

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**Qo'lyozma huquqida
UDK 681.14**

NUSRATOV ISOMIDDIN O'KTAMOVICH

**MATEMATIK TAHLIL FANI BO'YICHA AVTOMATLASHTIRILGAN
ISHCHI O'RIN YARATISH LOYIHASI VA UNING DASTURIY
TA'MINOTI**

**5A480103-Amaliy matyematika va axborot texnologiyalari
mutaxassisligi bo'yicha magistr akademik darajasini olish uchun**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

Ilmiy rahbar:
dots. E.Urunbayev _____

Samarqand – 2012

MUNDARIJA	
KIRISH.....	3
I-BOB. MAPLE TIZIMIDA MATEMATIK TAHLIL MASALALARINI YECHISH JARAYONI	
1.1. Tenglamaning ildizlarini hisoblash, tenglama va tengsizliklar sistemasini yechish.....	7
1.2. Limitlar nazariyasi va funksiyalarni differensiallash.	15
1.3. Algebraik ifodaning maxsus va singulyar nuqtalari.....	17
1.4. Differensial hisob.....	20
1.5. Funksiyani belgili va sonli integrallash.....	24
1.6. Sonli va darajali funksional qatorlar bilan ishlash.....	36
II BOB. MATEMATIK TAHLIL MASALALARINI YECHISH JARAYONINI VIZUALLASHTIRISH	
2.1. Matematik tahlil masalalarini yechish jarayonini vizuallashtiruvchi elektron kursning umumiy sxemasi.....	55
2.2. Matematik tahlil masalalarini interaktiv tarzda yechish jarayoni.....	58
XULOSA.....	61
ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	62
ILOVA.....	64

KIRISH

Tadqiqot mavzusining dolzarbligi Mamlakat rahbariyati iqtisodiyotning barcha sohalari va jamiyat hayotida zamonaviy axborot texnologiyalari, kompyuter texnikasi va telekommunikatsiya vositalarini joriy qilish va qo'llash, fuqarolarning axborotga bo'lgan ehtiyojlarini to'liq qondirish, jahon axborot hamjamiyatiga kirish hamda jahon axborot resurslaridan foydalanish uchun qulay sharoitlar yaratish kabi muhim vazifalarga jiddiy e'tibor qaratmoqda.[1]

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning «Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari» kitobida axborot texnologiyalarini rivojlantirishga doir quyidagilar keltirib o'tilgan, «Biz hozirdanoq taraqqiyotimizning inqirozdan keyingi davri haqida chuqur o'ylashimiz, bu borada uzoq muddatga mo'ljallangan dastur ishlab chiqish haqida bosh qotirishimiz kerak. Bu dastur iqtisodiyotimizning asosiy tarmoqlarini modernizatsiya qilish va texnik yangilash, mamlakatimizning yangi marralarni egallashi uchun kuchli turtki beradigan va jahon bozorida raqobatdoshligini ta'minlaydigan zamonaviy innovatsion texnologiyalarni joriy qilish bo'yicha maqsadli loyihalarni o'zida mujassam etishi darkor».

Keng kompyuterlashgan zamonaviy jamiyat rivojlanishidagi dolzarb muammolarning texnik asoslarining yechimi ya'ni shaxsiy kompyuter (ShK)ni mavjudligi va telekommunikatsion aloqa vositalarini rivojlantirishi, har xil daraja va maqsaddagi samarali axborot hisoblash tarmoqlarini yaratishga imkon beradi. Bu jarayondagi ikkinchi muhim jihati mavjud dasturiy vositalarni rivojlanishi hisoblanib har xil toifadagi insonlar faoliyatida turli masalalarni yechish uchun mo'ljallangan dasturiy ta'minotlarni yaratish zamonamizning dolzarb muammosi hisoblanadi.

Tadqiqotning o'rganilganlik darajasi. Matematik xarakterdagi ya'ni sonli va belgili (algebraik) tipdagi masalalarni yechishni zamonaviy dasturlashtirish

vositalarida bajariladi, bunga eng rivojlangan, himoyalangan va ommaviy matematik paketlar kiradi.

Компьютерда моделлаштириш жараёнларини тадқиқ этишнинг етакчи воситаларидан бири математик пакетлар ҳисобланади. Бундай пакетлар вақтни тежаш, усулни ишончли қўллаш, универсаллик, кўргазмалиликни таъминлашда фойдаланилади. Улар ҳисоблашда, натижани қайта ишлашда муҳим ўрин тутadi ва шунинг учун махсус пакетлар оғир операцияларни бажаришда тенги йўқ ҳисобланади. Бундай масалаларни ечишда амалиётда Maple тизими кенг қўлланилмоқда.

Ҳар хил синфдаги масалаларни ечиш учун, айнан формула бўйича ҳисоблаш, тенгламалар системасини ечиш, белгили ва сонли дифференциал тенгламаларни ечиш, вектор ва матрица билан ишлашда жуда муҳим восита ҳисобланади. Лекин, бундай пакетларда аниқ бир фаннинг амаллар мажмуасини бажаришда, қайси буйруқни қандай усулда қўллаш учун мутахассисларнинг зарур кўрсатмаларини ишлаб чиқиш замон талабидир.

Tadqiqot ishining maqsadi. Matematik tahlil fanining turli xil sinfdagi masalalarni yechishda qaysi buyruqni qanday usulda qo'llash uchun uslubiy ko'rsatma va dasturiy vosita yaratish hamda natijalarni foydalanuvchilar uchun qulay shaklga keltirishni namoyish qilishdan iborat.

Bajariladigan vazifalar. Masalani qo'yilishidan kelib chiqqan holda ishda Maple tizimida quyidagi vazifalarni bajarish vositalarini aniqlash va tahlil qilish lozim:

- tenglama ildizlarini , tenglamalar va tengsizliklar sistemasi yechimini aniqlash;
- limit nazariyasiga tegishli amallarni bajarish;
- differensial hisob amallarini bajarish;
- funksiyani tadqiq etishning. amallarini bajarish;

- sonli va analitik integrallash amallarini bajarish;
- funksiyani silliqlash va interpolyasiyalash amallarini bajarish;
- sonli va darajali funksional qatorlar bilan ishlash amallarini bajarish;
- ba'zi jarayonlarni interaktiv rejimda bajarish vositalarini berish;
- aniqlangan vositalarni qo'llash jarayonini namoyish qilishning elektron kursini yaratish.

Tadqiqot usullari. Magistrlik disertatsiya ishining maqsad va vazifalarini bajarish jarayonida “Matematik tahlil”, “Dasturlashtirish texnologiyalari”, “Kompyuter algebrasi tizimlari” fanlarining tadqiqot usullaridan foydalanildi.

Mavzuning amaliy ahamiyati. Magistrlik disertatsiya ishdagi ma'lumotlar matematik xarakterdagi masalalarni aniq Maple tizimida ifodalashda keng doiradagi mutaxassislariga, Magistr va talabalarga foydalanish uchun qo'shimcha uslubiy qo'llanma sifatida xizmat qilishi mumkin. Ishdagi ma'lumotlar matematik paketni o'rganishda xorijiy va milliy adabiyotlarga qo'shimcha hisoblanadi. Ma'lumotlarni ifodalashda yetarlicha qiziqarli misollar keltirilgan va ularni foydali amaliy vosita sifatida ishlatish mumkin. Bunda paket standart vositalari to'liq holda keltirilgan, shuningdek, ular soddalashtirilgan holatda qo'llangan.

Tadqiqotning obyekti. Matematik tahlil masalalari va ularni xususiyatlarini yoritish.

Himoyaga olib chiqayotgan asosiy holatlar. Kompyuter algebrasi tizimlari turli mutaxassislar uchun juda kuchli va foydali dasturiy vosita bo'lib shakllandi. Jumladan **Maple** paketi ushbu talablarga javob beradi va uning ommalashishida faqatgina matematik masalalarni yechish emas, aniq fanlarning metodika va metodologiyasini o'qitishda va turli tipdagi matematik masalalarni yechish uchun zamonaviy dasturiy vosita hisoblanadi. Ushbu dasturiy vositalardan foydalanib muayyan fanlarni bilim va tushunchalarini qulay tarzda ifodalab berish mumkin va tanlangan mavzu vazifalarini bajarib ko'rsatish mumkin.

Magistrlik disertatsiya ishida, Maple matematik paketidan foydalanib, matematik tahlil masalalarini yechishdagi qo'llanilishi keltirilgan. Maple paketi muhitida dasturlash yetarlicha foydali hisoblanadi, shuning uchun asosiy funksiya va protseduralar to'plami amaliy va ko'rgazmali ma'lumotlar sifatida ushbu ishda taqdim qilingan. Paket orqali matematik tahlil masalalarini yechish jarayonini tizimli ravishda berilgan. Matematik tahlil masalalari qiziqarli misollar yordamida tasvirlangan hamda masalani yechishga qo'llanilishi ketma-ket tarzda keltirilgan. Natijalarning analitik va sonli yechimi, shuningdek grafik tasviri keltirilgan.

Ushbu masalalarni hal qilish O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2002 yil 31 maydagi PF-3080-son "Kompyuterlashtirishni rivojlantirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini yanada rivojlantirish to'g'risida"gi Farmoniga muvofiq milliy dasturiy fondimizni yaratish nuqtai nazaridan dolzarb masala hisoblanadi.

Tadqiqotning tuzulishi va hajmi. Magistrlik disertatsiya ishi kirish qismi, 2 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar, va ilovadan iborat bo'lib, ____betni tashkil etadi.

Birinchi bobda tenglamaning ildizlarini hisoblash, tenglama va tengsizliklar sistemasini yechish, limitlar nazariyasi amallarini bajarish va funksiyalarni differensiallash, algebraik ifodaning maxsus va singulyar nuqtalari aniqlash va tadqiq qilish uchun Maple tizimidagi dasturiy vositalar keltirilgan.

Ikkinchi bobda Maple tizimi yordamida matematik tahlil masalalarini yechish jarayoni tavsiflaydigan electron kursning tarkibiy qismlari va undan foydalanish uchun ko'rsatmalar berilgan.

Xulosa qismida bitiruv malakaviyn ishining asosiy natijalari va uning amaliy tadbiqlari bayon qilingan.

Ilovada dasturiy ta'minot matni va ba'zi bir natijalar keltirilgan.

I-BOB. MAPLE TIZIMIDA MATEMATIK TAHLIL MASALALARINI YECHISH JARAYONI

Maple tizimi yetarli rivojlangan vositalardan tuzilgan bo'lib matematik analiz bilan chiziqli algebraning keng ko'lamdagi masalalarini yechishni ta'minlaydi. Bular zamonaviy matematik ta'lim va amaliy matematikaning bazali komponentlari hisoblanadi.

1.1. Tenglamaning ildizlarini hisoblash, tenglama va tengsizliklar sistemasini yechish.

Bir qator matematik turli xarakterdagi muammolarni, ularning markaziy yoki ularni tashkil etuvchi masalalarni hal qilishda tenglama, tengsizlik va tenglama, tengsizliklarning ildizini aniqlash muhim masalalardandir. Bu berilgan yo'nalishda tizim bir qator yetarli effektli yo'llarga ega, ularni umumiy **Solve** guruhiga jamlash mumkin, u yordamida tenglama va tengsizliklarni sonli, shu bilan birga algebraik ko'rinishda yechadi. Berilgan bu guruhlarga quyidagi funksiyalarni kiritamiz: **solve**, **fsolve**, **isolve**, **msolve**, **rsolve**, **gsolve**, **linsolve** va **dsolve** va shu bilan birga sonli ko'rinishdagi tenglamaning yechimlarini olish mumkin. Bundan tashqari tenglamalar sistemasi, tengsizlik va uning sistemasini, shu bilan birga oddiy differensial va chiziqli tenglamalarning matritsali ko'rinishlarini ham yechish mumkin.

Ushbu bo'limda biz 2 ta: birinchi **Solve** guruhining funksiyalariniqaraymiz. Ular algebraik tenglamalarni va sistemalarni, tengsizlik va uning tengsizliklar sistemasini belgili va sonli ko'rinishda yechish uchun mo'ljallangan.

Solve funksiyasi umumiy sodda ko'rinishdagi formatga ega:

Solve (<tenglamalar / tengsizliklar, protseduralar> kiritiladigan o'zgartiruvchi). Bu yerda birinchi tayinli argument tenglama / tengsizlik. Hisoblashda birinchi argument sifatida tenglamaning chap qismi o'ng nollik qismi qaraladi. Tenglama tengsizlik sistema holida hisoblashda birinchi argument **Solve**

funksiya sifatida juda ko'p masalalar tenglama yoki tengsizlik va kiritiluvchi-o'zgaruvchilar qaraladi. Shu bilan birga bu yerda kiritiluvchi-o'zgaruvchilarni ko'rsatish shart emas, biroq ba'zi tushinmovchiliklardan holi bo'lish uchun **Solve** funksiyani chaqirishda ularni ko'rsatish tavsiya etiladi. Aks holda hisoblash barcha identifikator funksiyalar birinchi argumentlariga bog'liq holda amalgam oshiriladi. Funksiya topilgan yechimlarni ketma-ketlik yoki to'plam qiymatlari ko'rinishida qaytaradi. Ketma-ket holda uning elementlari tenglamaning ildiz qiymatlari (shu bilan birga takrorlanuvchi ildizlar ularning takrorlanishiga qarab takrorlanadi(nusxa ko'chiriladi)), u holda ko'phad ko'rinishida ega uning elementlari {<kiritiluvchi – o'zgaruvchilar>ning ildiz qiymat} ko'rinishida bo'ladi. Takrorlanuvchi ildizlar uchun ko'phadning berilgan elementlari ularning takrorlanishiga asosan nusxalanadi. Yechim olish mumkin bo'lmagan holda **solve** - funksiya **NULL**dan qaytariladi. Bu hol quyidagi ikki holda bo'ladi: 1) tenglama / tengsizlik yoki ularning sistemalari yechimga ega bo'lmasa yoki (e) funksiya bunday yechimlarni taniy olmasa 2) ikkinchi tipdagi hollardan ham bo'lishi maqsadida global o'zgaruvchili holni: “-Salutimos” o'rnatish tavsiya etiladi.bundan tashqari, aniq yechim mavjud bo'magan holda ≥ 5 tartibli polinomial tenglamalarda. Ularning natijalari **Solve** funksiya RootOf – qaytariladi. To'rtinchi tartibli uchun juda noixcham holda bo'ladi va kam uchraydi. Shuning uchun odatda, to'rtinchi tartibli polinomial tenglamalarning yechimlari RootOf bilan qaytariladi. Aniq yechimni olish uchun bunday tipdagi tenglamalarda “Env Ex” ishlatiladi. O'zgaruvchi, aks holda barcha ratsional yechimlar RootOf funksiyasi yordamida qaytariladi. Maxsols o'zgaruvchilar yadrosi **Solve** funksiyasi yordamida yechimihni topish rejimini boshqarishni ta'minlaydi, Qachonki funksiya ko'phad bo'lgan holda. Berilgan o'zgaruvchi qiymatni o'rnatish talab qilinayotgan butun musbat sonlarning izlanayotgan qiymatini chegaralaydi, biroq bu yerda xosmaslik mavjud.

EnvAllSolutions o'zgaruvchi yadroli o'rnatma tenglamani yechishning to'liq yechimini aniqlaydi. Qiymatni teskari transipdent funksiyalarni o'zida

saqlovchi, cheksiz ildizlar to'plamidan iborat xarakteristikaga ega bo'lgan true qiymatida berilgan o'zgaruvchilar to'liq yechimlarni qaytaradi. To'liq cheksiz to'plam qiymatlarini o'zida ifodalaydi, u holda ularning identifikatsiyasi uchun maxsus oldindan aniqlangan o'zgaruvchilarga asoslanadi, quyidagi uchta prefikslardan boshlanuvchi _Z, _NN va _B. Agar teng kuchlilik abc – funksiyadan iborat bo'lsa, u holda ularning argumenti haqiqiy deb faraz qilinadi.

Solve funksiya ixtiyoriy holda bitta tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yechadi: $F(x)\{<|<=|>|>\}H(x)$ kiritilayotgan x o'zgaruvchi interval. Qat'iy tartiblangan bo'lishi mumkin, aks holda **Solve** funksiya- yechimni qaytarish bilan birga **NULL** qiymatni ham qaytarishi mumkin. Sodda **solve**(sin(x)>=0,x) tengsizlik uchun **NULL** yechim qaytariladi. Shunga o'xshash chiziqli tenglama yoki tengsizliklar sistemasini **Solve** funksiya oson yechadi. Berilgan faktik o'zgaruvchi o'zida oxirgi xatoni ham to'g'rilashi mumkin. Kiritilayotgan **vsolve** prosedurasi tenglamalar sistemasini yechimini qaytarish, qaysini birinchi U argument bilan aniqlangan n-aniqlik bilan berilgan b o'zgaruvchiga mos bo'lgan, lekin shu bilan birga v-argument (bog'liqsizlik) yechimi qaytaradi, ya'ni tenglamaning dastlabki qiymati ularga haqiqiy qiymatlarini qo'yish bilan hosil qilinadi.

```
> Digits:= 4: solve(x^6-5.7*x^5+5.2*x^4-3.2*x^3+10*x^2-3*x+37=0,x); =>
      -.9409-.9690 I, -.9409+.9690 I, .4393-1.382 I, .4393+1.382 I, 2.094, 4.609
> solve({x^3-2.2*x*y+y^3=56,x^2-9.8*x*y+y^2=51},{x,y}); => {x = .6158 -
1.592 I, \
      y= -1.808 - 3.125 I}, {x= .6158 + 1.592 I, y= -1.808 + 3.125 I}, {y= -1.021,
x= 3.656}, \
      {x = -1.808 - 3.125 I, y = .6158 - 1.592 I}, {x = -1.808 + 3.125 I, y= .6158 +
1.592 I}, \
      {x = -1.021, y = 3.656}
> solve(x^4-10*x^3+3*x^2-32*x+37,x); => RootOf(_Z^4 - 10 _Z^3 + 3 _Z^2 - 32 _Z + 37)
```

```

> _MaxSols:=3: solve(x^3+2*x^2-9.8*x=56,x); => -2.993-2.258 I, -2.993+2.258
I, 3.985

> _EnvAllSolutions:=true: solve(sin(x)+cos(x)=0.99); => 1.58+6.283 _Z, -
.00995+6.283 _Z

> evalf(solve(x^5+3*x^3-10*x^2+32*x=99,x),12); => -1.90154803139-
2.21419969186 I

> solve({5.7*v+5.2*g-3.2*s=9.9,4.2*v-4.7*g+6.7*s=6.2,3*v+10*g-32*s=57},
{v,s,g}); =>
      {v = 2.536, g = -2.260, s = -2.250}

> solve(x^4+3*x^3-10*x^2-32*x-99. <= 57*x^5-24*x+95,x); =>
RealRange (-1.290 , ∞ )

      V_Solve := proc(U, P, n::integer, V::evaln)
      local k, R;
        R := [evalf( solve (U, P), n)];
        if type(P, set) then V := seq(eval(subs(R[k], U)), k = 1 .. nops(R))
        else V := [seq(eval(subs(P = R[k], U)), k = 1 .. nops(R))]
        fi;
        op(R)
      end

> V_Solve({x^3-3*x*y+y^3=57, x^2-10*x*y+y^2=52},{x,y},4,G), G; =>
      {x = .634 - 1.62 I, y = -1.751 - 3.053 I}, {57.02 - .030 I = 57, 52.09 - .374 I = 52}

> V_Solve({5.7*v+5.2*g-3.2*s=9.9,4.2*v-4.7*g+6.7*s=6.2,3*v+10*g-
32*s=37},{v,s,g},3,h),h;
      {s = -1.37, v = 2.18, g = -1.32}, {37.18 = 37, 9.950 = 9.9, 6.181 = 6.2}

> V_Solve(x^2+a*x+b=0,x,3,Z), simplify(Z); =>
      -.500 a + .500  $\sqrt{a^2 - 4. b}$ , -.500 a - .500  $\sqrt{a^2 - 4. b}$ , [0 = 0, 0 = 0]

> evalf(solve(({x-57)*(x^3-3*x^2+10*x-98)=0,x<>57},x),7); => {x = -.9816720-
4.333713 I}

> S:= proc(x,y) x*y+x^tan(y)-y^2 end:
map(evalf,[solve(S(x,y),x),solve(S(x,57),x)]);
=> [RootOf (_Z y + _Ztan(y) - y2), 56.88 ]

```

Bir qator hollarda, tenglama va tengsizlikning aniq yechimlarini topishda **Solve** funksiya qo'llaniladi, shu bilan birga singulyarlik $x \geq a$ ko'rinishda toldirish foydalidir, bu yerda x kiritiluvchi o'zgaruvchi va $x=b$ singulyarlik nuqtasi. Oldingi misol hozirgi aytilganini isbotlaydi, $x=57$ trivial yechimdan tashqari, **Solve** funksiya chaqiriluvchi oxirgi ko'rinish birinchi dalil argument sifatida qoraladi. **fsolve** funksiya **Solve** guruhiga qarashli

fsolve($\langle \rangle$, $\langle \rangle$, {<Опции>})

formatdagi ba'zi tenglamaning faqat sonli qiymatlarini qaytaradi. Alohida holda va shu bilan birga kiritiluvchi o'zgaruvchilarga bog'liq holda tenglama sistemasidan, shu bilan birga aytilgan birinchi **Solve** funksiyasining ikkita argumentiga bog'liq holda o'z kuchini saqlaydi va **fsolve** funksiya uchun aniqlaydi. Tenglama yoki tenglamalar sistemasi yechimini aniqlash prositsini boshqaruvchi umumiy holda **fsolve** funksiya tenglamaning bitta haqiqiy ildizini qaytarishga harakat qiladi. U holda polinomlar uchun barcha haqiqiy ildizlar qaytariladi. **fsolve** yechimni izlash protsidurasini boshqarish uchun

avoid=s;

complex;

fulldigits;

maxsols=n;

{**a..b**|**x=a..b**}{**x=a..b,y=c..d,...**} }.

obsiyalardan foydalanish tavsiya etiladi.

