

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**



TOSHKENT KIMYO TEXNOLOGIYA INSTITUTI

Oliy matematika kafedrası

I. Iskanadjiev , M.Sanginov

OLİY MATEMATIKA

**Bir o'zgaruvchili funksiyalarning
integral hisobi
(Ma'ruzalar matni)**

Toshkent-2014

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**



TOSHKENT KIMYO TEXNOLOGIYA INSTITUTI

Oliy matematika kafedrası

I. Iskanadjiev, M.Sanginov

OL I Y M A T E M A T I K A

BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING

INTEGRAL HISOBI

(Ma'ruzalar matni)

Toshkent -2014

I. Iskanadjiev, M.Sanginov

«Bir o'zgaruvchili funktsiyalarning integral hisobi (ma'ruzalar matni)». O'quv qo'llanma.-T.: TKTI. 2014 y.-50 b.

Mazkur, «Bir o'zgaruvchili funktsiyalarning integral hisobi (ma'ruzalar matni)» o'quv qo'llanmasi Toshkent kimyo texnologiya instituti talabalariga o'qitiladigan «Oliy matematika» kursi «Matematik analizga kirish» bo'limi uchun mo'ljallangan o'quv qo'llanmalar majmuasiga tegishlidir. Ushbu o'quv qo'llanmaning maqsadi talaba uchun qulay va tushunarli tarzda olingan ma'lumotlarni amaliy misol va masalalar yordamida mustahkamlash. Shu bilan birga qo'llanma doirasida talaba kelajakda o'zining kasbiy sohasining qanday masalalarini funktsiyalarning integral lari yordamida yechishi mumkunligi haqida ham tasavvurga ega bo'ladi.

O'quv qo'llanma ikki bo'limdan iborat bo'lib, birinchi bo'limda boshlang'ich funksiya, aniq'las integral va uni hisoblashga doir nazariy ma'lumotlar keltirilgan. Ikkinchi bo'lim aniq'las integral tushunchasi va uning amaliy tatbiqlariga bag'ishlangan.

O'quv qo'llanmaning har bir paragrafi oxirida shu mavzuga oid misol va masalalar ko'rib chiqilgan. Undan keyin auditoriyada o'qituvchi rahbarligida yechish uchun masalalar va mustaqil ishlash uchun masalalar keltirilgan.

O'quv qo'llanmadan barcha oiliy texnika o'quv yurtlari talabalari va o'qituvchilari foydalanishi mumkin.

Taqrizchilar:

TDTU «Oliy matematika» kafedrasida dotsenti

A. Narziyev

TKTI «Oliy matematika» kafedrasida dotsenti

Matchonov O.

© TKTI, 2014

I- BO'LIM. Aniqmas integral.

Mavzu. Aniqmas integral, integrallashning asosiy usullari

Reja

- 1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi.**
- 2. Aniqmas integralning asosiy xossalari.**
- 3. Aniqmas integrallar jadvali.**
- 4. Bevosita integrallash usuli.**
- 5. Uzgaruvchilarni almashtirish usuli.**
- 6. Bulaklab integrallash usuli.**
- 7. Aniqmas integralning geometrik ma'nosi.**
- 8. Mustahkamlash uchun savollar.**

9. Mustaqil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali. O'zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo'laklab integrallash usullari, bo'laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi.

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi.

Ma'lumki matematikada amallar juft-juft bo'lib uchrab keladi. Jumladan, qo'shish va ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini tonishga e'lon differentsiallash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug'iladi.

Differentsial hisobda funksiya berilgan bo'lsa, uning hosilasini tonishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to'g'ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani tonish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lsin. Ma'lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

Teorema1. $[a;b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyaning xar doim boshlang'ich funksiyasi mavjud.

Teorema 2. Agar $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalar $[a;b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar bulsa, u holda shunday C (uzgarmas son) mavjudki shu oraliqdagi ixti'oriy x uchun $F(x) = G(x) + C$ munosabat urinlidir.

Ta'rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(x) + C$ (bunda C ixti'oriy o'zgarmas) funksiyalar to'nlami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

kabi belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ yozuv, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalari to'nlamini belgilaydi. Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga *integrallash* deyiladi.

2. Aniqmas integralning asosiy xossalari.

1) Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differentsiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{va} \quad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) Biror funksiyaning hosilasidan hamda differentsialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixti'oriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{va} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalr aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differentsiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = \text{const} \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

3. Aniqmas integrallar jadvali.

Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiyani differentsiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differentsial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa differentsiallashdagidek umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr ioritish kerak bo'ladi. Funksiyani integrallash ya'ni boshlang'ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$\begin{aligned}
1) \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; \\
4) \int \sin x dx &= -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C; \\
7) \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \\
9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \\
11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0; \\
13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} &= \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C
\end{aligned}$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differentsiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

4. Bevosita integrallash usuli.

Bevosita integrallash usuli deganda integral xossalari, differentsial-lar va integrallar jadvali asosida integrallash tushuniladi.

Ushbu integrallash usulining kullanishiga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \int x^3 dx + 5 \int \sin x dx - 9 \int dx$$

bo'ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5 \int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9 \int dx = -9(x + C_3).$$

$$\text{Demak, } \int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3).$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o'zining ixtiyoriy o'zgarmasini qo'shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o'zgarmalar bo'lsa,

$C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + C.$$

Integralning to'g'ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonini differentsiallash bilan ko'rsatish mumkin.(buni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

3-misol. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalariidan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3 \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C. \end{aligned}$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Shunday bir necha usullarni qaraymizki, ular yordamida ko'p hollarda integrallarni hisoblash, jadval integrallariga keltiriladi.

5. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash kulayrok xolda jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo'ladi.

2-misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2} x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2=t$ o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\frac{dt}{2}$

bo'lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

bo'ladi.

3-misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi o'zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$

ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

bo'ladi.

4-misol. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ bilan yangi o'zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differentsial topib, $dx=2tdt$ bo'lganligi uchun,

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

bo'ladi. —

5-misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \dots$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

6. Bulaklab integrallash usuli.

Bo'laklab integrallash usuli differentsial hisobning ikkita funksiya ko'paytmasi differentsiali formulasiga asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv) = u dv + v du$, bundan $u dv = d(uv) - v du$. Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

natijaga ega bulamiz. Shunday qilib,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga **bo'laklab integrallash** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int u dv$ integraldan ikkinchi $\int v du$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallashni qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo'ladi. du ni topish uchun u ning differentsiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differentsiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallash formulasi ko'proq:

$$1) \int p(x)e^{ax} dx, \int p(x)\sin mx dx, \int p(x)\cos ax dx$$

$$2) \int p(x)\ln x dx, \int p(x)\arcsin x dx,$$

$$3) \int p(x)\arccos x dx, \int p(x)\arctg x dx, \int p(x)\text{arcctg} x dx$$

(bular $p(x)$ biror darajali ko'phad) ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko'phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg} x$ larni, qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo'laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x$, $dv = \cos x dx$ deb

Bo'laklasak, $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$ bo'lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$u \quad dv \quad u \quad v \quad v \quad du$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x dx$ hosil bo'ldi, bu jadval integrali bo'lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2 e^{3x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2$, $dv = e^{3x} dx$ ko'rinishda bo'laklab olsak,

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

hosil bo'ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

bo'ladi. Oxirgi hosil bo'lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashtirildi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo'laymiz.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) + C$$

hosil bo'ladi.

3-misol. $\int x^3 \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya'ni $u = \cos 2x$, $dv = x^3 dx$ bo'laklab olaylik; bu holda

$$du = -2 \sin 2x dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \text{ bo'lib (1) formuladan foydalangandan}$$

keyin

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x + \\ + \frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ifoda hosil bo'ladi. Keyingi $\int x^4 \sin 2x dx$ integral berilgan $\int x^3 \cos 2x dx$ integralga nisbatan murakkabroqdir (x ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo'laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya'ni $u = x^3$, $dv = \cos 2x dx$ deb olish kerak edi. (Bu integralni hisoblashni o'quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $\int \arccos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = \frac{dt}{2} \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \\ + C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Bu integralda bir marta bo'laklab integrallagandan keyingi hosil bo'lgan integralda o'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo'llashda o'zgaruvchini almashtirganda yoki bo'laklab integrallaganda yozuvda tartib bo'lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

5-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo'ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o'xshashdek tuoladi, lekin oxirgi integralda bo'laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo'llash bilan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib, $J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$

J hisoblanishi kerak bo'lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ëku} \quad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \quad \text{natijaga ega bo'lamiz.}$$

7. Aniqmas integralning geometrik ma'nosi.

Aniqmas integralning geometrik ma'nosi shundan iboratki, $y=F(x)+C$ formula egri chiziklar oilasini ifodalaydi va bunda uzgarmas S ning xar bir qiymatida xosil bulgan egri chiziklar ma'lum bir boshlangich funksiyaning grafigi xisoblanadi va aniqmas integralning integral egri chiziklari deb ataladi.

8. Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog'lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to'g'ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?
7. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali nimaga teng?
8. O'zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
9. Bevosita integrallash nima?
10. Bo'laklab integrallash usuli nimaga asoslanadi?
11. Bo'laklab integrallash formulasini yozing?
12. Bo'laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo'ladi?
13. Qanday hollarda bo'laklab integrallashdan foydalaniladi?

9. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$$1. \int \frac{5x^8 + 6}{x^4} dx; \quad 2. \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) dx; \quad 3. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx; \quad 4. \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$5. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx; \quad 6. \int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad 7. \int \frac{5 + 3 \tan^2 x}{\sin^2 x} dx; \quad 8. \int \left(\frac{4}{9 + x^2} - \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - 49}; \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + 16}; \quad 11. \int \left(\frac{5}{\sqrt{9 - x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx; \quad 12. \int \left(\frac{7}{x^2 + 7} - \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx.$$

Ushbu integrallarni hisoblang.

$$1. \int \sin 3x dx. \quad 2. \int \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 5} dx.$$

$$3. \int e^{-x^3} x^2 dx. \quad 4. \int \frac{x^2}{1 + x^3} dx. \quad 5. \int (e^x + e^{-\frac{x}{2}}) dx. \quad 6. \int \frac{dx}{\sin^2 5x}.$$

$$7. \int (5 - 2x)^9 dx. \quad 8. \int \sqrt[3]{7 - 3x} dx. \quad 9. \int \frac{1}{\sqrt[3]{6 - x}} dx. \quad 10. \int \cos(1 - 3x) dx.$$

$$\begin{aligned}
& 11. \int \sin(5x+7)dx. \quad 12. \int \frac{2x}{x^2+1}dx. \quad 13. \int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 14. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx. \\
& 15. \int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx. \quad 16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}. \quad 17. \int x^2 \sin x dx. \quad 18. \int x \ln x dx. \quad 19. \int \arctg x dx. \\
& 20. \int \arcsin x dx. \quad 21. \int x^2 e^{2x} dx. \quad 22. \int e^x \sin x dx. \quad 23. \int (x+3) \sin x dx. \\
& 24. \int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx. \quad 25. \int x \arctg x dx. \quad 26. \int \frac{dx}{(3x+1)^3}. \quad 27. \int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx.
\end{aligned}$$

