O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo’lyozma huquqida

UDK: 517.984

AKTAMOVA VASILA UKTAMOVNA

SONI SAQLAMAYDIGAN ZARRACHALAR SISTEMASIGA MOS MODEL OPERATORNING XOS QIYMATLARI SONI

5A 480107- Matematik fizika

Magistr
akademik darajasini olish uchun yozilgan
DISSERTATSIYA

Ish ko’rib chiqildi va himoyaga
Ruxsat berildi.
“Matematik fizika va funksiyalar nazariyasi” kafedrasi mudiri
Prof. S. N. Laqaev ______________

Ilmiy rahbar:
prof. S. N. Laqaev
____

SAMARQAND-2012

M U N D A R I J A

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Panjaradagi soni saqlanmaydigan bir nechta zarrachalar sistemasi hamiltoniani o’rganish masalasi statistik fizika, kvant mexanikasi va kvant maydon nazariyasi masalalarini yechish uchun muhim ahamiyatga ega .

Soni saqlanmaydigan zarrachalar sistemasi $s-d$ modeli misolida [6] va soni saqlanadigan zarrachalar sistemasi Hubbard modeli misolida [8] o’rganilgan.

Dissertatsiyaning maqsadi va vazifalari :

Soni ikkidan oshmaydigan qisqa ta’sirlashuvchi sistema Hamiltoniani uchun Birman – Schwinger prinsipini isbotlash.

Dissertatsiyaning ilmiy yangiligi:

Soni ikkidan oshmaydigan sistema Hamiltoniani muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari soni va o’z – o’ziga qo’shma kompakt Birman – Schwinger operatorining xos qiymatlari soni orasida bog’lanish o’rnatilgan.

Tadqiqotning predmeti. Soni saqlanmaydigan va ikkidan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltoniani.

Tadqiqotning ob’yekti. Soni saqlanmaydigan va ikkidan oshmaydigan zarrachalar sistemasi.

Tadqiqot usullari.

Magistrlik dissertatsiyasida erishilgan natijalarni olishda asosan o’z – o’ziga qo’shma operatorlar nazariyasi va Minimaks prinsipidan foydalanilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish, uchta bo’lim, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro’yxatidan iborat.

Birinchi bo’limda asosiy natijalarni bayon qilishda qo’llanilgan asosiy tushuncha, ta’rif va teoremalar keltirilgan , ya’ni Hilbert fazosi, Hilbert fazosida aniqlangan o’z – o’ziga qo’shma operatorlar, kompakt operatorlar va ularning spektral xossalari bayon qilingan.

Ikkinchi bo’limda dissertatsiyaning asosiy natijalari teorema va lemmalar shaklida bayon qilingan.

Uchinchi bo’limda ikkinchi bo’limdagi asosiy lemma va teoremalarning isbotlari keltirilgan.

Dissertatsiya yakunida xulosa va adabiyotlar ro’yxati keltirilgan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi nazariy ahamiyatga ega.

BO’LIM 1

Hilbert fazosida o’z – o’ziga qo’shma operatorlar nazariyasining muhim tushunchalari.

1.1 Ichki ko’paytmali Vektor fazolar.

Faraz qilamiz, V to’plamda elementlarni qo’shish va kompleks (haqiqiy) songa ko’paytirish amallari kiritilgan bo’lsin [4].

Agar V to’plamda kiritilgan qo’shish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y \in V$
2. Kommutativlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y = y + x$,
3. Assotsiativlik: $\forall x, y, z \in V$ uchun $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. 0 element mavjudligi: $\exists \varnothing \in V : \forall x \in V$, $x + \varnothing = \varnothing + x = x$
5. Qarama-qarshi element mavjudligi: $\forall x \in V$ uchun $\exists - x \in V$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$ va ko’paytirish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall \alpha \in C(R)$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha x \in V$
2. Assotsiativlik: $\forall \alpha, \beta \in C(R)$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
3. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in V$
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in C(R), \quad \forall x \in V$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in C(R), \quad \forall x, y \in V$

munosabatlar bajarilsa, V to'plam vektor fazo yoki chiziqli fazo deb ataladi. Sonlar maydonining kompleks (C) yoki haqiqiy (R) bo'lishiga qarab, vektor fazolar mos ravishda kompleks yoki haqiqiy vektor fazolar deb yuritiladi.

Misol 1.1.1. Haqiqiy sonlar to'plami ning n-marta o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini kabi R^n kabi belgilaymiz, ya'ni

$$R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n-marta} = \{(x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_i \in R, \quad i = 1,2,..,n\} .$$

R^n da elementlarni qo'shish va haqiqiy songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:

1. $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C^n, \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in C^n$ uchun

$$(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n);$$

2. $\forall \lambda \in C$ va $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C^n$ uchun

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Agar $\varnothing = (0,...,0)$ vektorni nol element va $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ vektorni $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ga qarama-qarshi element sifatida aniqlasak, natijada R^n chiziqli fazoga aylanadi va biz uni n-o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataymiz.

Hilbert fazosida chiziqli operatorlar

H_1 fazoning har bir elementiga H_2 fazoning yagona elementini mos qo'yuvchi akslantirish operator deyiladi va $A: H_1 \to H_2$ yoki $y = Ax$ kabi belgilanadi. Agar H_1 va H_2 lar chiziqli fazolar bo'lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in C$ uchun $A(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa, A operator bir jinsli deyiladi.

Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $A(x+y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda A operator additiv deyiladi.

Ta'rif 1.2.1. Bir jinsli additiv operator chiziqli operator deyiladi. Demak biror A operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham keltirib o'tish foydadan xoli bo'lmaydi.

Ta'rif 1.2.2. Agar ixtiyoriy $x, y \in H_1$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ tenglik bajarilsa, u holda A operator chiziqli deyiladi. Chiziqli operator butun fazoda aniqlangan yoki uning aniqlanish sohasi butun fazoning biror qismi bo'lishi mumkin.

Misol 1.2.3.

$$A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$$

operatorning aniqlanish sohasi butun fazoga teng emas. Chunki bu operator

$$x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \in l_2$$

vektorni

$$Ax_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$$

vektorga o'tkazadi va bu vektor l_2 fazoning elementi bo'lmaydi, ya'ni x_0 bu operatorning aniqlanish sohasiga tegishli emas.

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$ deb belgilanadi. $R(A)$ deb esa A operatorning qiymatlar to'plamini belgilaymiz:

$$R(A) = \{y \in H_2 : \exists x \in D(A), \quad Ax = y\}.$$

Osongina ko'rsatish mumkinki, chiziqli operatorning qiymatlar sohasi ham chiziqli ko'pxillikdir. $A : H_1 \to H_2$ chiziqli operatorning asosiy xossalaridan biri H_1 fazodagi nol elementni H_2 fazodagi nol elementga o'tkazishidir. Haqiqatan additivlik xossasidan $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0) = 2A(0)$ ekani kelib chiqadi. Bundan $A(0) = 0$.

Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik tushunchasi odatdagi funksiyaning chegaralanganligi tushunchasidan biroz farq qiladi.

Faraz qilamiz, H_1, H_2 lar Hilbert fazolari bo'lsin.

Ta'rif 1.2.4. Agar $A: X \to Y$ operator X dagi istalgan chegaralangan to'plamni Y dagi chegaralangan to'plamga o'tkazsa, u chegaralangan operator deyiladi.

Demak, chegaralanmagan operator biror chegaralangan to'plamni chegaralanmagan to'plamga o'kazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta'rifini quyidagicha ham berish mumkin:

Ta'rif 1.2.5. X va Y Hilbert fazolari, $A: X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar biror $M > 0$ son va istalgan $x \in X$ uchun

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi. Agar istalgan M soni uchun shunday $x_M \in X$ element mavjud bo'lib,

$$\|Ax_M\|_Y > M\|x_M\|_M$$

munosabat o'rinli bo'lsa, A operator chegaralanmagan deyiladi.

