ekinshi ta'rtpili tuwi'ndi'g'a iye boladi' (sebebi tuwi'ndi'lar operatori' kvadrat tu'birdin' ishinde tur). Bunday qi'yi'nshi'li'qtan quti'li'w ushi'n (3.1)-an'latpani'n' on' ta'repinen tu'bir shi'g'ari'w

ushin "si'zi'qli" an'latpag'a aylandi'ri'wg'a ti'ri'si'w kerek. Usi'nday maqsette

$$p_0 = mc, \quad p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z \quad (3.2)$$

tu'rindagi belgilewlerdi qabi'l etemiz ha'm formal tu'rde

$$E = c \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{\mu} p_{\mu} \quad (3.3)$$

tu'rindagi an'latpani' jazami'z. Bul an'latpadag'i' α_{μ} shamalari' ele ani'qlanbag'an. Bul shamalardi' (3.3)-an'latpani'n' eki ta'repin de kvadratqa ko'tergende energiya menen impuls arasi'ndag'i' (3.1) tu'rdegi relyativistlik formula ali'natug'i'nday etip saylap alami'z. (3.3)-an'latpani' kvadratqa ko'tergende (3.1)-an'latpani'n' ali'ni'wi'ni'n' kerek ekenligi haqqi'ndag'i' talap α_{μ} shamalari'ni'n' qanday boli'wi'ni'n' kerek ekenligin ko'rsetedi. (3.3)-an'latpani'n' eki ta'repin kvadratqa ko'terip

$$E^2 = c^2 \sum_{\mu'} \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \alpha_{\mu'} p_{\mu} p_{\mu'} = c^2 \sum_{\mu, \mu'} (\alpha_{\mu} \alpha_{\mu'} + \mu_{\mu'} \alpha_{\mu}) p_{\mu} p_{\mu'} \quad (3.4)$$

an'latpasi'na iye bolami'z. Endi (3.4)-an'latpani'n' on' bo'limi (2.3)-an'lapani'n' on' ta'repinen sa'ykes keliwi ushi'n qolayli' boli'wi' ushi'n (2.3)-qatnasti' bi'layi'nsha ko'shirip jazami'z:

$$E^2 = c^2 (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \quad (3.5)$$

Bunday jag'dayda α_{μ} shamalari'ni'n' mi'naday qatnaslardi' qanaatlandi'ri'wi'ni'n' kerek ekenligin da'lillewge boladi':

$$\alpha_{\mu} \alpha_{\mu'} + \alpha_{\mu} \alpha_{\mu} = 2\delta_{\mu\mu'}. \quad (3.6)$$

Bul ten'lik o'z gezeginde μ ha'm μ' shamalari'ni'n' ha'r qi'yli' ma'nislerinde α_{μ} ha'm α_{μ} shamalari'ni'n' antikommutaciyanatug'i'nli'g'i'n bildiredi. YAg'ni'y

$$\alpha_{\mu} \alpha_{\mu'} = -\alpha_{\mu} \alpha_{\mu}, \quad \mu \neq \mu' \quad (3.7)$$

qatnasi' ori'nlanadi' degen so'z. Al α_{μ} shamalari'ni'n' ha'r birinin' kvadrati' birge ten' boli'wi' kerek, yag'ni'y

$$\alpha_{\mu}^2 = 1. \quad (3.8)$$

Uli'wma tu'rde aytqanda (3.3)-tu'rindagi an'latpag'a su'yengende α_{μ} shamasi'ni'n' ani'q tu'rine iye boli'w sha'rt emes. Tek usi'nday shamalar qanaatlandi'ratug'i'n (3.6) tu'rindagi an'latpag'a iye boli'w jetkilikli. Biraq α_{μ} shamalari'ni'n' tu'rin biliw bir qansha ayqi'n ma'selelerdi sheshkende paydali'.

Biz (3.8)-qatnas penen ko'rsetilgende qas'iyetke Paulidin' eki qatarli'

matricolari'ni'n' da iye ekenligin atap o'temiz:

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma'_1 \sigma'_1 &= \alpha_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Dirak α_μ shamasi' ushi'n to'mendegidey to'rt qatarli' matricalar'di' ali'w'di' usi'ndi' (Dirakti'n' o'zinin' belgilewlerinde):

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\end{aligned}\quad (3.9)$$

A'dette besinshi Dirak matricasi' dep atalatug'i'n matricani' da qollanadi'. Oni' bi'layi'nsha tabadi':

$$\alpha_5 = i\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.9)-matricalar'di' ko'beytiw ha'm qosi'w arqali' ha'm bul qatnasti'n' on' bo'liminde birlik matricani'n' turg'anli'g'i'n ko'rip olardi'n' (3.6)-qatnasti' qanaatlandi'ratug'i'nli'g'i'n an'sat tekserip ko'riwge boladi' (bul proceduralardi' Mathematica 10 universalli'q programmalaw tilinde an'sat tekserip ko'riwge boladi').

Mi'sali' α_1 ushi' biz to'mendegilerge iye bolami'z:

$$\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Bul haqi'yqati'nda da

$$\alpha_1^2 = I$$

ten'liginin' ori'nlanatug'i'nli'g'i'n da'lilleydi. Bul an'latpada I arqali' birlik to'rt qatarli' matrica belgilengen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Soni'n' menen birge Mathematica 10 tilinde

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ten'liginin' ori'nlanatug'i'nli'g'i'n an'sat tekserip ko'riwge boladi'.

α_2 ha'm α_3 matricolari' ushi'n qanday qatnaslardi'n' ori'n alatug'i'nli'g'i'n an'sat tekserip ko'riwge boladi'.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demek

$$\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0$$

ten'ligi ori'nli' boladi' eken. Bul an'latpada 0 si'pati'nda nollik matrica tu'siniledi

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

α_μ matricolari'ni'n' ermitlik matricalar ekenligin tekserip ko'riw qi'yi'n emes³.

A'sirese Mathematica 10 programmalaw tilinde matricalar u'stinde ko'p sanli' matematikali'q operaciylardi' islew mu'mkin.

Mi'sallar keltiremiz:

³ Biz ermitlik matricalary'n' ayi'ri'm qa'siyetlerin atap o'temiz:

1. Elementleri haqi'yqi'y bolg'an ermitlik matrica simmetriyali' matrica boli'p tabi'ladi' (yag'ni'y $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ten'ligi ori'nli' boladi').

2. $(A^*)^* = A$ ten'ligi ori'nli' boladi'.

3. Eger $A + iB$ ten'ligi ori'nli' bolsa (A menen B arqali' haqi'yqi'y sanlar belgilengen), onda $A' = A$ ha'm $B = -B$ ten'likleri ori'nli' boladi'.

Dirak matricolari'n mi'na an'latpalardi'n' ja'rdeminde jazami'z:

```
a0=diracMatrix[0]={1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,-1,0},{0,0,0,1}}//TableForm;
a1=diracMatrix[1]={0,0,0,1},{0,0,1,0},{0,1,0,0},{1,0,0,0}}//TableForm;
a2= diracMatrix[2]={0,0,0,-1},{0,0,1,0},{0,-1,0,0},{1,0,0,0}}//TableForm;
a3=diracMatrix[3]={0,0,1,0},{0,0,0,-1},{1,0,0,0},{0,-1,0,0}}//TableForm;
```

```
a0=diracMatrix[0]={1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,-1,0},{0,0,0,1}};
a1=diracMatrix[1]={0,0,0,1},{0,0,1,0},{0,1,0,0},{1,0,0,0}};
a2= diracMatrix[2]={0,0,0,-1},{0,0,1,0},{0,-1,0,0},{1,0,0,0}};
a3=diracMatrix[3]={0,0,1,0},{0,0,0,-1},{1,0,0,0},{0,-1,0,0}};
```

Bul an'latpalarda a0, a1, a2 ha'm a3 arqali' matricalar belgilengen.

Besinshi matricani' esaplaw ia0.a1.a2.a3//MatrixForm an'latpasi'ni'n' ja'rdeminde a'melge asi'ri'ladi' ha'm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

na'tiyjesi ali'nadi'.

Biz qarap ati'rg'an jag'dayda olar ushi'n $\alpha_\mu^+ = \alpha_\mu$ ten'ligi ori'nli' ha'm usi'nday shamalar ushi'n ermitlik tu'yinleslik operaciyasi' matricalardi'n' elementlerinin' bas diagonal'ga sali'sti'rg'anda simmetriyalii' bolg'an basqa ori'nlarg'a ko'shiriwin bildiredi.

Mi'sali'

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}.$$

Dirak matricolari'n bi'layi'nsha da jazadi':

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$$\gamma = -i\beta\alpha = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bul an'latpalardag'i' $\sigma, 1, 0$ shamalari' Paulidin' eki qatarli', birlik ha'm nollik matricalardi' an'latadi'.

Endi Dirak matricolari'n Pauli matricolari'ni'n' ja'rdeminde qalay esaplanatug'i'nli'g'i'n ko'rsetemiz. Ko'p sanli' a'debiyatlarda Dirak matricolari'n Pauli matricolari' arqali'

$$\alpha_x = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tu'rinde jazadi'. Bul formulalarda

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli matricialari' boli'p tabi'ladi'. Endi usi' 2x2 tu'rindagi $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ matricialari'n $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$ tu'rindagi matricialarg'a qoyami'z ha'm

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

tu'rindagi matricialardi' alami'z. bul matricialardi' 4x4 tu'rindagi matricialarg'a aylandi'ri'w ushi'n 0 din' (noldin') $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ turinde jazi'latug'i'nli'g'i'n eske alami'z ha'm

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tu'rindagi an'latpag'a iye bolami'z ha'm Dirak matricialari'n Pauli matricialari' arqali' ali'wg'a bolatug'i'nli'g'i'na isenemiz.