Mavzu. Ratsional funksiyalarni integrallash

Reja

1. Butun ratsional funksiyalar haqida;
2. To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar haqida;
3. Eng sodda ratsional kasr funksiyalarni integrallash;
4. Ratsional kasr funksiyalarni (umumiy xolda) integrallash;
5. Mustaxkamlash uchun savollar.
6. Mustakil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Kasr ratsional funksiyalar, to'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar, ko'p hadni ko'p hadga bo'lish, sodda kasrlar, ratsional funksiya yoyilmasi, noma'lum koeffitsientlar usuli.

1. Butun ratsional funksiyalar haqida;

Ta'rif. n natural son va $a_1, a_2, \dots, a_n$ uzgarmas sonlar bilan aniqlangan

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

funksiya butun ratsional funksiya (yoki kuphad) deyiladi. n natural son kuphadning darajasi deyiladi.

2. To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar haqida.

Utgan mavzuda ko'rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni xam hisoblash mumkin deb bo'lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ta'rif. Quyidagi kurinishdagi kasr funksiya

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}$$

ratsional kasr funksiya deyiladi.

Suratdagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik, ya'ni $m < n$ bo'lsa, berilgan kasrga to'g'ri ratsional kasr funksiya deyiladi. Suratdagi ko'phadning darajasi $m \geq n$ bo'lsa, noto'g'ri ratsional kasr funksiya deyiladi. Kasr noto'g'ri ratsional kasr funksiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, uni butun ratsional va

to'g'ri ratsional kasr funksiyaga keltirish mumkin. Masalan, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$ noto'g'ri ratsional

kasr funksiyani, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ kupxadni $x^2 - x$ kupxadga bo'lib,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu erda $T(x)$ butun ratsional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri ratsional kasr

funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr ratsional funksiyaning integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional

funksiyaning integrallashga keltiriladi.

3. Eng sodda ratsional kasr funksiyalarni integrallash;

Eng sodda ratsional kasr funksiyalar deganda quyidagi kurinishdagi funksiyalarni tushunamiz.

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A}{(x-a)^k} (k > 1 \text{ бo'лmиш son}); 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; (\frac{p^2}{4} - q < 0) \text{ ya'ni,}$$

kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

$$4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} (n > 1 \text{ butun son, } \frac{p^2}{4} - q < 0)$$

Bunda A, B, p, q, a - parametrlar haqiqiy sonlar.

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni jadval integrallari yordamida osongina integrallash mumkin, ya'ni,

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

buladi. Endi ushbu 3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ integralni kisoblaymiz.

Daslab uning xususiy holi xisoblangan $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q

uchxadda diskriminanti manfiy ekanligidan undan to'la kvadrat ajratib, $x + \frac{p}{2} = t$ almashtirishdan

keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)},$$

Bu erda $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi ifodaning suratida quyidagicha

shakl almashtirish bajaramiz

$$Ax+B = (2x+p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

Natijada integralni quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{(2x+p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C_1$$

bo'lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz. 1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2+9} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto'g'ri kasr ratsional funksiya iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -x^4 & x^2+9 \\ x^4+9x^2 & \\ \hline -9x^2 & \\ -9x^2-81 & \\ \hline 81 & \end{array}$$

$$\text{Demak, } \frac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}$$

bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^2+9} dx &= \\ &= \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

2-misol. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratamiz:

$$x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x-4)^2 + 9, \quad \text{hamda } x-4 = t, \quad dx = dt$$

almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C.$$

4. Ratsional kasr funtsiyalarni (umumiy xolda) integrallash.

Teorema. $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiya berilgan bulib uning maxrajini

$$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \dots (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \dots,$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, U xolda bu funksiyaning yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \dots +$$

$$+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{(x^2+2kx+\ell)} + \dots + \frac{F_mx+E_m}{(x^2+2kx+\ell)^m} + \dots \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda $r, s, \dots, t, m$, musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ , haqiqiy sonlar.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to'g'ri ratsional funksiyaning sodda kasrlar orqali yoyilmasi deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$

koeffitsientlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko'paytiramiz. $R(x)$ ko'phad bilan (1) yoyilmaning o'ng tomonida hosil bo'lgan ko'phad o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsientlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, noma'lum koeffitsientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini echib aniqmas koeffitsientlarni topamiz.

Ratsional funksiya yoyilmasidagi noma'lum koeffitsientlarni bunday usul bilan topishga noma'lum koeffitsientlar usuli deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ ratsional funksiyaning sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo'yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni $x^2 - 5x + 6$ ga ko'paytirib
 $2x - 1 = A_1(x - 2) + A_2(x - 3)$ *ëku* $2x - 1 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ tenglikni
 hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan
 $A_1 = 5, A_2 = -3$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

2-misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ ratsional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2 - 1 = A_1(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \text{ëku}$$

$$x^2 - 1 = (A_1 + M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1 + M_1 + M_2)x^2 + (N_1 + N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffitsientlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan
 $N_1 = 0, N_2 = 0, A_1 = -1, M_1 = 1, M_2 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning

ayirmasi ko'rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C$$

bo'ladi.