Agar A operator chegaralanmagan bo'lsa, uning normasini ∞ ga teng deb qabul qilamiz.

Ta'rif 1.2.6. X va Y Hilbert fazolari va $A: X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Istalgan $x \in X$ uchun

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$$

munosabat bajariluvchi $M > 0$ sonlarning aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ kabi belgilanadi.

Amalda operatorning normasini topishda bu ta'rifdan foydalanish ancha noqulayliklar tug'diradi.

Teorema 1.2.6. $A: X \to Y$ chiziqli operatorning normasi uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

1. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$

2. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$

3. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$

Isbot. $\alpha = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$ bo'lsin. A operatorning chiziqliligidan

$$\alpha = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$$

U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \alpha$$

ya'ni

$$\|Ax\|_Y \leq \alpha \|x\|_X \ .$$

Bu yerdan $\|A\| = \inf M \leq \alpha$. Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $x_\varepsilon \in X$ mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|_Y}{\|x_\varepsilon\|_X}$$

yoki

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_X \leq \|Ax_\varepsilon\|_Y \leq C\|x_\varepsilon\|_X$$

Shuning uchun

$$\alpha - \varepsilon \leq \inf C = \|A\|$$

ε ning ixtiyoriyligidan $\alpha \leq \|A\|$ kelib chiqadi. Demak $\|A\| = \alpha$.

$c_A = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$ bo'lsin. U holda aniq yuqori chegaraning xossalariga ko'ra $c_A \geq \|A\|$. Boshqa tomondan A chiziqli ekanligidan

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{\|x\|\le 1} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = c_A$$

Demak

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$$

Teorema isbotlandi.

Misol 1.2.7. Quyidagi operatorni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring va normasini toping.

$$A : l_1 \to l_1, \quad Ax = \left(2x_1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 x_2, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n, \ldots \right)$$

Yechish.

$$\|Ax\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n \right| \le \sup_{n\ge 1} \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = e \cdot \|x\|$$

$$\|Ax\| \ge e\,, \qquad \|Ax\| = e$$

Javob. $\|Ax\| = e$

Chiziqli operatorning uzliksizligi tushunchasi sonlar o'qi R^1 da aniqlangan funksiyalarning uzluksizligi tushunchasi bilan bir xil kiritiladi.

Teorema 1.2.8. X va Y Hilbert fazolari va $A : X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:

(i) A operator 0 nuqtada uzluksiz.

(ii) A operator butun X fazoda uzluksiz.

(iii) A operator chegaralangan.

Isbot. Biz (i)$\to$ (ii)$\to$ (iii)$\to$ (i) ni ko'rsatamiz.

Faraz qilamiz, (i) o'rinli. U holda istalgan $y_n \to 0$ ketma-ketlik uchun $Ay_n \to A(0) = 0$ .Endi ixtiyoriy $x \in X$ elementni qaraymiz. x ga intiluvchi ixtiyoriy

x_n ketma-ketlik uchun $y_n = x_n - x$ ketma-ketlik 0 nolga intiluvchi ketma-ketlik bo'ladi. A chiziqli ekanligidan

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| = \|Ay_n\| \to A(0) = 0, \quad n \to \infty$$

Demak A butun fazoda uzluksiz. Demak (i)$\to$(ii).

Faraz qilamiz, (ii) o'rinli. Lekin A chegaralanmagan. U holda $\forall n \in N$ uchun $\exists x_n \in X$ mavjudki, $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$. Ushbu $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ ketma-ketlikni quramiz. Aniqlanishiga ko'ra $y_n \to 0$. Shartga ko'ra A operator 0 nuqtada uzluksiz va demak $Ay_n \to 0$ bo'lishi kerak. Biroq

$$\|Ay_n\| = \left\| A\left(\frac{x}{n\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{n\|x\|}\|Ax_n\| \geq n\|x_n\| \frac{1}{n\|x\|} = 1$$

Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}\|Ay_n\| = 0$ emasligini bildiradi. Zidlik. Demak A chegaralangan, ya'ni (ii)$\to$(iii).

Faraz qilamiz, (iii) o'rinli. U holda ta'rifga asosan $\exists M > 0$ son mavjudki, barcha $x \in X$ lar uchun $\|Ax\| \leq M\|x\|$ tengsizlik o'rinli. Demak 0 ga intiluvchi ixtiyoriy $x_n \in X$ ketma-ketlik uchun $\|Ax_n\| \to 0$. Bu yerdan A operator 0 nuqtada uzluksiz, ya'ni (iii)$\to$ (i).

Teorema isbotlandi.

Teorema 1.2.9. (Banach-Shteynxaus). Faraz qilamiz, F – X Hilbert fazosini Y Hilbert fazosiga akslantiruvchi chegaralangan chiziqli operatorlar oilasi bo'lsin. Aytaylik, istalgan $x \in X$ uchun $\{\|Tx\|_Y / T \in F\}$ to'plam chegaralangan bo'lsin. U holda $\{\|T\| / T \in F\}$ to'plam chegaralangan [3].

Ushbu teorema ba'zan tekis chegaralanganlik prinsipi ham deyliadi.

Misol 1.2.10. $P_n : l_2 \to l_2$, $P_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ operatorlar ketma – ketligini Banah – Shteynxauz teoremasiga tekshiramiz. Haqiqatdan ham, $X = l_2$ va $Y = l_2$- lar Hilbert fazolari. Har bir $x \in l_2$ nuqtada $\{P_n x\}$ chegaralangan ekanligi

$$\|P_n x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_n|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|x\| = M_x$$

Munosabatdan kelib chiqadi. Bundan

$$\|P_n\| = \sup_{\|x\| \ne 0} \frac{\|P_n x\|}{\|x\|} \le 1$$

kelib chiqadi.

Odatda H_1 Hilbert fazosini H_2 Hilbert fazosiga akslantiruvchi barcha chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(H_1, H_2)$ deb belgilaymiz. Bundan bo'yon a'lohida aytilmagan bo'lsa, A operator H Hilbert fazosida aniqlangan deganda operatorning aniqlanish sohasi ham, qiymatlar sohasi ham H da ekanligini, ya'ni $A \in L(H, H)$.

Teorema 1.2.11. A operatorning aniqlanish sohasi butun $l_2(Z^d)$ fazoga teng bo'lishi uchun $\sup_{x \in Z^d} \left|\varepsilon(x)\right| < \infty$ bo'lishi zarur va yetarli [4].

Isbot. Zarurligi. Agar $D(A = l_2(Z^d))$ bo'lsa, $\sup_{x \in Z^d} |\varepsilon(x)| = \infty$ bo'la olmasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, $\sup_{x \in Z^d} |\varepsilon(x)| = \infty$ bo'lsin.

$$B : l_2(Z^d) \to l_2(Z^d), \qquad (Bf)(x) = \overline{\varepsilon(x)} f(x), \quad f \in l_2(Z^d)$$

operatorni kiritamiz.

$$\left|\overline{\varepsilon(x)} f(x)\right|^2 = \left|\overline{\varepsilon(x)}\right|^2 |f(x)|^2 = |\varepsilon(x)|^2 |f(x)|^2 = |\varepsilon(x) f(x)|^2$$

munosabatga asosan $D(B) = D(A) = l_2(Z^d)$. Shuningdek, barcha $f, g \in l_2(Z^d)$ lar uchun

$$(Af, g) = (f, Bg)$$

munosabat bajariladi. Biz biroz keyinroq Hellinger-Teplitsning quyidagi umumlashgan teoremasini isbotlaymiz.

