Математикага ихтисослашган академик лицейларда “Эркин ва мажбурий тебраниш элементлари”ни ўқитиш технологияси

Э.О. Шарипов.
Қарши муҳандислик иқтисодиёт институти катта ўқитувчиси.

Аннотация

Педагогик технология тамойиллари асосида ўқув машғулотини лойиҳалашда “Дастпанжа” модели орқали амалга ошириладиган 1-7 вазифалар келтирилиб, йўналтирилган матн келтирилган.

Йўналтирилган матнда дастлаб $x''(t)+bx'(t)+\omega^2 x(t)=0 \quad (b,\omega - const)$ муҳит қаршилиги мавжуд бўлганда эркин тебранишлар тенгламаси ва $x''(t)+\omega^2 x(t)=0,\ x=x(t)$ *гармоник ассилятор* тенгламаси ёки юкга муҳит қаршилиги бўлмаганида эркин тебранишлар тенгламасининг умумий ечими кўриниши $x(t)=C_1\cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ шаклда эканлиги исботланган.

Шундан сўнг муҳит қаршилиги мавжуд бўлганда $x''(t)+\omega^2 x(t)=A\cos(\Omega t+\beta)$ тенгламанинг умумий ечими эркин тебранишлар тенгламасининг умумий ечими билан тенгламанинг бир дона хусусий ечимидан иборат. Бу бир дона хусусий ечимни эркин тебранишлар тенгламасининг умумий ечимидаги ихтиёрий ўзгармасларни вариатциялаш усули билан $\overline{x(t)}=C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t$ хусусий ечим аниқланган.

Математикадан ихтисослашган академик лицейларда дифференциал тенгламалар элементларини ўқитишда амалий тадбиқлари билан биргаликда математик қатъийликка ҳам эътибор бериш мақсадга мувофиқдир. Шу муносабат билан қўйида келтириладиган мулоҳазаларни математикага ихтисослашган лицей ўқитувчилари учун фойдалидир. Педагогик технология тамойиллари асосида ўқув машғулотини лойиҳалашда қуйидаги вазифаларни “Дастпанжа” модели орқали амалга оширишни келтирамиз:

1.Кичик модуллар, уларнинг олдига қуйилган мақсадлар ва уларга ажратилган вақт.
2. Таянч тушунчалар ва улар асосидаги назорат саволлари
3. Дарс турлари ва типлари
4. Қўлланиладига усул ва услублар
5. Фойдаланиладиган ахборот технологиялари
6. Дидактик материаллар
7. Йўналтирилган матн ёки дарс сенарийси

Йўналтирилган матн

Ушбу

$$x''(t)+bx'(t)+\omega^2 x(t)=0 \quad (b,\omega - const)$$

иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама ёки юкга муҳит қаршилиги мавжуд бўлганда *эркин тебранишлар* тенгламаси дейилади.

$$x''(t)+\omega^2 x(t)=0,\ x=x(t) \tag{1}$$

гармоник ассилятор тенгламаси ёки юкга муҳит қаршилиги бўлмаганида эркин тебранишлар тенгламаси дейилади.Осонгина текшириб кўриш мумкинки, ушбу

$$x(t)=C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{2}$$

функция ихтиёрий C_1, C_2 ўзгармаслар учун (1) дифференциал тенгламанинг $(-\infty,+\infty)$да аниқланган ечимидир. Бу ерда шуни эътироф этайликки, $x(t)$ ва унинг ҳосиласи $x'(t)$ дан тузилган:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \\ x'(t) = -\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t \end{cases} \qquad (3)$$

системадаги C_1 ва C_2 ларни $x(t)$ ва унинг ҳосиласи $x'(t)$ орқали топиш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, (3) системадан

$$\begin{cases} C_1 = x(t)\cos\omega t - \dfrac{1}{\omega} x'(t)\sin\omega t \\ C_2 = x(t)\sin\omega t + \dfrac{1}{\omega} x'(t)\cos\omega t \end{cases} \qquad (4)$$

эканлиги келиб чиқади.

Жумла: (2) формула (1) дифференциал тенгламанинг барча ечимлар мажмуасини (умумий ечимини) ифодалайди.