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to'g'ri ratsional funksiyani sodda kasrlar yig'indisi shaklida

yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko'paytirib,

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad \text{ëku} \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0 \\ x^1 & 2A+B=1 \\ x^0 & 2B=-2 \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{l} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ B=-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A=1 \\ C=-1 \end{array}$$

bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

bo'ladi.

5. Mustahkamlash uchun savollar

1. Butun ratsional funksiya nimadan iborat?
2. Kasr ratsional funksiyalar qanday?
3. To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
4. Noto'g'ri kasr ratsional funktsiyani integrallash, to'g'ri ratsional funktsiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?

5. Sodda kasr ratsional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Sodda kasr ratsional funksiyalar qanday integrallanadi?
7. Aniqmas koeffitsientlar usuli nima?

6. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu ratsional funksiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{x^3}{x-3} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{x^2+25} dx; \quad 3) \int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)} dx; \quad 4) \int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx;$$

$$5) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad 6) \int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx; \quad 7) \int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx; \quad 8) \int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

Mavzu. Irratsional va trigonometrik funksiyalarni integrallash

Reja

1. $\int x^m (a + bx^n)^p$ **kurinishdagi integrallarni integrallash.**
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **ko'rinishdagi integrallarni integrallash.**
3. $\int \frac{dx}{(x + \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **ko'rinishdagi integrallarni integrallash**
4. Har xil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.
5. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.**
6. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.
7. Mustaxkamlash uchun savollar.
8. Mustakil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Irratsional ifoda, irratsional funksiya, trigonometrik funksiyalarni integrallash, trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari, sinus va kosinus funksiyalar ko'paytmasi darajalaridan birortasi toq, ikkalasi ham juft yoki toq, aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

1. $\int x^m (a + bx^n)^p$ **kurinishdagi integrallarni integrallash.**

Irratsional funksiyalarni integrallash ko'p hollarda o'zgaruvchini almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irratsional funksiyalarning ayrimlarini karaymiz.

1. $\int x^m (a + bx^n)^p$ **kurinishdagi integralni xisoblash talab etilsin,**

bunda m, n, p ratsional sonlar, a va b lar noldan farqli o'zgarmaslar.

- 1) p butun son bo'lsa, Nyuton binomi bo'yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo'lsa, $ax^n = t^s$ almashtirish orqali

ratsionallashtiriladi, bunda $S = p$ kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun bo'lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinib,

ratsional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ ko'rinishida yozib,

$$m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{-2/3+1}{1/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

bo'lganligi uchun $(1+x^{1/3}) = t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3} = t^2 - 1, \frac{1}{3}x^{-2/3} dx = 2tdt, x^{-2/3} dx = 6tdt$$

bo'ladi. Bularni berilgan integralga qo'ysak,

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2} dx = \int t \cdot 6tdt = 6 \int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C$$

bo'ladi.

2-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4} dx$, $m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4}$

$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (butun) bo'lganligi uchun $x^{-4} + 1 = t^4$ almashtirish olsak,

$$x = (t^4 - 1)^{-1/4}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4} dt, \sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-1/4}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C,$$

$$t = \sqrt[4]{1+x^4} \text{ bo'lganligi uchun, } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} - \frac{1}{2} \arctg \sqrt[4]{1+x^4} + C$$

bo'ladi.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni integrallash.

Bunday ko'rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratish bilan

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \text{yoki} \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} \text{ jadval}$$

integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x + 1)^2 + 4$ to'la kvadrat ajratib,

$x + 1 = u$ desak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + 4}| + C = \ln|(x + 1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$

bo'ladi.

3. $\int \frac{dx}{(x + \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni integrallash

$\int \frac{dx}{(x + \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral, $\frac{1}{x + \alpha} = t$ almashtirish orqali 2.

ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x + 1} = t$ desak, $t(x + 1) = 1$, $tx + t = 1$, $tx = 1 - t$, $x = \frac{1 - t}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$

olamiz. Natijada

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1 - t}{t}\right)^2 + 2\frac{1 - t}{t} + 2}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1 - 2t + t^2}{t^2} + \frac{2 - 2t}{t} + 2}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t + t^2 + 2t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{aligned}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

4. Harxil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.

$$\int \sin mx \cos nxdx, \int \sin mx \sin nxdx, \int \cos mx \cos nxdx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. Maktab kursidan ma'lum bo'lgan trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini, yig'indiga keltirish

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

formulalardan foydalanib, (1) ko'rinishdagi integrallarni

$$\int \sin ax dx, \quad \int \cos bx dx$$

integrallardan biriga keltirib integrallanadi.

1-misol. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalarning birinchisidan

$$\sin 2x \cos 7x = \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.$$

natijaga ega bo'lamiz.

2-misol. $\int \cos 7x \cos 3x dx, \quad \int \sin 4x \sin 2x dx, \quad \int \sin 5x \cos 3x$ integrallarni

mustaqil hisoblang.

5. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bunda m, n lar butun sonlar. Xususiyl hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

3-misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d(\cos x)$ va $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ekanligini hamda

$\cos x = z$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

4-misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d \cos x$ bo'lgani uchun, $t = \cos x$ almashtirish olsak,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

bo'ladi.