Teorema 1.2.12. A operator H Hilbert fazosida aniqlangan va $D(A)=H$ bo’lsin. Agar H da aniqlangan shunday B operator mavjud bo’lib, $D(B)=H$ va $\forall x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, By)$$

munosabat bajarilsa, A operator chegaralangan bo’ladi.

Bu teoremaga ko’ra A operator chegaralangan.

$\varepsilon(x)$ chegaralanmagan funksiya ekanligidan ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in Z^d$ mavjudki, $|\varepsilon(x_n)| > n|$ bo’ladi. Ushbu ketma-ketlikni quramiz:

$$f_{x_n}(n) = \begin{cases} 1, & agar \quad n = x_n \\ 0, & agar \quad n \neq x_n \end{cases} \tag{1}$$

Aniqlanishiga ko’ra, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\|f_{x_n}\| = 1$ va $\|Af_{x_n}\| = |\varepsilon(x_n)| > n$. Demak, ta’rifga ko’ra A chegaralanmagan operator. Bu ziddiyat

$$\sup_{x \in Z^d} |\varepsilon(x)| < \infty$$

ekanini ko’rsatadi.

Yetarliligi. Faraz qilamiz, $\sup_{x \in Z^d} |\varepsilon(x)| = S$ bo’lsin. U holda istalgan $f \in l_2(Z^d)$ uchun

$$\|Af\|^2 = \sum_{x \in Z^d} |\varepsilon(x) f(x)|^2 \leq \sum_{x \in Z^d} S^2 |f(x)|^2 = S^2 \|f\|^2 \tag{2}$$

bajariladi, demak ta’rifga ko’ra A chegaralangan operator va barcha $f \in l_2(Z^d)$ funksiyalar uchun aniqlangan, ya’ni $D(A) = l_2(Z^d)$. Teorema isbotlandi.

Misol 1.2.13. $L_2(T^d)$ fazoda aniqlangan ko’paytirish operatorni qaraymiz:

$$(Af)(x) = \varepsilon(x) f(x), \quad f \in L_2(T^d), \quad x \in T^d$$

bunda $\varepsilon(x)$ T^d da aniqlangan biror o’lchovli funksiya. Ko’rinib turibdiki, A operator chiziqli. Uning aniqlanish sohasi

$$D(A)=\left\{ f \in L_2(T^d): \int_{T^d} |\varepsilon(x) f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Teskari operatorlar.

H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo’lsin. A operator H_1 fazoda aniqlanib, H_2 fazoda qiymatlar qabul qilsin, ya’ni $A: H_1 \to H_2$.

Ta’rif 1.3.1. Agar istalgan $y \in R(A)$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo’lsa, A operator teskarilanuvchan deyiladi. Agar A teskarilanuvchan bo’lsa, har bir $y \in R(A)$ ga $Ax = y$ tenglamaning yagona yechimi $x \in D(A)$ ni mos qo’yuvchi akslantirish A operatorning teskarisi deyiladi va A^{-1} kabi belgilanadi.

Teorema 1.3.2. Agar chiziqli operator teskarilanuvchan bo’lsa, unga teskari operator ham chiziqlidir.

Isbot. Ta’kidlab o’tamizki, chiziqli operatorning qiymatlari sohasi ham chiziqli ko’pxillik bo’ladi. Faraz qilamiz, $y_1, y_2 \in R(A)$ elementlar A operatorning qiymatlari sohasidan olingan ixtiyoriy elementlar bo’lsin. U holda shunday $x_1, x_2 \in D(A)$ elementlar mavjudki, $Ax_1 = y_1$ va $Ax_2 = y_2$ bo’ladi. Teorema shartiga asosan A^{-1} mavjud. Demak $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$.

Biz barcha $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ lar uchun

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$$

ekanini ko’rsatamiz. Haqiqatan ham

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

ekanligidan

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Teorema 1.3.3. $A: H_1 \to H_2$ operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = 0$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Faraz qilamiz, A operator teskarilanuvchan. U holda bundan va A chiziqli operatorning 0 ni 0 ga o'tkazishidan foydalanib, $Ax = 0$ tenglamaning yechimi yagona $x = 0$ bo'lishini topamiz.

Yetarligi. Faraz qilamiz, $Ax = 0$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo'lsin. U holda istalgan $y \in R(A)$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, agar $x_1, x_2 \in D(A)$ uchun $Ax_1 = y, \quad Ax_2 = y$ munosabatlar bajarilsa, A chiziqli ekanidan

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = 0$$

Agar $x_1 - x_2 \neq 0$ bo'lsa, u holda $Ax = 0$ tenglama nolmas yechimga ega bo'lib qoladi. Bu esa shartga zid. Demak $x_1 = x_2$, ya'ni $A-$ teskarilanuvchan.

Teorema isbotlandi.

Misol 1.3.4. Quyidagi operatorni teskarilanuvchanlikka tekshiring. Agar mavjud bo'lsa uni toping ?

$$A: R^3 \to R^3,$$

$$Ax = (x_1 + 2x_3, 2x_2, 2x_1 - x_3)$$

$Ax = 0$ shartni tekshiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x_3 = 0, \; x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Demak, $Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$. Demak, teskarilanuvchan ekan.

$Ax = y$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_2 = y_2 \\ 2x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} y_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x_3 = 2y_1 - y_3, \quad x_3 = \frac{2}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_3$$

$$x_1 = y_1 - 2x_3 = y_1 - \frac{4}{5} y_1 + \frac{2}{5} y_3 = \frac{1}{5} y_1 + \frac{2}{5} y_3$$

$$\left(A^{-1}x\right) = \left(\frac{1}{5} y_1 + \frac{2}{5} y_3, \quad \frac{1}{2} y_2, \quad \frac{2}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_3\right)$$

Qo'shma operatorlar

Ta'rif 1.3.5. H Hilbert fazosida aniqlangan chegaralangan T operator uchun

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \tag{1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi T^* operator T operatorning Hilbert qo'shmasi deyiladi. Bundan bo'yon operatorning qo'shmasi deganda uning Hilbert qo'shmasini tushunamiz.

Qo'shma operatorlar haqidagi teoremalar va tasdiqlarni keltirishdan oldin ushbu Lemmani isbotlaymiz.

Lemma 1.3.6. $A : H \to H$, $B : H \to H$ operatorlar berilgan bo'lsin. Agar barcha $x, y \in H$ lar uchun $(Ax, y) = (Bx, y)$ tenglik bajarilsa, u holda $A = B$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x \in H$ uchun $y = Ax - Bx$ desak, unda

$$0=(Ax,y)-(Bx,y)=(Ax-Bx,y)=(Ax-Bx,Ax-Bx)=\|Ax-Bx\|^2$$

munosabatdan $Ax=Bx$ kelib chiqadi. Bundan $A=B$.

Tasdiq 1.3.7. A operatorning qo'shmasi ham chiziqlidir.