Исбот. Ихтиёрий ўзгармаслар C_1, C_2да (2) формула (1) тенгламанинг $(-\infty,+\infty)$ оралиқда аниқланган ечими эканлиги юқорида эътироф этилди.Энди (1) тенгламанинг ҳар қандай ечими (2) кўринишда бўлишини исботлаймиз. $x = x(t)$ функция (1) тенгламанинг ихтиёрий ечими бўлсин.У ҳолда

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad (5)$$

тенгламани қанотлантиради.(4) системадан келиб чиқиб, ушбу

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = x(t)\cos\omega t - \dfrac{1}{\omega} x'(t)\sin\omega t \\ \varphi_2(t) = x(t)\sin\omega t + \dfrac{1}{\omega} x'(t)\cos\omega t \end{cases} \qquad (6)$$

ёрдамчи функцияларни киритамиз. Уларни ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = x'(t)\cos\omega t - \omega x(t)\sin\omega t - \dfrac{1}{\omega} x''(t)\sin\omega t - x'(t)\cos\omega t \\ \varphi_2'(t) = x'(t)\sin\omega t + \omega x(t)\cos\omega t + \dfrac{1}{\omega} x''(t)\cos\omega t - x'(t)\sin\omega t \end{cases}$$

ихчамлаш натижасида:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = -\dfrac{1}{\omega}\left(x''(t) + \omega^2 x(t)\right)\sin\omega t \overset{(5)}{=} 0 \\ \varphi_2'(t) = \dfrac{1}{\omega}\left(x''(t) + \omega^2 x(t)\right)\cos\omega t \overset{(5)}{=} 0 \end{cases}$$

$\varphi_1'(t) = \varphi_2'(t) = 0$ бўлганлиги учун $\varphi_1(t) = C_1, \varphi_2(t) = C_2$, яъни (4) система ҳосил бўлади. (4) системадан $x = x(t)$ функцияни топамиз. Бунинг учун системанинг биринчи тенгламасини $\cos\omega t$ га иккинчи тенгламасини $\sin\omega t$ га кўпайтириб тенгламаларни қўшсак $x(t)\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ ёки $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ эга бўламиз. Демак, (1) тенгламанинг ҳар қандай ечими (2) кўринишда ифодаланади. Жумла исботланди.

Энди ихтиёрий ўзгармасларнинг ўрнига $C_1 = a\sin\alpha, C_2 = a\cos\alpha$ муносабатлар орқали боғланган янги ихтиёрий $a > 0$ ва α ўзгармасларни киритамиз. a ва α лар C_1 ва C_2 орқали қуйидагича ифодаланади:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}$$

C_1 ва C_2 нинг ифодаларини (2) тенгликка қўямиз:

$$x(t) = a\sin\alpha\cos\omega t + a\cos\alpha\sin\omega t = a\sin(\omega t + \alpha) \qquad (7)$$

Бу формула (1) тенгламани умумий ечими, юк сода даврий ҳаракат қилаётганини кўрсатади. Бу ҳаракат *гармоник тебраниш* дейилади. Тебраниш даври $T = \frac{2\pi}{\omega}$ га тенг. Ҳақиқатдан:

$$x\left(t \pm \frac{2\pi}{\omega}\right) = a\sin\left(\omega\left(t \pm \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right) = a\sin(\omega t + \alpha \pm 2\pi) = a\sin(\omega t + \alpha) = x(t)$$

ω катталик тебранишнинг *хусусий частотаси*, a катталик юкнинг мувозанат ҳолатидан энг катта четланишни билдиради ва тебраниш *амплитудаси* дейилади. α *бошланғич фаза* дейилади.