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

6-misol. $\int \sin^2 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni izoklarsiz hisoblaymiz:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

7-misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Trigonometrik funksiyalarning darajalarini pasaytirish formulalaridan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

3. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar. Biz yuqorida elementar funksiyalarni o'z ichiga olgan muhim integrallash usullarini ko'rdik. Lekin amaliyotda faqat shu usullardan aynan foydalanamiz degan fikr bo'lmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, integral ostidagi funksiyaning berilishiga qarab unga mos mulohazalardan foydalanish kerak. Masalan,

$$\int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} dx = \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\ = \ln|x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C$$

yoki

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C$$

integrallashni bajarish mumkin.

Juda ko'p integrallarni hisoblashda ayrim xususiy usullardan foydalanib oldingi hisoblangan integrallarga keltiriladi. Shuning uchun amaliyotda integrallashda tayyor qo'llanmalardan foydalanish ham mumkin. Masalan [Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.Р.Прудников. Таблицы неопредельных интегралов. М.: Наука 1986-192s].

Integrallashning bayon etilishidan ma'lumki integrallash texnikasi differentsiallashtan murakkabroqdir. Shuning uchun ham integrallashda shunday ko'nikmalar kerakki, bunga ko'p sonligi misollarni yechish natijasida erishish mumkin.

Ma'lumki differentsial hisobda istalgan elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin edi va u yana elementar funksiyalar bilan ifodalanar edi. Integral hisobda esa masala boshqacharoq bo'lib, ko'plab

misollar keltirish mumkinki, integral $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ ostidagi funksiyaning

boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'lishiga qaramasdan, ular elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Bunday integrallar yaxshi o'rganilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun tayyor jadvallar, grafiklar tuzilgan.

Mustahkamlash uchun savollar

Qanday funksiyalar sinfiga irratsional funksiyalar deyiladi?

9. Irratsional funksiyalar qanday integrallanadi

1. Trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indiga keltiriladigan formulalarni yozing?

2. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalar ratsionallasadi?

3. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalarning tartibini pasaytirish bilan integrallanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

2. Ushbu irratsional funksiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx; \quad 2) \int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx; \quad 3) \int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}; \quad 5) \int \frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$$

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$. 2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$. 3. $\int \sin x \sin 3x dx$.
4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$. 5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$. 6. $\int \sin 3x \cos x dx$.
7. $\int \sin x \cos^4 x dx$. 8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. 9. $\int \sin^2 5x dx$.
10. $\int \cos 7x \cos 3x dx$. 11. $\int \sin 4x \sin 2x dx$.
12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 13. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$. 14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.
15. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. 16. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$. 17. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
18. $\int \sin^4 x dx$. 19. $\int \cos^4 x dx$. 20. $\int \sin^5 x dx$.
21. $\int \cos^5 x dx$. 22. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. 23. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$.

II - BO'LIM. Aniq integral

Mavzu. Aniq integral va uning asosiy xossalari

Reja

1. Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.
3. Aniq integralning asosiy xossalari.
4. Aniq integralni hisoblash. N'uton-Leybnits formulasi.
5. Mustaxkamlash uchun savollar.
6. Mustakil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, aniq integral, integral yig'indi, funksiyaning integrallanuvchanligi, aniq integralning asosiy xossalari, aniq integralning kattaligi, N'uton-Leybnits formulasi, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.

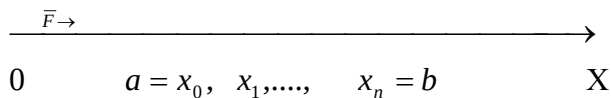
1. **Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.** Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.

Iozalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi

Masala. Material nuqta F o'zgaruvchan kuch ta'sirida OX o'qi bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. F kuch ta'sirida material nuqta a nuqtadan b nuqtaga o'tganda bajarilgan ishni hisoblang.

Yechish: F kuch $[a, b]$ oraliqda o'zgaruvchi x ning funksiyasi bo'ladi. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz deb qaraymiz va $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali $[x_{i-1}, x_i]$ qisman kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma'lumki kuch o'zgarmas bo'lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot l$ formula orqali aniqlanadi, bunda F jismga ta'sir etayotgan kuch miqdori, l esa ushbu kuch ta'sirida jismning siljish uzunligi. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ qisman kesmada bittadan nuqta (c_i) larni tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$ larni hisoblaymiz ($i = 1, n$). Bunda har bir $[x_{i-1}, x_i]$ qisman kesmada jismga ta'sir etayotgan kuchni kattaligini $F(c_i)$ desak, u holda shu qisman kesmada bajarilgan ish $A_i = F(c_i) \Delta x_i$ kabi aniqlanadi. Demak, butun $[a, b]$ kesmada bajarilgan ishning qiymati taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

bo'ladi. $[a, b]$ oraliqni bo'lishlar sonini qanchalik oshirsak hisoblanayotgan ishning qattaligidagi xatolik shunchalik kamayadi. Shuning uchun $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz. $\lambda \rightarrow 0$ munosabati oraliqni

bo'lishlar soni cheksiz kattalashishini bildiradi, $F(c_i)$ kattaliklar esa oniy kuch kattaligini ifodalaydi. Natijada bajarilgan ishning aniq qiymati uchun

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \quad (1)$$

munosabatni olamiz.

Shunday qilib, F **o'zgaruvchan kuchning bajarilgan ishini hisoblash** uchun (1) ko'rinishdagi cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan.