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun $\forall x,y,z\in H$ larda

$$F(z,x,y)=\left(z,A^*(\alpha x+\beta y)\right)-\left(z,\alpha A^*x+\beta A^*y\right)\equiv 0$$

ekanligini ko'rsatish yetarli. Darhaqiqat, qo'shma operatorning ta'rifidan

$$\begin{aligned}F(z,x,y)&=(Az,\alpha x+\beta y)-\left(z,\alpha A^*x\right)-\left(z,\beta A^*y\right)=\\&=\overline{\alpha}(Az,x)+\overline{\beta}(Az,y)-\overline{\alpha}\left(z,A^*x\right)-\overline{\beta}\left(z,A^*y\right)=\\&=\overline{\alpha}(Az,x)-\overline{\alpha}(Az,x)+\overline{\beta}(Az,y)-\overline{\beta}(Az,y)\end{aligned}$$

Teorema 1.3.8. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) $T:\to T^*$ operator $L(H)$ ni $L(H)$ ga qo'shma izometrik akslantiradi.

b) $(TS)^*=S^*T^*$

c) $\left(T^*\right)^*=T$

d) T^{-1} mavjud bo'lsa, u holda $\left(T^*\right)^{-1}$ mavjud hamda $\left(T^*\right)^{-1}=\left(T^{-1}\right)^*$

e) $\left\|TT^*\right\|=\|T\|^2$

Isbot. a) $\phi(T)=T^*$ akslantirish qo'shma chiziqli va bir qiymatli ekanini ko'rsatish kifoya. Qo'shma operatorning aniqlanishidan, ichki ko'paytmaning xossalaridan va 2.5.1 lemmaga $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$ va $(A+B)^*=A^*+B^*$ munosabatlar kelib chiqadi. Bu yerdan ϕ qo'shma chiziqli degan xulosaga kelamiz. Qo'shma operatorning ta'rifiga asosan

$$(Tx,y)=\left(x,T^*y\right)=\overline{\left(T^*y,x\right)}=\overline{\left(y,\left(T^*\right)^*x\right)}=\left(\left(T^*\right)^*x,y\right)$$

Bu tenglikdan 2.5.1 lemmaga asosan $T=\left(T^*\right)^*$ munosabat kelib chiqadi. Bunga asosan $\phi\left(T^*\right)=\phi(\phi(T))=\left(T^*\right)^*=T$ ni hosil qilamiz. Demak $\phi^{-1}=\phi$ va bu akslantirish o'zaro bir qiymatli. (a) va (c) bandlar isbotlandi.

(b) $\left(x,(TS)^*y\right)=((TS)x,y)=\left(Sx,T^*y\right)=\left(x,S^*T^*y\right)$ tenglikka va 2.5.1 lemmaga asosan

$(TS)^* = S^* T^*$.

(d) T^{-1} mavjud bo'lsin. $\forall x, y \in H$ uchun

$$(Ix, y) = (x, Iy)$$

munosabat bajariladi, bunda I – ayniy (birlik operator.) Shuning uchun $I = I^*$. Shuningdek, (c) bandga asosan,

$$T^* \left(T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1} T\right)^* = I^* = I$$

va

$$\left(T^{-1}\right)^* T^* = \left(T^{-1} T\right)^* = I^* = I$$

munosabatlarning bajarilishidan $\left(T^{-1}\right)^*$ operator T^* ning teskarisi degan xulosaga kelamiz. Demak $\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}$.

(e) $(Tx, y) = \left(x, T^* y\right)$ tenglikda $y = Tx$ bo'lsin. U holda Schwartz tengsizligiga asosan

$$\|Tx\|^2 = \left(x, T^* Tx\right) = \left(TT^* x, x\right) \le \left\|T^* Tx\right\| \|x\| \le \|T\| \left\|T^*\right\| \|x\|^2$$

Bu yerdan

$$\|T\| \le \sqrt{\|T\| \left\|T^*\right\|} \quad \text{yoki} \quad \|T\| \le \left\|T^*\right\|$$

Xuddi shunday $(Tx, y) = \left(x, T^* y\right)$ tenglikda $x = T^* y$ olib, $\|T\| \le \left\|T^*\right\|$ ni hosil qilamiz.

Demak $\|T\| = \left\|T^*\right\|$. Shuningdek,

$$\left\|TT^* x\right\| \le \|T\| \left\|T^*\right\| \|x\|$$

munosabatdan $\left\|TT^*\right\| \le \|T\| \left\|T^*\right\| = \|T\|^2$ va

$$\|Tx\|^2 = \left(x, T^* Tx\right) = \left(TT^* x, x\right) \le \left\|T^* Tx\right\| \|x\| \le \|T\| \left\|T^*\right\| \|x\|^2$$

Munosabatdan $\|T\| \le \sqrt{\|T^*\|}$ kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlikdan $\|T\|^2 \le \|TT^*\|$ ekanini hosil qilamiz. Bundan va $\|T\|^2 = \|TT^*\|$ tenglikdan $\|T\|^2 \le \|TT^*\|$ tengsizlikni hosil qilamiz.
Teorema to’liq isbot bo’ldi.

Teorema 1.3.9. $T: H \to H$ operatorning qo’shmasi mavjud bo’lishi uchun uning aniqlanish sohasi $D(T)$ butun fazo H da zich bo’lishi zarur va yetarli. Agar bu shart bajarilsa, T^* operator quyidagicha aniqlanadi: $y \in H$ element T^* ning aniqlanish sohasiga tegishli bo’lishi uchun shunday $y^* \in H$ mavjud bo’lib istalgan $x \in D(T)$ uchun

$$(Tx, y) = (x, y^*)$$

tenglik bajarilishi yetarli va zarur. Bu holda $T^* y = y^*$.

Misol. Operatorning qo’shmasini toping.

$$T: c_0 \to c_0, \quad Tx = (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$$

Yechish. $Ax = 0, \quad x \neq 0$

$$(Ax, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (t^2 + t + 1) x(s) ds \right) y(t) dt = \int_0^1 \int_0^1 (t^2 + t + 1) x(s) y(t) dt =$$

$$= \int_0^1 x(s) \cdot \left\{ \int_0^1 (t^2 + t + 1) y(t) dt \right\} ds = (x, A^* y)$$

Demak, $(A^* y)(s) = \int_0^1 (t^2 + t + 1) y(t) dt$

Teorema 1.3.10. (Hellinger-Teplitz). $A - H$ Hilbert fazosida aniqlangan chiziqli operator topilib, $D(A) = H$ va $\forall x, y \in H$ uchun $(Ax, y) = (x, By)$ tenglik bajarilsa, u holda A operator chegaralangan [3].

Isbot. Biz A ning grafigi $\Gamma(A)$ ning yopiqligini ko’rsatamiz. Aytaylik,

$$\langle x_n, Ax_n \rangle \to \langle x, y \rangle .$$

$\langle x, y \rangle \in \Gamma(T)$, ya’ni $y = Ax$ ni ko’rsatsak yetarli. Tushunarliki, istalgan $z \in H$

uchun

$$(z, y) = \lim_{n\to\infty}(z, Ax_n) = \lim_{n\to\infty}(Bz, x_n) = (Bz, x) = (z, Ax)$$

Demak, $y = Ax$.

O’z–o’ziga qo’shma operatorlarning xossalari

H – Hilbert fazosi bo’lsin.

Teorema 1.4.1. Agar $A, B \in L(H)$- o’z – o’ziga qo’shma operatorlar, α, β - haqiqiy sonlar bo’lsin. U holda $\alpha A + \beta B$ ham H dagi o’z- o’ziga qo’shma operatorlar bo’ladi.

Isbot. Darhaqiqat $\alpha A + \beta B$ operatorning aniqlanishidan, skalyar ko’paytmaning chiziqliligidan, A va B larning o’z-o’ziga qo’shmaligidan

$$\begin{aligned}&((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \\ &= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y)\end{aligned}$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak $\alpha A + \beta B$ ham o’z-o’ziga qo’shma operator.

Teorema 1.4.2. Agar $A = A^*$ bo’lsa, barcha $x \in H$ uchun (Ax, x) haqiqiy qiymatlar qabul qiladi.

Darhaqiqat, teorema shartiga va ichki ko’paytmaning xossalariga binoan

$$(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$$

va demak, $(Ax, x) \in R$.

Kompakt operatorlar

Faraz qilamiz, H_1, H_2 - Hilbert fazolari, $A: H_1 \to H_2$ chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta'rif 1.4.3. Agar A operator H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamni H_2 fazodagi nisbiy kompakt to'plamga o'tkazsa, u kompakt operator deyiladi.

Boshqacha aytganda, H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamning operator ta'siridagi aksi nisbiy kompakt bo'lsa, bu operator kompakt deyiladi.