Agar **fsolve** yechimni topa olmasa, u holda **fulldigits** -komandasi foydali bo'lishi mumkin. Ildizni hisoblash protsidurasini aniq hisoblash oraliqni saqlashni talab etadi. U dastlab berilgan holni qabul qilish tenglamaning ildizi atrofidagi "yomon" hollarni yechishga yordam beradi. Bu oraliq komandani qo'llash nafaqat **fsolve** funksiyaning ildizini aniqlash imkoniyatlarini oshirishdan tashqari ularning to'plamidan alohida ildizlarni tanlash imkonini beradi. **fsolve** funksiyani ishlatishda grafik ko'rinish o'zgarmasdan qolishi mumkin, qachonki tenglamaning

график тahlili yoki ularning sistemalari haqiqiy ildizlari aniqlashga imkon beruvchi va ularning taxminiy joylashishini aniqlaydi. **Solve** navbatdagi fragment tenglama yoki tenglamalar sistemasining alohida yechimlarini topish uchun ishlatiladi; shu bilan birga grafik metodda bu yechimni aniqlashda **plot** funksiyasidan foydalaniladi.

```
> fsolve({y=x*sin(x),y=1/x},{x,y}); => {y = .1585, x = 6.308}

  G := h -> fsolve( {y=  $\frac{h}{x} + \sqrt{h+10}$ , y= x sin(x)}, {y, x}, seq( argsk, k = 2 .. nargs ) )

> map(G,[0,1,3.2,3,9.9,5.7,5.2,3.7],avoid={y = 4.096, x = 6.917+.1622e-21*I});
=>
[{x = 6.769, y = 3.162}, {y = 3.464, x = 6.816}, {y = 4.096, x= 6.917}, {x= 6.908,
y = 4.040}, \
{x = 7.223, y = 5.832}, {y = 4.773, x = 7.030}, {x = 7.007, y = 4.641}, {x =
6.939, y = 4.234}]

> P(x):=x^7+3*x^6-10*x^5+32*x^4-37*x^3+52*x^2-57*x+99:
fsolve(P(x),x,complex); =>
-5.870, -.6228-1.191 I, -.6228+1.191 I, .7611-1.761 I, .7611+1.761 I, \
1.297-.9255 I, 1.297+.9255 I

  Root := proc(P, x, h)
    if (h = C, {fsolve (P, x, complex, fulldigits)} minus
      {fsolve (P, x, fulldigits, maxsols= degree (P, x))},
      {fsolve (P, x, maxsols= degree (P, x), fulldigits)})
    end
  end

> map(Root,[h^2+3*h-10,h^3+10*h+3],h,r); => [{-5.0000000, 2.0000000}, {-
.2973703792}]

> G:=x -> 5.7*x^4-5.2*x^3+10*x^2-9.9*exp(x)-4.99: fsolve(G(x),x); =>
1.848222785

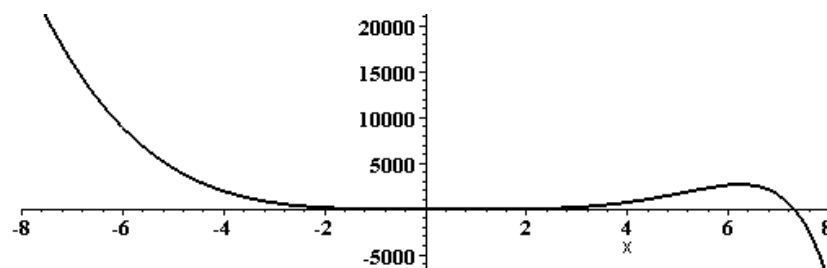
> Digits:=8: evalf([G(-8),G(8)]); => [26644.607, -8191.674]

<Ha [G(-8),G(8)]-интервале находятся корни G(x)-функции, один из
которых найден
```

***fsolve**-функцией. Для выяснения более точного поведения данной функции рассмотрим ее график на указанном интервале:>*

*> **plot**(G(x),x=-8..8,thickness=2,axesfont=[TIMES,BOLD,10],color=magenta);*

⇒



*< Из полученного графика **G(x)**-функции достаточно легко определяется*

*[7.2,7.6]-интервал для второго корня, а также вообще “подозрительные” корневые интервалы, позволяя вычислить все корни уравнения, имея в виду поведение **G(x)**-функции на интервалах $[-\infty, -8]$ и $[8, \infty]$. При этом, для уточнения ее поведения выводятся и графики **G(x)**-функции на интервалах $[-4, 0]$ и $[0, 4]$ >*

*> [**fsolve**(G(x),x,-2..0), **fsolve**(G(x),x,0..2), **fsolve**(G(x),x,7.2..7.6)]; ⇒*

[-.75115869, 1.8482228, 7.3056976]

*<Совместное использование функций **plot** и **fsolve** позволяет получить исчерпывающее решение уравнения **G(x)=0** >*

Solve funksiyasining bir argumentli Float tipdagi holi uchun ular ratsional sonlarni konvertlaydi, keyin kerakli hisoblashlarni olib boradi. Shundan keyin natija Float qiymat bilan konvertlanadi. Bunday yondashish birinchi faktik argumentlarning identifikatorlari uchun qulaydir yoki **fsolve** funksiya bunday hollarda foydasiz, xatoli holni aniqlaydi. Fragmentning ikkinchi misolida muhim protsiduralar keltirilgan. **Root(P,x,h)**, qiymatga bog'liqlikni qaytaruvchi {c| ixtiyoriy boshqa} mos holda barcha {kompleks haqiqiy} ildizlar. P-polinomning x kiritiluvchi o'zgaruvchilariga bog'liq.

Endi **solve** guruhiga kiruvchi boshqa foydali vositalarni ko'ramiz, qayusiki tenglama yoki tengsizlikni yechishga yordam beruvchi yoki ildizlar qiymatlarining chegaralanganligi avvalo bu **isolve** funksiyaga tegishli, qaysiki ularning ko'rsatilgan birinchi argumentining bitta yoki bir nechta tenglamalari uchun butun qiymatli ildizlarni qaytaruvchi shu bilan birga yechimlar identifikatoriga kiruvchi barcha tenglamalarning yechimini topishga bag'ishlanadi.

Agar ikkinchi **SP** argumenti kodlanmagan bo'lsa funksiyaning yechimini topish hamda unga oldindan aniqlangan $\{N_k\}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilarni kiritish mumkin. Shunday bo'lgan holda ko'rsatilgan to'plamdagi o'zgaruvchilar o'rniga lokal o'zgaruvchilardan foydalaniladi. Butun qiymatli yechim mavjud bo'lmagan yoki uni toppish mumkin bo'lmagan holda **iSolve** funksiya NULL qiymatni qaytaradi. Quyidagi funksiya **iSolve** funksiyadan farqli yechimni (mot m) orqali qaytaradi. O'zining birinchi argumentida tenglama yoki tenglamalar sistemasiga qarashli barcha o'z identifikatorlari bilan berilgan **msolve**($\langle \rangle, \langle \Pi \rangle, m$)

Shu bilan birga agar yechim aniqlanmagan bo'lsa, u holda imkon qadar funksiyaning SP argumentli o'zgaruvchilari qaytariladi yoki $_N_k$ global o'zgaruvchi. Yechim mavjud bo'lmaganda **mSolve** funksiya qiymatlarning bo'sh to'plamini qaytaradi. **rsolve**($\langle \text{Уравнения} \rangle, \langle \text{Функции} \rangle, \langle \text{Опция} \rangle$)

bitta yoki bir nechta rekurent tenglamalarni yechish imkoniyatiga ega. Ular uchun boshlang'ich shartlar berilganda boshlang'ich shartlar funksiyaning birinchi argumenti bilan aniqlanadi, ikkinchi argumentga bog'liq holda bo'lmagan uchinchi sifatida to'plam keladi. u ikkita qiymatdan ya'ni, "makeoroc" va genfunc qiymatlardan iborat bo'ladi.

Funksiyaning yechimini topish hamda unga oldindan aniqlangan $\{_N\}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilarni kiritish mumkin, agar ikkinchi Π -argumenti sozlanmagan bo'lsa. Shunday bo'lgan holda paketli o'zgaruvchilar o'rnida lokal o'zgaruvchilardan foydalaniladi. Butun qiymatli yechim mavjud bo'lmagan yoki uni topish mumkin bo'lmagan holda **isolve** –funksiya NULL-qiymatni qaytaradi.

Quyidagi funksiya **isolve** funksiyadan farqli butun qiymatli yechimni (mod m) orqali qaytaradi, o'zining birinchi argumentida tenglama yoki tenglamalar sistemasiga qarashli bo'lgan barcha o'zlarining identifikatorlari bilan berilgan.

Isolve –funksiyaning 2-ta argumentiga aytilgan fikrlar **msolve** -funksiya o'z ifodasini topadi, faqat farqi shundaki global $_Nk$ o'zgaruvchilar yodrosi o'rniga kerak bo'lganda $_NNk$ ko'rinishdagi global o'zgaruvchilar ishlatiladi. Shu bilan birga, agar yechim aniqlanmagan bo'lsa, u holda u imkon qadar funksiyaning argumenti o'zgaruvchilari atamasida qaytariladi yoki $_Nk\sim$ global o'zgaruvchida, yechi mavjud bo'lmaganda **msolve** –funksiya qiymatlarining bo'sh to'plamini qaytaradi.

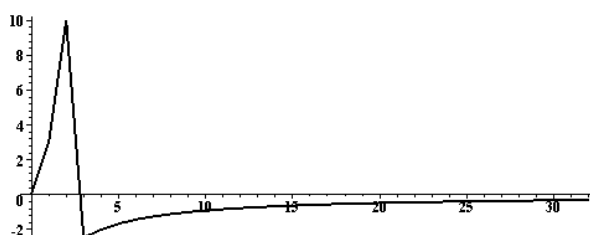
Bitta yoki bir nechta rekurent tenglamalarni yechish imkoniyatiga ega, ular uchun boshlang'ich shartlar berilganda, boshlang'ich shartlar funksiyaning 1-argumenti bilan aniqlanadi, 2-argumentiga bog'liq holda. Uncha muhim bo'lmagan 3-argument sifati keladi, u ikkita qiymatdan, ya'ni “mak” va “genf” qiymatlardan iborat bo'ladi, qaysiki umumiy terma funksiyaning hisoblash uchun proseduraning generatsiya rejiminiga mosini aniqlaydi, 2-argument bilan aniqlangan va 1-argument bilan aniqlanadigan rekurent ketma-ketlik uchun generatsiyalanuvchi funksiyalarni hisoblaydi. Agar **rsolve** –funksiyaning 1-argumentda boshlang'ich shartlar aniqlanmagan bo'lsa, u holda ular uchun belgili qiymatlar aniqlanadi.

rsolve –funksiya 2-argumenti bilan aniqlangan umumiy terma funksiya uchun ifodani qaytaradi. Shu bilan birga, agar **rsolve** -funksiyaning 2-argumenti ketme-ketligi sifatida kodlangan bo'lsa, u holda tenglamalar to'plami qaytariladi, aks holda uning 2-argumentidagi umumiy terma funksiyalar uchun qiymat ketma – ketligi qaytariladi.

Chiziqli rekurent tenglamalar bilan ishlash uchun, ularni yechishda aniq tiplarini olishda shu bilan birga ular yordamida aniqlanlangan rekurent ketma-ketlik 2D-grafiklarni chiqarishda foydalanuvchiga 19-modulli funksiyalardan iborat bo'lgan **LREtools** paketi tafsifiya etiladi. Hususiy holda Xususiy holda **REplot()** funksiya modul bo'yicha **[a,b]** –oralidagi boshlang'ich shartlar

bilan berilgan R- ketma – kaetlik rekurent qiymat ro'yxatining 2D grafigi hosil qilinadi. Funksiyaning uncha muhim bo'lmagan **U**-argumenti sifatida **plot**-funksiyasini olish mumkin . Navbatdagi oddiy fragment **REplot** - funksiya qo'llashni talab qiladi, qaysiki ba'zi rekurent bog'liklilarning grafigini hosil qilish uchun , 3-shart bilan aniqlangan **REplot**-funksiyadan foydalanishda avvalo **LREtools** –modul paketni ishga tushirish talab etiladi.

```
> with(LREtools): REplot(G(n-2)/n^2-n^2*G(n-1)-
10*n,G(n),{G(0)=0,G(1)=3,G(2)=10}, \
n=0..32,scaling=constrained,thickness=2,axesfont=[TIMES,BOLD,9])
;
```



1.2. Limitlar nazariyasi va funksiyalarni differensiallash.

Differensial va integral hisobda hamda funksiya maxsus nuqtalardagi holati masalalarini o'rganishda bir qator muhim asimtotik holat masalalari limitlar nazariyasiga asoslanadi, asos sifatida limit tushunchasi yotadi. Juda ko'p hollarda u yoki bu ifodaning limitini hisoblashda katta mahorat talab etiladi.

Limitlar : Limitlarni va funksiya maxsus nuqtalardagi xossalarini tekshirishga bog'liq bo'lgan masalalarni yechish uchun tizim **limit** -funksiyani joylashtiradi, maxsus passiv formaga ega bo'lgan :

limit(<Выражение>,p=<ПТ>{,∇ ПТ})

Limit(<Выражение>,p=<ПТ>{,∇ ПТ})

limitik nuqtaga p -o'zgaruvchi orqali intiluvchi 1-argumentdan iborat limitni qaytaradi, qaysiki hisoblanuvchi ifoda bo'lishi mumkin. Funktsiyaning 3-argument ΠT bo'lmagan holda ΠT kiritilgan p -o'zgaruvchi intiluvchi rejimni aniqlovchi, u holda odatda ΠT ga o'ng va chap haqiqiy joyga intiluvchi deb qabul qilinadi.

O'zining birinchi argumenti bilan aniqlangan ifoda uchun **limit** qiymatini hisoblash natijasida **limit** - funksiya algebraic ifodaning oraliq qiymatlarini qaytaradi, xususiyl holda qaysiki ular sonli yoki **inf**-qiymatli bo'lishi mumkin. Ko'p algebraic ifodalar uchun **limit**ni topish umumlashgan ierarxik qatorlarga asoslanadi. U holda omadsiz urinishda **limit** - funksiyadan foydalanilganda global **Order**- o'zgaruvchi yadrosini qiymatini kattalashtirish tafsila qilinadi, qaysiki qatorning birinchi foydalanilgan sonli qiymatini aniqlovchi.

Navbatdagi natijalarni hisoblash uchun qaytaruvchi **limit** - funksiyaga oldin qaralgan **value**-funksiyasidan foydalaniladi, natijalarni hisoblashga imkon beradi, qaytaruvchi passiv funksiyalarda. Passiv adentifikatorlar bir xil faol funksiyalardan farqi faqat birinchi bosh qatordan iborat va ular orasida funksional **value(H)**, bu yerda H, h –mos holda passiv va aktiv funksiyaning identifikatorlari.

Agar 2-argumentlar real matematik hisoblashlar natijalarini qaytarsa, u holda 1-argumentlar funksiyalarni berilgan uning faktik argumentlarini hisoblamasdan qo'llashdan hosil bo'lgan natijalarni qaytaradi.

Limitlar nazariyasidan ma'lumki, funksiyalar ifodaning izlanayotgan nuqtadagi **limit** qiymati umumiy holda ΠT yunaltilgan intilishga qattiy bog'liqdir. Shuning uchun **limit** –funksiya qiymati sifatida muhim bo'lmagan $\nabla \Pi T$ argumenti quydagi ko'rinishni oladi **right**, **left**, **real** va **complex**. Hamda **complex** yo'nalishli holda $\Pi T = \text{infinity}$ qiymati **infinity** cheksiz qiymatni aniqlaydi; u holda **real**-yo'nalishli holda esa $\Pi T = \text{infinity}$ cheksizlikni anglatadi.

Agar **limit**- funksiya sonli oraliqni qaytarsa , u holda ifodaning **limit** qiymat, uning 1-argumenti bilan aniqlangan bo'lib , qaysiki berilgan oraliqqa tegishli . Funksiya **infinity** – qiymatni 1- holda qaytaradi.

Yuqorida aytilgan barcha 1ta **IT** holdagilar ko'p limitik nuqtali hol uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

> **Limit**((G(x,y)+S(x,y))/(Ar(x,y)-Kr(x,y)),{x=a,y=b},right); $\Rightarrow$

$$\text{Limit}\left(\frac{G(x, y) + S(x, y)}{Ar(x, y) - Kr(x, y)}, \{x = a, y = b\}, right\right)$$

> **Limit**((G(x)+S(x))/(Art(x)+Kr(x))+Av(x)^tan(x),x=a,left); $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{G(x) + S(x)}{Art(x) + Kr(x)} + Av(x)^{\tan(x)}$$

> **value**(%); $\Rightarrow \frac{G(a) + S(a) + Av(a)^{\tan(a)}}{Art(a) + Kr(a)}$

> **Limit**((1+1/n)^n,n=infinity), **value**(%); $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, e$

> **limit**(abs(x)^3/x,x=0,complex); $\Rightarrow \text{undefined}$

> **limit**((10*x+3*sin(2*x)^2+tan(x)^(5/3))/(2*tan(x)+4*x^3+sin(x)^4),x=0);
 $\Rightarrow 5$

> **limit**(n^2*(x^(1/n)-x^(1/(n+1))),n=+infinity); $\Rightarrow \ln(x)$

> **assume**(a>b,b>3): **limit**((3*a^x-10*b^x+(a+57)**x)^x,x=0,right); $\Rightarrow 1$

1.3. Algebraik ifodaning maxsus va singulyar nuqtalari

Funksional bog'liqlik holati masalalarini o'rganishga ,ularning kiritilaytgan o'zgaruvchilarining maxsus va singulyarligi kiradi, avvalom bor , bu funksiya uzluksizligiga bog'liq va ular asimtotik holatiga bog'liq. Maplening bir qator funksiya xususiyatlari buday masalalarni algebraic masalalar yechish uchun qulaylik yaratadi.