2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.

Endi roqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. Bizga $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali uzunliklari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, n$ bo'lgan n ta qisman kesmalarga ajratamiz va har bir qisman kesmada bittadan $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda funksiyaning $f(c_i)$ qiymatlarini hisoblab $f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$ yig'indini tuzamiz? bu yig'indiga

$y = f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi. $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash

kiritamiz.

Ta'rif. $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ integral yig'indining $[a, b]$ kesmaning $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

qisman kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $C_1, C_2, \dots, C_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \rightarrow 0$ dagi chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi **aniq integrali** deyiladi va

$$\int_a^b f(x) dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u **integrallanuvchi** ya'ni bunday funksiyaning **aniq integrali** mavjuddir.

3. Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx;$$

2) o'zgaras ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

3) $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

bo'ladi;

4) $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

bo'ladi;

5) $c \in [a, b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

$$7) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$8) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$9) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$$

bo'ladi;

10) $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada shunday bir C nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunga o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

4. Aniq integralni hisoblash. N'uton-Leybnits formulasi.

Aniq integralning ta'rifiga asosan, ya'ni cheksiz ko'p sonli cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog'lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x)$, $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

formula o'rinli bo'lib, bunga **N'uton-Leybnits formulasi** deyiladi. Bundan foydalanib **aniq integralning kattaligi** hisoblanadi.

Shunday qo'yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang'ich funksiyaning topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to'laroq shug'ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o'z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik, buning o'rniga

ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx = \int_2^3 (t^2 - 4)t 2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2) dt = 2 \int_2^3 t^4 dt - 8 \int_2^3 t^2 dt = 2 \frac{t^5}{5} \Big|_2^3 - 8 \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) - \frac{8}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33 \frac{11}{15}.$$

Demak, **aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda** o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x \sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: **Bo'laklab integrallash**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq integralga keltiriladi?
2. Integral yig'indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun qanday xossaga ega bo'lishi kerak?
6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Ньютон-Лейбнитс formulasini yozing?
8. Aniq integralni bo'laklab integrallash nimadan iborat?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$$\begin{array}{ll} 1. \int_2^4 (x^3 + x) dx. & 2. \int_1^e \frac{1}{x} dx. \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}. \quad 4. \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx. \\ 5. \int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}. & 6. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}. \quad 7. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}. \quad 8. \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx. \\ 9. \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx. & 10. \int_{\pi}^0 x \cos x dx. \end{array}$$

Mavzu. Aniq integralning tatbiqlari

Reja

1. Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash.
2. Egri chiziqli yoy uzunligini hisoblash.
3. Aylanma jism hajmini hisoblash.
4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari.
5. Mustahkamlash uchun savollar.
6. Mustaqil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

IOzalarni hisoblash, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli yoyining uzunligi, aylanma jism hajmi, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, ishlab chiqarishning mehnat unumdorligi, mahsulotlar (tovarlar) zahirasi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi, daromad funksiyasi,

1. Aniq integral yordamida yassi figuralar ʻozlarini hisoblash $y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan chegaralangan figuraga egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Bunday egri chiziqli trapetsiyaning ʻozi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya'ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan ʻoza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2)$$

aniq integralga teng bo'ladi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan ʻoza

$$S_2 = \int_c^d x dy = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, ʻoza

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt \quad (4)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan ʻozani hisoblang

Yechish. $y = \frac{8}{x}$ bo'lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8 \ln x \Big|_1^e = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2$, $y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan ʻozani toping.

$$\text{Yechish: } \begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x$, $x^4 - x = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abstsissalari bo'lib, bu ʻoza

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}$$

bo'ladi.

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yozini toping.

Yechish. Ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3 \cos t$

tenglamada $x = 0$, $x = 3$ bo'lganda $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$ bo'lganligini hisobga olib,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (-3 \sin t) dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= 12t \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2} \sin 2t \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 6(\sin \pi - \sin 0) = 6\pi. \end{aligned}$$

2. **Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.** To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada silliq (ya'ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo'lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

$$7\text{-misol. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3y^{\frac{1}{3}}} y' = 0 \text{ bundan, } y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}. \text{ YOy uzunligi formulasiga asosan,}$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\sqrt[3]{y} / \sqrt[3]{x}\right)^2} dx = \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = 4 \sqrt[3]{a} \left. \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_0^a = 4 \frac{3}{2} \sqrt[3]{a} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - 0 \right) = 6a. \end{aligned}$$

3. Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko'ra X o dan 3 gacha o'zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \bigg|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi.$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini

hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{bo'lib, integralning chegaralari } c = -b, d = b \text{ bo'ladi. (8)}$$

formulaga

asosan,

$$V_y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^b dy - \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^b - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^b =$$

$$= \pi a^2 [b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

$$\text{Demak, } V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$a = b = R \text{ bo'lsa, shar hosil bo'lib } V_{uu} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ bo'ladi.}$$

