

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕ -СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. НАВОИ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»

На правах рукописи

УДК

ШАИМОВ КОМИЛЖОН МИРЗАКАБУЛОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ
НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**
Специальность: 5А480101 «Вычислительная математика»

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание степени магистра по специальности «Вычислительная математика»

Работа обсуждена и

представлена к защите.

Заведующий кафедрой

«Вычислительные методы»

к.ф.-м.н., доц. Абдирашидов А.

_____ «__» _____ 2012 г.

Научный руководитель:

_____ д.ф.-м.н., проф. Хужаёров Б.Х.

Самарканд - 2012

Оглавление

Введение.....	3
1. Учет динамических факторов в кинетике осаждения (захвата) и освобождения частиц при фильтрации суспензий.....	7
1.1. Особенности процесса осветления суспензий путем фильтрования	7
1.2. Модифицированные кинетические уравнения осаждения и освобождения твердых частиц суспензии	13
2. Задачи фильтрации суспензии в пористой среде.....	16
2.1. Решение задачи фильтрации суспензии с заданным скоростным режимом.....	16
2.2. Решение задачи фильтрации в конечном фильтре с заданным режимом подавлению.....	23
3. Задачи фильтрации суспензии в пористой среде с учетом динамических факторов.....	36
3.1. Решение задачи фильтрации суспензии в полубесконечном пласте.....	36
3.2. Решение задачи фильтрации в конечном фильтре	50
Заключения.....	62
Литература.....	63
Приложение.....	65

Задачи фильтрации жидкости с твердыми взвешенными частицами (суспензии) в пористой среде встречаются при исследовании различных задач техники. Известно, что в природе многие жидкости являются неоднородными, т.е. состоять из различного количества компонентов и фаз, свойства которых могут значительно отличаться друг от друга. В частности суспензии состоят из жидкой и твердой фазы, при этом мелкие частицы твердой фазы находятся во взвешенном состоянии в жидкой фазе. При течении таких суспензий наблюдается ряд явлений, которые не наблюдаются при течении однородных жидкостей. За счет взаимодействия частиц твердой фазы с частицами жидкой фазы суспензии приобретают неньютоновские реологические свойства. При движении таких суспензий в пористой среде помимо отмеченных неньютоновских свойств наблюдается еще ряд аномальных явлений. В частности частицы твердой фазы могут осаждаются в порах, что приводит к выключению этой поры из процесса фильтрации. В процессах движения суспензий в пористой среде частицы жидкой и твердой фаз находится под воздействием различных сил. Силы давления стремятся протолкнуть осажденные твердые частицы из одних пор в другие. При этом градиент давления должен быть таким, чтобы преодолеть силы сцепления частиц в порах. Таким образом при фильтрации суспензии с образованием осадка существенно влияют на емкостные и фильтрационные характеристики пористой среды.

Для качественного и количественного исследования процессов фильтрации с образованием осадка должны быть созданы эффективные математические модели. Анализ показывает, что разработанные до настоящего времени модели фильтрации суспензии с образованием осадка в пористой среде в той или иной мере описывают основные характерные особенности процесса фильтрации. Небольшой анализ некоторых моделей фильтрации суспензии с образованием осадка приведен в первом параграфе

данной работы. В работе [1] рассмотрены особенности процесса осветления суспензий путем фильтрования. В [1] модель не учитывает диффузионный перенос вещества в пористой среде. Кроме того, кинетика осаждения и отрыва частиц в поровом пространстве определяется от характеристик насыщения порового пространства – концентрациями взвешенных частиц в жидкости и осадка. В [12] предлагаются модифицированные уравнения кинетики процесса осадка частиц, учитывающие динамические факторы. Однако в достаточном объеме задачи фильтрации с образованием осадка для этой модели, ещё не исследовались. Кроме того, численные методы решения этих задач также не отработаны достаточно хорошо. Поскольку модель состоит из системы нелинейных дифференциальных уравнений, разработка эффективных численных алгоритмов решения задач является важным элементом исследования этой модели. При этом имеется в виду метод конечных разностей, как наиболее универсальный и широкоиспользуемый метод решения дифференциальных уравнений. Исходя из сказанного можно заключить, что исследование моделей фильтрации суспензии с образованием осадка с учетом предельного градиента давления и разработка эффективных численных алгоритмов реализации этих моделей является **актуальной** задачей.