[a,b]- da **h** – o'zgaruvchi bilan aniqlangan **V** – ifodaning aniqlash uchun **iscont**(V,h=a..b{,'closed'})- funksiya bibliotekasi hisoblanadi. U **true**- qiymat

qaytaradi, agar uzoq bo'lsa, **false**-qiymat qaytaradi uzoq bo'lmasa va **FAIL**-qiymat qaytaradi, agar holatni testlash imkoni bo'lsa, kodlash holatida uncha muhim bo'lmagan **closed** argumenti izoh tahlil qiladi va $[a,b]$ ning chegaraviy nuqtasini tahlil qiladi. **discont(V,h)** biblioteka funksiyaga kiritilgan h-o'zgaruvchi barcha haqiqiy qiymatlar to'plamini qaytaradi, qaysiki, algebraic ifodaning uzluksizligi buziladi. Funksiyaning birinchi argumenti bilan aniqlangan natija h ning uzilish nuqtasi qiymat to'plami shaklida qaytariladi, ularning yadro atamasi $_Zn\sim$ va $_NNn\sim$ iborat ko'rinishda bo'lishi mumkin, ular mos holda butun va manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni anglatadi.

fdiscont biblioteka funksiya formati quyidagi ko'rinishdan iborat:

fdiscont(W,<soha>,<ruxsat etish>,<o'zgaruvchi>{,<opsiyalar>})

berilgan kenglikdagi ruxsat etilgan intervallar ro'yxatini qaytarishga harakat qilinadi, qaysiki W ifodaning uzulishga ega o'zgaruvchilaridan iborat yoki uning ko'rsatilgan sohada birinchi hosilasi. Funksiyaning realizatsiya qilinish asosi ajratilgan farqlash algoritmidan iborat **evalhf** funksiya reaktivligini oshirish uchun qwo'llaniladi. Agar W birinchi argument algebraic ifoda bo'lsa u holda uning **Id** o'zgaruvchisi kodalanishi kerak to'g'ridan-to'g'ri yoki **Id=a..b.** ko'rinishdagi sohasi ko'rsatilishi zarur. Beshinchi muhim bo'lmagan opsiya W ifodaning uzulish nuqtalarini aniqlash rejimini boshqaradi. **singular(V{,h})** funksiya kiritilgan h o'zgaruvchili ketma-krtlik qiymatni qaytardi, qachonki algebraic ifodaning singulyar nuqtalarini aniqlovchi v argument funksiyaning birinchi argumenti bilan aniqlansa. Avvalo, **G** konstruksiyani belgilash qajariladi. Birinchi argument bo'lib protsidurani anglatadi, kiritilayotgan o'zgaruvchining identifikatori hisoblanadi va **iscont**, **discont** va **singular** bibliotik funksiyalari yuklanadi. **iscont** funksiya yordamida kiritilayotgan o'zgaruvchi yordamida **G** konstruksiyaning uzluksizligi ikkinchi qadamda tekshiriladi. Agar konstruksiya uzluksiz bo'lsa, u holda ma'lumot qaytariladi, aks holda **discont** va **singular** ga asoslanib **C** ketma-ketmalikning uzulish va **singular** nuqtasi hisoblanib ularning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $C=\{x\sim = x_1\},\{x\sim = x_2\},...,\{x\sim = x_n\}$

Shundan keyin ya'ni funksiya yordamida C ketma-ketlikning har bir nuqtasi uzulish va singularlikka tahlil qilinadi. Protsidura **TOC**-jadvalni qaytaradi. Navabtdagi fragmentda dastlabki Maple modullarining protsiduralari keltiriladi va bo'lakli aniqlangan funksiyalarni tahlil qilish uchun misollar keltirilgan.

```

F_Analys := proc(G::algebraic, a::realcons, b::realcons)
local k, x, C, S, TOC, L, R;
[assign(x = op(indets(args[1], name))), map(readlib, [iscont, discont, singular])];
if iscont(args[1], x = a .. b, closed) then RETURN('Function is continious')
else S := singular(args[1], x); C := discont(args[1], x)
fi;
C := op({S} union {seq({x = C[k]}, k = 1 .. nops(C))});
for k to nops({C}) do
  if abs(rhs(op(C[k]))) = ∞ then
    assign('L' = limit(args[1], op(C[k])), 'R' = limit(args[1], op(C[k])));
    TOC[C[k]] := 'Asymptotical behaviour on infinity', [R];
  next
  else assign('L' = limit(args[1], op(C[k]), left), 'R' = limit(args[1], op(C[k]), right))
  fi;
  if L = R and abs(R) ≠ ∞ then
    TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the eliminated type', [L, R]
  else
    if L ≠ R and abs(L) ≠ ∞ and abs(R) ≠ ∞ then
      TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the first type', [L, R]
    else TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the second type', [L, R]
    fi
  fi
od;
eval(TOC)
end

```

>

$G := x \rightarrow \text{piecewise}(x \leq 0, 3 - x^2, x < 1, 10 * x, 10)$; $F_Analys(G(x) * (x + 3) / (x - 10), -11, 11)$; $\Rightarrow$

```

table([
  {x = -∞} = (Asymptotical behaviour on infinity, [-∞])
  {x = 10} = (Point discontinuity of the second type [-∞, ∞])
  {x = ∞} = (Asymptotical behaviour on infinity, [10])
  {x = 0} = (Point discontinuity of the first type [ -9/10, 0 ])
  {x = 1} = (Point discontinuity of the eliminated type [ -40/9, -40/9 ])
])

```

> $F_Analys((x^3 + 42 * x^2 + 359 * x + 558) * \sin(x), -\pi, \pi)$; $\Rightarrow$ Function is continious

> $\text{readlib}(fdiscont)$; $fdiscont(3 / ((x^3 + 42 * x^2 + 359 * x + 558) * x), x = -3 .. 10)$; $\Rightarrow$
 $[-2.0004644330266 .. -1.9993343494402, -.00037470512252301 .. .00060295042667336]$

> $discont(3 / (x^3 - 45 * x^2 + 446 * x - 960) * (\cos(x) + \sin(x)), x)$; $\Rightarrow \{32, 3, 10\}$

Xususiyl holda ikki funksiya ham W ifodaning nollarini hisoblashda ishlatishi mumkin $\{singular|discont\}(1/W(h),h)$. struksiyasiga asoslanib shu bilan birga shuni ta'kidlash mumkinki, bo'lakli aniqlangan funksiyada ham **if** strukturasi bilan Xevisayd funksiyasida hamda F_Analys protsidurasi bilan tahlil qilinadi. Oxirgi holda xatolik holati bo'ladi. "Error, (in discont/discontR) does not know about function, if"

1.4. Differensial hisob

Differensiallik matematik tahlilning asosiy operatsiyasi hisoblanadi. V ta'minlash uchun tizim yetarli effektiv vositalarga ega. Differensiallanuvchi **diff**-funksiya quyidagi ikki forma va kodlash formatidan iborat

$$(1) \text{diff}(V, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2) \text{diff}(V, [x_1, x_2, \dots, x_n])$$

$$\text{Diff}(V, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{Diff}(V, [x_1, x_2, \dots, x_n])$$

V algebraik ifodaning xususiyl hosilalarini qaytaradi, birinchi argumentni anglatadi x_k o'zgaruvchi orqali ko'rsatiladi. Komponentlar kiritilayotgan o'zgaruvchilarga bog'liqmas, ular bo'yicha ixtiyoriyl tartabli hosilada nolga ega bo'ladi. Differensiallashda o'zgaruvchilar soni birdan ko'p bo'lsa quyidagi ko'rinishdan foydalanamiz

$$\text{diff}(\text{diff}(\text{diff}(\text{diff}(V, x_1), x_2), x_3) \dots, x_n).$$

Shunday qilib, V ifodaning x o'zgaruvchi bo'yicha n -hosilasi $\text{diff}(V, x\$n)$ ko'rinishda bo'ladi, aralash ko'rinishi esa $\text{diff}(V, x_1\$n_1, x_2\$n_2, \dots, x_n\$n_n)$ bo'ladi.

Xususiyl holda, bo'sh ro'yxatni aniqlaydi, V ifodaning differensiallanuvchiligini bekor qilinadi. Bu amal **diff**-funksiya va $\$$ -ishlatish qulay hisoblanadi va differensiallashning nolllarini aniqlashda foydalaniladi.

Navbatdagi fragment $\{\text{Diff|diff}\}$ -funksiya oddiy va aralash hosilalarni hisoblashda foydalaniladi.

$$> \text{Diff}(\text{Pi} * \text{Catalan} * x * \sin(y) + \text{Pi} * y * \cos(z) - \text{Art}(x) + \text{Kr}(y), [\text{Catalan}, \text{Pi}, y, x]); \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y \partial \pi \partial \text{Catalan}} (\pi \text{ Catalan } x \sin(y) + \pi y \cos(z) - \text{Art}(x) + \text{Kr}(y))$$

```

> value(%);  $\Rightarrow \cos(y)$ 
> value(Diff(x*y^3-(1+x*y)^2*z+sin(x)*cos(y)*exp(1)^z,x,y,z));  $\Rightarrow -4 \times y^2 - \cos(x) \sin(y) e^z$ 
> simplify(diff(x^p,x));  $\Rightarrow x^{(p-1)p}$ 
(a)

```

Aytilganlarga asoslanib **{Diff|diff}**- funksiyaga ta'rif berish shart emas. Xususiyl holda misol (a) sifatida oddiy ko'rsatgichga ega funksiya uchun hosilani hisoblashni qarash mumkin. Qachonki bunda matematik imoniyat cheklanmagan bo'lsa.

Diff- funksiya standart ko'rinishdan tashqari differensial hisoblash mexanizmda, differensiallashda **'diff'**-protsidura bilan aniq funksiya dan foydalanish mumkin. Berilgan protsiduraga asoslanib maxsus differensiallash algoritmi aniqlanadi.

```

diffP := proc(V::algebraic, L::list)
local h, k, E;
h, E := indets(V, name), `Error in initial conditions`;
if (nops(h) < nops(L) or nops(h union indets(L))  $\neq$  nops(h), RETURN(E),
eval(subs([seq(
if (type(L[k], name), L[k] = L[k], if (type(L[k], `=`, L[k], RETURN(E))),
k = 1 .. nops(L)), diff(V, [seq(
if (type(L[k], name), L[k], if (type(L[k], `=`, lhs(L[k]), RETURN(E))),
k = 1 .. nops(L))]))))
end
> diffP(32*x^3+3*y^2*sin(z)+10*cos(y)-99*x*y*z*cos(x),[x=Pi,y,z=2*Pi]);  $\Rightarrow$ 
99

```

Keltirilgan fragmentda foydalanuvchi **diffP**-funksiya aniqlanadi, uni qo'llash berilgan nuqtadan birinchi tartibli xususiyl hosilani aniqlashga yordam beradi. Shu bilan birga **diffP**-protsidurasining birinchi argumenti V algebraik ifodaning differensialini aniqlaydi. Ikkinchi yondashish standart vositalarning aralashuvini talab qiladi. Shu maqsadda **'diff/G'**-protsidura aniqlanadi **diff(G(x,y,z),y)** funksiyani almashtiruvchi mexanizm bo'lib **'diff/G'(x,y,z,y)** protsidura bo'ladi.

```

> `diff/G`:=proc(h,x) diff(h,x)*G(x)+Kr(x) end:
map(diff,[G(x),G(sin(x)),x*G(x)+3*x],x);

      [G(x) + Art(x), cos(x) G(x) + Art(x), G(x) + x (G(x) + Art(x)) + 3]
> diff(G(G(x)+G(X)^2)+G(x),x); =>
      (G(x) + Art(x)) G(x) + Kr(x) + G(x) + x (G(x) + Art(x))

```

Differensiallash protsidurasi uchun formal darajali paket yoki differensial operatori deb qaraladi. U ikkita formatdan iborat:

(1) $D(F)$ (2) $D[k](F)$

Bu yerda F -algebraik ifoda formal funksiya sifatida qaralishi mumkin. bunda $const$ lar, ma'lum funksiylarning identifikatorlari va noma'lum funksiylar yadrosi ($\rightarrow$)- operatorlar arifmetik va funksional operator;lar bo'lishi mumkin. D operator uchun odatiy differensiallash qoidasi saqlanadi shu bilan birga xususiy hosilalarda komutativ xossa ham saqlanadi.

D – operatori *diff*- funksiya kabi mos holda qayta aniqlanuvchi amalgam oshiriladi, navbatdagi konstruktiv ko'rinishida $D/G := proc \dots end\{;|;\}$ G -funksiya nostandart differensiallash amallarni bajarish imkonini yaratadi.

V ifodani konvertatsiya qilish uchun $\{diff|D\}$ funksiyasiga kiruvchi atamada $\{D|diff\}$ mos holda $convert(V, \{D|diff, x\})$ -funksiya ishlatiladi.

implicitdiff-funksiya orqali berilgan aniqmas funksiylarni differensiallash imkoniyati yaratiladi.

- (1) *implicitdiff*($G, Y, x_1, \dots, x_p$)
- (2) *implicitdiff*($\{G_1, \dots, G_m\}, \{Y_1, \dots, Y_n\}, u, x_1, \dots, x_p$)
- (3) *implicitdiff*($\{G_1, \dots, G_m\}, \{Y_1, \dots, Y_n\}, \{u_1, \dots, u_k\}, x_1, \dots, x_p, \{<Onqura>\}$)

Kiritiluvchi $\{x_1, \dots, x_p\}$ -o'zgaruvchilardan iborat noaniq $Y(x_1, \dots, x_t)$ -funksiyaning aralash hosilasi (1) orqali qaytariladi. Shu bilan birga *implicitdiff*-funksiyaning birinchi G argumenti algebraic ifodani ifodalashi mumkin. kiritilayotgan $\{x_1, \dots, x_p\}$ -o'zgaruvchilarni ketma-ket aniqlash bilan, zaruriy mos hisoblashlarni aniqlash mumkin. qaysiki ular aralash tartibli hosilaga va hosila

tartibiga mos holda **Y** funksiya noaniq funksiyaning aniqlaydi. Ikkinchi argument orqali berilgan **implicitdiff**-funksiya hosilasi mavjud bo'lmaganda **FAIL**- qiymatni qaytaradi.

implicitdiff- funksiyaning (3), (2) kabi farqi unda noaniq aniqlangan $\{u_1, \dots, u_k\}$ -funksiyalar uchun xususiy hosilalar to'plami qaytariladi. $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ -noaniq aniqlangan ixtiyoriy funksiya to'plamidan iborat bo'lib, mos holda **implicitdiff**-funksiyaning birinchi argumentiga mos bo'ladi. Shu holat uchun **notation=Diff** ishlatiladi. Odatda, $\{du_1/dx_j = u_1', \dots, du_k/dx_j = u_k'\}$ ko'rinishdagi natijani qaytaradi. Keltirilgan differensiallash yo'llari, limit qiymatlarni topishdan iborat hamda maxsus va singular nuqtani hisoblashdagi ifodalarni yetarli sodda va effektiv qo'llashdan iborat.

(**abs**, **signum** va **boshqalar**) paketi bilan bo'lakli aniqlanganlarni o'zida saqlovchi ifodalarni differensiallashni testlash uchun, shu bilan birga foydalanuvchi funksiya uchun **isdifferentiable**-funksiyadan foydalaniladi. Uning ko'rinishi **isdifferentiable(<Выражение>, x, m{, 'h'})**.

funksiya **true** qiymat qaytaradi, agar ifoda birinchi argumentida **S** differensiallanuvchi funksiya sinfiga qarashli bo'lganida aniqlangan bo'lsa. Ya'ni **x**-o'zgaruvchi bo'yicha **n**-tartibini uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, aks holda **false** qiymat qaytaradi. Kodlash sharti uncha muhim bo'lmagan **h** argument va funksiya **false** qiymat qaytarishda u orqali ketma-ket qaytariladi, birinchi element testlanayotgan ifodaning differensiallanish sinfini ko'rsatadi, ikkinchi element esa uning **(m+1)**- hosilasining uzulish nuqtasini ko'rsatadi. Navbatda sodda fragment **isdifferentiable**-funksiyaning qo'llashning ba'zi funksiya differensial uchun qo'llashni ko'rsatadi.

```
> readlib(isdifferentiable): isdifferentiable(sin(abs(x)),x,3); => false
> PW:= x ->
piecewise(x<42,x*sin(x),(42<=x)and(x<67),sqrt(x^2+10),(67<=x)and(x<89),\
x^2+96*x+99,(x^gamma+exp(1)^Pi)/Pi): PW(x); =>
```

$$\begin{cases}
x \sin(x) & x < 42 \\
\sqrt{x^2 + 10} & 42 - x \leq 0 \text{ and } x - 67 < 0 \\
x^2 + 96x + 99 & 67 - x \leq 0 \text{ and } x - 89 < 0 \\
\frac{x^\gamma + (e)^\pi}{\pi} & \text{otherwise}
\end{cases}$$

> [isdifferentiable(y*PW(y)+3*y^2-10*h,y,2,'h'),h]; $\Rightarrow$ [false, -1, {42, 67, 89}]

Maple sistemasida funksional boshqarishlar bilan ishlaganda, differensial va integral hisoblashda asosiy masala bu algebraic ifodaning noma'lum o'zgaruvchilarini aniqlashdan iborat. Shu munosabat bilan **depends**-qulaydir. U quyidagi formatga ega

depends(<ifoda>,<identifikator>)

bu yerda ifoda sifatida alohida, shu bilan birga ularning ro'yxati qatnashishi mumkin, identifikatorlar sifatida alohida **name**- tipli qiymat yoki ular ro'yxati to'plami keladi. Funksiya **true** – qiymatni qaytaradi. Agar ifoda matematik holda keltirilgan biror bir ikkinchi identifikatorga bog'liq bo'ladi. Aks holda **false**-qiymat qaytardi. Umumiy holda **depends** va **indets** funksiyalar turli xil, ularning farqi quyidagi misolda ko'rsatiladi:

> **indets(int(f(x),x=a..b),name), depends(int(f(x),x=a..b),x); $\Rightarrow$ {x, a, b}, false**

Bazaviy tizimlarni qarashda, ya'ni differensiallash masalalari ko'rilganda, ichki **diffforms**- modul orqali qo'llab-quvvatlanuvchi sistema differensiallash formalarining keng yo'llarini namoyish etadi. bunday vositalarni differensial geometriya masalalarida qo'llash qulaydir.

1.5. Funksiyani analitik va sonli integrallash

Mapleda bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni integrallashda **int**- funksiya amalga oshiradi. U ikkita formaga (aktiv va passiv) ega ular quyidagilar:

int(F(x),{x|x=a..b},{,<Onquu>}) **Int(F(x),{x|x=a..b},{,<Onquu>})**

Funksiyaning birinchi argumentida $F(x)$ argument funksiya sifatida (integralosti ifoda) algebraik ifoda yoki protsidura qatnashishi mumkin, umuman olganda x – o'zgaruvchi bo'yicha integrallash va integrallash oralig'i ham bo'lishi mumkin, ya'ni sonli yoki belgili bo'lishi mumkin. uncha muhim bo'lmagan argument opsiyalarni aniqlaydi, u belgili integrallash integral osti ifodaning qayta ishlash bilan shug'ullanadi. Passiv Inf- funksiya integral konstruksiyaning va matematik notatsiyada chqarilishi uchun xizmat qiladi. U uchun yuqorida **limit** va **diff** passiv ko'rinishlari uchun aytilganlar o'rinli bo'ladi.

Int-funksiyayordamida (aniq/aniqmas) integrallar hisoblanib ikkinchi argumentdagi funksiyaning $\{x|x=a..b\}$ -kodlash formasiga bog'liq bo'ladi. Aniqmas integral bo'lganda konstanta qaytarilmaydi. Shu bilan birga $[a,b]$ integrallash oralig'ining nuqtalari sifatida sonli va belgili ifodalar hamda ($\pm infinity$) qatnashishi mumkin. Integralni hisoblash imkoni bo'lmasa int-funksiyaning hisoblash mumkin bo'lmagan xabari chiqariladi. int-funksiya yordamida turli tipdagi funksiya dan iborat aniqmas integrallarni hisoblash mumkin. Bu narsalarning hammasi tahlil kursida keltirilgan.

int-funksiyaqaytargan natijalar hamma vaqt ham kanonik yoki unga yaqin ko'rinishda bo'lavermaydi. Shuni ta'kidlash lozimki, Mapleda int-funksiyayordamida qaytarilgan integralning belgili natijalari ko'p hollarda juda qulay bo'lib, **Mathematica** ning int- funksiylari bilan aniqlash natijalariga qaraganda qulaydir.

Shu munosabat bilan quyidagilarni hisobga olish lozimdir.

Maplening o'ziga xos imkoniyatlarini qo'llashda int- funksiyaqaytarilgan natijalarini soddalashtirish uchun aniq bir zukkolikni talab qiladi yoki soddalashtirilayotgan yo'llar o'zaro izohlanmaydi va barcha soddalashtirishlar teskari natija berishi mumkin. Shu munosabat bilan ikkala paket aprobat siyasi shuni ko'rasatadiki, Maplening integral paketi qulay hisoblanadi, **Mathematica** paketi funksiylariga qaraganda shunday natijalar olish mumkinki, qachon

ikkinchi paket bunday hollarda o'z ma'nosini yo'qotadi. yuqorida aytilganlar aniq va karrali integrallar uchun ham o'rinalidir.

> `map(int,[1/(x*sqrt(1-x)),x*exp(x)],x);` $\Rightarrow [-2 \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-x}), x e^x - e^x]$
 (1)

> `expand(simplify(convert(%[1],ln)));` $\Rightarrow -\ln(\sqrt{1-x} + 1) + \ln(1 - \sqrt{1-x})$
 (2)

>
`collect(rationalize(convert(expand(int(csc(x)^2/(tan(x)^2+sec(x)^2),x)),trig)),arctan);`

$$-\sqrt{2} \operatorname{arctan}\left(\frac{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sqrt{2}+1}\right) - \sqrt{2} \operatorname{arctan}\left(\frac{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sqrt{2}-1}\right) + \frac{1}{2} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

> `Int(48*sin(x)^2*cos(x)^4,x) = int(48*sin(x)^2*cos(x)^4,x);` $\Rightarrow$

$$\int 48 \sin(x)^2 \cos(x)^4 dx = -8 \sin(x) \cos(x)^5 + 2 \cos(x)^3 \sin(x) + 3 \cos(x) \sin(x) + 3x$$

> `Int((x^2+3*x+1)/sqrt(x^2-4*x),x) = int((x^2+3*x+1)/sqrt(x^2-4*x),x);` $\Rightarrow$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 4x} + 6\sqrt{x^2 - 4x} + 13 \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x})$$

> `Int(2*x*arctan(x+3),x) = collect(expand(int(2*x*arctan(x+3),x)),arctan);` $\Rightarrow$

$$\int 2x \operatorname{arctan}(x+3) dx = (x^2 - 8) \operatorname{arctan}(x+3) + 3 \ln(2) + 3 \ln(1 + (x+3)^2) - x - 3$$

> `map(int,[2*sin(x)*cos(x),x*sin(x),2*ln(x)/x],x);` $\Rightarrow [\sin(x)^2, \sin(x) - x \cos(x), \ln(x)^2]$

da keltirilgan fragmentda aniqmas integrallarni int-funksiya yordamida hisoblashning har xil misollari keltirilgan hamda uning passiv formasini qo'llash bilan matematik notatsiya uchun integrallash operatsiyalarning natijalari olingan. int-funksiya bilan qaytarilgan belgili natijalarni kanonik ko'rinishda ifodalash uchun bir qator matematik almashtirishlar talab etiladi. Bunday almashtirishlarni

Maplening o'zi amalgam oshiradi. `int` – funksiyanatijalarni soddalashtirish maqsadida ***factor, expand, simplify, convert, normal, combine, rationalize*** va boshqa funksiyalardan foydalaniladi, lekin til imkoniyati cheklangan bo'lib, bu holda foydalanuvchini matematik mahoratiga bog'liqdir.