4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz. 1). Ma'lumki, **mehnat unumdorligi** ish kuni mobaynida o'zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig'i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) **mehnat unumdorligini** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Vaqtning (3,4) oralig'ini eng kattasining uzunligi Δx bo'lgan oraliqlarga bo'lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o'zgarmas desak ishlab chiqarish mehnat unumdorligini $f(x) \Delta x$ ko'paytmaga teng bo'ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_3^4 f(x) \Delta x = \int_3^4 f(x) dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan **mahsulot miqdorini** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo'lsa, x dan $x + \Delta x$ vaqt oralig'idagi omborga $f(x) \Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi **tovarning zahirasi**

$$\int_0^x f(x) dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o'zgarmas a ga teng bo'lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo'lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t a dx = [ax]_0^t = at$$

bo'ladi. Agar **mahsulot ishlab chiqarish hajmi** arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi ya'ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo'lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x) dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik **daromad t vaqtning funksiyasi** $D = f(x)$ **bo'lsin**. Protsent (foiz) me'yori ulushi i bo'lib, foizlar ustiga qo'shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag' bilan boshlang'ich mablag' orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig'i t ni n ta teng bo'laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig'ida daromadni o'zgarmas deb $f(t) \Delta t$ ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo'shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t) \Delta t}{e^{it}} = f(t) \Delta t e^{-it}.$$

$(0, t)$ vaqt oralig'idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_0^t f(t) e^{-it} \Delta t = \int_0^t f(t) e^{-it} dt$$

bo'ladi.

Xususiyl holda, yillik daromad o'zgarmas bo'lsa, ya'ni $f(x) = a$ bo'lsa, diskontli daromad

$$d = \int_0^t a e^{-it} dt = a \int_0^t e^{-it} dt = a \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i} (1 - e^{-it})$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qo'yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yozlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = 0$; 2) $x = 4 - y^2$, $x = 0$; 3) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1$, $x = 3$ to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan chegaralangan;

$$5) x = 2 - y^2 - y^2, x = 0; \quad 6) y = 2 - x^2, y = x^2;$$

$$7) y = x^2 + 4x, y = x + 4; \quad 8) x = 3t^2, y = t - t^3.$$

2. $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x + 4)^3$ va $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3, x = 0, y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aniq integral yordamida qanday ʻozalarni hisoblash mumkin?
2. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?
3. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?
4. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?
6. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?
7. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
8. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi bo'lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
9. Yillik daromad funksiyasi nima?
10. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

Aniq integralni taqribiy hisoblash. Xosmas integrallar

Reja

1. Trapetsiyalar formulasi.
2. Simpson formulasi.
3. Xosmas integrallar.
4. Mustahkamlash uchun savollar.
5. Mustakil bajarish uchun misollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Taqribiy hisoblash, trapetsiyalar formulasi, Simpson formulasi, hisoblash xatosi, parabolik trapetsiya, xosmas integral, cheksiz oraliq bo'yicha integral, xosmas integral yaqinlashuvchi, xosmas integrall uzoqlashuvchi, chegaralanmagan funksiyaning chekli oraliq bo'yicha xosmas integrali.

Hisoblash amaliyotida ko'pincha boshlang'ich funksiyalari elementar bo'lmagan, ya'ni chekli ko'rinishda ifodalab bo'lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnits formulasini qo'llab bo'lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Hisoblash mashinalarining jadal taraqqiy etib borishi natijasida aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari keng tatbiq qilinmoqda.

Integral ostidagi funksiya elementar boshlang'ich funksiya ega bo'lsada, biroq, uni Nyuton - Leybnits formulasi bo'yicha hisoblash murakkab va katta hajmdagi hisoblash ishlarini talab etadigan hollarda ham taqribiy hisoblash usullari afzal bo'ladi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib ulardan ko'proq ishlatiladiganlari trapetsiyalar va Simpson usullaridir.

1. Trapetsiyalar formulasi

Trapetsiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz $[a, b]$ kesmani

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali n ta teng qisman kesmalarga ajratamiz.

Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlarini

hisoblaymiz ($i = 1, n$). $[x_{i-1}, x_i]$ qisman kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash

qadami deyiladi. Bo'linish nuqtalaridan $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ordinatlarni o'tkazamiz. Ordinatlarning oxirlarini to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirib trapetsiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo'lgan trapetsiyalar yig'indisini olamiz. Bu holda

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

Shunday qilib, natijada

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right] \quad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga **trapetsiyalar formulasi** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapetsiyalarning ʻrozlarini to'g'ri chiziqli trapetsiyalar ʻrozlari bilan taqriban almashtirdik. n o'sib borishi bilan to'g'ri chiziqli trapetsiyalarning ʻrozi egri chiziqli trapetsiyalar ʻrozlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo'l qo'yilgan **absolot xato** .

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko'rsatish mumkin, bunda M_2 , $|f''(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2. Simpson formulasi. $[a, b]$ kesmani $n = 2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo'lamiz. Uchta (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) nuqtalar olib ulardan parabola o'tkazamiz. Bu parabola bilan $y = f(x)$ funksiyaning $[x_0, x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o'xshash $y = f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapetsiyaning ʻrozini $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$,..... kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyalar ʻrozlarining yig'indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapetsiya **parabolik trapetsiya** deyiladi.

Parabolik trapetsiyalar ʻrozlarini qo'shib,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] \quad (2)$$

Bu formula **Simpson (parabolalar) formulasi** deyiladi. Simpson formulasining **absolot xatosi**

$$\frac{M_4 (b-a)^5}{2880n^4}$$

dan katta bo'lmaydi, bunda M_4 , $|f^{(4)}(x)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng

katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma'lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o'sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapetsiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ aniq integral trapetsiyalar va Simpson

formulalaridan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish.

$$[0, 1]$$

kesmani

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng

bo'lakka bo'lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1,$$

$$f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214,$$

$$f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729,$$

$$f(x_5) = f(1) \approx 0.36788.$$

Trapetsiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} \left[\frac{1 + 0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729 \right] = 0.74805.$$

Simpson formulasi bo'yicha, hisoblash uchun $[0,1]$ kesmani

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo'laklarga ajratamiz va

bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

bo'ladi.