(3.3)-an'latpani' esapqa alsaq erkin bo'lekshe ushi'n Dirak ten'lemesin bi'layi'nsha jazami'z:

$$\left[\hat{E} - c \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{\mu} \hat{p}_{\mu} \right] \Psi = 0. \quad (3.13)$$

Dirak ten'lemesin Shredinger ten'lemesi si'yaqli' bi'layi'nsha da jazi'w mu'mkin [32]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{m} \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \alpha_4 mc^2 \alpha_1 \psi.$$

Bul ten'lemeni qi'sqasha etip

$$i\hbar \alpha_{\mu} \partial_{\mu} \psi - mc \psi = 0$$

tu'rinde de jazi'w mu'mkin. Bul an'latpada $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ belgilewi qabi'l etilgen.

Joqari'da ko'rgenimizdey, α_{μ} shamalari' to'rt qatarli' kvadrat matrica boli'p

tabi'ladi'. Sonli'qtan aqi'rg'i' (3.13)-formuladag'i' Ψ tolqi'n funkciyasi' to'rt qurawshi'g'a iye boli'wi' kerek ha'm oni' bi'layi'nsha bag'ana tu'rinde jazami'z

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Dirak ten'lemesin qanaatlandi'ri'wshi' tolqi'n funkciyalari'n bispinorlar dep ataydi'.

Biz relyativistlik emes teoriyada elektronni'n' eki qurawshi'g'a iye spinor menen ta'riyiplenetug'i'nli'g'i'n eske tu'sirip o'temiz. Bul spinor aylandi'ri'wlarda shamasi' $\frac{1}{2}$ ge ten' impuls momenti si'yaqli' tu'rlenedi. Sonli'qtan relyativistlik teoriyada elektron bir neshe qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde ta'riyiplenedi ha'm bul tolqi'n funkciyasi' Lorenc tu'rlendiriwlerinde belgili bir tu'rde tu'rlenedi.

Tenzorlar si'yaqli' spinorlar bazi' bir ken'isliktegi geometriyalig' ob'ektler boli'p, ken'isliktin' koordinatalari'n tu'rlendirgende olardi'n' qurawshi'lari' si'zi'qli' tu'rleniwge ushi'raydi'. Biraq qa'legen ko'sherdin' do'gereginde toli'q aylandi'rg'anda spinorlar belgisin o'zgertedi (tenzorlar bunday qa'siyetke iye emes). Sonli'qtan spinorlardi'n' belgisin barli'q waqi'tta i'qti'yarli' tu'rde saylap ali'wg'a boladi'.

Spinorlar qa'legen o'lshemge iye bolg'an evklidlik ken'islikte ori'n aladi'. Olar perpendikulyarli'q tu'sinigi ori'nlanatug'i'n basqa da ken'isliklerde (mi'sali' Minkovski'din' fizikali'q ken'isliginde) ori'n ali'wi' mu'mkin. U'sh o'lshemli evkilidlik ken'isliktegi qosi'msha o'lshem waqi't spinorlar teoriyasi'nda u'lken a'hmiyetke iye bolmaydi'.

Gilbert ken'isligi o'lshemlerinin' sani' sheksiz u'lken bolg'an a'piwayi' evklidlik ken'islik boli'p tabi'ladi'. Bul ken'islikte vektorlardi'n' koordinatalari'na ji'yni'qli'li'qqa baylani'sli' bolg'an bazi' bir sha'rtler qoyi'ladi'.

Tolqi'n funkciyalari' bispinorlar bolg'an jag'dayda gamiltonian da to'rt qatarli' kvadrat matrica boli'p tabi'ladi' ha'm oni' bi'layi'nsha jazami'z:

$$\hat{H} = c(\alpha \hat{p}) + mc\beta.$$

Bul an'latpada α menen β arqali' Dirak matricolari' dep atalatug'i'n to'rt qatarli' matricalar belgilengen. Joqari'da ayti'li'p o'tilgenindey α matricasi'ni'n' juwan ha'rip penen jazi'li'wi' oni'n' u'sh matricadan turatug'i'nli'g'i'n bildiredi.

Demek (3.13)-Dirak ten'lemesi Ψ tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt qurawshi'si'na

qarata jazi'lg'an si'zi'qli' ten'lemelerdin' sistemasi' boli'p tabi'ladi' eken. α_μ matricasi'na qaytadan ko'beytip bul sistemani' bi'layi'nsha ko'shirip jaza alami'z:

$$\begin{aligned} (\hat{E} - m_0 c^2) \Psi_1 - c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_4 - c \hat{p}_z \Psi_1 &= 0, \\ (\hat{E} - m_0 c^2) \Psi_2 - c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) \Psi_3 + c \hat{p}_z \Psi_4 &= 0, \\ (\hat{E} - m_0 c^2) \Psi_3 - c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_2 - c \hat{p}_z \Psi_1 &= 0, \\ (\hat{E} - m_0 c^2) \Psi_4 - c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) \Psi_1 + c \hat{p}_z \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.13)-Dirak ten'lemesin basqasha tu'rde de jazi'w mu'mkin. Koordinatalar ko'sherlerine tu'sirilgen qurawshi'lari' α_1, α_2 ha'm α_3 bolg'an α vektorli'q matricasi'n kirgizemiz [demek $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ an'latpasi'n jaza alami'z degen so'z] Bunday jag'dayda

$$[\hat{E} - c(\alpha, \hat{p}) - m c^2 \varrho_3] \Psi = 0 \quad (3.16)$$

ten'lemesin jaza alami'z. Bul ten'lemede α_0 matricasi' ϱ_3 (a'dette $\varrho_3 = \alpha_0$ belgilewin qabi'l etedi). Endi $\hat{E}$ ha'm $\hat{p}$ operatorali' ushi'n ani'q tu'rdegi an'latpalardi' jazi'p to'mendegidey ten'lemege iye bolami'z:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{c\hbar}{i} (\alpha, \nabla) \Psi - m c^2 \varrho_3 \Psi = 0. \quad (3.17)$$

Ermitlik tu'yinles bolg'an Ψ^* operatori' endi bi'layi'nsha bir qatar tu'rinde jazi'ladi':

$$\Psi^* = (\Psi_1^* \Psi_2^* \Psi_3^* \Psi_4^*). \quad (3.18)$$

Matricalardi' ko'beytiw qag'i'ydalari'n ori'nlaw ushi'n tu'yinles bolg'an Ψ^+ tolqi'n funkciyasi' to'rt qatarli' shep ta'repine jazi'ladi'. Soni'n' menen birge barli'q jag'daylarda da kompleksli tu'yinles shamalg'a o'tiw kerek. Sonli'qtan (3.17)-ten'lemenini tu'yinles Ψ^+ funkciyasi'na karata bi'layi'nsha jazadi':

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi^+ = \frac{c\hbar}{i} (\nabla \Psi^+, \alpha) - m c^2 \Psi^+ \varrho_3 = 0. \quad (3.19)$$

Bul ten'lemenini qurawshi'lar boyi'nsha jazsaq ha'm kompleksli tu'yinles shamalg'a o'tsek, onda (3.15)-sistema menen birdey bolg'an ten'lemeler sistemasi'na iye bolami'z.

2-3 §. Toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i'

Toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n an'latpalardi' ali'w ushi'n (3.19)-ten'lemenin' on' ta'repin $\frac{ie}{\hbar}\Psi$ ko'beymesine ha'm (3.15)-ten'lemenin' shep ta'repin $\frac{ie}{\hbar}\Psi^{(+)}$ ko'beymesine ko'beytemiz ha'm birinshi ten'lemeden ekinshisin alami'z. Na'tiyjeler to'mendegidey izbe-izlikte ali'nadi':

(3.15)-ten'lemeden mi'nalarg'a iye bolami'z:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{ie}{\hbar}\Psi^{(+)} - \frac{c\hbar}{i}(\alpha, \nabla)\Psi\frac{ie}{\hbar}\Psi^{(+)} - mc^2\varrho_3\Psi\frac{ie}{\hbar}\Psi^{(+)} &= 0. \\ \frac{ie}{\hbar}\Psi\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+ - \frac{ie}{\hbar}\Psi\frac{c\hbar}{i}(\nabla\Psi^+, \alpha) + \frac{ie}{\hbar}\Psi mc^2\Psi^+\varrho_3 &= 0. \\ e\frac{\partial}{\partial t}[\Psi\Psi^{(+)} - \Psi^{(+)}\Psi] - ec[(\alpha, \nabla)\Psi\Psi^{(+)} - (\nabla\Psi^+, \alpha)\Psi] &= 0 \end{aligned}$$

A'piwayi'lasti'rg'annan keyin

$$\frac{\partial}{\partial t}(e\Psi^{(+)}\Psi) + \text{div}(ec\Psi^{(+)}, \alpha\Psi) = 0 \quad (3.20)$$

an'latpasi'n alami'z ha'm ali'ng'an an'latpani'n' elektrodinamikadan belgili bolg'an u'zliksizlik ten'lemesinin' tu'rindey tu'rge iye bolatug'i'nli'g'i'n ko'remiz. Usi'ni'n' na'tiyjesinde zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' menen toqti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n an'latpalardi'n' to'mendegidey tu'rge iye bolatug'i'nli'g'i'n ko'remiz:

$$\rho = e\Psi^+\Psi, \quad j = ec\Psi^+\alpha\Psi. \quad (3.21)$$

Si'rtqi' maydan bolg'an jag'daylarda da ali'ng'an an'latpalardi'n' tu'rinin' saqlanatug'i'nli'g'i'n an'sat tekserip ko'riwge boladi'. Bunday jag'daylarda (3.15)-ha'm (3.17)-an'latpalardi'n' shep ta'replerine sa'ykes ag'za payda boladi'. Olar tu'yinles funkciyag'a ko'beytilgennen ha'm bir ten'lemenin' ekinshisinin ali'wdi'n' saldari'nan ji'yi'sadi'.

Zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n jazi'lg'an (3.21)-an'latpadan bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i' ushi'n mi'naday an'latpa ali'nadi':

$$\begin{aligned} \rho_m = \frac{\rho}{e} = \Psi^+\Psi &= (\Psi_1^*\Psi_2^*\Psi_3^*\Psi_4^*) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \\ &= \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_3^*\Psi_3 + \Psi_4^*\Psi_4. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bul an'latpani'n' ja'rdeminde esaplang'an bo'lekshelerdin' ti'g'i'zli'g'i' barli'q waqi'tta nolden u'lken boladi'. Usi'ni'n' saldari'nan Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesine

ta'n bolg'an teris ma'nisli energiyag'a baylani'sli' bolg'an qi'yi'nshi'li'q saplasti'ri'ladi'.

2-4 §. Bo'lekshenin' spinin ta'riyipleytug'i'n ag'zani'n' payda boli'wi'

Dirak ten'lemesinin' jardeminde ta'riyiplenetug'i'n bo'lekshelerdin' spininin' qanday shamag'a ten' bolatug'i'nli'g'i'n ani'qlaw ushi'n orayli'q simmetriyag'a iye maydanda qozg'alatug'i'n bo'leksheni qaraymi'z. Bunday jag'dayda potentsial energiya tek orayg'a shekemgi qashi'qli'q r den g'a'rezli boladi', yag'ni'y $U(r)$ funkciyasi' ori'n aladi'. $U(r)$ tu'rine iye potentsial maydanda qozg'alatug'i'n bo'lekshe ushi'n jazi'lg'an Dirak ten'lemesi (3.16)-ten'lemenin' tu'rindey tu'rge iye boladi', tek g'ana og'an potentsial energiyani' qosi'w kerek boladi':

$$[\hat{E} - c(\boldsymbol{\alpha}, \hat{\mathbf{p}}) - mc^2\varrho_3 - U]\Psi = 0. \quad (3.23)$$

Orayg'a qarata simmetriyali' maydanda qozg'alatug'i'n bo'lekshenin' gamiltoniani' bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\hat{H} = c(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}}) + mc^2\varrho_3 + U(r). \quad (3.24)$$

Eger qanday da bir shamani'n' operatori' gamiltonian menen kommutatsiyalanatug'i'n bolsa, onda bunday shama qozg'ali's integrali' boli'p tabi'ladi'. Usi' ani'qlamani' na'zerde tuti'p bo'lekshenin' gamiltoniani' (3.24) tu'rine iye bolg'an jag'daydag'i' impuls momentin qaraymi'z.

$$\hat{\mathbf{M}}_l = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]. \quad (3.25)$$

$\hat{M}_{lz}$ operatori'ni'n' gamiltonian menen kommutatori'n esaplaymi'z. Na'tiyjede mi'nag'an iye bolami'z:

$$\hat{H}\hat{M}_{lz} - \hat{M}_{lz}\hat{H} = \frac{c\hbar}{i}(\alpha_1 p_y - \alpha_2 p_x) \neq 0. \quad (3.26)$$

Demek orbitali'q moment $\hat{\mathbf{M}}$ menen gamiltonianni'n' kommutatori' nolge ten' emes eken. Bul bo'lekshenin' Dirak ten'lemesinin' ja'rdeminde ta'riyiplenetug'i'n orbitali'q momentinin' saqlanbaytug'i'nli'g'i'n bildiredi. Demek bul bo'lekshe ishki momentke (yag'ni'y spinge) iye boladi' degen juwmaq kelip shi'g'adi' ha'm orayli'q maydanda orbitali'q moment penen spinlik momentin' qosi'ndi'si'nan turatug'i'n bo'lekshenin' toli'q momenti saqlanadi' eken.

(3.24)-gamiltonian menen

$$\hat{M}_j = \hat{M}_l + \frac{1}{2} \hbar \sigma \quad (3.27)$$

operatori'ni'n' kommutაციyalanatug'i'nli'g'i'n an'sat tekserip ko'riwge boladi'. Bul an'latpada $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ arqali' vektorli'q to'rt qatarli' matrica belgilengen. Oni'n' qurawshi'lari' to'mendegidey tu'rge iye boladi':

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usi' jag'dayg'a baylani'sli'

$$\hat{M}_s = \frac{1}{2} \hbar \sigma \quad (3.29)$$

operatori' spin operatori' boli'p tabi'ladi'. Spin operatori'ni'n' z qurawshi'si'ni'n' menshikli ma'nisi $1/2$ ge ten':

$$\hat{M}_{sz} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ -\Psi_2 \\ \Psi_3 \\ -\Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Bunnan Dirak ten'lemesinin' ja'rdeminde ta'riyiplenetug'i'n bo'lekshenin' spini $\frac{1}{2}$ ge ten' boladi' eken dep juwmaq shi'g'arami'z. Spinin' toli'q ma'nisinin' kvadrati' bi'layi'nsha esaplanadi':

$$M_s^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = s(s+1)\hbar^2, \quad s = \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

Sonli'qtan Dirak ten'lemesin elektrondi' ta'riyiplew ushi'n, soni'n' menen birge yari'm pu'tin spinge iye proton menen neytrondi' da ta'riyiplew ushi'n paydalani'wg'a boladi'.

Relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' esaplaw qag'i'ydalari'ni'n' barli'g'i' da Dirak ten'lemesinin' to'rt qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyalari' ushi'n da ori'nlanadi'. Tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt qurawshi'si'ni'n' bar ekenligi matematikali'q jaqtan esaplawlardag'i' usi' qurawshi'lar boyi'nsha qosi'msha summalawda ko'rinedi. Mi'sali' tolqi'n funkciyasi'ni'n' normirovka sha'rti bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\int \Psi^+ \Psi d\tau = 1. \quad (3.32)$$

Eger bul an'latpani' toli'q jazatug'i'n bolsaq, onda

$$\int (\Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4) d\tau = 1 \quad (3.33)$$

an'latpasi'na iye bolami'z, yag'ni'y tolqi'n funkciyasi'ni'n' qurawshi'lari'ni'n' indeksleri boyi'nsha summaw qosi'ladi'.

Mi'sal retinde spinnin' z-qurawshi'si'ni'n' ortasha ma'nisin esaplaymi'z. Ortasha ma'nistin' ani'qlamasi' boyi'nsha mi'nag'an iye bolami'z:

$$\begin{aligned} \langle M_{sz} \rangle &= \int \Psi^+ \hat{M}_{sz} \Psi d\tau = \frac{\hbar}{2} \int \Psi^+ \sigma_z \Psi d\tau = \\ &= \frac{\hbar}{2} \int (\Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4) d\tau. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Bul an'latpada (3.28)-an'latpadag'i' σ_z tin' ma'nisi paydalani'lg'an. Esaplawda tolqi'n funkciyasi'ni'n' qurawshi'lari' boyi'nsha summaw ja'ne payda boldi'. Solay etip tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt qurawshi'g'a iye boli'wi' esaplawlar qag'i'ydalari'na jan'a o'zgerislerdi kirgizbeydi. Biraq texnikali'q ko'z-qarastan esaplawlar bir qansha quramalasadi'.

(3.30)- ha'm (3.34)-an'latpalardan Ψ_1 menen Ψ_3 tolqi'n funkciyalari'ni'n' spini z ko'sherinin' on' ta'repine bag'i'tlang'an elektronni'n' hali'n ta'riyipleytug'i'n ekenligin ko'riwge boladi'. Ψ_2 menen Ψ_4 qurawshi'lari' bolsa spini z ko'sherinin' qarama-qarsi' ta'repine qaray bag'i'tlang'an elektronni'n' hali'n ta'riyipleydi. Uli'wma aytqanda hallardi'n' superpoziciyasi' ori'n ali'p, tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt qurawshi'lari'ni'n' barli'g'i' da nolge ten' bolmawi' mu'mkin.

Dirak ten'lemesi relyativistlik invariant (2.2)- yamasa (3.1)- an'latpalardi'n' tiykari'nda ali'ng'an bolg'anli'qtan ten'lemenin' o'zin de relyativistlik invariant dep esaplaw ta'biyiy jag'day boli'p tabi'ladi'. Bul tasti'yi'qlawdi'n' duri's ekenligin qatan' tu'rde tasti'yi'qlawg'a boladi'. Dirak ten'lemelerinin' Lorenc tu'rlendiriwlerine qarata invariantli'g'i'nan tolqi'n funkciyalari'n tu'rlendiriwdin' qag'i'ydalari' kelip shi'g'adi'. Bunday jag'dayda tolqi'n funkciyalari'ni'n' qurawshi'lari' biri ekinshisi arqali' tu'rlnetug'i'n boli'p shi'g'adi'.

2-5 §. Erkin elektronni'n' tolqi'n funkciyasi'

To'rt qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi' si'pati'nda erkin elektronni'n' tolqi'n funkciyasi'n izertleyimiz. Tolqi'n funkciyasi'

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

tu'rine iye boladi'. Elektrondi' z ko'sherinin' bag'i'ti'nda qozg'aladi' dep esaplaymi'z ha'm sonli'qtan

$$p_x = p_y = 0, p_z \neq 0 \quad (4.2)$$

ten'liklerine iye bolami'z.