Shunday qilib tilning bo'yicha ko'pgina ifodalarning integrallarini hisoblash mumkin. Boshqa vositalar bilan olingan natijalarni solishtirib ko'rganda ular bir qator qiziqarli funksional ayniyatlar keltirib beradilar. Undan undan tashqari, shuni inobatga olish kerakki, **`diff(int()F(x),(x),x)≡F(x)`** matematik ayniyat (konstantagana aniqlikda) Maple muhitida bajarilmaydi. Aniqrog'i, u ekvivalent almashtirishlar aniqligida to'g'ri **`intgrate`**-funksiyasi ratsional, trigobometrik, eksponensial, logarifmik, giperbolik va ularga teskari bir qator boshqa tipdagi integrallanuvchi funksiyalarni ancha keng sohasiga nisbatan effektiv va qoniqarli natijalarni olish imkoniyatini beradi.

Yuqorida o'tilgandek, **`int`**-funksiya boshlang'ich funksiyasini hisoblash iloji bo'lmagan integralosyi ifodalar uchun qo'shimcha aniqlashning imkoniyatini beradi va bu uchun quyidagi ko'rinishdagi konstruksiyani qo'llaydi: **`□int/a :=proc (') ... end{;::)`**

Va ular ko'rsatilgan C funksiyalarga nisbatan nostandart operatsiyalarni yoki ma'lum boshlang'ich funksiyalarni aniqlash imkonini beradi.

Karrali integrallarni hisoblash uchun quyidagi munosabatlar bilan ko'rsatgan sodda usullarni qo'llash mumkin,

Aytilganlarni hisobga olib, fragment sodda tuzilgan va qo'shimcha tushuntirishlarni talab qilmaydi. Fragment oxirida **`doublint` va `triplint`** (student moduli) modullar passiv funksiyalarni qo'llash bo'yicha bir qator misollar keltirilgan. Ular ikkinchi va uchinchi tartibli integrallarga mos ravishda kolepakt passiv formalarni olish imkonini beradi. Bu funksiyalarni kodlash formatlari sodda va keltirilgan misollardan ko'rish mumkin.

Ellgepsoidni sirti yuzini hisoblash uchun uch karrali integralni qo'llash mumkin, lekin ushbu masalani soddalashtirish maqsadida Maplega **`ellipsoid`**

bibliotik funksiya mavjud. Ushbu funksiya uchta asosiy yarim nurlar bilan berilgan ellipsoid uchun izlanayotgan sirti yuzini qaytaradi. ($a=b$, $b \geq c$, $c \geq 0$) Umumiy holda ushbu funksiya passiv **int** funksiya terminlarida yuz qiymatini hisoblanmasdan qaytarishi mumkin. Uni **evalf**- funksiya bo'yicha sonli hisoblash mumkin. fragmentning oxirgi misoli ellipsoid funksiyaning qo'llashini ko'rsatib beradi.

$F(x)$ funksiyaning aniq integralini hisoblash uchun **int** funksiyada ikkinchi argument sifatida **diapason** formatida $[a,b]$ integrallash intervali kodlanadi. Ya'ni **int(F(x),x=a..b)**.

Simvolli aniq integrallarni hisoblash uchun **int**-funksiya integral osti funksiyaning $[a,b]$ integrallash oralig'ida uzilish nuqtalari mavjudligiga tekshiradi. Bunday nuqtalar mavjud bo'lsa bu integralni bog'liq bo'lmagan integrallar yig'indisi sifatida hisoblashga harakat qiladi. Shu bilan birga "continuous" opsiya bunday tekshirishni ta'qiqlaydi va integral osti ifodani $[a,b]$ integrallash oralig'ida uzluksiz deb qabul qiladi. Ikkinchi tomondan "Cachy" opsiya bo'yicha **int** funksiya integral osti ifodani nuqtalarida limit funksiyaning real opsiya bilan qo'llash talab qilinadi. Keyingi fragment funksiyaning aniq integrallarni hisoblash uchun qo'llanilishini ko'rsatib beradi.

> **integrate(exp(-a*x),x=-infinity..infinity);** $\Rightarrow$ *Definite integration: Can't determine if the *

integral is convergent. Need to know the sign of --> a. Will now try indefinite \integration and then take limits.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-a x)} dx$$

> **assume(a>0): integrate(exp(-a*x),x=-infinity..infinity);** $\Rightarrow \infty$

> **Int(exp(x)*sqrt(exp(x)-1)/exp(x),x=0..ln(3))=int(exp(x)*sqrt(exp(x)-1)/exp(x),x=0..ln(3));**

$$\int_0^{\ln(3)} \sqrt{e^x - 1} dx = 2\sqrt{2} - 2 \arctan(\sqrt{2})$$

> **Int**(22/(x^2+10*x+3),x=0..*infinity*) = **int**(22/(x^2+10*x+3),x=0..*infinity*); $\Rightarrow$

$$\int_0^{\infty} \frac{22}{x^2 + 10x + 3} dx = \sqrt{22} \Re \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{5}{22} \sqrt{22} \right) \right)$$

> **Int**(1/sqrt(1-u^4),u=-*infinity*..*infinity*) = **int**(1/sqrt(1-u^4),u=-*infinity*..*infinity*); $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} du = -i\sqrt{2} \operatorname{EllipticK} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \sqrt{2} \operatorname{EllipticK} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$$

> **restart: integrate**(4*x^3+**integrate**((x+10)*t^4,t=0..3),x=0..10); $\Rightarrow$ 17290

> **evalf(integrate(sqrt(y)*sqrt(y^(10/3)+1),y=0..3),12)**; $\Rightarrow$ 11.1559015589

```
L_curve := proc(F::algebraic, x::name, a::algebraic, b::algebraic)
  if (nargs = 5, args[5], NULL)(int(sqrt(1 + diff(args[1], x)^2), x = a .. b))
end
```

> **G:=x -> a*(exp(x/a)+exp(-x/a))/2: L_curve**(G(y),y,0,a,*rationalize*); $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{2 + e^2 + e^{(-2)}} a (e^2 - 1)}{2 + 2 e^2}$$

> **L_curve**(x^2/4-exp(x)/x+x*sin(x)*cos(x),x,3,10,**evalf**); $\Rightarrow$ 2168.612762

> **evalf(integrate(v/(v^2-1)^(4/5),v=0..sqrt(3)),12)**; $\Rightarrow$.84920340156 -
1.46946313073 I

(**L_curve**) y=F(x) y chiziq yoyining a,b oralig'ida uzunligini qaytaradi. Uni shart bo'lmagan beshinchi 0-argumenti qaytarilayotgan almashtirishlar rejimini aniqlaydi(simpletiyu).

Beshinchi argumentni protsiduraga o'tkazish mexanizmiga e'tibor berish maqsadga muvofiq. Aniq sonli qiymatlarni olish zarur bo'lganda **int**- integrallsh funksiya bilan birgalikda **evalf** -funksiyani qo'llash mumkin. bu funksiya birinchi qaytaradigan qiymatini **float** sonlarga almashtiradi. Bunda bir necha hollarda

integralosti ifodalarni yoki integrallash diapazonida Float tipim qiymatlarini ko'rsatilishi kifoya. Ko'pchilik hollarda **int** funksiya yordamida xosmas integrallarni ham hisoblash mumkin. Lekin umumiy holda esa bu noto'g'ri. Nihoyat yuqorida aytilgan usulni qo'llab, $F(x,y,z,\dots)$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi $[a \ggg]$ aniq karrali integrallarni hisoblash imkoniyati mavjud. Keyingi fragment **int** funksiyaning karrali integrallarni xosmas integrallar bilan birga qo'llashni ko'rsatib beradi.

```
> [int(int(x+y,y=x^2..x),x=0..3), int(int(r^(-5),r=1..infinity),h=0..2*Pi)]; => [-621/20, 1/2 π]
```

```
> int(integrate(1-4*x^2-y^2,y=0..sqrt(1-4*x^2)),x=0..1/2); => π/16
```

```
> integrate(int(x+y-(x+y)^2+(1-x-y)^2/2,y=0..1-x),x=0..3); => 17/8
```

```
> int(int(int(r*z,z=r^2..sqrt(6-r^2)),r=0..sqrt(2)),h=0..3*Pi); => 11/2 π
```

```
> int(int(int(r^9*sin(s),t=0..2*Pi),r=0..Art),s=0..Pi); => 2/5 π Art10
```

```
> int(integrate(integrate(r,z=0..3*sin(h)),h=r^2..3*r*sin(r)),r=0..Pi); =>
```

$$\int_0^{\pi} -12 r \cos(r \sin(r))^3 + 9 r \cos(r \sin(r)) + 3 r \cos(r^2) dr$$

```
> evalf(%), int((x^5+x^4-12*x^3+8*x^2+40*x+25)/(x^2+x-12.),x=0..9); =>
```

$$-2.974993645 \int_0^9 \frac{x^5 + x^4 - 12 x^3 + 8 x^2 + 40 x + 25}{x^2 + x - 12} dx$$

```
> S:=op(%[2])[1]: int(S,op(indets(S))=0..9,'CauchyPrincipalValue'); => 1734.916217
```

```
INT:=proc(V::algebraic)
local k, L, S, W;
S, L, W:=indets(V, name), [ ], V;
for k to nops(S) do L:=[op(L), `if` (depends(W, S[k]), S[k], NULL)] od;
for k to nops(L) do W:=int(W, L[k]) od;
simplify(W)
end
```

```
> INT(sin(x)+4*y*z-2*h/a); => -y cos(x) a h z + z^2 y^2 h x a - h^2 y x ln(a) z
```

> **INT(sin(x+y+z)*(x^2+y^2+z^2));**

$$\Rightarrow \begin{aligned} & z^2 \cos(x+y+z) - 2x \sin(x+y+z) - 2 \sin(x+y+z)y + x^2 \cos(x+y+z) \\ & + y^2 \cos(x+y+z) - 2z \sin(x+y+z) - 6 \cos(x+y+z) \end{aligned}$$

Bir o'zgaruvchi funksiya kabi ko'pgina hollarda ibt funksiya xosamas karrali integrallarni ham hisoblaydi. Agar maxsus nuqta integrallash sohaning ichida bo'lsa ham "**Cauchy**" opsiyasi mazsus nuqtasi integrallash intervali ichida yotadigan funksiyalarni integrallash imkonini beradi. Oxirgi misol sodda $N(v)$ protsidurani ko'rsatadi. U argument bilan berilgan v ifodani barcha o'zgaruvchilar bo'yicha integrallash natijasini qaytaradi. Mapleni keyingi funksiyalar guruhi algebraic ifodani algebraik ifodalar berilgan nuqtalarda integrallarni hisoblash uchun xizmat qiladi. Quyidagi kdlash formatiga ega bo'lgan **intat**(V,x=W) va **Intat**(V,x=W). **intat** funksiya bo'yicha V algebraik ifodani W-algebraik ifoda bo'yicha aniqlanadigan x-nuqtadagi integral taqdimoti qaytariladi. Funksiya passiv formaga ega va u **eval** –funksiya bo'yicha hisoblanadi

> **int(G(x),x) = intat(G(s),s=x), Int(G(x),x) = Intat(G(s),s=x); eval(%[2]);** $\Rightarrow$

$$\int G(x) dx = \int^x G(s) ds, \int G(x) dx = \int^x G(s) ds \quad \int G(x) dx = \int^x G(s) ds$$

> **Art:= sin(x)+int(H(y),y): Kr:= cos(y)+intat(S(h),h=z): useintat(Art),**

$$\text{useint(Kr); } \Rightarrow \sin(x) + \int^y H(a) da, \cos(y) + \int S(z) dz$$

Useintat(V) funksiya bo'yicha birinchi berilgan V-algebraik ifodaning argumenti **int** – funksiya terminlarida berilgan barcha noaniq integrallar kiruvchilarini **intat** –funksiya terminlariga almashtiradi. **Useint-** funksiya oldingisidan almashtirishni teskari tartibda bajarilishi bilan farqlanadi. Ikkala funksiya ham passiv(**useintat**, **useInt**) -formalarni qabul qiladilar. Keltirilgan funksional imkoniyatlar noaniq integrallar qatnashgan algebraik ifodalarni simvolli qayta ishlashda ko'proq ishlatiladi.

Sonli integrallash. Yuqorida **evalf** –funksiyaning integrallashning sonli natijalarini olishda qo'llanilishi aytib o'tilgan edi. Bu holda hisoblash konstruksiyasi quyidagi ko'rinishga ega edi: **evalf** (ent(F(x.....) :**int** funksiya va **evalf** funksiyalarini passiv formalarini birgalikda qo'llashi sonli (taqribiy) integrallash uchun ko'proq imkoniyat. Bu holda hisoblash konstruksiyasi quyidagi sodda ko'rinishga ega bo'ladi **evalf**(...)

F funksiyaning berilgan sohadagi integralning taqribiy sonli yechimini berilgan aniqlikda va tanlangan sonli metod bo'yicha hisoblangan opsiyalarni qaytaradi. F funksiyaning dastlabki ikkita argumenti yuqorida batafsil ko'rib chiqilgan edi. Uchunchi uncha shart bo'lmagan argument konstruksiyasining qaytarayotgan natijasi aniqligini ta'minlaydi. To'rtinchu argument esa qo'llanilgan sonli integrallasah metodini aniqlaydi. **Evalf-int** konstruksiyasining to'rtinchi argumentining o'rnatilishi mumkin bo'lgan quyidagilar

CCquad- Klenshou-Kurtesa kvadratur metodini qo'llanilishi ma'lum tipdagi singulyarlikni avtomatik qayta ishlaydi.

Dexp addaptiv metodining qo'llanishi oldingiga qaraganda integrallanayotgan ifodaning singulyarlifgini ko'proq qayta ishlaydi.

NCrule- Nyutona- Kotisa adaptive metodining qo'llanishi yuqori darajali aniqlik bilan hisoblashlarda uncha effektiv emas. Integralni taqribiy hisoblashi, yetarli nisbiy xatolikka yetganda to'xtatiladi. Bu xatolik **E=0,5*10⁻¹**

Singulyarlikni aniqlagan holda integralni sonli hisoblash natijalari bo'yicha kerak bo'lganda foydali diagnostik informatsiyani olishi mumkin. bu maqsadda **evalf-int** konstruksiyaning ma'lumotlarni chiqarish informatsion darajasini aniqlash lozim. Buning natijasida har xil to'liqlikdagi integral hisoblashlarning borishi haqida protakollarni olish mumkin. Bu integrallarni ham kretik holatlar uchun ham ko'pgina normal hisoblashlardagi natijalarni ko'rish mumkkin. Ko'pgina hollarda bu juda ham qiziqarli.

Quyidagi fragment **evalf-int** konstruksiyasi oddiy xosmas integrallari taqribiy hisoblash uchun ko'rsatib beradi.

> **infolevel[`evalf/int`]:= 1:**

```

Nint := proc()
local Pr, Op, R, T, n;
  [assign(n, nargs), assign(Op, _CCquad), assign(Pr, Digits)];
  if n < 4 or 6 < n then ERROR( `Error in number arguments` ) fi;
  Pr := `if`(n = 5 or n = 6, `if`(whattype(args[5]) = integer, args[5], Pr), Pr);
  Op := `if`(n = 5 or n = 6, `if`(whattype(args[5]) = string, args[5], Op), Op);
  T, R := time( ), evalf(Int(args[1], args[2] = args[3] .. args[4], Pr, Op));
  RETURN([R, time( ) - T])

```

evalf end

(int(cos(x)*ln(x),x=0..Pi)); $\Rightarrow$ -1.851937052

> **Nint(1/sqrt(1-x^3),x,2,3,6,`\_NCrule`);** $\Rightarrow$ [-.269725488622 I, .051]

> **Nint((x^4+3*x^3+10*x^2-99)/(32*x^3+57*x-95),x,2,2*Pi,6);** $\Rightarrow$ [.914448, .005]

> **Nint(cos(x)^3*sin(x)^3,x,Pi/4,Pi/3,16,`\_Dexp`);** $\Rightarrow$ [.02864583333333333, .899]

> **restart: evalf(Int(x^3*(1-x^2)^(1/3),x=0..1,7,_NCrule));** $\Rightarrow$.1607143

> **In:= infinity: evalf(Int(cos(x)*ln(x)/(x-3),x=0..4,8,_Dexp));** $\Rightarrow$

evalf/int/control: Tried easyproc

evalf/int/control: Tried makeproc

evalf/int/control: Evalhf mode unsuccessful -- will retry in Maple mode

evalf/int/control: Did procmake

evalf/int/control: "applying double-exponential method"

evalf/int/control: Evalhf mode unsuccessful -- will try in Maple mode

evalf/int/quadexp: "applying double-exponential method"

Error, (in **evalf/int**) unable to handle singularity

> **T:=time(): [evalf(Int(int(int(x*sin(y)+y*cos(z)-x^z,x=y+z..3*z),y=z..z^2),z=0..3,5)), **

time()-T]; $\Rightarrow$ [47.658+.82968 10⁻⁷ I, 144.274]

> **with(inttrans):**

R:=map(laplace,[sin(x),exp(x),abs(x),ln(x),3*x^3+10*x+99],x,p); $\Rightarrow$

$$R := \left[\frac{1}{p^2 + 1}, \frac{1}{p - 1}, \frac{1}{p^2}, -\frac{\gamma + \ln(p)}{p}, 18\frac{1}{p^4} + 10\frac{1}{p^2} + 99\frac{1}{p} \right]$$

> **map(invlaplace,R,p,x);** $\Rightarrow$ $[\sin(x), e^x, x, \ln(x), 3x^3 + 10x + 99]$

> **with(student): GS:= x -> x*abs(sin(x))+3*x^2*exp(-x^2/10):**

(1)

> **evalf([simpson(GS(x),x=1..10,58), trapezoid(GS(x),x=1..10,58)],5);** $\Rightarrow$
[70.677, 70.634]

> **assume(a<0): simplify(int(exp(a*x)*ln(x)/x,x=1..infinity));** $\Rightarrow$

$$\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{2}\ln(-a)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \ln(-a)\gamma + \text{hypergeom}([1, 1, 1], [2, 2, 2], a) a$$

Fragmentning misollaridan ko'rinib turibdiki, **evalf-int** konstruksiya bo'yicha xosmas integrallar va bir karrali integrallarni hisoblash qulay. Karrali integrallarni hisoblash hollarida vaqtinchalik uzilish holari paydo bo'ladi. Shuning uchun ushbu fragment misollarida ko'rsatib berganidek, karrali integrallarni hisoblash uchun yuqorida aytib o'tilgan metodlar yordamida bajarish mumkin. Bundan tashqari, agar karrali integrallarini hisoblash uchun **evalf-int** konstruksiyasi qo'llanilayotgan bo'lsa, u holda kiritilgan barcha integral funksiyalarni eng yuqori darajadan tashqari aynan **int** funksiya yordamida tashkil qilish kerak. Buningn atijasida vaqtinchalik uzulishlarni ancha qisqartirish mumkin. Vaqt nuqtai nazaridan karrali integrallarni hisoblashni va samaradorligini ko'tarish uchun yuqorida ko'rsatib o'tilgan **int** va **evalf** funksiyalarini birgalikda qo'llash tavsiya etiladi. Lekin bu holda bizlar integrallarni sonli hisoblash metodini shu bilan birga singulyarlikni qayta ishlashni tanlash imkoniyatidan voz kechamiz. Bu nuqtai nazardan ko'rib chiqilgan Mapleni integrallash imkoniyatlari analogini matematika paketining **integrate** imkoniyatlaridan pastroq. Keltirilgan fragmentda bir karrali integrallarni sonli hisoblash usuli **Nint** protsidurasi ko'rsatilgan. Bu protsidura barcha integrallash parametrlarini yanada kompaktroq qo'llash imkonini beradi va natijani qiymatlar royxati ko'rinishida qaytaradi. Ro'yxatning ikkita

elementi mos ravishda natija va protsidurani birinchi argumenti bilan berilgan ifodadan integralni hisoblash vaqtidir. Shu bilan birga shuni inobatga olish kerakki, protsidura tanasida **evalf-int** konstruksiyasini juda ehtiyotkorlik bilan qo'llash kerak. Chunki, kodlanayotgan to'rtinchi argument opsiyasidan qat'iy nazar protsidura mexanizmlarini va konstruksiyani birgalikda qo'llanishi singulyarlikni qayta ishlashni boshqaruvini ta'minlaydi va bunday holatlar paydo bo'lganda protsidurani chaqirishi oddiy tartibda yakunlanadi. Shu bilan birga ko'pgina holarda **Nint** protsidurasi foydali bo'lishi mumkin va kitobxonga ushbu protsidurani tashkil qilishinim ko'rib chiqish taklif etiladi. **simpson(G(x),x=a..b{n})** modulli funksiya bo'yicha Simpson metodi bo'yicha **G(x)**-funksiyaning $[a,b]$ integrallash oralig'ida hisoblangan integral natijasi qaytariladi. Analogik formatdagi **trapezoid** funksiya esa **tarpetsiya** metoda bo'yicha integralni hisoblaydi. Har ikkala funksiyalarni sonli integrallash uchun qo'llanilgan natijalari oldingi fragmentning birinchi misoli ko'rsatib berdi. Nihoyat, fragmentning oxirgi misoli aniq integralni hisoblash uchun Assumi-mexanizmini qo'llashni ko'rsatib beradi. Ba'zi holarda bunday yondashish noaniq parametrlar ishtirok etgan integrallarni hisoblash imkonini beradi. Bu holat shundan kelib chiqadiki, ushbu funksiya haqiqiy va kompleks qiymatlar sohasidan noaniq parametrlar qiymatlarini ko'rib chiqishi mumkin.