Simpson formulasiga asosan:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12} [1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2 \cdot 0.7788] \approx 0.7469$$

bo'ladi.

3. Xosmas integrallar

Aniq integralning ta'rifida integrallash chegaralari chekli va integral ostidagi funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan deb olingan edi. Bu shartlardan hech bo'lmaganda birortasi bajarilmasa, integralning yuqoridagi ta'rif ma'nosini yo'qotadi.

Biroq nazariy va amaliy mulohazalarga muvofiq aniq integralning ta'rif bu cheklanishlar bajarilmaydigan hollar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

Bunday integrallar bizga tanish bo'lgan aniq integrallarga xos bo'lmagan qisqacha xosmas integrallar deb aytiladi.

Xosmas integrallarning ikki asosiy turini qaraymiz:

1). Uzlüksiz funksiyalarning cheksiz oraliq bo'yicha integrallari. $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$

oraliqda berilgan va uning istalgan qismi $[a, A]$ da integrallanuvchi, ya'ni istalgan $A > a$ da aniq integral mavjud bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = J$$

limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, \infty)$ oraliqdagi **xosmas integrali** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

J limit chekli bo'lsa, **xosmas integral yaqinlashuvchi** deyiladi. Limit mavjud bo'lmasa, **xosmas integral uzoqlashuvchi** deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty, a]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral ham xuddi yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx. \quad (2)$$

$f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral quyidagicha aniqlanadi.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$

bu erda a istalgan son. (3) integrallarda o'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashsa chap tomondagi integral ham yaqinlashuvchi deyiladi. O'ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashsa, chap tomondagi integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Xosmas integrallarni hisoblash uchun Nyuton-Leybnits formulasidan foydalaniladi. $F(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [F(A) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x)$$

bo'lib, bu erda: $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ integralning yaqinlashishini yoki

uzoqlashishini aniqlaydi.

1-misol. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

Demak, integral yaqinlashuvchi va $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

$$2\text{-misol. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty \text{ bo'lib, bu}$$

integral uzoqlashuvchi.

2). CHegaranmagan funksiyalarning chekli oraliq bo'yicha xosmas integrallari. $(a, b]$

intervalda uzluksiz va $x = a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanib aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (4)$$

Oxiri limit mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Bunday integrallarga 2-tur xosmas integral deyiladi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, Nyuton - Leybnits formulasini qo'llash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, $x \rightarrow a$ da $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$[a, b)$ intervalda $x = b$ nuqtada uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya xosmas integrali ham shunga o'xshash bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b - \varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

bunda $F(b)$, $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning $x \rightarrow b$ dagi limiti.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning biror $x = c$ nuqtasida uzilishga ega bo'lsa xosmas integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (5)$$

O'ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchidir. O'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi bo'lsa, chap tomondagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$3\text{-misol. } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.}$$

$$\text{Yechish: } x \rightarrow 0 \text{ da } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty \text{ demak,}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. 2\sqrt{x} \right|_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Demak, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral yaqinlashuvchi.

4-misol. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \rightarrow +\infty$, $x = 0$ nuqta $[-1, 8]$

kesmaning ichki nuqtasi. (5) formuladan foydalansak,

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = \left. 3\sqrt[3]{x} \right|_{-1}^8 = 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{-1} = 3 - (-3) = 6$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_0^1 x^2 dx$ integralni $n = 5$ bo'lakka bo'lib, trapetsiyalar

formulasi bilan hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ integralni $n = 10$ teng bo'laklarga bo'lib, trapetsiyalar va Simpson formulalari

yordamida hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

3. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad 3) \int_0^{\infty} e^{-x} dx; \quad 4) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$5) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad 6) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

4. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$1) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \quad 5) \int_0^1 \frac{1}{x} dx; \quad 6) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin?
2. Trapetsiyalar formulasi qanday yoziladi ?
3. Simpson fomulasini yozing.
4. CHegarlari cheksiz bo'lgan integral qanday aniqlanadi ?
5. Xosmas integrallarning yaqinlashuvligi va uzoqlashuvchiligi nimalardan iborat ?
6. Kesmada uzulishga ega bo'lgan funksiyaning integrali qanday aniqlanadi?

INFORMATSION-USLUBIY TA'MINOT

Asosiy adabiyotlar

№	Muallif, adabiyot nomi, turi, nashriyot, yili, hajmi	Kutubxonada mavjud nusha
1	Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. М.: АЙРИС ПРЕС, 2009 г.	
2	Soatov YO.U. "Oliy matematika", T.: "O'qituvchi", 1-jild. 1992y.	1-150
3	Soatov YO.U. "Oliy matematika", T.: "O'qituvchi", 2-jild. 1993y.	2-190
4	Soatov YO.U. "Oliy matematika", T.: "O'qituvchi", 3-jild. 1994y.	3-100
5	Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. T.: "O'qituvchi", 1 va 2-jild.	200
6	Shneyder B.E. va boshqalar. Oliy matematika qisqa qursi, T.: "O'qituvchi", 1 va 2-jild. 1987 y.	300
7	В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. М.: "Наука" 1997 г. 369 с.	18
8	Б.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: "Наука", 1995 г.	100