Biz erkin bo'lekshenin' tolqi'n funkciyasi'ni'n' u'sh o'lsheмли ken'islikte (yag'ni'y relyativistlik emes kvantli'q mexanikada)

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})} \quad (4.3)$$

tu'rinde jazi'latug'i'nli'g'i'n eske tu'siremiz. Bul an'latpada

$$\mathbf{pr} = p_x x + p_y y + p_z z$$

ekenligin esapqa alami'z. Usi' formulalarg'a sa'ykes relyativistlik emes jag'daylar ushi'n tolqi'n funkciyasi'ni'n' ha'r bir qurawshi'si' ushi'n sheshimdi to'mendegidey tegis tolqi'n tu'rinde izleyimiz:

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) = Ab_i e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_z z)}. \quad (4.4)$$

Bul an'latpada A arqali' barli'q qurawshi'lar ushi'n uli'wmali'q bolg'an normirovkali'q turaqli' belgilengen. Eger L uzi'nli'g'i'na normirovka islense, onda $A = L^{-3/2}$ shamasi'n alami'z. b_i koeficientleri bolsa tolqi'n funkciyalari'ni'n' Dirak ten'lemesin qanaatlandi'ri'wi' talabi'nan kelip shi'g'adi':

$$\Psi^+ \Psi = A^* A (b_1^* b_1 + b_2^* b_2 + b_3^* b_3 + b_4^* b_4) \quad (4.5)$$

ten'ligi b_i koeficientlerinin' to'mendegidey normirovka sha'rtin qanaatlandi'ri'wi'ni'n' kerek ekenligin ko'rsetedi:

$$b_1^* b_1 + b_2^* b_2 + b_3^* b_3 + b_4^* b_4 = 1. \quad (4.6)$$

(4.3)-tolqi'nlardi' (3.15)-ten'lemeler sistemasi'na qoyi'p ha'm uli'wmali'q ko'beytiwshi bolg'an $Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})}$ ko'beytiwshisine bo'lip b_i koeficientlerin ani'qlaw ushi'n to'mendegidey ten'lemeler sistemasi'na iye bolami'z:

$$\begin{cases} (E - mc^2)b_1 - cp_z b_3 = 0, \\ (E - mc^2)b_2 + cp_z b_4 = 0, \\ (E + mc^2)b_3 - cp_z b_1 = 0, \\ (E + mc^2)b_4 + cp_z b_2 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Si'zi'qli' ten'lemelerdin' bul bir tekli sistemasi'ni'n' sheshimlarga iye boli'wi' ushi'n oni'n' determinanti' nolga ten' boli'wi' kerek:

$$\Delta = (E - mc^2 - c^2 p_z^2) = 0. \quad (4.8)$$

Bul an'latpa bo'lekshenin' toli'q energiyasi' menen impulsi arasi'ndag'i' (3.1)-an'latpada keltirilgandey baylani'sti' beredi.

$$E = \pm c\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2} \quad (4.9)$$

ten'lemesinen Dirak ten'lemesinin' elektron ushi'n on' ma'nisli energiyalardi'n' da, teris ma'nisli energiyalardi'n' da bar bolatug'i'nli'g'i'n bildiredi.

On' ma'nisli energiyalarda (yag'ni'y $E = +c\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}$ ten'ligi ori'nlang'anda) to'mendegidey bir birinen si'zi'qli' g'a'rezsiz bolg'an eki sheshim (hal) alami'z:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E}}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E}}, \quad b_4 = 0; \\ b) \quad & b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E}}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Bul an'latpalardag'i' $1/\sqrt{2}$ ko'beytiwshisi (4.6)-normirovka sha'rtinen ali'nadi'.

Teris energiyalar ori'n alg'an jag'dayda (yag'ni'y $E = -c\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}$ ten'ligi ori'nlang'anda) bir birinen si'zi'qli' g'a'rezsiz bolg'an eki sheshim (eki hal) ali'nadi':

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{mc^2}{|E|}}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{|E|}}, \quad b_4 = 0; \\ b) \quad & b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{mc^2}{|E|}}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{|E|}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Joqari'da keltirilgen eki sheshimnin' (a ha'm b sheshimlerinin') fizikali'q ma'nislerin ayqi'nlasti'ri'w ushi'n spinnin' z ko'sherine tu'sirilgen proekciyalari'ni'n' menshikli ma'nisleri ushi'n jazi'lg'an (3.30)-an'latpadan paydalanami'z. a) hali'nda ψ_2 ha'm ψ_4 qurawshi'lari'ni'n' nolga ten' bolatug'i'nli'g'i'n, al b) hali'nda ψ_1 ha'm ψ_3 qurawshi'lari'ni'n' nolga ten' bolatug'i'nli'g'i'n esapqa ali'p mi'naday juwmaqlardi' shi'g'arami'z:

a) hali' elektronni'n' spini z ko'sherinin' on' bag'i'ti' menen bag'i'tlas, al

b) hali' elektronni'n' spini z ko'sherinin' on' bag'i'ti' menen qarama-qarsi' bag'i'tlang'an bolg'an hallarg'a sa'ykes keledi. Solay etip bir birinen si'zi'qli' g'a'rezsiz bolg'an(4.10)- ha'm (4.11)-ten'lemeler elektronni'n' toli'q energiyasi'ni'n' eki belgisinin' mu'mkin bolg'an to'rt kombinatsiyasi'na ha'm spininin' mu'mkin bolg'an eki bag'i'ti'na sa'ykes keledi eken.

Elektronni'n' toli'q energiyasi'ni'n' ma'nislerinin' nolden kishi boli'wi' fizikali'q ma'niske iye bolmaytug'i'nday boli'p ko'rinedi. Biraq teren'irek tallaw bul tu'siniktin' teren' fizikali'q ma'niske iye ekenligin ko'rsetti ja'ne elektron ushi'n antibo'lekshe bolg'an pozitronni'n' ashi'li'wi'na ali'p keldi.

Relyativistlik emes jag'daylarda $(v/c) \ll 1$ ten'sizligi ori'nli' boladi'. Usi'ni'n' na'tiyjesinde

$$\frac{mc^2}{E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (4.12)$$

ten'liklerine iye bolami'z. Usi' jag'dayg'a baylani'sli' (4.10)- ha'm (4.11)-an'latpalar v/c shamasina shekemgi da'llikte to'mendegidey tu'rlerge iye boladi':

1) $E > 0$:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ b_1 \approx 1, \ b_2 = 0, \ b_3 \approx \frac{1}{2}, \ b_4 = 0, \\ b) \ b_1 = 0, \ b_2 \approx 1, \ b_3 = 0, \ b_4 \approx -\frac{1}{2} \frac{v}{c}; \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

2) $E < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ b_1 \approx -\frac{1}{2} \frac{v}{c}, \ b_2 = 0, \ b_3 \approx -1, \ b_4 = 0, \\ b) \ b_1 = 0, \ b_2 \approx \frac{1}{2} \frac{v}{c}, \ b_3 = 0, \ b_4 \approx 1; \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Demek, ha'r hallardi'n' ha'r birinde tek bir qurawshi' nolden a'dewir o'zgeshe boladi' eken. Biraq bul jag'day relyativistlik emes jag'daylarda to'rt qurawshi'dan turatug'i'n tolqi'n funktsiyasi' bir qurawshi'dan turatug'i'n tolqi'n funktsiyasi'na o'tedi ha'm usi'g'an sa'ykes spinlik effektler jog'aladi' degen ma'nisti an'g'artpaydi'. Ma'sele sonnan ibarat, hallardi'n' ha'r birinde ha'r nolga qi'yli' qurawshi'lar ten' bolmaydi'. Usi'ni'n' na'tiyjesinde z ko'sheri bag'i'ti'ndagi' spinnin' ortasha ma'nisin tapqanda esaplawlar tolqi'n funktsiyasi'ni'n' tek bir qurawshi'si' menen ali'p bari'ladi', biraq bul

qurawshi' ha'r qi'yli' hallar ushi'n ha'r qi'yli' ma'niske iye boladi' ha'm esaplawlarda ha'r qi'yli' na'tiyjelerdi beredi. Sonli'qtan relyativistlik emes jag'dayg'a o'tiw bir qurawshi' tolqi'n funkciyasi'na o'tiw degen ma'nisti an'g'artpaydi', al tolqi'n funkciyasi'ni'n' ha'r qi'yli' qurawshi'lari'ni'n' relyativistlik emes jag'daylardag'i' tutqan sali'sti'rmali' ori'nlari'n ani'qlawg'a mu'mkinshilik beredi.

Relyativistlik emes jag'dayg'a o'tiwdin' ekinshi ta'repi mi'nalardan ibarat: (4.13)-an'latpadan relyativistlik emes jag'daylarda b_3 penen b_4 koefficientlerinin' b_1 menen b_2 koefficientlerine sali'sti'rg'anda birge sali'sti'rg'anda v/c ese o'zgeshe ekenligin ko'rsetedi. Bul relyativistlik emes jag'daylarda ψ_3 penen ψ_4 funkciyalari'ni'n' ψ_1 menen ψ_2 funkciyalari'na sali'sti'rg'anda kishi ekenligin bildiredi. Bul juwmaq uli'wmali'q xarakterge iye ha'm (4.12)-an'latpadan tikkeley ko'rinip tur: relyativistlik emes jag'daylarda $E \approx mc^2$, usi'g'an sa'ykes ψ_3 penen ψ_4 funkciyalari' ψ_1 menen ψ_2 funkciyalari'na sali'sti'rg'anda kishi.

2-6 §. Kulon maydani'ndag'i' spini joq bo'lekshenin' energiyasi'ni'n' qa'ddileri

Biz bul paragrafta spini joq (yag'ni'y spini nolge ten') bo'lekshelerdin' Kulon maydani'ndag'i' energiyalari'ni'n' shamalari'n esaplaymi'z. Soni'n' ushi'n na'tiyjelerdi Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' ja'rdeminde ali'nadi' ha'm ali'natug'i'n na'tiyjelerde spinlik effektlar qatnaspaydi'. Sonli'qtan ali'natug'i'n na'tiyjeler eksperimentlerde ali'ng'an na'tiyjelerge sa'ykes kelmeytug'i'nli'g'i' ta'biyiy boli'p tabi'ladi'. Al energiya qa'ddilerinin' o'zgerislerge ushi'rawi' azimutal kvant sani' – elektronlardi'n orbitali'q impuls momenti menen baylani'sli' boladi'.

Biz spini joq bo'lekshenin' yadroni'n' do'gereginde aylani'wi'n izertleyemiz. Yadroni'n' massasi'n u'lken ha'm sol sebepli qozg'almaydi' dep esaplaymi'z. Bunday jag'dayda toli'q energiya, impuls ha'm potentsial energiya arasi'ndag'i' baylani's bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$E = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.1)$$

Bul an'latpada $+Ze$ arqali' yadroni'n' zaryadi', $-e$ arqali' biz qarap ati'rg'an bo'lekshenin' zaryadi', al m arqali' oni'n' massasi' belgilengen. Bul an'latpani'n'

ja'rdeminde to'mendegidey operatorli'q ten'likti ali'wg'a boladi':

$$\left(\hat{E} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 = c^2 \hat{p}^2 + m^2 c^4. \quad (5.2)$$

Soni'n' menen birge Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi kulon maydani'nda qozg'alatug'i'n bo'lekshe ushi'n

$$\left[\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m^2 c^4\right] \Psi = 0 \quad (5.3)$$

tu'rinde jazi'ladi'.