Inttrans moduli o'n uchta ko'p tarqalgan integral ta'rifini o'z ichiga oladi Matematika, fizika va texnikada juda ko'p qo'llaniladi. Misol uchun differensial tenglamalarni yechish va tadqiqot qilishda, masalan, Laplasni integral operatorli sanoqlarning asoslarini tashkil qiladi. Texnika va amaliy matematikada ko'p ishlatiladi. **laplace(h(t),t,cp)** va unga teskari bo'lgan **invlaplace(H(p),p,t)**-moduli funksiyalar yordamida ta'minlanadi. Ko'rib chiqilganlar bilan birga Maple maxsus tipdagu integrallar bilan ishlash imkonini beradi.

Aytib o'tish kerakki, **laplace** funksiyaga Mapleni **ztrans** funksiyasi bevosita kiradi.

1.6. Sonli va darajali funksional qatorlar bilan ishlash

Sonli va funksional qatorlar sof va amaliy matematikada muhim ahamiyatga ega. Ular oliy ta'lim muassasalarining matematik va fizika-texnik mutaxassisliklarini matematik ta'limini, matematik tahlil va oliy matematika kurslarining asosini tashkil qikadi. Ushbu tipdagi eng sodda obyektlar bu yig'indi va ko'paytma.

Yig'indi va ko'paytmani hisoblash.

Yuqortida ko'rib o'tilgan integrallash holatidagidek Maple aniq va noaniq qo'shish imkonini beradi. Buning uchun **sum** funksiyaning aktiv va passiv normalaridan foydalaniladi va ular quyidagicha:

$$\text{sum}(V(k), \{k | k=n..m | k=R \text{ of } k=W(\lfloor k)\})$$

$$\text{Sum}(V(k), \{k | k=n..m | k=R \text{ of } k=W(\lfloor k)\})$$

Bu yerda **V(k)** umumiy holda **R** o'zgaruvchidan bog'liq bo'lgan ifoda, **r**-qo'shish o'zgaruvchisi. **N,n** butun sonli ifodalar qo'shish diapazonini aniqlaydilar. **Rof-RootOf**- konstruksiya va **w(k)** yig'indining **R** o'zgaruvchisidan bog'liq bo'lmagan ifoda. **sum** -funksiya bo'yicha **Ro'zgaruvchi** bo'yicha aniq yoki noaniq yig'indining tipi **K**-o'zgaruvchining qiymati bilan aniqlanadi.

Birinchi navbatda ushbu fubksiya simvolli qo'shishga yo'naltirilgan, lekin sonli hisoblashlar ham mustasno emas. Lekin oxirgi holda (ba'zu bir sabablarga ko'ra) **sum**-funksiyaning o'rniga keyinroq ko'rib o'tiladigan add funksiyani qo'llash tavsiya etiladi.

Oldindan hisoblashni oldini olish ushbu **sum**-funksiyaning birinchi **V(K)** argumentni va ikkinchi **R**-argumrntni umumiy holda yuqoridagi qo'shtirnoqlarda kodlash lozim. Ko'pgina hollarda korrekt hisoblashlar uchunbu majburiy shartlardan biri. **sum** (**V(K),K**) funksiyani chaqirishda **K**-o'zgaruvchi bo'yicha **V(K)** ifodaning noaniq yig'indisi qaytariladi. **sum(V(R, R=))** funksiyaning chaqirilishida berilgan diapazondan ketma-ket qiymatlarni qabul qiluvchi **K**-o'zgaruvchi **V(K)** ifodaning aniq yig'indisini natijasi qaytariladi.

$\text{sum}(V(k), k=\text{Rof})$ funksiyasi chaqirilganda **RootOf** -konstruksiya sibo'yicha aniqlanadigan plinomning barcha ildizlar qiymatini qabul qiluvchi K-o'zgaruvchi $V(K)$ –ifodaning aniq yig'indisi qaytariladi.

Kiyinchalik ushbu imkoniyat ixtiyoriy ro'yxatdan berilgan k-o'zgaruvchi yig'indisini ta'minlashda qullaniladi.

Va nihoyat $\text{sum}(V(k), k=\text{Rof})$ chaqirilganda barcha k-o'zgaruvchilar o'rniga k-dan bog'liq bo'lmagan W ifodaning qiymati qo'yiladi. Funksiyaning passiv **Sum** formasi aktiv formadek kodlash formatiga ega. Agar yig'indini hisoblash iloji bo'lmasa **sum** funksiya hisoblanmagan holda qaytariladi. Keyingi fragment yuqorida ko'rib o'tilgan yig'indining funksional imkoniyatlarni qullashni ko'rsatib beradi.

> **In:=infinity: Sum(k^10,k=1..n) = factor(simplify(sum(k^10,k=1..n))); =>**

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{66} n (2n+1) (n+1) (n^2+n-1) (3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

SUM:=proc(n,p) factor(simplify(sum('k'^p, 'k'= 1..n))) end

> **[SUM(n,6),SUM(32,8)]; =>**

$$\left[\frac{1}{42} n (2n+1) (n+1) (3n^4+6n^3-3n+1), 4482021331216 \right]$$

> **map(evalf,map(sum,[(n+1)!/n^n,1/n^4],n=1..In)); => [5.282873070, 1.082323234]**

> **[sum(W(k),k), sum(W(k),k=n..p), sum(W(k),k=G(x)), sum(W(k),k=RootOf(P(x)))]; =>**

$$\left[\sum_k W(k), \sum_{k=n}^p W(k), W(G(x)), \sum_{k=\%1} W(k) \right]$$

%1:= RootOf(P(_Z))

> **sum(sum(sum(sum(sum(V(n,m,p,t,u),n=a..b),m=c..d),p=r..h),t=s..q),u=k..v);**
=>

$$\sum_{u=k}^v \left(\sum_{t=s}^q \left(\sum_{p=r}^h \left(\sum_{m=c}^d \left(\sum_{n=a}^b V(n, m, p, t, u) \right) \right) \right) \right)$$

```

    Sq := proc(n, m, h)
    local A, k, x;
        A := 1; for k from n by h to m do A := A*(x - k) od; RETURN(RootOf(A))
    end

> Sq(1,10,3); ⇒ RootOf(_Z4 - 22_Z3 + 159_Z2 - 418_Z + 280)

    SqL := proc(L) local A, k, x; A := 1; for k to nops(L) do A := A*(x - L[k]) od; RETURN(RootOf(A)) end

> L:= [3,10,32,99]: SqL(L); ⇒ RootOf(_Z4 - 144_Z3 + 4901_Z2 - 45114_Z + 95040)

> [sum(k^3,k=Sq(10,32,3)), sum(k^3,k=SqL([10,32,3]))]; ⇒ [92168, 33795]

>
[SUM(3,100),sum(n^3,n=Sq(1,57,3)),sum(sum(n*(n+p),n=Sq(1,53,2)),p=Sq(1,5
2,2))];
[515377520732011332304111729993850674198810727378, 848008,
1174914]

> evalf([Sq(2,3,10),SqL([3,10,32]),sum((56*x+98)/(9*x^3-2),x=-In..In)],3); ⇒
[2., 3., -22.7]

```

Keltirilgan fragmentda nafaqat ifodalarni standart yig'indisi uchun misollar ko'rsatilgan, balki ifodalarni karrali yig'indisini ko'rsatuvchi misollar berilgan. Shu bilan birga Sq va Sql proseduralar ko'rsatilgan. Bu proseduralar ifodalar yig'indisini $\{n+p \cdot h | p=0..a; n+a \cdot h \leq d\}$ va ixtiyoriy L ro'yxat qiymatlarga tegishli o'zgaruvchilarning ketma – ketligidan olishga imkon beradi. **Limit**, **Diff** va **Int** passiv funksiyalardan farqli ravishda **value(Sum(...))**- konstruktsiyalar **infinity** qiymatlardagi o'zgaruvchilar yig'indisi hamma vaqt ham aniq yig'ishning sonla qiymati qaytarilmaydi. Bu holda **evalf**- funksiyadan foydalanish mumkin, chunki **limit**- funksiyasi bu holatda natija bermaydi. Quyidagi sodda fragment yuqorida aytilganlarni ko'rsatib beradi.

```

> In:=infinity: [Sum((n^2+n+1)/(3^n-n),n=1..In),sum((n^2+n+1)/(3^n-
n),n=1..In)]; ⇒

```

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3^n - n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3^n - n} \right]$$

> [value(%[1]),evalf(%[1]),value(%[2]),evalf(%[2])]; ⇒

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3^n - n}, 3.549144766, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3^n - n}, 3.549144766 \right]$$

> SS:= p -> sum((n^2+n+1)/(3^n-n),n=1..p): Lim:= limit(SS(p),p=In);
evalf(Lim); ⇒

$$\text{Lim} := \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^h \frac{n^2 + n + 1}{3^n - n} \quad 3.549144766$$

> (sum(sum(1/(n^2),'n'=1..In),'m'=1..In),'p'=1..In); ⇒ ∞, p = 1 .. ∞

Yuqorida kurilgan yig'indilash holatidek Maple elementlari aniq va noaniq ko'paytirishni imkonini beradi. **product**- funksiyaning aktiv va passiv formalari quydagilar: **product**(V(k),{k|k=n..m|k=Rof|k=W(⌊k)})

Product(V(k),{k|k=n..m|k=Rof|k=W(⌊k)}) .

Ba'zi bir jihatlardan **sum** funksiya formatiga ekvivalent. **Sum** funksiya uchun barcha aytib o'tgan narsalar va mulohazalar **product** va **Product** simvolli ko'paytirish funksiyalar uchun ham o'rinli.

> [Product(k^2+k+10,k=1..n), product(k^2*(k+1),k=1..n), product(k,k=1..10)];

⇒

$$\left[\prod_{k=1}^n (k^2 + k + 10), \Gamma(n+1)^2 \Gamma(n+2), 3628800 \right]$$

> In:= infinity: product(57*k^3/(k^2+3*k+99),k=Sq(1.5,3,0.3)); ⇒
24544.26326

>

Sum(Product(1/k,k=1..h)*Product(h,h=k..n),n=1..9)/Product(Product(k,k=1..n),
n=1..9);

$$\frac{\sum_{n=1}^9 \left(\prod_{k=1}^h \frac{1}{k} \right) \left(\prod_{h=k}^n h \right)}{\prod_{n=1}^9 \left(\prod_{k=1}^n k \right)}$$

```

> evalf(value(%),12); => .222957947079 10-15  $\frac{1}{\Gamma(h+1)\Gamma(k)}$ 
> PS1:= Product(Sum(k^(2*k-n+2)/(2*n+2*k+1)!,n=1..In),k=1..32); =>

$$PS1 := \prod_{k=1}^{32} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{(2k-n+2)}}{(2n+2k+1)!} \right)$$

> evalf(value(PS1),24); => 14.0166053493138654473806
> PSPS:=Product(Sum(Product(Sum((n^2*k^2+m^2*p^2-
57*k*m)/(n+k+m+p+99)^2, \
n=-10..10),k=-3..3),m=-10..10),p=1..3); =>

$$PSPS := \prod_{p=1}^3 \left( \sum_{m=-10}^{10} \left( \prod_{k=-3}^3 \left( \sum_{n=-10}^{10} \frac{n^2 k^2 + m^2 p^2 - 57 k m}{(n+k+m+p+99)^2} \right) \right) \right)$$

> evalf(value(PSPS),24); => 4241414.79109936362428688
> STV:=Sum(Product('(n^2+m^2-
57*n*m)/(n+m^2+99)^2','n'=3..10),'m'=0..In):
> t:=time(): evalf(value(STV),12), time()-t; => -.1 1012 - .8 1012 /, 15.068
> with(sumtools): sumtohyper(n^2-2*n-10,n); =>

$$10 \frac{-10 \operatorname{hypergeom}([1],[ ],1) - \operatorname{hypergeom}([2],[ ],1) + 2 \operatorname{hypergeom}([3],[ ],1)}{(\sqrt{11}+1)(-1+\sqrt{11})}$$

> numboccur(expand(product((x-k)^k,k=0..10)*sum((x-a)^k,k=1..7)),x); =>
468

```

Fragment misollarida **Sq** va **SqL**, proseduralar qo'llangan. Ular oldingi fragmentda ko'rsatilgan edi va **sum** va **product** funksiyalarni yig'indi ko'paytirish o'zgaruvchilarga nisbatan ko'proq imkoniyat ochib beradilar.

Yig'indilar va ko'paytmalarni birgalikda qo'llangan ifodalarni hisoblaganda **sum/product**, funksiyaning joylashuvi va yig'indi/ko'paytirish qiymatlari qabul qiladigan o'zgaruvchilar soniga qarab vaqtinchalik uzilishlar keskin ko'payadi. Ushbu funksiyalarni qo'llash natijasida maxsus situatsiyalar paydo bo'lganda mos ravishdagi diagnostika chiqariladi.

Bir qator boshqa masalalar kabi (ifodalarni simvolli qayta ishlash polinomlar va formallangan darajali qatorlar bilan ishlash va hokazo) yig'indilar va ko'paytmalar uchun pitvossir (Z,V) funksiyalarning qo'llanishi yaxshi samara berar ekan. Ushbu funksiya beshinchi qism ifodalar darajalri ishtirok etgan Z ifodani qo'shiluvchilar sonini qaytaradi. Oldingi fragmentning oxirgi misoli product/Sum tipdagi ifodalar uchun numbossom funksiyaning ishlatilishini ko'rsatib beradi. h rekkursiv funksiyaning sum/product funksiyaning birinchi argumenti sifati qo'llanganda shuni inobatga olish kerakki, agar yig'indilash/ko'paytirish o'zgaruvchisi rekkursiv funksiyaning boshlang'ich shartidan boshlansa, u holda ushbu konstruksiyaning birinchi chaqiruvi avariya holatida yakunlanadi.

Buni oldini olish uchun Sum/productfunksiyaning birinchi chaqiruvida h(n) bu yerda n-boshlang'ich qiymatdan farqli qiymat, chaqiruvni kiritish yoki Sum/product funksiyani takroran chaqirish tavsiya etiladi.

```
h := proc(n:integer)
option remember;
    h(0) := 3; h(1) := 10; round(2*h(n - 2)*h(n - 1) / (h(n - 2) + h(n - 1)))
end
```

> **sum('h(n)',n'=0..10);** $\Rightarrow$ *Error, (in h) too many levels of recursion*

> **sum('h(n)',n'=0..10), sum('h(n)',n'=0..12), sum('h(n)',n'=0..15);** $\Rightarrow$ 67, 79, 97

Aytib o'tganimiz rekkursiv protsidurani birinchi chaqirish uchun ham o'rinli. Bundan tashqar, Sumtools moduli imkoniyatlari rekkursiv funksiyalar bilan ishlashni ta'minlamaydi.

Nihoyat, sonli qo'shish/ko'paytirish uchun add/mul funksiyalar qo'llaniladi. Ular quyidagi sodda ko'rinishdagi identik formatga ega:

Add(V(k),k={W|n..p}) va mul (V(k...))

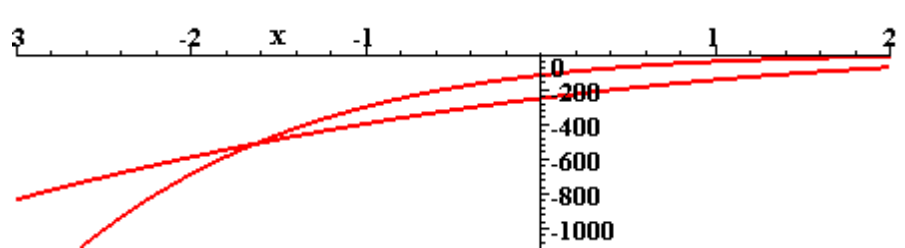
add(V(k),k=W) chaqirganda V-ifodaning W-ifodaga barcha operandlariga nisbatan ko'rinishdan hosil bo'ladigan qiymat hisoblanadi. **Add(V(k),k=n)** chaqirganda ega

$V(k)$ ifodaning K -o'zgaruvchilar bo'yicha qo'shish bajariladi. Bunda (n,p) yig'indini diapazon chegaralari qiymatlari integer, float yoki fraction tipdagi bo'lishi kerak.

Mul funksiyasini tavsiflanishi va qo'llanilishi xuddi aytib o'yilgandek, lekin faqat ko'paytirish omili uchun ham.

Keyingi fragment har ikkala funksiyalarning qo'llanilishini ko'rsatib beradi.

```
> h(0):=3: [add(h(k),k=0..10), mul(h(k),k=0..10)]; => [67, 293932800]
> add(k^3,k=[3,10,32,37,52,57,95,99]); => 2237923
> mul(k^2,k=[3,10,32,37,52,57,95,99]); => 980437497081248194560000
> P:=x -> add((x-k)^k/k!,k=0..7): K:=x -> mul((x-h(k))^k,k=1..2):
plot({P(x),K(x)},x=-3..2,\
color=red,thickness=2,axesfont=[TIMES,BOLD,10],labelfont=[TIMES,BOLD,
12]); =>
Warning, `k` in call to `add` is not local
Warning, `k` in call to `mul` is not local
```



```
> fsolve({y=P(x),y=K(x)},{y,x},x=-3..0); => {x = -1.636443281, y = -
512.4966501}
> with(sumtools): sumtools[simpcomb](GAMMA(p)*(n-1)!*GAMMA(n)); =>
Gamma(p) Gamma(n)^2
```

Keltirilgan fragmentda nafaqat **add/mul**-funksiyalarni sonli qo'shish, ko'paytirish uchun sodda misollar keltirilgan. Balki ularga asoslanib foydalanuvchi funksiyalarning ta'rifi keltirilgan. Ushbu funksiyalar grafiklari

ko'rsatiladi keltiriladi va ularga mos keladigan tenglamalar sistemasi yechiladi. Fragment misolida qo'llangan h funksiya oldingi fragmentda aniqlangan ko'rib chiqilgan qo'shish/ko'paytirish imkoniyatlari asosiylardan hisoblanadi. Lekin ushbu til **sumtools**- modul miqyosida qo'shimcha o'nta funksiyaning taqdim etadi. ushbu funksiyalar noaniq va simvolli qo'shish imkoniyatlarini kengaytirib beradilar. Masalan, modulli **sumtohyper(V(n),n)**- funksiya bo'yicha $\sum_n V(n)$ yig'indini giper geometrik taqdimotidagi konvertatsiyasini bajaradi.

Darajali funksional qatorlar. Matematika va uning ko'pgina ilovalarida funksional qatorlar muhim ahamiyatga ega. Ular orasidagi darajali qatorlar funksiyaning yoyilishi uchun alohida o'ringa ega. Ularni olish uchun Maple **taylor**-funksiyasiga ega va bu funksiya quyidagi formatga ega:

$$\text{taylor}(\langle \text{Выражение} \rangle, \{x|x=a\}, \{n\})$$

Ushbu funksiya $\{x=0|x=a\}$ nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha **Taylor** qatori bo'yicha dastlabki n hadlarni qaytaradi. Uchinchi shart bo'lmagan funksiyaning argumenti bo'lmaganda $n \equiv \text{Order}=6$ qiymat beriladi. Agar ikkinchi argument $x=a$ ko'rinishda kodlangan bo'lsa, u holda $x=0$ deb olinadi. Funksiya Taylor qatori yoyilmasi natijasini quyidagi ko'rinishda qaytaradi.

$$\text{taylor}(G(x), x = a, n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k G(x)}{dx^k} \bigg|_{x=a} \cdot (x-a)^k / k! + O((x-a)^n)$$

Bu yerda $O((x-a)^n)$ - Taylor qatorining qoldiq hadi. Bu munosabatning birinchi qismi $(x-a)^n$. nuqtadagi qatorga yoyilgan $G(x)$ -ifodaning kata hosilalaridan iborat. Funksiyaning differensiyalash maqsadida yuqorida ko'rsatilgan differensial D – operatorni qo'llaydi. Taylor qatorining terminlarida u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\text{taylor}(G(x), x = a, n) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(D^{(k)})(G)(x) (x-a)^k}{k!} \right) + O((x-a)^n)$$

Taylor funksiya singulyarligini aniqlaydi va x nuqtaning cheksiz uzoqlashgan nuqta sohasida korrekt qatorini qaytarishi mumkin. Agar bu qator

yaqinlashsa, **convert(taylor(V,x=a,n),polynom)** bo'yicha V ifodaning Taylor qatoriga yoyilmasidan uning **O((x-a)ⁿ)**- qoldiq hadini olib tashlash mumkin. Ikkinchi tomondan **whattype(V)**- test funksiyasi bo'yicha **series**- ifoda qaytariladi, agar V Maple ifodaning yoyilish natijasi bo'lsa. **type(T,taylor)**- funksiya true qiymatni qaytaradi, agar T yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha polinomial qator bo'ladi.