Энди муҳит қаршилиги мавжуд бўлмаган бироқ юкка ташқи даврий қўзғатувчи $f(t) = A\cos(\Omega t + \beta)$ куч таъсир этадиган ҳолни қараймиз. Бунда $A > 0, \Omega > 0$ ва $\beta -$ ихтиёрий ўзгармас. Бу ҳолда ҳаракат тенгламаси

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = A\cos(\Omega t + \beta) \tag{8}$$

кўринишда бўлади. Маълумки, бу тенгламанинг умумий ечими бир жинсли бўлмаган (8) тенгламанинг хусусий ечими $\overline{x(t)}$ билан мос бир жинсли (1) тенгламанинг умумий ечими $x(t)$ йиғиндисига тенг,яъни

$$X(t) = x(t) + \overline{x(t)} \tag{9}$$

Бу $X(t)$ ва $X''(t)$ ларни (8) тенгламага қўйиб гуруҳласак,

$$\left[x''(t) + \omega^2 x(t)\right] + \left[\overline{x''(t)} + \omega^2 \overline{x(t)}\right] = A\cos(\Omega t + \beta)$$

Бундан $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ бу тенгламанинг умумий ечими (2) формула ёки (7) функция билан ифодаланган. $\overline{x(t)}$ хусусий ечимни топиш учун (2) даги ихтиёрий ўзгармасларни ўзгарувчи деб фараз қиламиз:

$$\overline{x(t)} = C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t \tag{10}$$

$\overline{x''(t)}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\overline{x'(t)} = C_1'(t)\cos\omega t + C_2'(t)\sin\omega t - \omega C_1(t)\sin\omega t + \omega C_2(t)\cos\omega t \tag{11}$$

$C_1(t)$ ва $C_2(t)$ номаълум функцияларни топиш учун

$$C_1'(t)\cos\omega t + C_2'(t)\sin\omega t = 0 \tag{12}$$

шартни киритамиз. У ҳолда биринчи тартибли ҳосила

$$\overline{x'(t)} = -\omega C_1(t)\sin\omega t + \omega C_2(t)\cos\omega t$$

иккинчи тартибли ҳосиласи:

$$\overline{x''(t)} = -\omega C_1'(t)\sin\omega t + \omega C_2'(t)\cos\omega t - \omega^2 C_1(t)\cos\omega t - \omega^2 C_2(t)\sin\omega t \tag{13}$$

га тенг бўлади.(10) ва (13) ларни

$$\overline{x''(t)} + \omega^2 \overline{x(t)} = A\cos(\Omega t + \beta) \tag{14}$$

тенгламага қўйиб,

$$-\omega C_1'(t)\sin\omega t + \omega C_2'(t)\cos\omega t = A\cos(\Omega t + \beta) \tag{15}$$

(12) ва (15) ларни биргаликда ечамиз:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\omega t + C_2'(t)\sin\omega t = 0 \\ -\omega C_1'(t)\sin\omega t + \omega C_2'(t)\cos\omega t = A\cos(\Omega t + \beta) \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасини $\omega\cos\omega t$ га, иккинчи тенгламасини $\sin\omega t$ га кўпайтириб айирилса, $C_1'(t) = -\frac{A}{\omega}\sin\omega t\cos(\Omega t + \beta)$. Худди шундай системанинг биринчи тенгламасини $\omega\sin\omega t$ га, иккинчи тенгламасини $\cos\omega t$ кўпайтириб қўшсак $C_2'(t)=\frac{A}{\omega}\cos\omega t\cos(\Omega t+\beta)$ ларни топамиз. Буларни интеграллаб

$$C_1(t)=-\frac{A}{\omega}\int\sin\omega t\cos(\Omega t+\beta)dt=-\frac{A}{2\omega}\int\left[\sin((\Omega+\omega)t+\beta)-\sin((\Omega-\omega)t+\beta)\right]dt \quad (16)$$

$$C_2(t)=\frac{A}{\omega}\int\cos\omega t\cos(\Omega t+\beta)dt=\frac{A}{2\omega}\int\left[\cos((\Omega+\omega)t+\beta)+\cos((\Omega-\omega)t+\beta)\right]dt \quad (17)$$

Бунда $|\omega|\neq|\Omega|$ деб интеграллаш амали бажарилади.

$$C_1(t)=\frac{A}{2\omega(\Omega+\omega)}\cos((\Omega+\omega)t+\beta)-\frac{A}{2\omega(\Omega-\omega)}\cos((\Omega-\omega)t+\beta) \quad (18)$$

$$C_2(t)=\frac{A}{2\omega(\Omega+\omega)}\sin((\Omega+\omega)t+\beta)+\frac{A}{2\omega(\Omega-\omega)}\sin((\Omega-\omega)t+\beta) \quad (19)$$