Tolqi'n funkciyasi'

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}(E+mc^2)t} \quad (5.4)$$

tu'rinde jazi'ladi' dep boljap stacionar hallar ushi'n to'mendegidey ten'leme alami'z:

$$\nabla^2 \Psi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[\left(E + mc^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \Psi = 0. \quad (5.5)$$

Bul ten'lemedegi E shamasi' bo'lekshenin' energiyasi'n an'g'artadi' (E shamasi'ni'n' ishinde bo'lekshenin' ti'ni'shli'qtag'i' energiyasi' mc^2 joq).

Bul ten'leme Shredinger ten'lemesin sheshiwge sa'ykes tu'rde sheshiledi. Oni'n' ushi'n tolqi'n funkciyasi'n bir birinen g'a'rezsiz eki tolqi'n funkciyasi'ni'n' ko'beymesinen turadi' dep boljaymi'z:

$$\Psi = R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5.6)$$

ha'm bul ten'lemedegi tolqi'n funkciyasi'ni'n' radialli'q bo'limi ushi'n relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' ten'lemesindey ten'leme jazami'z:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[-B + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1) - \alpha^2 Z^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (5.7)$$

Bul ten'lemede

$$A = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left[1 - \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)^2 \right], \quad (5.8)$$

$$2B = \frac{2mZe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \left[1 + \frac{E}{mc^2} \right] \quad (5.9)$$

tu'rindegidey belgilewler paydalani'lg'an ha'm α arqali' juqa strukturani'n' turaqli'si' belgilengen (ani'qlamasi' boyi'nsha $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$). Relyativistlik emes jag'daylarg'a o'tiw ushi'n $v \ll c$ ten'sizliginin' ori'n alatug'i'ni'n eske alami'z ha'm

bunday jag'daylarda

$$A = -\frac{2m^2}{\hbar^2}E, \quad (5.10)$$

$$2B = \frac{2mZe^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}. \quad (5.11)$$

Bul an'latpalar relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' formulalari'na sa'ykes keledi.

(5.7)-ten'lemeni sheshiw ushi'n

$$l'(l' + 1) = l(l + 1) - \alpha^2 Z^2 \quad (5.12)$$

tu'rindegi belgilew qabi'l etiledi. Bunnan l' shamasi' ushi'n

$$l' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2} \quad (5.13)$$

ma'nisin alami'z. l' shamasi' ushi'n (5.7)-ten'lemeni bi'layi'nsha jazami'z:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[-A + \frac{2B}{r} - \frac{l'(l' + 1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (5.14)$$

Biz Mathematica 10 universalli'q programmaw tilinin' ja'rdeminde (5.14)-ten'lemeni sheshe alami'z. Oni'n' ushi'n

$$Q = D[r^2 R'[r], r];$$

$$A = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left(1 - \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right) \right);$$

$$B = \frac{mZe^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right);$$

$$DSolve \left[\frac{1}{r^2} Q + \left(-A + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) == 0, R[r], r \right]$$

tu'rindegi programma jazami'z. Bul formulada ϵ_0 arqali' elektr turaqli'si' W arqali' elektronni'n' energiyasi' belgilengen. l sani' ushi'n shtrix jazi'lmag'an.

Kompyuter

$$R[r] \rightarrow e^{-\frac{i\sqrt{mr}\sqrt{W}}{\hbar} + l \text{Log}[r]} C[1]$$

HypergeometricU

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{-ic^2 e 1^2 mZ - ie 1^2 WZ - 4c^2 h \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0 - 4c^2 h l \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0}{4c^2 h \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0}, 2 + 2l, \frac{2i \sqrt{m} r \sqrt{W}}{h} \right] \\
& + \\
& + e^{-\frac{i \sqrt{m} r \sqrt{W}}{h} + l \text{Log}[r]} C[2] \\
& \text{LaguerreL} \\
& \left[\frac{-ic^2 e 1^2 mZ - ie 1^2 WZ - 4c^2 h \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0 - 4c^2 h l \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0}{4c^2 h \sqrt{m} \pi \sqrt{W} \epsilon 0}, 1 + 2l, \frac{2i \sqrt{m} r \sqrt{W}}{h} \right]
\end{aligned}$$

sheshimin beredi.

Biz kompyuterlik sheshim alg'anda shegarali'q sha'rtlerdi qoymadi'q ha'm sonli'qtan $C[1]$ ha'm $C[2]$ arqali' belgilengen eki integralaw turaqli'si'n aldi'q. Bul jag'day bizin' esaplawlari'mi'zdi' quramalasti'radi'. Sonli'qtan analitikali'q sheshimlarga qayti'p kelemiz.

(5.14)-ten'lemen sheship spini joq bo'lekshenin' energiyasi'ni'n' qa'ddileri ushi'n

$$E_{kl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left(k + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2 Z^2}\right)}}} - mc^2 \quad (5.15)$$

formulasi'na iye bolami'z. Kvadratli'q qawsi'rma ishinde turg'an an'latpani' biz a'piwayi'lasti'ra alami'z. Buni'n' ushi'n $\alpha^2 Z^2 \ll 1$ shamasi' boyi'nsha qatarg'a jayami'z. Usi'ni'n' na'tiyjesinde nolge ten' emes birinshi eki ag'zani' saqlap, to'mendegidey formulani' alami'z:

$$E_{nl} = -\frac{m^2 Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (5.16)$$

Bul an'latpada bas kvant sani' ushi'n $n = l + k + 1$ belgilewi qabi'l etilgen ha'm

$$E_n = -\frac{m^2 Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (5.17)$$

ag'zasi' vodorod ta'rizli atomlar ushi'n Bor ta'limati' tiykari'nda ali'ng'an energiyani'n' mug'dari'na sa'ykes keledi. Juqa strukturani'n' turaqli'si'ni'n' $[\alpha^2 = (1/137)^2]$ kvadrati'na proporcional bolg'an

$$\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)$$

ag'zasi' energiya qa'ddilerinin' shamalari' ushi'n jazi'lg'an relyativistlik du'zetiwdi

beredi.

(5.16)-formulani'n' Bor ta'limati' ja'rdeminde ali'ng'an (5.17)-formuladan principiali'q ayi'rmasi' mi'nalardan ibarat: relyativistlik jag'dayda energiyani'n' shamasi' bas kvant sani'nan da, azimutalli'q kvant sani'nan da g'a'rezli boladi'. Usi'ni'n' na'tiyjesinde bas kvant sani' n bolg'an energiyani'n' qa'ddi azimutal kvant sanlari' $l = 1$ den $n - 1$ ge shekem bolg'an n dana qa'ddilerge bo'linedi. Bul bo'liniwidin' shamasi' α^2 shamasina proporcional, yag'ni'y ju'da' kishi. Energiya kaddilerinin' usi'nday bir neshe qa'ddilerge bo'liniwi spektralli'q si'zi'qlardi'n' bir neshe si'zi'qqa bo'liniwine ali'p keledi. (5.16)-formulani'n' ja'rdeminde spektralli'q si'zi'qlardi'n' qansha shamag'a bo'linetug'i'nli'g'i'n esaplaw qi'yi'n emes. Mi'sali' Balmer seriyasi'na kiriwshi tolqi'nlardi'n' tolqi'n uzi'nli'g'i'ni'n'

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde esaplani'latug'i'nli'g'i' belgili. Bul formulada $k = 3, 4, \dots$, al R arqali' Ridberg turaqli'si' belgilengen. Bunnan spektralli'q si'zi'qti'n' ciklli'q jiyiligi ushi'n

$$\omega = \frac{R}{2\pi s} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

formulasi'na iye bolami'z.

Bunday jag'dayda relyativistlik du'zetiwdi esapqa alatug'i'n bolsaq, onda

$$\Delta\omega = \frac{E_{21} - E_{20}}{\hbar} = \alpha^2 \frac{m^2 e^4}{192\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^3}. \quad (5.18)$$

Bul shama vodorod atomi' ushi'n eksperimentlerde ali'ng'an na'tiyjelerden u'sh ese u'lken. Ayi'rmani'n' sebebi Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinde spinnin' nolge ten' ekenligi menen baylani'sli'. Demek spektralli'q si'zi'qlardi'n' bir neshe si'zi'qlarg'a bo'liniwi elektronlardi'n' spinine de g'a'rezli eken degen juwmaq shi'g'ari'ladi'.

Biz endi spindi esapqa alami'z ha'm usi'g'an baylani'sli' Dirak ten'lemesin paydalanami'z. Kulon maydani'ndag'i' elektron ushi'n Dirak formulasi'

$$\left[\hat{E} - c(\boldsymbol{\alpha}, \hat{\mathbf{p}}) - mc^2 \rho_3 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right] \Psi = 0 \quad (5.19)$$

tu'rinde jazi'ladi'. Usi' paragrafta ali'ng'an na'tiyjelerdi paydalani'w ushi'n birinshi ta'rtpili ten'lemeden ekinshi ta'rtpili ten'lemege o'tiw, yag'ni'y ten'lemenini "kvadratqa ko'teriw" procedurasi' ori'nlanadi'.

(5.19)-Dirak ten'lemesin "kvadratqa ko'teriw" ushi'n oni'n' shep ta'repine

$$\hat{E} - c(\boldsymbol{\alpha}, \hat{\mathbf{p}}) - mc^2 \rho_3 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.20)$$

operatori'n qollani'w kerek. Usi'ni'n' na'tiyjesinde

$$\left[\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m^2 c^4 + \frac{ie^2 c \hbar}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) \right] \Psi = 0 \quad (5.21)$$

tu'rindegi ten'leme ali'nadi'.