Agar ifodani Taylor qatoriga yoyish iloji bo'lmasa shunga mos diagnostic ma'lumot chiqariladi. Darajali qatorlar ustida klassik operatsiyalarning bajarilishiga yo'l qo'yiladi.

```
> In:= infinity: T:= taylor(x*sin(x)*exp(x),x=Pi,4); =>
      T:= - π eπ (x - π) + (-π eπ - eπ) (x - π)2 + (-1/3 π eπ - eπ) (x - π)3 + O((x - π)4)
> map(type,[T,x+x^3/3!+x^5/5!,-1+1/2(x-Pi)^2-1/24(x-Pi)^4],taylor); => [true,
false, false]
> PT:= x -> taylor(sin(1/x),x=In): type(convert(PT(x),polynom),taylor); =>
false
> taylor(int(sin(x)/x^2,x),x); => Error, does not have a taylor expansion, try
series()
> evalf(taylor(int(sin(x)/x^2,x),x=1,5),3); =>
      - .504 + .841 (x - 1.) - .571 (x - 1.)2 + .341 (x - 1.)3 - .249 (x - 1.)4 + O((x - 1.)5)
> whattype(%); => series
> G:=taylor(exp(3*sin(x+10*arcsin(0))),x=0,5); =>
      G:= 1+ 3 x+ 9/2 x2 + 4 x3 + 15/8 x4 + O(x5)
> evalf(int(convert(G,polynom),x=3..10)); => 48930.87500
> S:= taylor(sin(x),x=0,12): SInt:= int(S,x=0..Pi); =>
      SInt:= ∫0π x - 1/6 x3 + 1/120 x5 - 1/5040 x7 + 1/362880 x9 - 1/39916800 x11 + O(x12) dx
> diff(S,x$3); =>
      - 1+ 1/2 x2 - 1/24 x4 + 1/720 x6 - 1/40320 x8 + O(x9)
```

```

> evalf(SInt,6); ⇒ Error, (in evalf/int) function does not evaluate to numeric
> evalf(Int(S,x=0..Pi,6,`_NCrue`)); ⇒ Error, (in evalf/int) unable to handle
singularity
> evalf(int(convert(S,polynom),x=0..Pi),24); ⇒ 1.99989952970421751953036

```

Keltirilgan fragmentda nafaqat Taylor va Makloren qatorlarining bir yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha hisoblashlari, balki olingan qatorlar testlar misollari va ba'zi bir almashtirishlar natijalari keltirilgan. Oxirgi o'nta misol Taylor/Makloren qatorining o()-qoldiq hadlarini sonli integrallashdan oldin olib tashlash muhimligini ko'rsatadi. Bir nechta yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha Taylor qatoriga yoyilishining boshlang'ich oralig'ini hisoblash uchun **mtaylor** bibliotik funksiya mo'ljallangan. Bu funksiyaning formati

mtaylor(G(x₁,x₂,...,x_n),{x₁,x₂,...,x_n|x₁=a₁,x₂=a₂,...,x_n=a_n},{p},{LV})

Berilgan bibliotik funksiya bo'yicha uchunchi va to'rtinchi uncha shart bo'lmagan argument bilan aniqlangan Taylor qatori yoyilmasining dastlabki elementlar soni qaytariladi. Bunda yoyilish nuqtasini kodlash qoidasi Taylor funksiyasining bir yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha o'lchamlari ko'payishini inobatga olish holatiga moslashtirilgan. mTaylor funksiyaning uchinchi argumenti bo'lmasa u uchun **m** ≡ **Order=6** deb olinadi. to'rtinchi shart bo'lmagan argument esa **LV=[1,1,...,1]** (**nops(LV)=n**) ko'rinishdagi ro'yxat shaklida beriladi. Bu ro'yxatning elementlari {x₁,x₂,...,x_n} -yoyilish o'zgaruvchilarining ba'zilariga mos keluvchi musbat sonlarni qabulqlishi mumkin. Vaznlar mexanizmi asosida o'ziga xos filtr hosil qilingan. Bu filtr Taylor qatori yoyilmasi natijalari joylashtiriladigan qiymatlarini tanlash uchun kerak. Bunda **mtaylor** funksiya muayyan **taylor** qatorni qaytaradi. Ushbu qator uchun yetakchi o'zgaruvchilar uchun terminlarning darajalar va ko'rsatkichlari nomanfiy keyingi fragment mtaylor funksiyasini ko'p o'lchovli **taylor** qatorlarini hisoblash uchun qo'llashi ko'rsatiladi.

```

> readlib(mtaylor): mtaylor(exp(x)*sin(y),{x=0,y=Pi},5); =>

$$-y + \pi - x(y - \pi) + \frac{1}{6}(y - \pi)^3 - \frac{1}{2}x^2(y - \pi) + \frac{1}{6}x(y - \pi)^3 - \frac{1}{6}x^3(y - \pi)$$

> assign('PL',mtaylor(exp(x)*sin(y),{x=0,y=Pi},9,[1,3])), PL, type(PL,polynom);
=>

$$-y + \pi - x(y - \pi) - \frac{1}{2}x^2(y - \pi) - \frac{1}{6}x^3(y - \pi) - \frac{1}{24}x^4(y - \pi) - \frac{1}{120}x^5(y - \pi), true$$

> mtaylor(exp(x)+sin(y)*cos(z),{x=0,y=0,z=Pi},5); =>

$$1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y(z - \pi)^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

> diff(%,y$2)+diff(%,z)+2*diff(%,x$2); =>  $y + y(z - \pi) + 2 + 2x + x^2$ 
> mtaylor(exp(x)+sin(y)*cos(z),{x=0,y=0,z=0},6,[1,1,1]); =>

$$1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}yz^4 + \frac{1}{120}y^5 + \frac{1}{12}y^3z^2$$

CoefTaylor := proc()
local R;
if nargs ≠ 3 then ERROR( `Number of arguments is wrong!` )
else [readlib( mtaylor),
assign( R, sort( mtaylor( args[ 1 ], map( lhs, args[ 2 ] ), args[ 3 ] ) ) )]
fi;
[[coeffs( R, map( lhs, args[ 2 ] ), 'h')], [h]]
end

> CoefTaylor((3*x^2+10)*exp(x)+x*sin(y)*cos(z),[x=0,y=0,z=0],6); =>

$$\left[ \left[ 10, 10, \frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{6}, \frac{14}{3}, \frac{7}{12}, 8, \frac{23}{12} \right], [1, x, yxz^2, yx, y^3x, x^3, x^5, x^2, x^4] \right]$$

> Order:=12: readlib(coeftayl): coeftayl(taylor(x*sin(x),x=Pi),x=Pi,10); => -
1/362880
> coeftayl(y*exp(x)+x*sin(y)*cos(z),[x,y,z]=[0,0,0],[1,3,10]); => 1/21772800

```

Taylor qatorlarini qo'llanilgan masalalarni dasturlashda *CoefTaylor* protsidura ma'lum bir qiziqish uyg'otadi. Bu protsidurani qo'llash misolida sifatida ko'rib chiqish mumkin. Nihoyat, coeftaylor bibliotik funksiya quyidagi formatga ega:

coeftayl(G(x₁,x₂,...,x_n),[x₁,x₂,...,x_n]=[a₁,a₂,...,a_n],[p₁,p₂,...,p_n])

Bu funksiya bo'yicha $\prod_1^n (x_k - a_k)^{p_k}$ ko'rinishdagi G- ifodaning ko'p o'lchovli Taylor qatoridagi termasi oldidagi koeffitsiyenti qaytariladi.

Umumlashgan darajali qatorlar

Taylor/Makloren qatorlaridan umumiyroq xarakterga ega bo'lgan darajali qatorlar bilan ishlash uchun Maple'da **series** funksiya mavjud. Bu funksiya Taylor funksiyasiga analogik bo'lib, quyidagi kodlash formatiga ega:

series(<Выражение>, {x|x=a} {,n})

va **{x=0|x=a}**- yoyilish nuqtasidagi berilgan birinchi yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha umumlashgan qator yoyilmasining dastlabki oraligini qaytaradi. Qaytarilayotgan elementlar soni n-ni uchinchi shart bo'lmagan argument qiymati bilan aniqlanadi. Tilni global order o'zgaruvchisi darajali qatorlar bo'yicha hisoblashlar tartibini aniqlaydi. $x=\infty$ yoyilish nuqtasi ko'rsatilganda **series** funksiya orqali qatorning asimptotik yoyilmasi qaytariladi.

order(<Пяд>) funksiya bo'yicha qoldiq hadni darajali funksiyaning o'zgaruvchilar tartibi qaytariladi. Bunda funksiyaning argumenti sifatida faqat **series** strukturasi qatnashishi mumkin va u quyidagi ko'rinishga ega; **series(<Разложение в степенной ряд { $\pm O((x-a)^n)$ }>,x,n)**

Agar **series** struktura 0() qoldiq hadiga ega bo'lsa u holda **order** funksiya bo'yicha yoyilmaning x o'zgaruvchisi bo'yicha daraja ko'rsatkich I qaytariladi. Aks holda **infinity**- qiymati qaytariladi. Testlanadigan **type** funksiya **series** dtruktura bo'yicha **true** qimatni qaytaradi. Unga mos keladigan qatorning tipidan qat'iy nazar **whattype**- funksiya esa **series** qiymatni qaytaradi.

> **Order:= 8: SO:= series(x*cos(sin(x)+x),x=0,13); =>**

$$SO := x - 2x^3 + x^5 - \frac{41}{120}x^7 + \frac{461}{5040}x^9 - \frac{37477}{1814400}x^{11} + O(x^{13})$$

> **order(SO), whattype(SO), map2(type,SO,[series,taylor,laurent]); => 13, series, **

```

[true, true, true]
> AGN:= series(57+a*x+b*x^2+c*x^3+d*x^4+h*x^5+g*x^6+O(x^10),x,10);
⇒

      AGN := 57 + a x + b x2 + c x3 + d x4 + h x5 + g x6 + O(x10)
> whattype(AGN), order(AGN), map2(type,AGN,[series,taylor,laurent]); ⇒
series, 10, \

[true, true, true]
> {op(AGN)[1..nops(AGN)-2]}, {op(AGN)[-2]}, {op(AGN)[-1]}; ⇒
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 57, a, b, g, c, h, d}, {O(1)}, {10}

SS := proc(S::series)
local k, L;
  L := NULL; for k by 2 to nops(S) - 2 do L := L, [op(S)[k], op(S)[k + 1]] od; RETURN(L)
end

> SS(AGN); ⇒ [57, 0], [a, 1], [b, 2], [c, 3], [d, 4], [h, 5], [g, 6]
> [op(AGN)[-2], op(AGN)[-1]], SS(SO), op(SO)[-2], op(SO)[-1]; ⇒
[O(1), 10], [1, 1], [-2, 3], [1, 5],  $\left[\frac{-41}{120}, 7\right]$ ,  $\left[\frac{461}{5040}, 9\right]$ ,  $\left[\frac{-37477}{1814400}, 11\right]$ , O(1), 13

> SP:= series(ln(x)^(5/2),x=1,3); ⇒
(α)

      SP := (x - 1) $\left(\frac{5}{2}\right)$  -  $\frac{5}{4}(x - 1)^{\left(\frac{7}{2}\right)}$  + O((x - 1) $\left(\frac{9}{2}\right)$ )
> whattype(SP), type(SP,polynom), map2(type,SP,[series,taylor,laurent]); ⇒ +,
false, \

[false, false, false]
> series(sin(x),x=Pi,7), series(ln(x+x^3),x,12): map(type,[1],%[2]),laurent);
⇒

[true, false]
> series(leadterm((57*z-cos(z))/(z^3+32*z*sin(z)-1/99)),z=0,10); ⇒ 99

```

Yuqorida aytib o'tilgan va keyingi xulosalardan bu misollar izohlarni talab qilmaydi. Bundan tashqari agar **S series** strukturaga ega bo'lsa u uchun amaliy foydali SS protsidura va quyidagi ko'rinishdagi munosabat o'rinli:

$$[op(S)[-2], op(S)[-1]] \Rightarrow [O(1), n]$$

Algebraic ifdaning darajali qatorga yoyilmasining enf kichik hadini hisoblash uchun **series** konstruksiyasi xizmat qiladi. Uning ko'rinishi quyidagicha:

$$series(leadterm(<Выражение>), \{x|x=a\}, \{n\})$$

Argumentlari yuqorida ko'rib o'tilgan **series** funksiyaning argumentlariga mos keladi. Ko'rsatma bo'yicha $V=\{o, a\}$ nuqtadagi p ko'rsatkichi minimal bo'lgan x yetakchi bo'yicha lagebraik ifodaning darajali qatorga yoyilmasining hadi qaytariladi. Oldingi fragmentning misolida ko'rib o'tilgan **series** konstruksiyasini qatorga yoyilmasining asosiy termasini qo'llanishini ko'rsatib beradi.

poisson(W, x, {n})- funksiya bo'yicha W ifodaning bir nechta yetakchi x o'zgaruvchi bo'yicha n darajali taylor qatoriga yoyilmasi qaytariladi. Bunda yoyilma koefitsiyentlari trigonometrtik termalari guruhlariga ajratiladi. **Series** funksiya bo'yicha qaytarilayotgan umumlashgan darajali qator umumiy holda $R(p)$ koefitsiyentlar ishtirokidagi darajali qator sifatida aniqlanadi va u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\alpha^*(x-a)\varepsilon < |k(p)| < \beta^*(x-a)\varepsilon$$

(α, β) - konstantanalar va ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$, $x \rightarrow a$.

Odatda **series** funksiya natijani yuqorida ko'rib o'tilgan **series** struktura ko'rinishida qaytaradi. Lekin umumiy holda natija oddiy **sum(product.)**-konstruksiyalar jo'rinishida qaytarilishi mumkin. bu holda testlanadigan **type** funksiya ikkinchi argumentda **false** qiymatnim qaytaradi. Muhim jihatini darajali qatorlar bilan ishlash natijalarini tahlil qiluvchi dasturli konstruksiyalarni ishlab chiqishda inobatga olish kerak. Umumlashgan darajali qatorlar miqtosida ikkita muhim qatorlar sinflari ajratiladi: ular taylor/Makloren qatori va Lorens qatorlari. Lorens qaatori modulli **laurent**- funksiya bo'yicha hisoblanadi va u **numapprox**-

modul paketi yadrosi bilan qo'llab-quvvatlanadi. Oldin aytilganidek **series** strukturada **whattype** funksiya **series** qiymatni qaytaradi va darajali qatorlarni klssifikatsiya qilmaydi. Xususiyl holda Lorens qatorlari bilan bevosita ifodalar va funksiyalarni algebraik va hisoblashlarga bog'liq va ular termadagi $(x-a)^{-1}$ yoyilmani Lorens qatorlariga a qulay nuqtasi koefitsiyentlari qiymati sifatida ishtirok etadilar. Bu maqsadda Maple bibliotik **residue(W,x=a)**- funksiyaga ega va a nuqtadagi x yetakchi o'zgaruvchi bo'yicha algebraik w funksiyani qaytaradi. Agar funksiyani hisoblash imkoniyati bo'lmasa **residue**-chaqiruv hisoblanmagan holda qaytariladi. **residue(V,Y)** protsidura esa **laurent** modulli funksiyaga asoslanadi va $X=a$ ko'rinishdagi tenglamani y nuqtadagi V algebraik ifodani qulayini qaytaradi. Protsidurani qo'llashda **op**-funksiya muhim ahamiyatga ega. Bu funksiya qatorlar uchun foydali munosabatlarni aniqlaydi va **series** tipdagi strukturaga asoslanadi. Ko'rib chiqilgan **taylor, laurent** va **series** funksiyalar **series**

tipdagi funksiyani qaytaradi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$ST = series(\sum_{k=1}^m a_k (x-a)^{p_k} + O((x-a)^n), x=a, n)$$

ya'ni ketma-ketlik berilgan $x=a$ nuqtadagi yoyilmaning boshlanish intervali o'qoldiq hadi, yoyilma nuqtalari va n darajasi bu strukturaga misol keltiramiz.

```
> with(numapprox): L:= laurent(x*sin(x),x=Pi,4); =>
L := - pi (x - pi) - (x - pi)^2 + 1/6 pi (x - pi)^3 + O((x - pi)^4)
L := series((-Pi)*(x-Pi)-1*(x-Pi)^2+(1/6*Pi)*(x-Pi)^3+O((x-Pi)^4),x=-(-Pi),4)
> [op(L)], [op(k,L)$k=1..nops([op(L)])], op(0,L), op(-1,L), op(-2,L); =>
[-pi, 1, -1, 2, 1/6 pi, 3, O(1), 4], [-pi, 1, -1, 2, 1/6 pi, 3, O(1), 4], x - pi, 4, O(1)
```

Berilgan struktura op funksiya yordamida o'zining komponentlarini effektiv ajratish imkonini beradi va sodda qayta ishlash va tahli qilish imkonini beradi.

Aynan ushbu strukturani tahlili asosida **residue**- protsiduraning algoritmi tuzilgan. Xususiyl holda **op (ST)** funksiya bo'yicha ketma-ketlik qaytariladi:

a_k, p^k, O(1), n; Bu yerda (**k=1÷m**) va hamma belgilashlar **Series** strukturani ko'rsatmalariga mos beradi. Ko'rib chiqilganlarga qo'shimcha ravshda taylor va series funksiyalar bilan aniqlanadigan darajali qatorlar yuqorida ko'rib chiqqan **solve** funksiya yordamida yechiladigan tenglamalarda umumlashgan yetakchi o'zgaruvchilar sifatida ishtirok etishlari mumkin. aniqroq qilib aytganda **solve(G(R(x),y),x),-** ko'rinishdagi konstruksiyalar hisoblanadi. Keyingi fragment aytib o'tganlarimizni ko'rsatib beradi.

```
> solve(series(sin(x)+cos(x),x=Pi,5)=y,x); =>
```

$$\pi - (y + 1) + \frac{1}{2}(y + 1)^2 - \frac{2}{3}(y + 1)^3 + (y + 1)^4 + O((y + 1)^5)$$

```
Residue := proc(V::algebraic, Y::equation)
```

```
local k, R;
```

```
R := numapprox[laurent](V, Y);
```

```
for k to 1 / 2*nops([op(R)]) do if op(R)[2*k] = -1 then RETURN(op(R)[2*k - 1]) fi od;
```

```
0
```

```
end
```

```
> Residue(b*x^2/(x-a),x=a), Residue((57*x^2+52*x-95)/((x-3)*(x-10)),x=3);
```

```
=> ba^2, -82
```

```
> TT:= taylor(1/Pi^2*x*sin(x),x=Pi,5): solve(TT=y,x); =>
```

$$\pi - \pi y - \pi y^2 - \frac{1}{6}\pi (12 + \pi^2) y^3 - \frac{1}{3}\pi (15 + 2\pi^2) y^4 + O(y^5)$$

```
> Order:=4: solve(TT^3-10*TT^2+3*TT-99=z,x); =>
```

$$\pi - \frac{1}{3}\pi (z + 99) - \frac{13}{27}\pi (z + 99)^2 - \frac{1}{486}\pi (550 + 3\pi^2) (z + 99)^3 + O((z + 99)^4)$$

```
> readlib(residue): residue((3*t+10)/(z-32*t+99),z=32*t-99); => 3 t + 10
```

Qatorlar bilan ishlash uchun kengaytirilgan vositalar

Ko'rilgan darajali qatorlar bilan ishlash vositalari asosiylari hisoblanadi. Lekin **powseries**- modul miqyosida paket qo'shimcha 21 funksiyaga ega. Bu funksiyalar umumiy formada berilgan. Formallashtirilgan darajali qatorlarni tuzish va ular bilan ishlash qo'shimcha imkoniyatlarni yaratadi. Maslan, **powseries(<IIY>)** modulli funksiya bo'yicha koeffitsiyentlari PU tenglamalar ketliidan aniqlandigan formallangan darajali qator **tpsform(Id,x,n)**- funksiya bo'yicha esa ID formallangan darajali qator asosida unga mos keladigan x o'zgaruvchi n darajali qatorlar yoyilmasini dastlabki oralig'ini qaytaradi. Keyingi fragment yuqorida aytib o'tilgan Maplening modulli funksiyalarini ko'rsatib beradi.