Ц е л ь ю данной работы является исследование задач фильтрации суспензии с образованием осадка с учетом динамических факторов и разработка эффективных численных алгоритмов решения этих задач. В соответствии с этой целью в работе ставятся следующие задачи:

— постановка начально-краевых задач фильтрации суспензии с нового кинетического уравнения, учитывающие динамических факторов для различных режимов течения;

— построение конечно-разностных аппроксимаций поставленных задач и исследование устойчивости разностных задач;

- определение алгоритмов решения задач, составление программ расчетов на ЭВМ и получение численных результатов;
- анализ результатов и разработка выводов и заключений.

О б ь е к т о м и с с л е д о в а н и я являются насыщенные однородной и дисперсной жидкостью пористые среды.

М е т о д и к а и с с л е д о в а н и я.

Для составления моделей фильтрации суспензии с образованием осадка используются классические закон механики, в частности, закон сохранения массы взвешенных твердых частиц в элементарном объеме. При составлении систем уравнений используется также кинетическое уравнение изменения насыщенности пористой среды осевшими частицами, обобщенный закон Дарси. Для решения системы уравнений используется метод конечных разностей с проверкой устойчивости метода. При анализе результатов принимается во внимание физическая сущность изменения расчетных параметров. На полученные новые явления даются соответствующие физические интерпретации.

В процессе выполнение работы соискатель собрал необходимые сведения о моделях фильтрации суспензии с образованием осадка и о численных методах решения задач. Собранный материал был обобщен, на основе этого определены задачи и предмет исследования.

Н а у ч н а я н о в и з н а и с с л е д о в а н и й.

В работе на основе общего уравнения баланса, модифицированного кинетического уравнения и обобщенного закона Дарси написана система уравнений фильтрации суспензии с образованием осадка. Поставлен и решен ряд задач для этой системы уравнений. Установлено влияние параметров, характеризующие осаждения и освобождения частиц в порах, а также градиента давления на характеристики фильтрации.

Работа состоит из введения, три параграфов, выводов и заключений, списка литературы и приложения.

В первом параграфе дается краткий анализ моделей фильтрации суспензии с образованием осадка. Рассматриваются особенности процесса осветления суспензий путем фильтрования. Затем на основе [12] дается модифицированные кинетические уравнения, учитывающие динамические факторы.

В отдельном параграфе решена задача фильтрования суспензии в пористой среде, на основе кинетического уравнения без учета динамических факторов. Затем та же задача решена в конечном фильтре. Задачи решены численно конечно-разностным методом. Определены профили концентраций взвешенных частиц в жидкости, осадке и градиента давления.

Решение задачи фильтрации суспензии в пористой среде на основе кинетического уравнения с учетом динамических факторов даны в параграфе 3. Определены профили концентраций взвешенных частиц в жидкости, осадке и градиента давления для различных исходных данных.

На основе полученных результатов разработаны выводы и заключения.

В конце диссертации программы расчетов решений задач приведены в качестве приложения.

По материалам диссертации опубликована следующая работа:

Махмудов Ж.М., Пардаев А.И., Шаимов К.М. Численное решение задачи фильтрации суспензии в пористой среде // Труды научной конференции “Проблемы современной математики”, 22-23.04.2011. г. Карши. С.431-434.

§1. Учет динамических факторов в кинетике осаждения (захвата) и освобождения частиц при фильтрации суспензий

В данном параграфе сначала на основе [1] рассмотрим особенности процесса осветления суспензий путем фильтрования. Затем дадим обобщение кинетики процесса осаждения (захвата) твердых частиц суспензии, а также их освобождения, учитывающее динамические факторы.

1.1. Особенности процесса осветления суспензий путем фильтрования

Процесс осветления суспензий можно отнести к классу сорбционных (в широком смысле) процессов. При фильтровании суспензий обычно происходит отложение слоя твердых частиц суспензии на поверхности фильтра, а также их проход в поровое пространство фильтра и осаждение (захват, задержка). Обычно изучение роста слоя осадка на поверхности фильтра приводится к отдельному классу задач – к задачам типа Стефана и Веригина. Процесс же фильтрационного осветления суспензий внутри слоя загрузки (фильтра) может быть описан математическими моделями, подобными сорбционным.