Bul jag'dayda da tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt qurawshi'dan turatug'i'nli'g'i', Dirak matricalari'ni'n' tu'ri esapqa ali'nadi'. Na'tiyjede radialli'q tolqi'n funkciyasi' ushi'n

$$l'' = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \quad (5.22)$$

belgilewleri qabi'l etilgen jag'dayda

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[-A + \frac{2B}{r} - \frac{l''(l''+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (5.22)$$

tu'rindegi ten'leme ali'nadi' ha'm energiyani'n' qa'ddileri ushi'n

$$E_{kl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \sqrt{(l+1)^2 + \alpha^2}\right)^2}}} - mc^2 \quad (5.23)$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

(5.22)-formulada

$$A = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left[1 - \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)^2 \right]$$

ha'm

$$2B = \frac{2m^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right).$$

(5.23)-formulani' juqa struktura turaqli'si' boyi'nsha qatarg'a jayi'p ha'm da'slepki eki ag'za menen sheklenip to'mendegidey formulalardi' alami'z:

(5.23)-formuladag'i' $\frac{1}{2}$ shamasini'n' aldi'ndag'i' belgi plyus bolg'anda:

$$\alpha^2 \rightarrow 0, l'' = l \text{ ha'm } \beta = \frac{\alpha}{2(l+1)} \text{ bolg'anda} \quad (5.24)$$

$$E_{nl} = -\frac{m^2 Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (n = k + l + 2).$$

(5.23)-formuladag'i' $\frac{1}{2}$ shamasini'n' aldi'ndag'i' belgi minus bolg'anda:

$$\alpha^2 \rightarrow 0, l'' = l + 1 \text{ ha'm } \beta = \frac{2(l+1)}{\alpha} \text{ bolg'anda} \quad (5.25)$$

$$E_{nl} = -\frac{m^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (n = k + l + 1).$$

Biz toli'q impuls momenti (toli'q moment) tu'sinigin kirgizemiz ha'm oni' j arqali' belgilep bul sanni'n' eki ma'nisine baylani'sli' vodorod atomi'ndag'i' elektronni'n' energiyasi'ni'n' ma'nisin esaplaymi'z. Oni'n' ushi'n

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

ha'm

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

belgilewlerin qabi'l etip (5.23)-formulani' bi'layi'nsha jazami'z:

$$E_{nj} = -\frac{m^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (5.28)$$

ha'm usi' formula boyi'nsha bir qansha esaplawlardi' ori'nlaymi'z.

2-7 §. Vodorod atomi' ushi'n energiyag'a relyativistlik du'zetiwlardi esaplaw

$l = 0$ bolg'an jag'daylar ushi'n (elektronvohlarda):

n	$E_n,$ $\alpha = 0$ bolg'an jag'dayda	$E_{n,l+\frac{1}{2}},$ $j = l + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$E_{n,l-\frac{1}{2}},$ $j = l - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
1	13.598287	13.598468	haqi'yqi'y ma'niske iye emes
2	3.399572	3.399628	haqi'yqi'y ma'niske iye emes
3	1.510921	1.51091	haqi'yqi'y ma'niske iye emes
4	0.849893	0.849902	haqi'yqi'y ma'niske iye emes
5	0.543931	0.543936	haqi'yqi'y ma'niske iye emes

$l = 1$ bolg'an jag'daylar ushi'n (elektronvohlarda):

n	$E_n,$	$E_{n,l+\frac{1}{2}},$	$E_{n,l-\frac{1}{2}},$	
-----	--------	------------------------	------------------------	--

	$\alpha = 0$ bolg'an jag'dayda	$j = l + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$j = l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$E_{n,l-\frac{1}{2}} - E_{n,l+\frac{1}{2}}$
2	3.399572	3.399583	3.399628	0.0000452579
3	1.510921	1.510927	1.510941	0.0000134098
4	0.849893	0.849896	0.849902	$5.657244 \cdot 10^{-6}$
5	0.543931	0.543933	0.543936	$2.896509 \cdot 10^{-6}$
6	0.377730	0.377731	0.377733	$1.67622 \cdot 10^{-6}$

Bul formulada $E_{n,l-\frac{1}{2}} - E_{n,l+\frac{1}{2}}$ ayi'rmasi'ni'n' ma'nisinin' bas kvant sani' n nin' o'siwi menen o'setug'i'nli'g'i' ko'rinip tur.

(5.28)-formuladan vodorod atomi'ndag'i' elektronni'n' energiyasi'ni'n' tek bas kvant sani'nan emes, al j toli'q moment kvant sani'nan da g'a'rozli ekenligin ko'rdik. Biraq $2s_{1/2}$ ha'm $2p_{1/2}$ hallari' ushi'n energiyani'n' birdey bolatug'i'nli'g'i' kelip shi'g'adi'. Usi' jag'dayg'a baylani'sli' spektroskopiya boyi'nsha qa'nigeler biz paydalang'an formulalardi'n' duri's ekenligine gu'ma'n menen qaradi'. Al sa'ykes eksperimentler tek 1947-ji'li' g'ana ori'nlandi' ha'm energiyalardi'n' birdey emes ekenligi tasti'yi'qlandi'. Demek (5.28)-formulag'a du'zetiwi kirgiziwdin' za'ru'rli'gi payda boldi'. Bul mashqalani' izertlew vakuumni'n' fizikali'q qa'siyetlerin teren'irek izertlew kerek ekenligin ayqi'n tu'rde ko'rsetti.

Endi Dirak ten'lemesinen kelip shi'g'atug'i'n relyativistlik effektlerdi esapqa alg'anda tolqi'n ten'lemesinin' radially'q bo'limine qosi'latug'i'n du'zetiwlardi esapqa alatug'i'n programmani' usi'nami'z. Al bunday du'zetiwlardind' qalay kelip shi'g'atug'i'nli'g'i' joqari'da toli'q bayan etildi.

Programma to'mendegidey tu'rge iye boladi':

wfnr[r_,Z_,1,a0_:0.529177,α_:1/137]:=2(Z/a0)^{3/2} Exp[-Z r/a0];

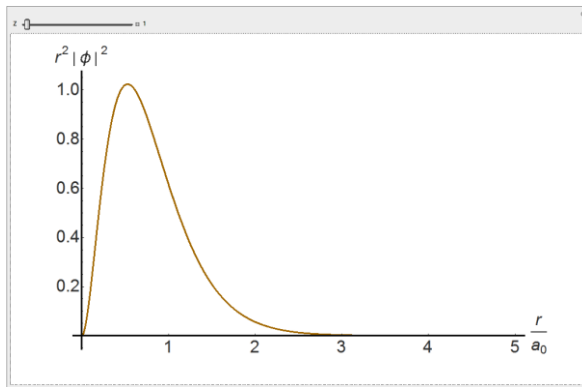
wfup[r_,Z_,1,a0_:0.529177,α_:1/137]:=Block[{t,nrm2},t=Sqrt[1-(Z α)²]-

1;nrm2=Sqrt[-((4^{√(1-z²α²)} Z² α²)/((-1+√(1-z²α²)) Gamma[1+√(4-4 z²α²))]);nrm2
(Z/a0)^{3/2} Exp[-Z r/a0](Z r/a0)^t];

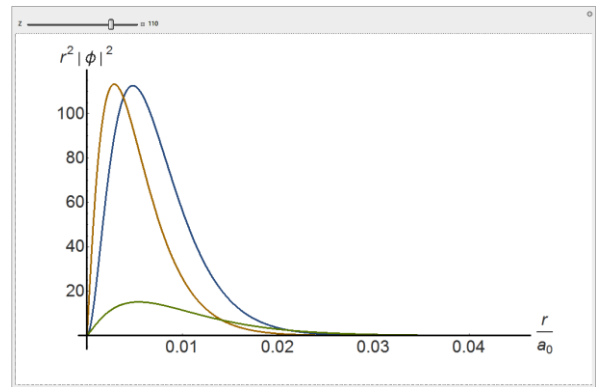
wflow[r_,Z_,1,a0_:1,α_:1/137]:=Block[{t,nrm2},t=Sqrt[1-(Z α)²]-1;nrm2=Sqrt[-((
4^{√(1-z²α²)} Z² α²)/((-1+√(1-z²α²)) Gamma[1+√(4-4 z²α²))]);nrm2 (Z/a0)^{3/2} Exp[-Z
r/a0](Z r/a0)^t t/(Z α)];


```
Manipulate[Plot[{wfnr[r, Z]^2 r^2, wfup[r, Z]^2 r^2, wflow[r, Z]^2 r^2}, {r, 0, 5/Z}, AxesLabel
→ { $\frac{r}{a_0}$ , " $r^2 |\Phi|^2$ "}, PlotStyle → AbsoluteThickness[3], PlotRange
→ All, ImageSize → {1000, 800}, ImagePadding → 50, LabelStyle
→ (FontSize → 30)], {Z, 1, 140, 1, Appearance
→ "Labeled"}, SaveDefinitions → True]
```

Biz alg'an na'tiyjeler $Z = 30$ sha'rti ori'nlanatug'i'n atomlarda relyativistlik effektlaridin' ani'q tu'rde ko'rine baslaytug'i'nli'g'i'n ko'rsetti (1-a su'wret). Awi'r elementlerde $r^2 |\Phi|^2$ funkciyasi' u'sh funkciyag'a ayri'ladi'.



a)



b)

1-su'wret. Relyativistlik effektlaridin' $r^2 |\Phi|^2$ funkciyasi'na qosatug'i'n u'lesin illyustraciyalaytug'i'n su'wretler.