> **with(powseries): powcreate(s(n)=(s(n-1)+s(n-2))/s(n-3),s(0)=3,s(1)=10,s(2)=32, **

s(3)=99): R:= tpsform(s,x,8); =>

$$R := 3 + 10x + 32x^2 + 99x^3 + \frac{131}{10}x^4 + \frac{1121}{320}x^5 + \frac{161}{960}x^6 + \frac{881}{3144}x^7 + O(x^8)$$

> **S:= tpsform(inverse(s),x,7); =>**

$$S := \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + \frac{29}{81}x^3 + \frac{78823}{2430}x^4 - \frac{26213681}{233280}x^5 + \frac{12166307}{699840}x^6 + O(x^7)$$

Darajali funksional qatorlarga yoyilmalarni sof va hisoblash matematikani ko'pgina bo'limlarida qo'llash mumkin. **Fur'e** trigonometrik qatorlar nazariyasi hozirgi matematikaning ko'pgina bo'limlarida muhim ahamiyatga ega va matematik fizika masalalari uchun alohida o'rin egallaydi. Asosiy tushunchalardan biri bu **Fur'e** integrali va **Fur'e** almashtirishlari va ulardan ikkinchi tushuncha radio va elektrotexnikada signallarni qayta ishlash ko'pgina masalalarda muhim ahamiyatga ega. Maple tili **FFT(n,X,Y)** va **iFFT(n,X,Y)**, bibliotek funksiyalarga ega. Ular mos ravishda to'g'ri va teskari diskred tez Fur'e almashtirishlarni, 2 chi va 3 chi berilgan argumentlar, x va y bir o'lchovli massivlar, har biri (1.. 2n) uzunliklarga ega va 2n uzunlikdagi Z kompleks ketma-ketlikni aniqlaydi. (74)

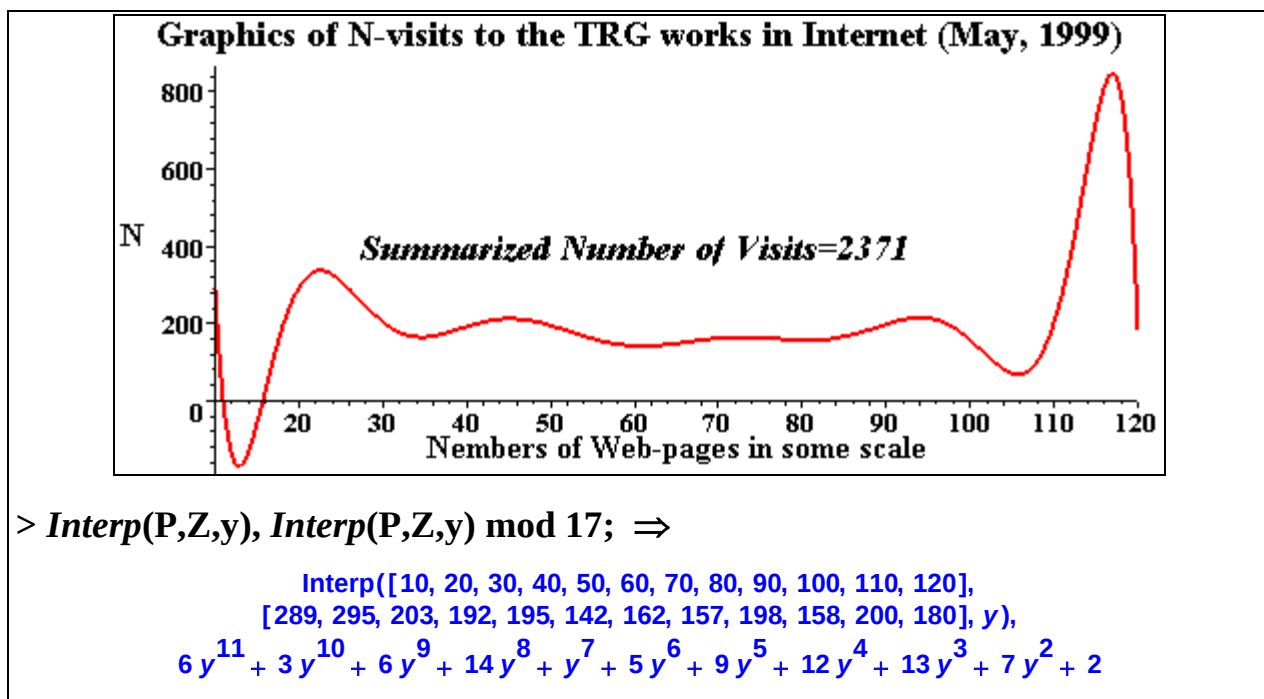
Funksiyalarni silliqlash va interpoliyasiyalash uchun Maple vositalari

Funksional bog'lanishlarni jadval ko'rinishi birinchi navbatda amaliy matematikada va ko'pgina taqribiy hisoblashlar da muhim ahamiyatga ega . Birinchi masala , berilgan kritiriy bo'yicha jadval ko'rinishidagi berilganlarni eng yaxshi yaqinlashadigan funksiyani topish masalasi, ikkinchi masala esa tugun nuqtalardagi qiymatga ega funksiyani toppishdan iborat.Ma'lumki ham birinchi , ham ikkinchi masala cheksiz ko'p yechimga ega .

Ikkinchi masalani yechish uchun Maple da ***interp(X,Y,Id)***- baziz funksiya mavjud. Ushbu funksiya x va y vektorlar yoki ro'yxat bilan aniqlangan interpoliyasiya nuqtalarini , ya'ni $\{(X[k],Y[k])|k=1\div(n+1)\}$.to'plamni , ko'pxadini qaytaradi.

Keyingi fragment 1999 yil may oyida ***Tallinn Research Group (TRG)*** bilan ishlash uchun , internet sahifalarni qatnashganlar sonini interpoliyasiyalash uchun ***interp***- funksiyani qo'llashini ko'rsatib beradi.

```
> restart: with(plots): F:= [TIMES,BOLD,14]: P:= map(`*`,10,[k$1..12]):
> Z:= [289,295,203,192,195,142,162,157,198,158,200,180]: H:= y ->
interp(P,Z,y):
> Tx:=textplot([60,400,cat(`Summarized Number of Visits =
`,sum(Z[k],k=1..nops(Z)))]):
> PL:= plot(H(y),y=P[1]..P[nops(P)],title=`Graphics of N-visits to the TRG
works in \
    Internet (May,
1999)`,titlefont=F,axesfont=[F[1],F[2],10],thickness=2,labels= \
    [`Nembers of Web-pages in some scale`,`N `],labelfont=[F[1],F[2],12], \
    xtickmarks=12): display(PL,Tx,font=[F[1],cat(F[2],`ITALIC`),14]); =>
```



interp funksiya $x[k]$ nuqtalardagi Id – o'zgaruvchilar bo'yicha interpoliyasion ko'phadni qaytaradi. Funksiya bilan qaytarilayotgan interpoliyasion ko'phad interpoliyasion berilganlarni $Y[k]$ qiymatlarni qabul qiladi

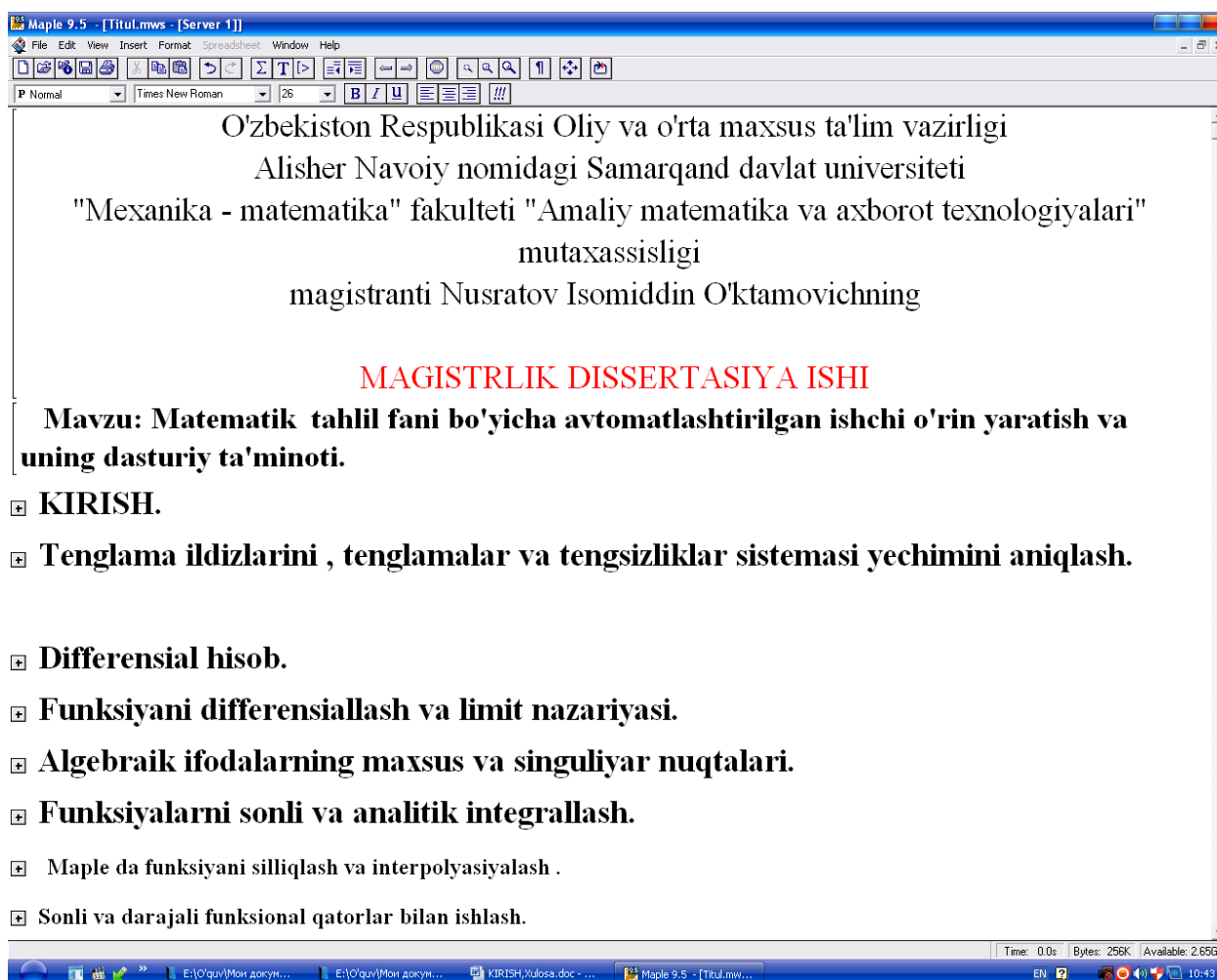
$\text{Interp}(X,Y,Id) \bmod p$ bo'yicha $\{(X[k],Y[k])|k=1 \div (n+1)\}$ -nuqtalar bo'yicha interpoliyasiya qiladigan Id yetakchi o'zgaruvchilar bo'yicha n darajasidan yuqori bo'lmagan ko'phadni qaytaradi. Bir nechta etakchi o'zgaruvchilar modulli polynomial interpoliyasiyani ta'minlash uchun Maple da bibliotek **sinterp**-funksiya xizmat qiladi. Va nihoyat sonli ifodalar , funksiyalar va proseduralarni yaxshi aproksimasiya qiladigan funksiyaning topish masalasi uchun **numapprox**-moduli vositalari taminlanadi. Ular ko'pgina muhim masalalarni berilgan sonli oraloqda yechish imkonini beradi.

II BOB. MATEMATIK TAHLIL MASALALARINI YECHISH JARAYONINI VIZUALLASHTIRISH

Ushbu bobda differensial tenglamalarni yechish jarayonini vizuallashtiruvchi elektron kursni umumiy sxemasi, undagi ishchi varaqni hujjatlashtirish va bir nechta varaq bilan ishlash uchun giperhavola tashkil qilish vositalari va ularning tadbiri keltirilgan[10].

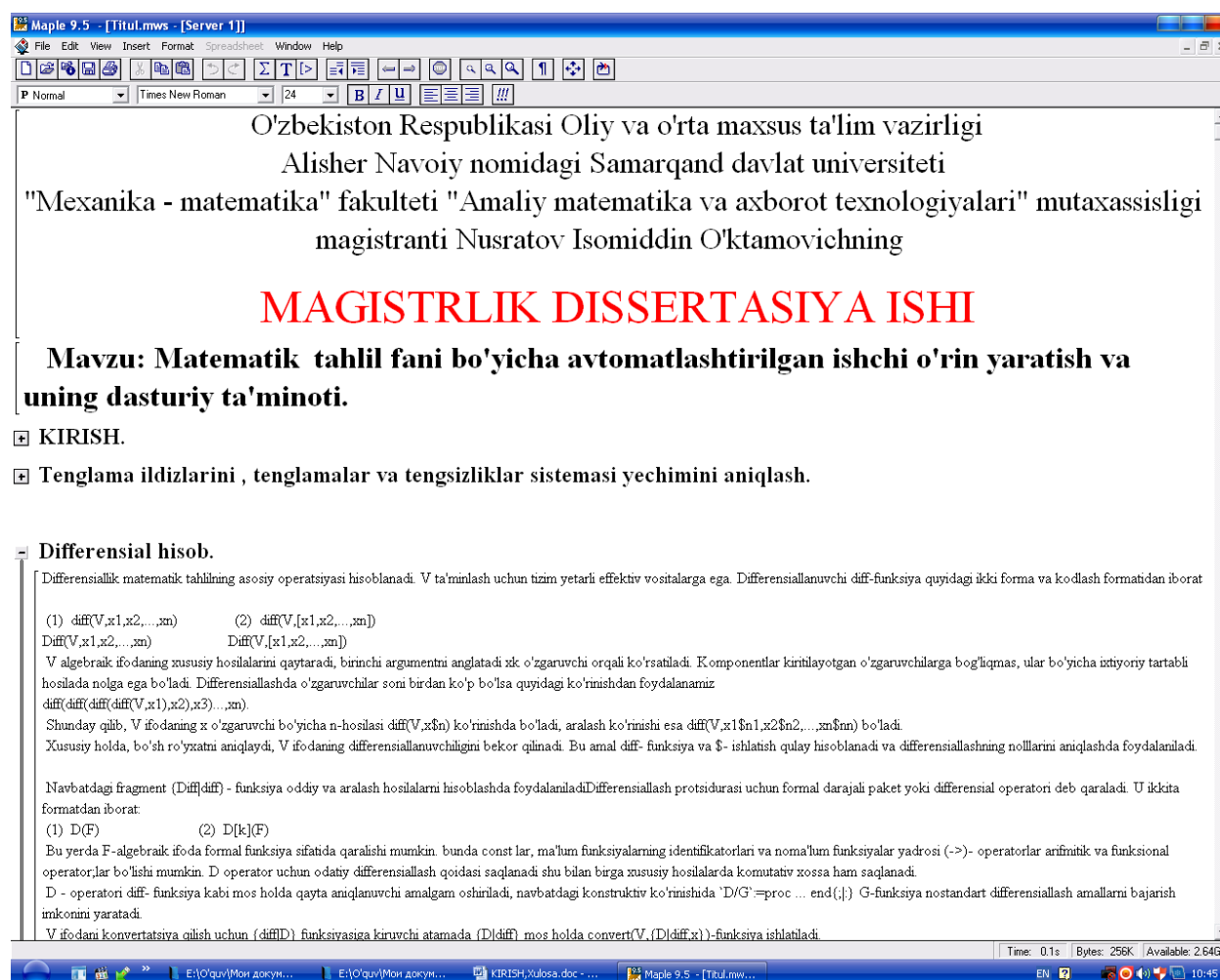
2.1. Matematik tahlil masalalarini yechish jarayonini vizuallashtiruvchining umumiy sxemasi.

Biz II bobda matematik tahlil masalalarini Maple tizimi yordamida yechish jarayonini ko'rdik. Endi ushbu natijalarni o'quv jarayoniga tatbiq qilish uchun maxsus ko'rinishdagi elektron kurs hosil qilishimiz lozim. Ushbu elektron kursning tarkibiy qismini quyidagi ko'rinishda tashkil qilish mumkin.



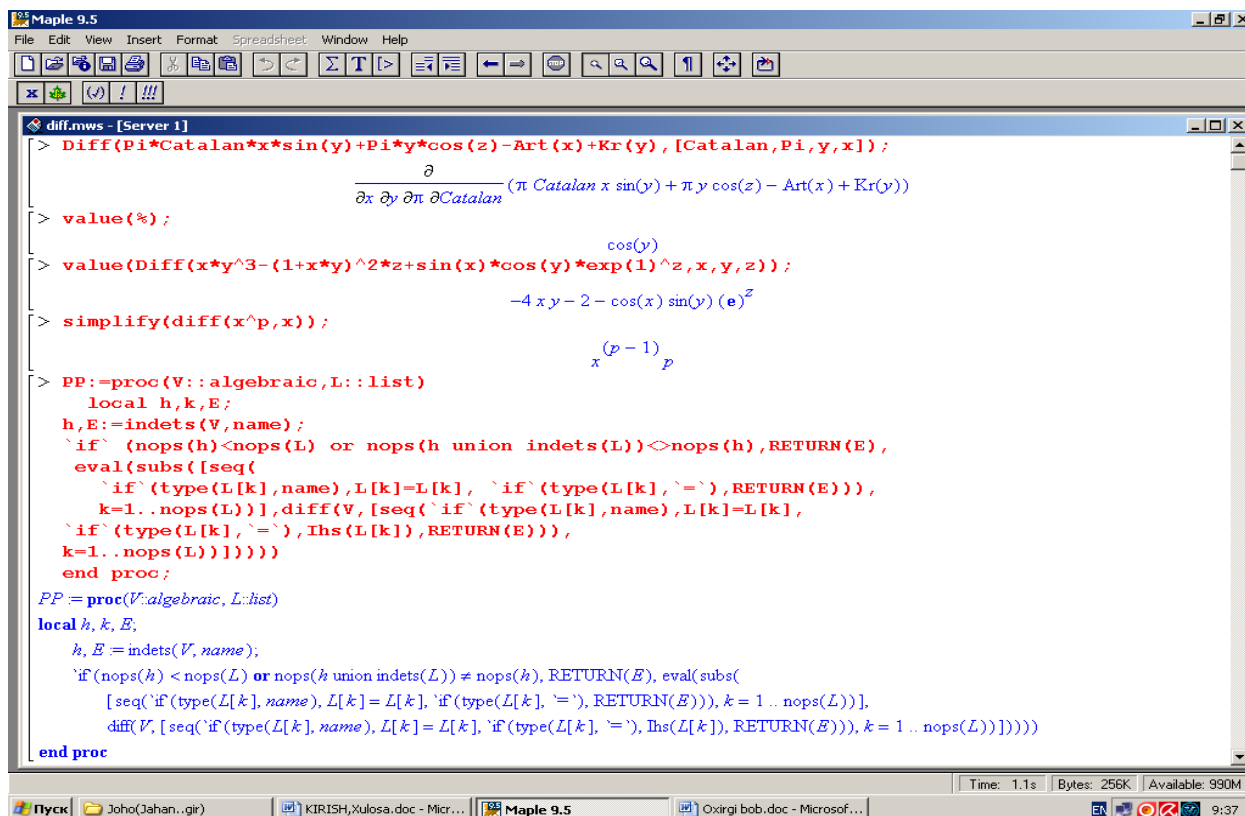
2.1-rasm.