Буларни (10) га қўйиб,

$$\overline{x(t)}=\left[\frac{A}{2\omega(\Omega+\omega)}\cos((\Omega+\omega)t+\beta)-\frac{A}{2\omega(\Omega-\omega)}\cos((\Omega-\omega)t+\beta)\right]\cos\omega t+$$

$$+\left[\frac{A}{2\omega(\Omega+\omega)}\sin((\Omega+\omega)t+\beta)+\frac{A}{2\omega(\Omega-\omega)}\sin((\Omega-\omega)t+\beta)\right]\sin\omega t \qquad \text{ёки}$$

$$\overline{x(t)}=\frac{A}{\omega^2-\Omega^2}\cos(\Omega t+\beta) \quad (20)$$

(7) ва (20) ларни (9) га қўйиб, (8) тенгламанинг умумий ечими ҳосил бўлади.

$$X(t)=x(t)+\overline{x(t)}=a\sin(\omega t+\alpha)+\frac{A}{\omega^2-\Omega^2}\cos(\Omega t+\beta) \quad (21)$$

Агар ташқи қўзғатувчи кучнинг Ω частотаси пружина тебранишларнинг хусусий частотаси ω га яқин бўлса, у ҳолда $\omega^2-\Omega^2$ айирма нолга яқин бўлиши ва тебраниш амплитудаси кескин ортиши келиб чиқади. Бундай ҳолда *резонанс* рўй берди дейилади. Агар $|\omega|=|\Omega|$ бўлса, (21) формуладан фойдаланиб бўлмайди.У ҳолда қуйидаги ҳолларни қараймиз.

а) $\Omega=-\omega$ бўлса

$$x''(t)+\omega^2x(t)=A\cos(\beta-\omega t) \quad (22)$$

тенглама ҳосил бўади. (16) ва (17) тенгликлардан

$$C_1(t)=-\frac{A}{\omega}\int\sin\omega t\cos(-\omega t+\beta)dt=-\frac{A}{2\omega}\int\left[\sin\beta-\sin(\beta-2\omega t)\right]dt$$

$$C_2(t)=\frac{A}{\omega}\int\cos\omega t\cos(-\omega t+\beta)dt=\frac{A}{2\omega}\int\left[\cos\beta+\cos(\beta-2\omega t)\right]dt$$

бундан:

$$C_1(t)=-\frac{A}{2\omega}t\sin\beta+\frac{A}{4\omega^2}\cos(\beta-2\omega t) \quad (23)$$

$$C_2(t)=\frac{A}{2\omega}t\cos\beta-\frac{A}{4\omega^2}\sin(\beta-2\omega t) \quad (24)$$

Буларни (10)га қўйиб,

$$\overline{x(t)}=\left(-\frac{A}{2\omega}t\sin\beta+\frac{A}{4\omega^2}\cos(\beta-2\omega t)\right)\cos\omega t+\left(\frac{A}{2\omega}t\cos\beta-\frac{A}{4\omega^2}\sin(\beta-2\omega t)\right)\times$$

$$\times\sin\omega t=\frac{A}{2\omega}t\sin(\omega t-\beta)+\frac{A}{4\omega^2}\cos(\omega t-\beta) \quad (25)$$

(22) тенгламанинг хусусий ечимини аниқлайди. Хусусий ечими эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин. (22) тенгламанинг умумий ечими (7) ва (25) ларнинг йиғиндисидан иборат.

$$X(t) = x(t) + \overline{x(t)} = a\sin(\omega t + \alpha) + \frac{A}{2\omega} t \sin(\omega t - \beta) + \frac{A}{4\omega^2}\cos(\omega t - \beta)$$

б) $\Omega = \omega$ бўлса

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = A\cos(\beta + \omega t) \qquad (26)$$

тенглама ҳосил бўади. (16) ва (17) тенгликлардан

$$C_1(t) = -\frac{A}{2\omega}\int\left[\sin(2\omega t + \beta) - \sin\beta\right]dt = \frac{A}{2\omega} t\sin\beta + \frac{A}{4\omega^2}\cos(2\omega t + \beta) \qquad (27)$$

$$C_2(t) = \frac{A}{2\omega}\int\left[\cos(2\omega t + \beta) + \cos\beta\right]dt = \frac{A}{2\omega} t\cos\beta + \frac{A}{4\omega^2}\sin(2\omega t + \beta) \qquad (28)$$