Endi relyativistlik effektlaridin' bas kvant sani' n nin 1-3 bolg'an ma'nislerinde vodorod atomi'ndag'i' energiya qa'ddilarinin' o'zgerislarinin' qanday bolatug'i'nli'g'i'n ayqi'n tu'rde ko'rsetetug'i'n programma boyi'nsha ali'ng'an na'tiyjelerdi ko'rsetemiz. Programma Wolfram Demonstrations Project portali'nda (adresi <http://demonstrations.wolfram.com/>) keltirilgen programmalar tiykari'nda du'zildi. Bul programmada relyativistlik emes kvantli'q mexanika, Dirak teoriyasi', Lemb ji'lji'wi' (vakuumni'n' energiya qa'ddilarine ta'siri), asa juqa struktura (atom yadrosi'ni'n' energiya qa'ddilarine ta'sir etiwini'n' na'tiyjesi) boyi'nsha ali'ng'an na'tiyjeler toli'g'i' menen keltirilgen. Soni'n' menen birge na'tiyjeler $1/c$ shamasina g'a'rezli, $c = 1$ ha'm sonli'qtan toli'q relyativistlik jag'dayda $\frac{1}{c} = 1$ sha'rti ori'nlanatug'i'n jag'daylar ushi'n ali'ng'an (2-su'wret).

2-a su'wrette relyativistlik effektlaridin' $\frac{1}{c}$ shamasini'n' nolden u'lken bolg'an

barli'q ma'nislerinde ha'm $\frac{1}{c} = 1$ bolg'an jag'dayda $3d_{5/2}, 3d_{3/2}, 3p_{3/2}, 3s_{1/2}, 3s_{1/2}$ hallari' ushi'n energiya qa'ddilerinin' en' u'lken o'zgerislerge ushi'raytug'i'nli'g'i' ayqi'n ko'rinip tur (grafikte ordinata ko'sherine jiyiliklerdin' ma'nisleri megagerclerde berilgen). 2-b su'wrette bolsa energiya boyi'nsha masshtablar saqlanbag'an halda relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' ni'zamlari' boyi'nsha ali'ng'an energiya qa'ddilerinin' qanday o'zgerislerge ushi'raytug'i'nli'g'i'ni'n' sxemasi' berilgen. En' a'hmiyetlisi sonnan ibarat, vodorod atomi'ndag'i' energiya qa'ddilerinin' qanday ekenligin Dirak teoriyasi'ni'n' toli'q sa'wlelerdine almaytug'i'nli'g'i'na ko'z jetkeriw mu'mkin.

To'mende sol na'tiyjelerdi ali'wg'a mu'mkinshilik beretug'i'n programma toli'q tu'rde berilgen.

```

α[λ_]:=λ/137.036; MHz=6.57966*109;
ΔE[n_,l_,j_,λ_]:=(-(1/(2n2)) α[λ]2/n2 (n/(j+1/2)-3/4)+Boole[l==0]
(13α[λ]3)/(4n3))MHz; f[1,λ1_]:=ΔE[1,0,1/2,λ1]
f[2,λ1_]:={ΔE[2,0,1/2,λ1],ΔE[2,1,1/2,λ1],ΔE[2,1,3/2,λ1]}
f[3,λ1_]:={ΔE[3,0,1/2,λ1],ΔE[3,1,1/2,λ1],ΔE[3,1,3/2,λ1],ΔE[3,2,3/2,λ1],ΔE[3,2,5/2,λ
1]}
r[1]=-35000;r[2]=-14000;r[3]=-5000;
label[1]=Text[Style[Subscript["1s","1/2"],18,Blue,Italic]];label[2]=Text[Style[Colum
n[{Subscript["2p","3/2"],Subscript["2s","1/2"],Subscript["2p","1/2"]}],18,Blue,Italic
]];
label[3]=Text[Style[Column[{Subscript["3d","5/2"],Row[{Subscript["3d","3/2"],"
",Subscript["3p","3/2"]}],Subscript["3s","1/2"],Subscript["3p","1/2"]}],18,Blue,Italic
]];
plot[n_,λ_,0]:=Plot[f[n,λ1],{λ1,-.001,λ},PlotRange->{{-.001,1},{r[n],0}},Frame-
>True,ImageSize->{575,350},FrameLabel-
>{Style[1/c,18],Style[Row[{Subscript[Row[{"Δ ",Style["E",Italic]}], "rel"],"
(MHz)"}],18],Style[Row[{Style["n",Italic], " = ",n,"
",Subscript[Style["E",Italic], "NR"], " = ",-(MHz/(2n2)),"MHz" }],18]}],Epilog-
>Inset[label[n],{.25,Center}],ImagePadding->{{60,10},{60,30}}]

```

```

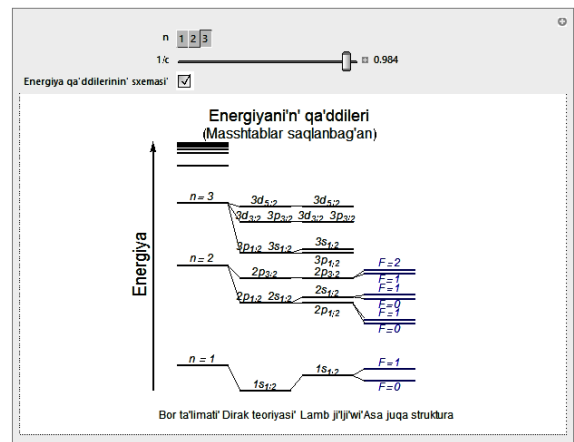
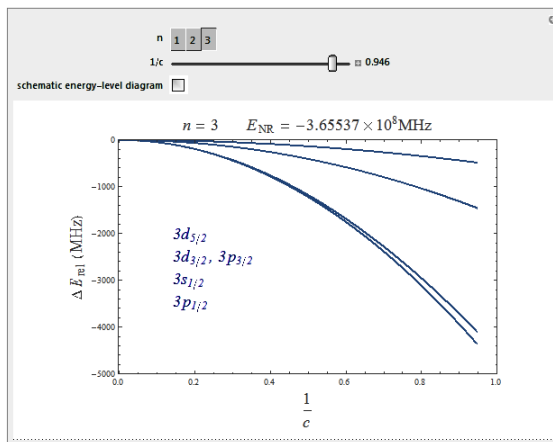
plot[n_λ_,1]:=Graphics[{Text[Style["Energiya qa'ddilerinin'
sxemasi",18],{5.5,11}],Text[Style["(Maschtab
saqlanbag'an)",16],{5.5,10.25}],Thick,Arrow[{{0,0},{0,10}}],Rotate[Text[Style["Ener
giya",18],{-5,5}],π/2],Line[{{1,1},{3,1}}],Text[Style[Row[{Style["n",Italic],"=
1"}],12,Italic],{2,1.25}],Line[{{3.5,0},{5.5,0}}],Text[Style[Subscript["1s","1/2"],12,Ita
lic],{4.5,.25}],Line[{{6,.6},{8,.6}}],Text[Style[Subscript["1s","1/2"],12,Italic],{7,.85}],
  Line[{{1,5},{3,5}}],Text[Style[Row[{Style["n",Italic],"=
2"}],12,Italic],{2,5.25}],Line[{{3.5,3.5},{5.5,3.5}}],Text[Style[Row[{Subscript["2p","1
/2"]," ",Subscript["2s","1/2"]}],12,Italic],{4.5,3.75}],
  Line[{{6,3.5},{8,3.5}}],Text[Style[Subscript["2p","1/2"],12,Italic],{7,3.2}],
  Line[{{6,3.75},{8,3.75}}],Text[Style[Subscript["2s","1/2"],12,Italic],{7,4}],
Line[{{3.5,4.5},{5.5,4.5}}],Text[Style[Subscript["2p","3/2"],12,Italic],{4.5,4.75}],Line
[{{6,4.5},{8,4.5}}],Text[Style[Subscript["2p","3/2"],12,Italic],{7,4.75}],
  Line[{{1,7.5},{3,7.5}}],
  Text[Style[Row[{Style["n",Italic],"= 3"}],12,Italic],{2,7.75}],Table[Line[{{1,10-
1/k},{3,10-1/k}}],{k,1,10}],
Line[{{3.5,7.375},{5.5,7.375}}],Text[Style[Subscript["3d","5/2"],12,Italic],{4.5,7.625
}],Line[{{3.5,6.75},{5.5,6.75}}],Text[Style[Row[{Subscript["3d","3/2"],"
",Subscript["3p","3/2"]}],12,Italic],{4.5,7}],
  Line[{{3.5,5.5},{5.5,5.5}}],Text[Style[Row[{Subscript["3p","1/2"],"
",Subscript["3s","1/2"]}],12,Italic],{4.5,5.75}],
Line[{{6,7.375},{8,7.375}}],Text[Style[Subscript["3d","5/2"],12,Italic],{7,7.625}],Lin
e[{{6,6.75},{8,6.75}}],Text[Style[Row[{Subscript["3d","3/2"],"
",Subscript["3p","3/2"]}],12,Italic],{7,7}],
Line[{{6,5.5},{8,5.5}}],Text[Style[Subscript["3p","1/2"],12,Italic],{7,5.2}],Line[{{6,5.
675},{8,5.675}}],Text[Style[Subscript["3s","1/2"],12,Italic],{7,5.925}],
Line[{{8.5,.375},{10.5,.375}}],Line[{{8.5,.875},{10.5,.875}}],Text[Style["F=1",12,Itali
c],{9.5,1.1}],Text[Style["F=0",12,Italic],{9.5,.125}],
Line[{{8.5,3.825},{10.5,3.825}}],Line[{{8.5,3.675},{10.5,3.675}}],Text[Style["F=1",12
,Italic],{9.5,4.075}],Text[Style["F=0",12,Italic],{9.5,3.425}],
Line[{{8.5,2.825},{10.5,2.825}}],Line[{{8.5,2.675},{10.5,2.675}}],Text[Style["F=1",12
,Italic],{9.5,3.075}],Text[Style["F=0",12,Italic],{9.5,2.425}],