Teorema 1.4.4. H Hilbert fazosi bo'lsin. Agar A kompakt, B chegaralangan operator bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar kompakt bo'ladi.

Isbot. B operator chegaralanganligi uchun istalgan M chegaralangan to'plamni yana chegaralangan $B(M)$ to'plamga o'tkazadi. A kompaktligidan u istalgan chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga o'tkazadi. Demak, $A(B(M))$ to'plam nisbiy kompakt. U holda AB kompakt operator.

Chegaralangan operator nisbiy kompakt to'plamni yana nisbiy kompakt to'plamga o'tkazadi. Haqiqatan ham agar $M \subset H$ nisbiy kompakt to'plam bo'lsa, u holda istalgan $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan H da yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\} \subset M$ qismiy ketlik ajratish mumkin va bu ketma-ketlik uchun yetarlicha katta n, m larda $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$ shart bajariladi. U holda Bx_{n_k} ketma-ketlikni olsak

$$\|Bx_{n_k} - Bx_{n_l}\| = \|B(x_{n_k} - x_{n_l})\| \le \|B\|\|x_{n_k} - x_{n_l}\|$$

ekanidan Bx_{n_k} fundamental, H to'la ekanidan u yaqinlashuvchi hamdir.

A kompaktligidan u istalgan chegaralangan M to'plamni nisbiy kompakt to'plamga o'tkazadi. Demak $B(A(M))$ to'plam nisbiy kompakt.

U holda BA kompakt operator.

Bu teorema A va B operatorlar har xil fazolarda aniqlanib, AB yoki BA mavjud bo’lgan holda ham o’rinlidir.

Natija 1.4.5. Cheksiz o’lchamli fazolarda har qanday chegaralangan kompakt operator chegaralangan teskariga ega bo’la olmaydi.

Darhaqiqat, aks holda oldingi teoremaga binoan $I = AA^{-1}$ kompakt bo’lib qolar edi.

Teorema 1.4.6. A chegaralangan chiziqli operator kompakt bo’lishi uchun A^*A operatorning kompakt bo’lishi yetarli va zarur.

Isbot. Yetarliligi. AA^* kompakt bo’lsin. Demak, ixtiyoriy $\{y_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ chegaralangan ketma - ketlikning shunday $\{y_{n_k}\} \subset H$ qismiy ketma- ketligi mavjudki, $\{A^*Ay_{n_k}\} \subset H$ ketma-ketlik H da yaqinlashadi, ya’ni fundamental. Biz $\{Ay_{n_k}\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko’rsatsak A operatorning kompaktligini isbot qilgan bo’lamiz. Darhaqiqat,

$$\left\|Ay_{n_k} - Ay_{n_m}\right\|^2 = \left(Ay_{n_k} - Ay_{n_m}, Ay_{n_k} - Ay_{n_m}\right) = \left(y_{n_k} - y_{n_m}, A^*Ay_{n_k} - A^*Ay_{n_m}\right) \le$$
$$\le \left\|y_{n_k} - y_{n_m}\right\| \left\|A^*Ay_{n_k} - A^*Ay_{n_m}\right\| \to 0,$$

agar $k, m \to \infty$

chunki, $\{y_{n_k}\}$ chegaralangan va $\{A^*Ay_{n_k}\}$ nisbiy kompakt. Demak A – kompakt operator.

Zarurligi. A operator chegaralangan, shu sababli A^* ham chegaralangan va 19- teoremaga ko’ra AA^* kompakt operator.

Natija 1.4.7. A chiziqli, chegaralangan operator bo’lsin. Agar AA^* kompakt bo’lsa, u holda AA^* ham kompaktdir.

Isbot. AA^* kompaktligidan va 18- teoremaga asosan A kompakt. A ning chegaralanganligidan esa 17-teoremaga asosan AA^* ham kompakt operator bo’ladi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijani olamiz:

Natija 1.4.8. Musbat kompakt operatorning kvadrat ildizi ham kompaktdir.

Teorema 1.4.9. A chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. A operator kompakt bo'lishi uchun A operatorning kompakt bo'lishi yetarli va zarur.

Isbot. $A-$ kompakt operator bo'lsin. U holda … natijaga asosan AA^* operator kompakt.

$AA^* = \left(A^*\right)^* A^*$ ekanidan …. teoremaga binoan A^* kompakt. Teoremaning ikkinchi tasdig'ini isbotlash uchun birinchi tasdiqda A ni A^* ga almashtirish kifoya.

Operatorning spektri

H - Hilbert fazosi, $A: H \to H$ biror chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta'rif 1.7.1. Biror $z \in C$ uchun $Ax = zx$ tenglama noldan farqli $x \in H$ yechimga ega bo'lsa, z soni A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos nolmas yechim xos vektor deyiladi.

Ta'rif 1.7.2. Agar $z \in C$ son uchun $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud bo'lib, H ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, z soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_z(A) = (A - zI)^{-1}$$

operator esa A operatorning z nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

Spektr qanday nuqtalardan iborat bo’lishi mumkin?

1. $A - zI$ operator umuman teskarilanuvchan emas. Demak $(A - zI)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda z soni A operatorning xos qiymati, nolmas x esa xos vektori deyiladi.

2. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda z soni A operatorning uzluksiz spektriga tegishli deyiladi.

3. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin $A - zI$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda z soni qoldiq spektrga tegishli deyiladi.

A operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o’lchami z xos qiymatning karraliligi deyiladi. Agar z ning karraliligi 1 ga teng bo’lsa, u oddiy xos qiymat, aks holda karrali xos qiymat deb ataladi. A operatorning chekli karrali xos qiymatlari to’plamini diskret spektr deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz.

A operatorning uzluksiz spektrini $\sigma_{ess}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz.

Odatda operatorning uzluksiz spektri va cheksiz karrali xos qiymatlari to’plami muhim spektr deb ataladi va $\sigma_{ess}(A)$ kabi belgilanadi.

O’z-o’ziga qo’shma operatorning spektri

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ o’z-o’ziga qo’shma operator bo’lsin.
Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x), \quad m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$$

M va m sonlari mos ravishda A operatorning yuqori va quyi chegarasi deyiladi.

Teorema 1.8.1. $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirib o’tilgani uchun ham uni isbotlab o’tirmaymiz.

Teorema 1.8.2. $\sigma(A) \subset [m, M]$. Shuningdek, $m, M \in \sigma(A)$.

Teorema 1.8.3. $A - H$ Hilbert fazosidagi o’z-o’ziga qo’shma operator bo’lsin. U holda

a) A qoldiq spektrga ega emas;

b) $\sigma(A) \subset R$;

s) A operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari orotogonal.

Misol 1.8.4. $l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$ kompleks Hilbert fazosida

$$(Tx)_n = x_{n+1}, \text{ ya'ni } Tx = T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_2, x_3, ..., x_{n+1}, ...)$$

operator berilgan bo’lsin. T^* operatorni toping.

Yechish. l_2 fazo quyidagi $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ skalyar ko’paytmaga nisbatan Hilbert ma’nosidagi qo’shma operator ta’rifiga ko’ra

$$(Tx, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (Tx)_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \overline{y_k} = \sum_{k=2}^{\infty} x_k \overline{y_{k-1}} = (x, T^* y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{(T^* y)_k} .$$

Oxirgi tenglik hamma $x \in l_2$ lar uchun o’rinli. Bundan esa T^* operatorning

$$(T^* y)_1 = 0, \quad (T^* y)_k = y_{k-1}, \quad k = 2,3,...$$

yoki

$$T^* y = T^*(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (0, y_1, ..., y_n, ...)$$

Formula bilan aniqlanishini ko’ramiz.

$$(Tx)_n = x_{n+1} = x_{n-1} = (T^* x)_n, \quad n = 1,2,3,...$$

tenglik l_2 fazoning faqat nol vektori uchun bajariladi. Shu sababli T operator o’z – o’ziga qo’shma operator bo’la olmaydi.