Elektron kursning 2.1-rasmda tasvirlangan bosh sahifasida, elektron kursning sarlavhasi va bo'limlari keltirilgan. Masalan, "Differensial hisob" bo'limida berilgan ma'lumotlarni ko'rish uchun bo'lim boshida turgan "+" tugmani faollashtirish kerak. Natijada bo'limning quyidagi ko'rinishdagi tarkibiy qismi hosil bo'ladi:



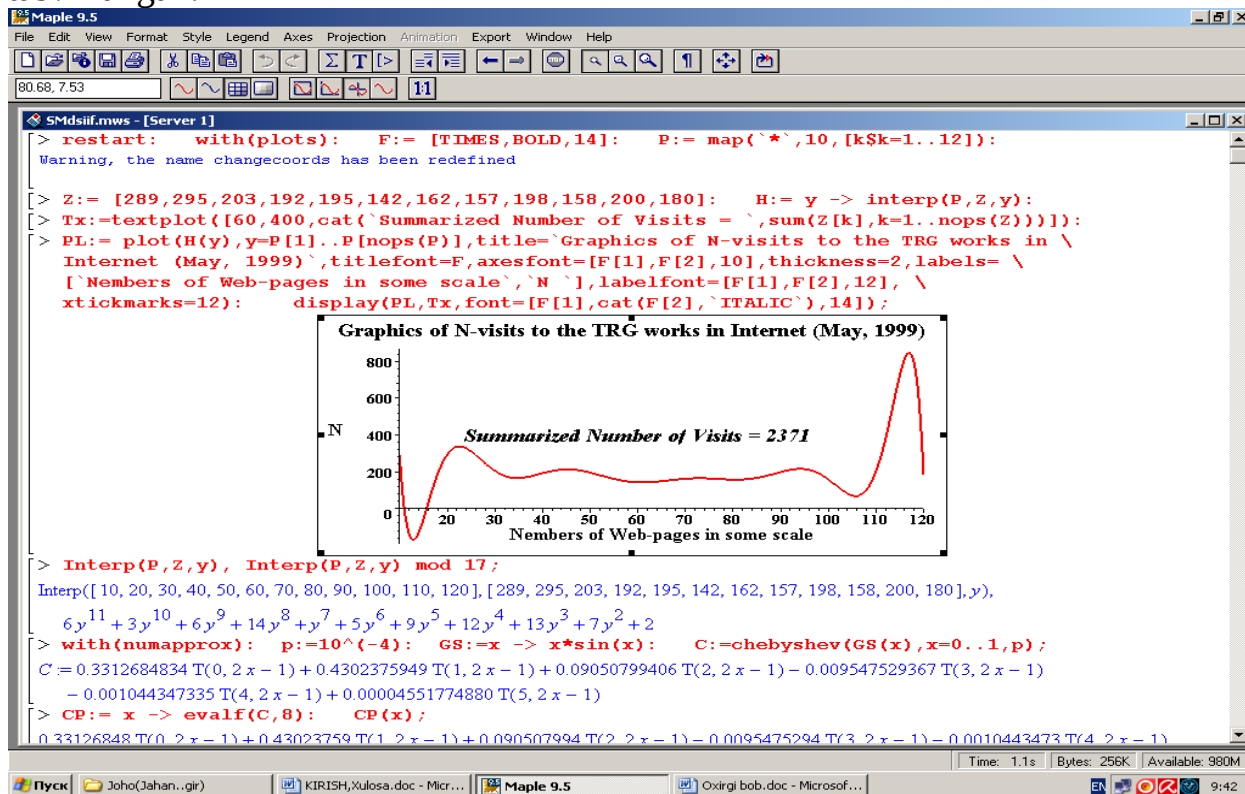
2.2-rasm

Biz keltirilgan bo'limning "Misol" qismini ko'rish uchun o'sha qisim nomi turgan qatorni faollashtirish kerak. Masalan ushbu bo'limdagi 1-qismni ko'rib o'tamiz. U 2.3-rasmda tasvirlangan. Natijada masalaning yechilishi 2.3- oynada hosil bo'ladi.



2.3-rasm.

Masala yechimining grafik ko'inishi 2.4-rasmda tasvirlangan.



2.4-rasm

Elektron kursning bosh sahifasiga o'tish uchun "orqaga" tugmasini bosamiz va bosh sahifaga o'tamiz. Ushbu jarayon barcha masalalar uchun bir xilda qo'llaniladi.

2.2. Matematik tahlil masalalarini interaktiv tarzda yechish jarayoni

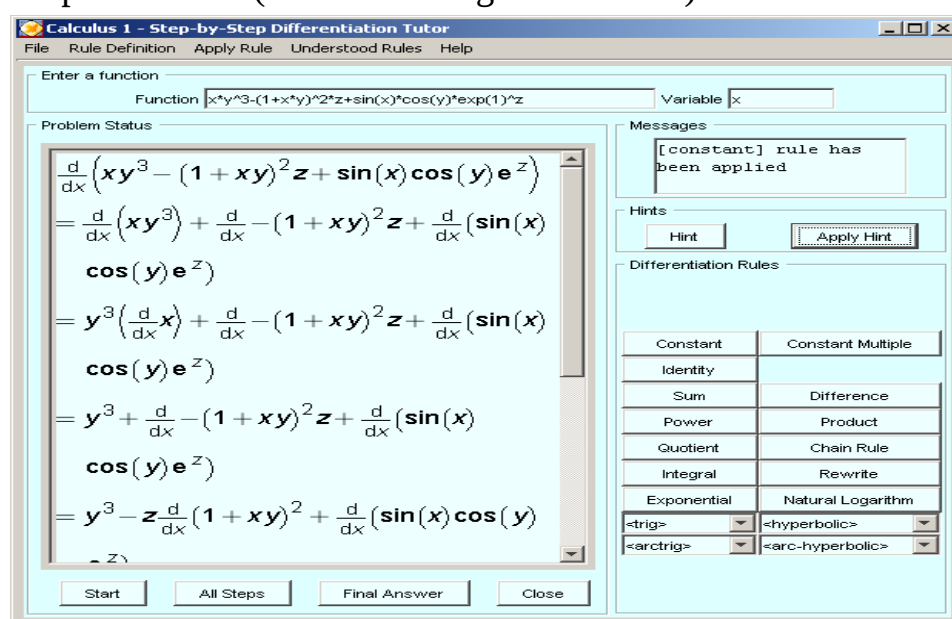
Interaktiv Matematik tahlil masalalarini taxlil qiluvchisidan foydalanish

Bu dastur quyidaga bo'limlarda tushuntirilib o'tilganidek xar xil masalalar uchun bir qancha oynalarga ega.

Matematik tahlil masalalarini qiluvchisini ishga tushirish uchun **with(student[Calculus1]);** komandasini Mapleda so'ralganda kiritamiz.

Mening Oynam

- Interaktiv Matematik tahlil masalalarini taxlil qiluvchisining asosiy oynasi kiritilgan axborot sistemasini 3 qismga bo'lib kursatadi.
 - Sistemaning differensial tenglamalari
 - Sistemaning boshlangich yoki chegaraviy talablari
 - Sistema parametrlari (noma'lum o'zgarmas sonlar)



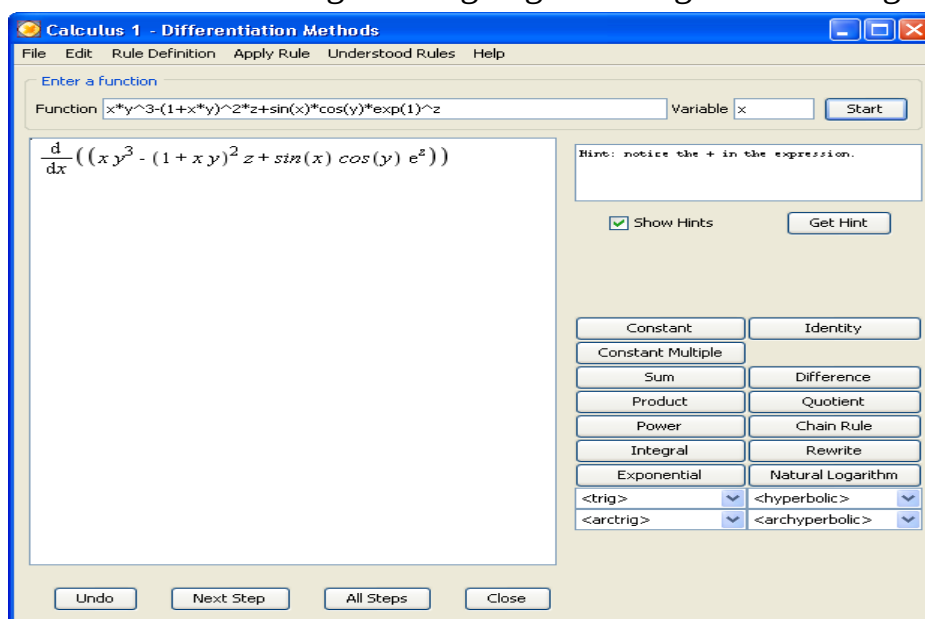
2.5-rasm

- Kiritilgan axborotni o'zgartirish uchun **Hint** tugmasini bosing.
Eslatma: Boshlangich talablar va parametrlar faqat differensial tenglamalar kiritilgan xolda o'zgartirilishi mumkin.

- Berilgan sistemani rakamli yoki simvollar orqali yechish uchun **Solve Numerically** yoki **Solve Symbolically** tugmalarini bosish kerak. Rakamli yoki simvolli yechimlar tanlov spetsifikatsiyalari oynasi ochiladi.
- **Quit** tugmachasi **dsolve[interactive]()** dan hech qanday natijasiz chiqib ketadi.

Tenglamalarga Taxrir Qilish

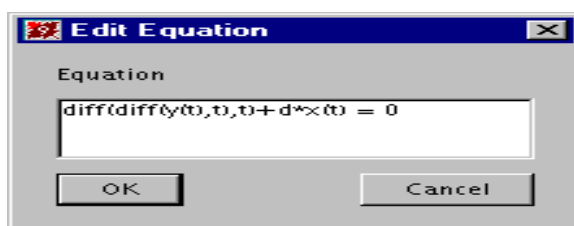
- **Differensial tenglamalarni taxrir qilish** oynasiga kirish uchun asosiy oynada *Matematik tahlil masalalari* guruxi tagidagi **Hint** tugmasini bosish.



2.6-rasm

Tenglamalarni tahrir qilish

- **Edit Equation** oynasiga kirish uchun [Edit Differential Equations](#) oynasidagi taxrir etilishi kerak bo'lgan tenglamaning ung tarafidagi **Edit** tugmasini bosish kerak.



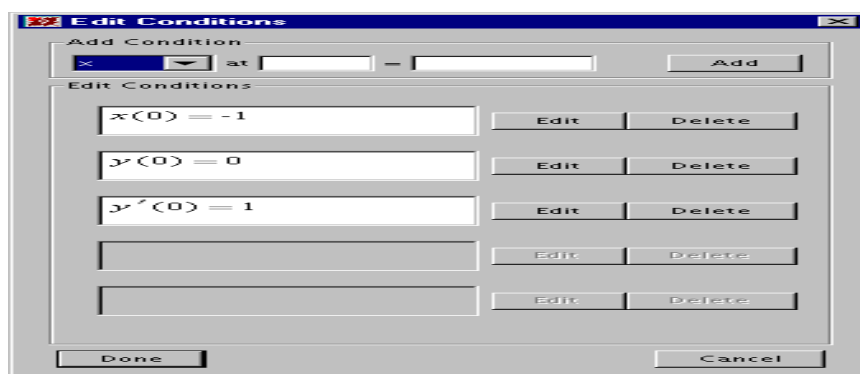
2.7-rasm

Bu oynada siz tenglamani taxrir etishingiz mumkin va **OK** ni bosib tenglamaga kiritilgan o'zgartirishlarni qabul etishingiz mumkin. **Cancel** ni bosish bu o'zgartirishlarni bekor etadi. Bu xolda, siz [Edit Equations](#) oynasiga qaytarilasiz.

Eslatma: Agar o'zgartirilgan tenglama xaqiqiy bo'lmasa, siz tenglamani to'g'rilamaguningizga qadar bu oynadan chiqib keta olmaysiz, yoki **Cancel** tugmachasini bosishingiz kerak bo'ladi.

Talablarni Tahrir Qilish

- **Edit Conditions** oynasiga kirish uchun, Asosiy oynadagi *Conditions* guruh qutisi tagidagi **Edit** tugmasini bosish talab etiladi.



2.8-rasm

- Bu oynada ikkita asosiy maydonlar mavjud.
- *Add Condition (Talab kushing)*
Bu maydon mavjud sistemaga yangi (boshlang'ich yoki chegaraviy) talab qo'shish uchun ishlatiladi. *Add Condition* maydoni qaram o'zgaruvchi yoki xosilani tanlash uchun tushadigan qutiga ega va yana talab kuchga kirishi kerak bulgan nuqtani kiritish uchun va bu nuqtadagi qiymatni kiritish uchun maydonga ega. **Add** tugmachasi bosilayotganda, talab sintaksga va xaqiqiylikka tekshiriladi va agar xaqiqiy bo'lsa u pastdagi *Edit Conditions* maydoniga qo'yiladi.
Eslatma: *Add Condition* maydonidagi kiritilgan narsa oynadan chiqib ketilayotganda xisobga olinmaydi. Agar talab saqlanib qolinishi kerak bo'lsa u xolda u avvalo **Add** tugmachasini bosgan xolda sistemaga qo'shilishi kerak.
- *Edit Conditions (Talablarni Taxrir Qilish)*
Bu maydoncha sistemaga qo'yilgan talablarni o'zgartirish yoki yo'qotish uchun qo'llaniladi. Bir vaqtning uzida 5 ta talab ko'rinadi. Agar 5tadan ko'proq talab mavjud bo'lsa, bular *Edit Conditions* maydonining tagida joylashgan navigatsiya tugmalari yordamida qurilishi mumkin (bular faqat sistemada 5ta dan ko'proq talablar mavjud bo'lganda paydo bo'ladi).
Delete tugmasi uzidan chapdagi talabni yo'qotadi va uzidan pastdagi talablarni suradi.
Edit tugmachasi [Edit Condition](#) oynasini ochadi, bu oynadan foydalanib kerakli talabni o'zgartirish mumkin bo'ladi.
- **Done** tugmachasi xamma qo'shimchalar, yo'qotishlar yoki o'zgartirishlarni qabul qiladi va Asosiy oynaga qaytaradi.
- **Cancel** tugmachasi barcha kiritilgan uzgartirishlarni inkor etadi va Asosiy oynaga qaytaradi.

XULOSA

Magistrlik dissertatsiya ishda erishilgan asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

Matematik tahlil masalalari , ya'ni:

-tenglama va tengsizliklarni yechidi (tenglamalar sistemasi va tengsizliklar sistemasi);

-limitlar va differensiyaluvchi funksiyalarni hisoblandi;

-algebraik ifodalarning xos va singulyar nuqtalarini aniqlandi;

-differensial hisoblandi;

-belgili va sonli integrallash qoidasi o'rganildi;

-sonli va darajali funksional qatorlar bilan ishlash yo'llaridan foydalanildi;

- yechishning nazariy asoslariga asosan muhim jixatlari aniqlandi;
- tanlangan matematik tahlil masalalari sinfiga doir tenglamalarni yechishning Maple tizimida yechish vositalari aniqlanib ularni amaliy jixatdan qo'llash uslublari ko'rsatildi;
- matematik tahlil masalalarini yechish jarayonini namoyish qiladigan elektron kurs yaratildi;
- bajarilgan ishlarning amaliy tadbiqini ko'rsatish uchun interaktiv usulda tenglamalarni yechish jarayoni namoyish qilindi.

Magistrlik dissertatsiya ishdagi ma'lumotlar matematik xarakterdagi masalalarni Maple tizimida ifodalashda keng doiradagi mutaxassislarga, magistrlar, talabalarga foydalanish uchun qo'shimcha uslubiy qo'llanma sifatida xizmat qilishi mumkin. Ishdagi ma'lumotlar matematik paketni o'rganishda xorijiy va milliy adabiyotlarga qo'shimcha hisoblanadi. Ma'lumotlarni ifodalashda yetarlicha qiziqarli misollar keltirilgan va Maple paketida dasturlashni to'liq o'z ichiga olgan shuning uchun foydali amaliy vosita sifatida ishlatish mumkin. Bunda paket standart vositalari to'liq holda keltirilgan, shuningdek, ular soddalashtirilgan holatda qo'llangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Karimov I. A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. Toshkent, 2009 yil mart.
2. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2002 yil 31 maydagi PF-3080-son "Kompyuterlashtirishni rivojlantirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini yanada rivojlantirish to'g'risida"gi Farmoni. Toshkent, 2002 yil 31 may.
3. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2002.06.06 dagi 200-sonli qarori. Toshkent, 2002 y.
4. Аладьев В.З., Богдвичюс М.А. Решение физико-технических и математических задач с пакетом Maple V.- Вильнюс: Изд-во Техника, 1999, 686 с., ISBN 9986-05-398-6.
5. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика.- Москва: Изд-во Лаборатория Базовых Знаний, 2000, 751 с. + CD-ROM, ISBN 5-93208-052-3.
6. Аладьев В.З., Богдвичюс М.А. Maple 6: Решение математических, статистических и инженерно-физических задач.- Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2001, 850 с. + CD-ROM, ISBN 5-93308-085-X.
7. Urunbayev E. U., Murodov F. M. Kompyuter algebrasi tizimlarining amaliy tadbiqlari. Samarqand. 2003. 96 b
8. Jo'raev T.J, Sahdullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. "Oliy matematika asoslari" I,II T. «O'zbekiston» 1985
9. Tojiev Sh.I. "Oliy matematikadan masalalar yechish" T. «O'zbekiston» 2002
10. Sahdullaev A., Xudoyberganov G. Mansurov X., G'ulomov R. «Matematik analizdan misol va masalalar to'plami» T. «O'zbekiston» 1992y.
11. Danko R.E. A.Popov., G.U.Kojevnikova Oliy matematika. Misol va masalalar. I qism T.2007
12. Davlatov A. Jo'raqulov R. Oliy matematikadan misol va masalalar. T.2007

ILOVA

V_solve prosedurasi tenglamalar sistemasi yechimini berilgan n xona aniqlikda taqribiy yechimini aniqlab, yechimni tekshirish jarayonini ko'rsatadi.

```

V_Solve := proc(U, P, n::integer, V::evaln)
local k, R;
  R := [evalf(solve(U, P), n)];
  if type(P, set) then V := seq(eval(subs(R[k], U)), k = 1 .. nops(R))
  else V := [seq(eval(subs(P = R[k], U)), k = 1 .. nops(R))]
  fi;
  op(R)
end

```

```

F_Analys := proc(G::algebraic, a::realcons, b::realcons)
local k, x, C, S, TOC, L, R;
[assign(x = op(indets(args[1], name))), map(readlib, [iscont, discont, singular])];
if iscont(args[1], x = a .. b, closed) then RETURN('Function is continious')
else S := singular(args[1], x); C := discont(args[1], x)
fi;
C := op({S} union {seq({x = C[k]}, k = 1 .. nops(C))});
for k to nops({C}) do
  if abs(rhs(op(C[k]))) = ∞ then
    assign('L' = limit(args[1], op(C[k])), 'R' = limit(args[1], op(C[k])));
    TOC[C[k]] := 'Asymptotical behaviour on infinity', [R];
  next
  else assign('L' = limit(args[1], op(C[k]), left), 'R' = limit(args[1], op(C[k]), right))
  fi;
  if L = R and abs(R) ≠ ∞ then
    TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the eliminated type', [L, R]
  else
    if L ≠ R and abs(L) ≠ ∞ and abs(R) ≠ ∞ then
      TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the first type', [L, R]
    else TOC[C[k]] := 'Point discontinuity of the second type', [L, R]
    fi
  fi
od;
eval(TOC)
end

```

```

diffP := proc(V::algebraic, L::list)
local h, k, E;
h, E := indets(V, name), 'Error in initial conditions';
if (nops(h) < nops(L) or nops(h union indets(L)) ≠ nops(h), RETURN(E),
eval(subs([seq(
  if (type(L[k], name), L[k] = L[k], if (type(L[k], '='), L[k], RETURN(E))),
  k = 1 .. nops(L)], diff(V, [seq(
  if (type(L[k], name), L[k], if (type(L[k], '='), lhs(L[k]), RETURN(E))),
  k = 1 .. nops(L))]))))
end

```

int funksiyani karrali integrallarni xosmas integrallar bilan birga qo'llashni ko'rsatib beradi:

```

INT := proc(V : algebraic)
  local k, L, S, W;
    S, L, W := indets(V, name), [ ], V;
    for k to nops(S) do L := [ op(L), `if` (depends(W, S[k]), S[k], NULL) ] od;
    for k to nops(L) do W := int(W, L[k]) od;
    simplify(W)
  end
  diffP := proc(V : algebraic, L : list)
    local h, k, E;
      h, E := indets(V, name), `Error in initial conditions`;
      `if` (nops(h) < nops(L) or nops(h union indets(L)) ≠ nops(h), RETURN(E),
        eval(subs([seq(
          `if` (type(L[k], name), L[k] = L[k], `if` (type(L[k], `=`), L[k], RETURN(E))),
          k = 1 .. nops(L))], diff(V, [seq(
            `if` (type(L[k], name), L[k], `if` (type(L[k], `=`), lhs(L[k]), RETURN(E))),
            k = 1 .. nops(L))])))
    end
  end

```

```

INT := proc(V : algebraic)
  local k, L, S, W;
    S, L, W := indets(V, name), [ ], V;
    for k to nops(S) do L := [ op(L), `if` (depends(W, S[k]), S[k], NULL) ] od;
    for k to nops(L) do W := int(W, L[k]) od;
    simplify(W)
  end

```

```

Nint := proc()
  local Pr, Op, R, T, n;
    [assign(n, nargs), assign(Op, _CCquad), assign(Pr, Digits)];
    if n < 4 or 6 < n then ERROR(`Error in number arguments`) fi;
    Pr := `if` (n = 5 or n = 6, `if` (whattype(args[5]) = integer, args[5], Pr), Pr);
    Op := `if` (n = 5 or n = 6, `if` (whattype(args[5]) = string, args[5], Op), Op);
    T, R := time( ), evalf(Int(args[1], args[2] = args[3] .. args[4], Pr, Op));
    RETURN([R, time( ) - T])
  end

```

```

CoefTaylor := proc()
  local R;
    if nargs ≠ 3 then ERROR(`Number of arguments is wrong!`)
    else [readlib(mtaylor),
      assign(R, sort(mtaylor(args[1], map(lhs, args[2]), args[3])))]
    fi;
    [[coeffs(R, map(lhs, args[2]), 'h')], [h]]
  end

```