```

```

Line[{{8.5,4.825},{10.5,4.825}},Line[{{8.5,4.675},{10.5,4.675}},Text[Style["F=2",12
,Italic],{9.5,5.075}],Text[Style["F=1",12,Italic],{9.5,4.425}],
Thin,Black,Line[{{3,1},{3.5,0}},Line[{{5.5,0},{6,.6}}],
Line[{{3.5,3.5},{3,5},{3.5,4.5}},Line[{{3.5,7.35},{3,7.5},{3.5,6.75}},Line[{{3,7.5},{3.5,
5.5}},Line[{{5.5,7.375},{6,7.375}}],
Line[{{5.5,6.75},{6,6.75}},Line[{{5.5,4.5},{6,4.5}},Line[{{6,5.5},{5.5,5.5},{6,5.675}}],
Line[{{6,3.5},{5.5,3.5},{6,3.75}},Line[{{8.5,.375},{8,.6},{8.5,.875}}],
Line[{{8.5,3.675},{8,3.75},{8.5,3.825}},Line[{{8.5,2.675},{8,3.5},{8.5,2.875}},Line[{{
8.5,4.675},{8,4.5},{8.5,4.825}}],Text[Style["Relyativistlik emes",11],{1.3,-
1}],Text[Style["Derak ten'lemesi",11],{4.5,-1}],Text[Style["Lemb ji'lj'i'wi'",11],{7.3,-
1}],
Text[Style["Asa juqa truktira",11],{10,-1}],
ImageSize->{575,350}]
Manipulate[
plot[n,λ,s],{{n,2,"n"},Range[3],Setter,Enabled-
>{s==0}},{{λ,.75,"1/c"},0,1,Appearance->"Labeled",Enabled->{s==0}},{{s,0,"Energiya
qa'ddilerinin' cxemasi'"},{0,1},Checkbox},
TrackedSymbols:>{n,λ,s},SaveDefinitions->True]

```



2-su'wret. $n = 1, 2, 3$ ushi'n vodorod atomi'nda energiya qa'ddilerinin' qanday o'zgerislerge ushi'raytug'i'nli'g'i'n sxemali'q tu'rde illyustraciyalaytug'i'n su'wretler.

Pitkeriw qa'nigelik jumi'si' boyi'nsha uli'wmali'q juwmaqlar

1. Bo'lekshenin' energiyasi' menen impulsi arasi'ndag'i' relyativistlik qatnas tiykari'nda relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemeleri bolg'an Kleyn-Gordon-Fok, Dirak ten'lemelerinin' keltirip shi'g'ari'wdi'n' fizikali'q tiykarlari' bayanlang'an. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesinin' fizikali'q maydanni'n' ten'lemesi ekenligi ha'm sonli'qtan oni'n' spini nolge ten' bolg'an, massag'a iye bo'lekshelerdi, al Dirak ten'lemesinin' spini $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an fermionlardi' (elektronlar menen pozitronlar) ta'riyipleytug'i'nli'g'i' ayqi'n tu'rde ko'rsetilgen.

2. Sali'sti'rmali' a'piwayi' jollar menen Dirak ten'lemesinin' ja'rdeminde mikrobo'lekshelerdin' spininin' kelip shi'g'atug'i'nli'g'i', sonli'qtan spinnin' relyativistlik effekt ekenligi da'lillengen. Soni'n' menen birge elementar bo'lekshelerdin' energiyalari'ni'n' on' ma'niske de, teris ma'niske de iye bolatug'i'nli'g'i'n ha'm bul jag'daydi'n' relyativistlik $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ qatnasti'n' tikkeley na'tiyjesi ekenligin da'lillengen.

3. Dirak ten'lemesi tiykari'nda ali'ng'an relyativistlik du'zetiwlardin' vodorod atomi'ndag'i' energiyani' qa'ddilerine ta'sirinin' san shamalari' kompyuterdin' ja'rdeminde esaplang'an ha'm energiya qa'ddilerinin' o'zgerislerinin' sxemasi' berilgen. Soni'n' menen birge Dirak ten'lemesinin' energiya qa'ddilerinin' o'zgerislerin toli'q sa'wlelenlirmeytug'i'nli'g'i', vodorod atomi'ndag'i' haqi'yqi'y situaciyani' toli'q biliw ushi'n vakuumni'n' ha'm yadroni'n' magnit maydani'ni'n' energiya qa'ddilerinin' o'zgerislerine ta'sirlerin esapqa ali'wdi'n' za'ru'rli ekenligi ayqi'n sali'sti'ri'wlar ja'rdeminde ko'rsetilgen.

Paydalani'lg'an adebiyatlardi'n' dizimi

1. Ю.Н. Демков. Развитие теории электронно-атомных столкновений в Ленинградском университете. http://fock.phys.spbu.ru/_overview_demkov.htm

2. Л. Д. Фаддеев. Новая жизнь полной интегрируемости // УФН, 2013, май (том 183, № 5), с. 490

3. М.Е.Пескин, Д.В.Шрёдер. Введение в квантовую теорию поля. Научно-

издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск. 2001. 784 с.

4. Альберт Мессиа. Квантовая механика. Том 1. Издательство "Наука". Москва. 1978. 478 с.

5. Альберт Мессиа. Квантовая механика. Том 2. Издательство "Наука". Москва. 1978. 583 с.

6. В.В.Толмачев, Ф.В.Скрипник. Квазиклассическая и квантовая теория атома водорода. Издательство "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск. 2008. 132 с.

7. Г.Бете, Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва. 1960. 562 с.

8. Г.Бете. Квантовая механика простейших систем. ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы. Москва-Ленинград. 1935. 399 с.

9. Г.Бете. Квантовая механика. Издательство "Мир". Москва. 1965. 334 с.

10. В.А.Фок. Начала квантовой механики. Издательство "Наука". Москва. 1976. 376 с.

11. А. Сасскинд, А.Фридман. Квантовая механика. Теоретический минимум (серия "New Science". Издательство "Питер" (Санкт-Петербург). 2015. 400 с.

12. У.Фано, Л.Фано. Физика атомов и молекул. Издательство "Наука". Москва. 1980. 656 с.

13. Д.Бом. Квантовая теория. Издательство "Наука". Москва. 1965. 727 с.

14. П.А.Дирак. Лекции по квантовой механике. Издательство "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск. 1998. 148 с.

15. П.А.Дирак. Принципы квантовой механики. Издательство "Наука". Москва. 1979. 481 с.

16. В.Паули. Общие принципы волновой механики. ОГИЗ. Гос.издательство технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград. 1947. 332 с.

17. К.К.Боярский, А.В.Смирнов, С.К.Стафеев. Атомная физика. Часть 1. Основы квантовой механики. Учебное пособие. СПб. СПбГУИТМО. 2007. 64 с.

18. G.W.Series. The spectrum of atomic hydrogen. Oxford University Press. 1957.

88 p.

19. Д.И.Блохинцев. Основы квантовой механики. Издание седьмое. Издательство "Лань". Санкт-Петербург-Москва-Краснодар. 2004. 672 с.
20. А.С.Давыдов. Квантовая механика. Издательство "Наука". Москва. 1973.
21. Я.И.Френкель. Волновая механика. Часть первая. ОНТИ. ГТТИ. Москва. Ленинград. 1934. 388 с.
22. Я.И.Френкель. Волновая механика. Часть вторая. ОНТИ. ГТТИ. Москва. Ленинград. 1934. 716 с.
23. В.Е.Тарасов. Квантовая механика. Лекции по основам теории. Издательство "Вузовская книга". Москва. 2000. 328 с. Л.В.Тарасов. Основы квантовой механики. Издательство "Высшая школа". Москва. 1978. 287 с.
24. Ю.А.Байков, В.М.Кузнецов. Квантовая механика. Учебное пособие. Москва. Бином. Лаборатория знаний. 2013. 291 с.
25. James M. Feagin. Quantum methods with Mathematica®. Springer-Verlag. 1994. 482 p.
26. А.Н.Матвеев. Квантовая механика и строение атома. Издательство "Высшая школа". Москва. 1965. 355 с.
27. Клод Козн – Таннуджи, Бернар Диу, Франк Лалоз. Квантовая механика. Перевод с французского. Том I. Издательство Уральского университета. Екатеринбург. 2000. 942 с.
28. Клод Козн – Таннуджи, Бернар Диу, Франк Лалоз. Квантовая механика. Перевод с французского. Том II. Издательство Уральского университета. Екатеринбург. 2000. 800 с.
29. А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский. Квантовая механика. Издательство "Наука". Москва. 1979. 528 с. А.А.Соколов, И.М.Тернов. Квантовая механика и атомная физика. Издательство "Просвещение". Москва. 1970. 423 с.
30. В.В.Балашов, В.К.Долинов. Курс квантовой механики. Издание второе. Издательство "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск. 2001. 336 с.
31. А.Садбери. Квантовая механика и физика элементарных частиц. Издательство "Мир". Москва. 1989. 487 с.
32. Дж. Д.Бьёркен, С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория. Том 2. Релятивистские квантовые поля. 407 с.

33. Л.Райдер. Квантовая теория поля. Издательство "Платон". Волгоград. 1998. 512 с.
34. К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер. Квантовая теория поля. Том 1. Издательство "Мир". Москва. 1984. 448 с. К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер. Квантовая теория поля. Том 2. Издательство "Мир". Москва. 1984. 400 с.
35. Ф.А.Березин, М.А.Шубин. Уравнение Шредингера. Издательство Московского университета. 1983. 392 с.
36. Л.Шифф. Квантовая механика. Издание второе. Издательство иностранной литературы. Москва. 1959. 473 с.
37. Иоганн фон Нейман. Математические основы квантовой механики. Издательство "Наука". Москва. 1964. 367 с.
38. Дж.Глим, А.Джаффе. Математические методы квантовой физики. Издательство "Наука". Москва. 1984. 445 с.
39. Gerd Baumann. *Mathematica in Teoretical Physics. Electrodinamics, Quantum Mechanics, General Relativity and Fractals. Second Edition.* Springer-Verlag. 1993. P. 544-942.
40. James M. Feagin. *Quantum Methods with Mathematica.* Springer-Verlag. 1993.
41. Дьяконов В. П. *Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах.* М.: «СОЛОН-Пресс», 2004. С. 696.
42. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика: Учебное пособие.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. 8-е издание, стереотипное. Издательство ФИЗМАТЛИТ. 2003. 536 с.