Kompakt operatorning spektri.

$A \in L(H)$ o’z-o’ziga qo’shma operator bo’lsin.

Teorema 1.9.1. Kompakt operatorning nolmas z xos qiymatiga mos keluvchi L_z xos fazosi chekli o’lchamli.

Teorema 1.9.2. A kompakt operator va ixtiyoriy $\delta > 0$ son berilgan bo’lsin. A operatorning absolyut qiymati δ dan katta bo’lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarning soni cheklidir.

Natija 1.9.3. Kompakt operatorning xos qiymatlari to’plami noldan farqli limitik nuqtaga ega emas.

Teorema 1.9.4 (Phillips). Agar $z \in C$ soni A kompakt operatorning xos qiymati bo’lsa, $\bar{z} \in C$ soni A^* ning xos qiymati bo’ladi [3].

Teorema 1.9.5. A va A^* kompakt operatorlarning z va $\bar{z}$ xos qiymatlariga mos keluvchi xos qism fazolarining o’lchamlari teng.

Teorema 1.9.6. A kompakt operator bo’lsin. U holda

1. A operatorning spektridagi noldan farqli ixtiyoriy nuqta xos qiymatdir;

2. Agar H – cheksiz o’lchamli bo’lsa, 0 soni operatorning spektriga tegishli.

Teorema 1.9.7. Agar A o’z -o’ziga qo’shma va $A \neq 0$ bo’lsa, u holda uning hech bo’lmaganda bitta nolmas xos qiymati b--or.

Isbot. A – chegaralangan. Demak, uning spektri $[m,M]$ segmentda yotadi, bu yerda m va M – operatorning quyi va yuqori chegaralari. Shuningdek, m va M – operatorning spektrida yotadi. A nolmasligidan, yoki $m \neq 0$, yoki $M \neq 0$. A kompaktligi uchun bu son xos qiymat bo’ladi.

Teorema 1.9.8.(Hilbert-Shmidt). H Hilbert fazosidagi har qanday o’z-o’ziga qo’shma, kompakt operator berilgan bo’lib, $\{\lambda_n\}$ uning barcha nolmas xos qiymatlari bo’lsin. H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat shunday $\{\phi_n\}$ ONS mavjudki, har bir $x \in H$ elementga yagona usulda

$$x = \sum_k c_k \phi_k + x^k$$

ko’rinishda yoziladi, bu yerda x' vektor $Ax' = 0$ shartni qanoatlantiradi. Bu holda

$$Ax = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k$$

Agar xos qiymatlar cheksiz bo’lsa, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ [5].

Bo'lim 2

Soni saqlanmaydigan zarrachalar sistemasiga mos model operatorning xos qiymatlari soni.

2.1.1. Ikki zarrachali Hamiltonianning koordinata tasviri

Z^2- ikki o'lchamli butun sonli panjara, $l_2\left(\left(Z^2\right)^2\right)$–$\left(\left(Z^2\right)^2\right)=Z^2\times Z^2$ da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi, $l_2^s\left(\left(Z^2\right)^2\right)\subset l_2\left(\left(Z^2\right)^2\right)$- simmetrik funksiyalar qism fazosi bo'lsin.

Koordinata tasvirida ikki bozonli sistemaga mos Hamiltonian $l_2^s\left(\left(Z^2\right)^2\right)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlanadi: [1], [2]

$$\hat{h}_{\mu\lambda}=\hat{h}_0-\hat{v}_{\mu\lambda},$$

$$\left(\hat{h}_0\hat{\varphi}\right)(x_1,\,x_2)=\sum_{s\in Z^d}\hat{\varepsilon}(s)\,[\hat{\varphi}(x_1+s,\,x_2)+\hat{\varphi}(x_1,\,x_2+s)],\quad \hat{\varphi}\in l_2^s\left(\left(Z^2\right)^2\right),$$

$$\left(\hat{v}_{\mu\lambda}\hat{\varphi}\right)(x_1,\,x_2)=\hat{v}_{\mu\lambda}(x_1-x_2)\,\hat{\varphi}\,(x_1,\,x_2),\quad \hat{\varphi}\in l_2^s\left(\left(Z^2\right)^2\right).$$

$\hat{\varepsilon}(s)$ va $\hat{v}_{\mu\lambda}(s)$ funksiyalar Z^2 da quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{\varepsilon}(s)=\begin{cases}2, & agar\quad s=0\\ -\dfrac{1}{2}, & agar\ |s|=1\\ 0, & agar\ |s|>1\end{cases},\qquad \text{va}\qquad \hat{v}_{\mu\lambda}(s)=\begin{cases}\mu, & agar\ \ s=0\\ \dfrac{\lambda}{2}, & agar\quad |s|=1\\ 0, & agar\quad |s|>1\end{cases}$$

bunda $s=\left(s^{(1)},\,s^{(2)}\right)\in Z^2,\quad |s|=\left|s^{(1)}\right|+\left|s^{(2)}\right|,\quad \mu\geq 0\quad va\quad \lambda\geq 0$ bir vaqtda nolga teng bo'lmagan sonlar.

Ta'kidlab o'tamizki, ikki zarrachali Hamiltonian $\hat{h}_{\mu\lambda}$, $l_2^s\left(\left(Z^2\right)^2\right)$ Hilbert fazosida chegaralangan o'z – o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

2.2.2. Ikki zarrachali Hamiltonianning impuls tasviri

$T^1=(-\pi,\pi]$ bo’lsin. T^1 da qo’shish va songa ko’paytirish amallarini haqiqiy sonlarni 2π modul bo’yicha qo’shish va songa ko’paytirish sifatida kiritamiz, Masalan

$$\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\quad 2\pi)$$

$$6\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi-\frac{4\pi}{5}=-\frac{4\pi}{5}\ (\mathrm{mod}\quad 2\pi)$$

Ushbu to’plam **bir o’lchamli tor** deb ataladi. T^d orqali d - o’lchamli tor, ya’ni

$$T^d=\underbrace{T^1\times T^1\times\cdots\times T^1}_{d\ marta}$$

ni belgilaymiz.

d - o’lchamli tor T^d da aniqlangan, Haar ma’nosida o’lchovga ega va

$$\int_{T^d}|f(q)|^p\,dq<\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $f:T^d\to C$ funksiyalar to’plamini qaraymiz, bunda integral o’lchov Haar ma’nosida olinadi va p - tayinlangan musbat son. Bu to’plamda elementlarni qo’shish va songa ko’paytirish kabi kiritiladi. Hosil bo’lgan to’plam $L_2(T^d)$ kabi belgilanadi. Bu to’plamning elementlari R^d da aniqlangan va har bir o’zgaruvchisi bo’yicha 2π davrga ega bo’lgan funksiyalardir.

$H_0=C^1$ bir o’lchamli kompleks Gilbert fazosi, $H_1=L_2^e(T^d)$ $T^d=(-\pi;\pi]^d$ da modulining kvadrati bilan integrallanuvchi juft funksiyalarning Gilbert fazosi bo’lsin.

$H=H_0\oplus H_1$ Gilbert fazosi H_0 va H_1 Gilbert fazolarining to’g’ri yig’indisidan iborat.

$H-$ Gilbert fazosining elementlari $f\in H$, $f=(f_0,f_1)$ ko’rinishida bo’lib, bunda $f_0\in H_0$ va $f_1\in H_1$.