Буларни (10)га қўйиб,

$$\overline{x(t)} = \left(\frac{A}{2\omega} t\sin\beta + \frac{A}{4\omega^2}\cos(\beta + 2\omega t)\right)\cos\omega t + \left(\frac{A}{2\omega} t\cos\beta + \frac{A}{4\omega^2}\sin(\beta + 2\omega t)\right)\times$$

$$\times\sin\omega t = \frac{A}{2\omega} t\sin(\omega t + \beta) + \frac{A}{4\omega^2}\cos(\omega t + \beta) \qquad (29)$$

(26) тенгламанинг хусусий ечимини аниқлайди. (26) тенгламанинг умумий ечими (7) ва (29) ларнинг йиғиндисидан иборат.

$$X(t) = x(t) + \overline{x(t)} = a\sin(\omega t + \alpha) + \frac{A}{2\omega} t\sin(\omega t + \beta) + \frac{A}{4\omega^2}\cos(\omega t + \beta)$$

ҳосил қилинади.

в) Агар $\Omega = \omega$ бўлса (26) тенгламани хусусий ечими

$$\overline{x(t)} = (c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)t \qquad (30)$$

кўринишдаги c_1 ва c_2 номаълум коэфицентлар орқали ҳам излаш мумкин.

$$\overline{x'(t)} = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \omega(-c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t)t \qquad (31)$$

$$\overline{x''(t)} = -\omega c_1\sin\omega t + \omega c_2\cos\omega t - \omega c_1\sin\omega t + \omega c_2\cos\omega t + t\omega^2(-c_1\cos\omega t - c_2\sin\omega t) \qquad (32)$$

(30) ва (32) ларни (26) га қўйиб,

$$c_1\sin\omega t - c_2\cos\omega t = -\frac{A}{2\omega}\cos(\omega t + \beta)\text{ёки}$$

$$c_1\sin\omega t - c_2\cos\omega t = -\frac{A}{2\omega}\cos\beta\cos\omega t + \frac{A}{2\omega}\sin\beta\sin\omega t$$

Бу айниятни бажарилиши учун: $c_1 = \frac{A}{2\omega}\sin\beta$, $c_2 = \frac{A}{2\omega}\cos\beta$

Буларни (30) га қўйилса,

$$\overline{x(t)} = \frac{A}{2\omega} t\sin(\omega t + \beta)$$

хусусий ечимга эга бўламиз.

Адабиётлар:

1.Н. Дилмуродов , Э. Шарипов.Matematikaga ixtisoslashgan akademik litseylarda differensial tenglama elementlari. Fizika, matematika va informatika ilmiy uslubiy jurnal Toshkent 2010 3 -son 42-46 b

2.Н. Дилмуродов , Э. Шарипов. Касб-ҳунар коллежлари ва академик лицейларда дифференциал тенгламалар элементларини ўқитиш ҳақида. «Касб таълими бўйича мутахассис кадрлар тайёрлаш тизимини такомиллаштириш назария ва амалиёт» мавзуидаги Республика илмий-амалий конференцияси илмий ишлар тўплами. Қарши: Насаф, 2007.

3.М.С.Салоҳиддинов, Ғ.Н.Насриддинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент: Ўзбекистон, 1994.
4.А.У. Абдуҳамидов ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ асослари. II қисм. Тошкент: Ўқитувчи, 2003.
5.В.И. Арнольд. Обыкновение дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
6.M. Braun. Differensial equations and their applications, Applied Mathematical Scienses 15, 3rd Edition, Springer Verlag, New York, Heildelberg, Berlin, 1983.
7.Н. Дилмуродов , Э. Шарипов. Математикага ихтисослашган академик лицейларда дифференциал тенгламалар элементлари. «Замонавий физика ва астрономиянинг долзарб муаммолари». II Республика илмий анжумани материаллари. Қарши. Қарши давлат университети, 2010.