BO’LIM 2. SONI SAQLAMAYDIGAN ZARRACHALAR SISTEMASIGA MOS MODEL OPERATORNING XOS QIYMATLARI SONI

$H-$ fazoda skalyar ko’paytma quyidagicha aniqlanadi: [7]

$$f=(f_0,\, f_1)\in H \quad \text{va} \quad g=(g_0,\, g_1)\in H \;.$$

$$\langle f, g\rangle = \langle f_0, g_0\rangle_{H_0} + \langle f_1, g_1\rangle_{H_1}\,.$$

$E(k),\ k\in T^d$ operator H_0 - Gilbert fazosidagi skalyar operator bo’lib, quyidagi ko’rinishga ega:

$$E(k)f_0=\varepsilon(k)f_0=\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)f_0,\quad f_0\in H_0$$

va $H_\mu(k),\ k\in T^d$ operator H_1 fazoda aniqlangan ikki zarrachali Diskret Shroedinger operatori bo’lib, quyidagi ko’rinishga ega:

$$H_\mu(k)=H_0(k)-V_\mu,\quad \mu\geq 0$$

bunda, $H_0(k)$ operator $\varepsilon_k(\cdot)$ funksiyaga ko’paytirish operatori bo’lib,

$$(H_0\,(k)\; f_1)(q)=\varepsilon_k(q)\; f_1(q),\quad f_1\in H,$$

$$\varepsilon_k(q)=\sum_{i=1}^{d}\left[\varepsilon\left(\frac{k_i}{2}-q_i\right)+\varepsilon\left(\frac{k_i}{2}+q_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{d}2\left(1-\cos\frac{k_i}{2}\cos q_i\right)$$

ko’rinishga ega.

V_μ – integral operator quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$(V_\mu f_1)(q)=\frac{\mu}{(2\pi)^d}\int_{T^d} v(q-s)\; f_1(s)ds.$$

$H_{\gamma\mu}(k),\, k\in T^d,\quad \gamma,\,\mu\geq 0$ operatorlar oilasini $H-$ Gilbert fazosida quyidagi formula bo’yicha aniqlaymiz: [7]

$$H_{\gamma\mu}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(k)f_0+C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0+H_\mu(k)\; f_1(q)\end{pmatrix}$$

bunda $C_\gamma^* f_1=\gamma(f_1,\alpha_0)_{H_1}$ va $C_\gamma f_0=\gamma(f_0,\alpha_0)_{H_0}$ mos ravishda paydo qiluvchi va yo’qotuvchi operatorlar.

2.2.3. $H_{\gamma\mu}(k), k \in T^d$ operatorning chiziqli chegaralanganligi va o’z – o’ziga qo’shmaligi.

Lemma . $\forall \mu, \gamma \geq 0$ da $H_{\gamma\mu}(k), k \in T^d$ operator chegaralangan va o’z – o’ziga qo’shma.

$Z^1 = (\dots,-1,0,1,\dots)$ buutun sonli panjara. Z^d orqali Z^1 larning d tasini dekart ko’paytmasini $Z^d = \underbrace{Z^1 \times Z^1 \times \dots \times Z^1}_{d\ ta}$ belgilaymiz.

$l_2(Z^d)$ bilan Z^d to’rdagi modulining kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Gilbert fazosini belgilaymiz, ya’ni:

$$l_2(Z^d) = \left\{ f \in Z^d : \sum_{s \in Z^d} |f(s)|^2 < \infty \right\}$$

Misol 2.2.4

$$f(s) = \begin{cases} 1, & |s| = 1 \\ 0, & aks\ \ holda \end{cases}$$

$$\sum_{s \in Z^d} |f(s)|^2 = \sum_{|s|=1} 1^2 = 2d < \infty$$

$$|s| = |s_1| + |s_2| + \dots + |s_d| = \sum_{i=1}^{d} |s_i|.$$

2.2.5. $V_{\mu\gamma}$ operatorning musbatligi.

Lemma 2.2.6. **a)** V - kompakt operator.

b) $\forall k \in T^d$, $\mu > 0$ uchun V - nomanfiy operator.

Isbot. Bu operatorning musbatligini isbotlash uchun Reed- Saymondagi Hilbert- Shmid teoremasidan foydalanamiz.

b) V - operatorning musbatligini ta'rif yordamida ko'rsatamiz, ya'ni:

$\forall f \in H$ uchun $(Vf, f) \geq 0$ ligini ko'rsatish yetarli.

$$(Vf, f) = (\ ) = (\ ) = \left(\hat{V}\hat{f}, \hat{f}\right) = \sum_x \hat{v}(x) \left| f(x) \right|^2 \geq 0 .$$

Endi, $H_{0\mu}(k)$, $k \in T^d$ operator $E(k)$ va $H_\mu(k)$ operatorlarning to'g'ri yig'indisidan iborat, H da quyidagicha aniqlangan:

$$H_{0\mu}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) f_0 \\ \left(H_\mu(k) f_1\right)(q) \end{pmatrix}$$

Ma'lumki, $H_{0\mu}(k)$, $k \in T^d$ operator $[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ muhim spektrga ega va unda yotuvchi $\varepsilon(k) \in [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ xos qiymatga ega.

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in T^d} \varepsilon_k(q) = \sum_{i=1}^d 2\left(1 - \cos\frac{k_i}{2}\right)$$

$$\varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in T^d} \varepsilon_k(q) = \sum_{i=1}^d 2\left(1 + \cos\frac{k_i}{2}\right)$$

Eslatma. $\varepsilon(k), k \in T^d$; $T^d = (-\pi; \pi]^d$ da juft funksiya, $k \in T^d$; $T^d = (0; \pi)^d$ da kvaziimpuls bo'yicha almashinuvchi bo'lib, avval 0 qiymatidan $\max_{k \in T^d} \varepsilon(k) < \varepsilon_{\max}(k)$ gacha o'sadi, keyin yana nolgacha kamayadi.

Bu o'zgarish qo'zg'atuvchi $H_\mu(k)$, $k \in T^d$ operatorning muhim spektridan chapdagi xos qiymatlari soni o'zgarishiga ta'sir qiladi [7] .

Agar , $k \in T^d$ da 0 va π dan farqli bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli:

$$\varepsilon_{\min}(k) < \varepsilon(k) < \varepsilon_{\max}(k).$$

2.2.7. $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning muhim spektri

$H_{\gamma\mu}(k)$ va $H_{0\mu}(k)$ operatorlarning ayirmasi kompakt operator bo’lganligi uchun, muhim spektr turg’unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko’ra $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in T^d$ operatorning muhim spektri $H_{0\mu}(k)$, $k \in T^d$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H_{0\mu}(k))$ bilan ustma-ust tushadi [5]:

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu}(k)) = \sigma_{ess}(H_{0\mu}(k)) = \sigma_{ess}(h_{\mu}(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)].$$

Ixtiyoriy fiksirlangan $\gamma, \mu \geq 0$ va $z \in (-\infty; \varepsilon_{\min}(k))$ larda integral Birman – Shvinger operatori $B_{\gamma\mu}(k, z)$, H_1 fazoda quyidagicha aniqlanadi [7]:

$$B_{\gamma\mu}(k, z) f_1(q) = V_{\gamma\mu}^{1/2}(k, z)\, r_0(K, z) V_{\gamma\mu}^{1/2}(K, z)$$

bunda $r_0(k, z) - h_0(K)$ operatorning rezolventasi va

$$V_{\gamma\mu}^{1/2}(k, z)\ f_1(q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left[\int_{T^d}\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - z} + \mu\right)^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{v})^{1/2}\cos nq \cos ns\right] f_1(s) ds \ -$$

$$V_{\gamma\mu}(k, z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\left[\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - z} + \mu\hat{v}_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{v}_n \cos np \cdot \cos ns\right] f_1(s) ds$$ operatorning

kvadrat ildizi.

$V_{\gamma\mu}(k, z)$ operator $L_2^e(T^d)$ – Gilbert fazosida quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$V_{\gamma\mu}(k, z)\ f_1(q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - z} + v(p - s)\right) f_1(s) ds$$

$v(\cdot)$ funksiya juft bo’lganligi uchun faqat kosinuslar yordamida Fure qatoriga yoyiladi.

$$v(x) = \frac{\hat{v}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}(n)\cos nx$$

$v(p-s)$ funksiya esa

$$v(p-s) = \frac{\hat{v}_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}(n)\cos n \cdot (p-s) \qquad (*)$$

ko'rinishda yoyiladi.

$(*)$ ni hisobga olsak, $V_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorni $H_1 -$ Gilbert fazosida quyidagicha ifodalaymiz:

$$V_{\gamma\mu}(k,z)\, f_1(q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left[\int_{T^d}\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu\hat{v}_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{v}_n \cos n(p-s)\right] f_1(s)ds =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\left[\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu\hat{v}_0\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\hat{v}_n \cos np\cos ns\right] f(s)ds$$

$V -$ operator $\gamma, \mu \geq 0,$ $z \in (-\infty; \varepsilon_{\min}(k))$ musbat bo'lganligi uchun, $V_{\gamma\mu}(k, z)$ operator musbat bo'ladi.

B O’ L I M 3

Asosiy natijalar va ularning isboti

3.1.1 Asosiy natijalar

Ushbu magistrlik dissertatsiyasining asosiy natijalari quyidagilardan iboratdir.

Teorema 3.1.1. $z \in C/[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ son

$$H_{\gamma\mu}(k, z) = h_0(k) - V_{\gamma\mu}(k, z)$$

operatorning xos qiymati bo’lishi uchun “1” soni $B_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning xos qiymati bo’lishi yetarli va zarur.

Teorema 3.1.2. (Birman – Schwinger prinsipi).

a) $z \in C/[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$, $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning xos qiymati bo’ladi, faqat va faqat “1” $B_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning xos qiymati bo’lsa;

b) $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning $z < \varepsilon_{\min}(k)$ chapda joylashgan xos qiymatlari, $B_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning “1” dan o’ngda joylashgan xos qiymatlari soni bilan ustma – ust tushadi.

3.2.3 3.1.1 teoremaning isboti

Yetarliligi. Faraz qilamiz, 1 soni $B_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning xos qiymati, $\varphi \in H_1$ esa unga mos xos funksiya bo'lsin, u holda

$$\varphi = \left(V_{\gamma\mu}^{1/2}(k, z)\, r_0(k, z)\, V_{\gamma\mu}^{1/2}(k, z)\right)\varphi$$

tenglama $0 \neq \varphi \in H_1$ yechimga ega bo'ladi. Endi ushbu

$$f_1 = r_0(K, z)\, V_{\gamma\mu}^{1/2}(K, z)\varphi$$

belgilashni olamiz, Tushunarliki, $f_1 \neq 0$. Bu yerdan

$$(h_0(k) - z) f_1 = V_{\gamma\mu}(k, z) f_1,$$

tenglikka ega bo''lamiz. Bu esa $f_1 \in H_1$ funksiya $z \in C / [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ xos qiymatga mos $H_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning xos funksiyasi demakdir.

Zarurligi. $z \in C / [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ soni $H_{\mu\gamma}(k, z)$ operatorning xos qiymati bo'lsin va $f_1 \in H_1$ esa xos qiymatga mos xos funksiyasi bo'lsin, f

$$(H_{000}(k) - z)\, f_1 = V_{\mu\gamma}(k, z) f_1$$

tenglamaning nolmas yechimi bo'lsin. Bu yerdan $f_1 = r_0\,(k, z) V_{\mu\gamma}(k, z)\, f_1$.

Aniqki,

$$V_{\mu\gamma}^{\frac{1}{2}}(k, z)\, f_1 = \left(V_{\mu\gamma}^{\frac{1}{2}}(k, z)\, r_0(k, z) V_{\mu\gamma}^{\frac{1}{2}}(k, z)\right) V_{\gamma\mu}^{\frac{1}{2}}\,(k, z)\, f_1 = B_{\gamma\mu}(k, z) V_{\gamma\mu}^{\frac{1}{2}}\,(k, z)\, f_1 .$$

Bundan ko'rinadiki 1 soni $B_{\gamma\mu}(k, z)$ operatorning xos qiymati bo'ladi, $\varphi = V_{\gamma\mu}^{\frac{1}{2}}(k, z)\, f_1$ esa xos qiymatga mos xos funksiya bo'ladi.

Teorema isbotlandi. Δ

3.2.4 3.1.2 teoremaning isboti.

Teoremani isbot qilishdan oldin bir nechta yordamchi shartlar keltiramiz.

Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilsin:

a) $v(p)-$ uzluksiz differensiallanuvchi juft funksiya.

$\hat{v}(y),\quad y \in Z^d$ lar esa $v(p)$ funksiyaning $l_2(Z^d)$– fazodagi Fur'ye koeffitsentlari.

b) Barcha $x \in Z^d$ uchun $\hat{v}(x) \geq 0$,

$$\left(\hat{V}\ \hat{f}\right)(x) = (....)\hat{f}(x) = ... = \int\limits_{T^d} e^{-ipx}(Vf)(p)dp$$

$$\left(\hat{V}\hat{f}\right)(x) = (\ ) = ... = \int\limits_{T^d} e^{-ipx}(Vf)(p)dp = \int\limits_{T^d} e^{-ipx}\left(\int\limits_{T^d} v(p-q)\ f(q)dq\right)dp =$$

$$= \int\limits_{T^d} e^{-ipx}\left(\int\limits_{T^d}\sum_y \hat{v}(y)\, e^{-i(p-q)y}\ f(q)dq\right)dp = \int\limits_{T^d} e^{-ipx}\left(\int\limits_{T^d}\sum_y \hat{v}(y) e^{i(p-q)y}\ f(q)dq\right)dp =$$

$$= \sum_y \iint\limits_{T^d} \hat{v}(y)\cdot e^{ip(y-x)} \cdot e^{-iqy} \cdot f(q)dq\ dp = \sum_y \hat{v}(y)\cdot \int\limits_{T^d} e^{-ip(y-x)}dp \cdot \int\limits_{T^d} e^{-iqy}\ f(q)dy =$$

$$= \hat{v}(x)\cdot(2\pi)^d \cdot \hat{f}(x).$$

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov: The Threshold Effects for the Two – particle Hamiltonians on Lattices. Comm. Math. Phys. 262 (2006), 91-115.

[2] S. Albeverio, S. N. Lakaev and Z. I. Muminov: Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5, (2004), 743-772.

[3] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: Elementy teorii funksiy I funksionalnogo analiza. Moskva, Nauka, 1989, 624 s.

[4] S. N. Laqayev, Sh. Yu. Holmatov: Hilbert fazolarida o’z – o’ziga qo’shma operatorlar nazariyasi. Magistlar uchun qo’llanma. Samarqand 2010.

[5] M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics.
I: Functional analysis. Academic Press, N. Y., 1979.

[6] A.I. Mogilner. The problem of a quasi – particles in solidstate physics I n; Application of Self – adjoint Extensions in Quantum Physics (P. Exner and P. Seba eds.)// Lect. Notes Phys. 1998.- Vol. 324. Springer –Verlag, Berlin

[7] S.N.Lakaev, Sh. M. Latipov: O sushestvovanie i analitichnosti sobstvennix znacheniy dvuxkanalnoy molekulyarniy-rezonansnoy modeli. TMF, 169 (2011) №3, str. 1657-1666.

[8] D.C. Mattis: The few – body problem on lattice// Rev. Modern Phys. 58. 1986.- № 2.-P. 361-379