Характерной особенностью процесса фильтрационного осветления суспензий является взаимодействие кинетики осветления и гидродинамических условий фильтрации. Осаждение твердых частиц суспензии в порах фильтра изменяет фильтрационные-емкостные свойства фильтра, т.е. пористость и проницаемость претерпевает существенные изменения за счет изменения степени заполнения порового пространства. При постоянной скорости фильтрования это приводит к росту локальных физических скоростей суспензии, а также локальных и общего градиента давления в фильтре. При постоянном перепаде давления на фильтре можно наблюдать снижение общей скорости фильтрования и локальных физических

скоростей в фильтре. В свою очередь, изменение гидродинамических условий фильтрования приводит к изменению кинетики осаждения и освобождения твердых частиц суспензии в поровом пространстве фильтра.

Для описания процессов осаждения частиц обычно применяются различные феноменологические подходы. В частности, кинетика осаждения твердых частиц представляется в виде дифференциальных уравнений, учитывающих различные физические особенности осаждения и освобождения твердых частиц в поровом пространстве фильтра.

В [2] уравнение кинетики представлялось в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(1 + \alpha\rho)c, \quad (1.1)$$

где ρ - концентрация осадка, c - концентрация суспензии в жидкой фазе, α , β - постоянные.

В этой модели кинетики сделана попытка учесть улучшение эффективности массопереноса из-за увеличения удельной поверхности загрузки при образовании осадка. Отметим, что этот эффект, получивший в литературе название «зарядка», присущ именно фильтрованию суспензий и связан с изменением не только геометрии пористого пространства вследствие коагуляции, но и ζ -потенциала поверхности (при фильтровании жидких сред) [1].

Для описания динамики осветления суспензии широко применяются модели [3-6], которых в обобщенном виде можно представить как [1]

$$v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta\varphi_1(\rho)c - \varphi_2(\rho), \quad h = h_0 + \int_0^l i(x,t)dx, \quad (1.2)$$

где v - скорость фильтрации; $\beta\varphi_1(\rho)c$ - скорость прилипания частиц; $\varphi_2(\rho)$ - скорость отрыва частиц; h - потери напора на фильтре; h_0 - начальные потери напора; i - гидравлический уклон; l - длина фильтра.

Система (1.2) записана в предположении, что суспензия является однокомпонентной, а образующийся осадок однороден. В уравнении баланса

в системе (1.2) опущен член $\partial(\varepsilon c)/\partial t$, который, как правило, мал по сравнению с остальными (исключая начальную стадию осветления, но тогда должны быть учтены и другие факторы, например продольная дисперсия; пренебрежение ими оправдано для представляющих практический интерес стадий процесса) [1].

Уравнение изотермы следует из уравнения кинетики системы (1.2) при условии $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, т.е.

$$\beta\varphi_1(\rho)c - \varphi_2(\rho) = 0, \quad (1.3)$$

и описывает равновесие в системе, являющееся сугубо динамическим, когда скорости отрыва и прилипания частиц равны. В динамике фильтрования суспензий равновесие зависит не только от свойств дисперсной фазы и загрузки, но и от гидродинамических условий и геометрических характеристик (порозность, форма частиц и т.п.). Поэтому изотерма фильтрации (1.3) не может быть рассчитана из статического опыта; она является динамической характеристикой [1].

В зависимости от использования кинетических уравнений модели фильтрования могут быть линейными или нелинейными.

В линейной модели фильтрования в (1.2) принимается

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \beta\rho/\Gamma, \quad (1.4)$$

где Γ - постоянная.

Модель фильтрации состоит из уравнения баланса и кинетики (1.2) с (1.4). В модели предполагается, что каждая частица, осевшая на поверхности пористого слоя, может оторваться независимо от концентрации осадка. Очевидно, что такое предположение справедливо лишь для осадков, образующих на поверхности загрузки монослой из частиц суспензии. Кроме того, полагается, что любая частица имеет равную вероятность отрыва независимо от места адгезии. Это предположение опровергается последними данными о структуре потока в пористом слое.

В нелинейной модели фильтрования [5] полагается, что

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \rho / [\Gamma(1 - K\rho)], \quad (1.5)$$

где K, Γ - постоянные. Эта система совпадает с уравнениями динамики сорбции при внешнедиффузионной кинетике и изотерме Ленгмюра. По сравнению с линейной моделью здесь учитывалось влияние формирующегося осадка на изменение локальной скорости, что в свою очередь влияет на скорость отрыва. В рамках нелинейной модели удастся доказать формирование концентрационного фронта, перемещающегося по слою с постоянной скоростью [1].

В моделях безотрывного фильтрования полагается, что $\varphi_2(\rho) = 0$, а $\varphi_1(\rho)$ различными авторами аппроксимируется по-разному. Так, в моделях Айвеса [6]

$$\varphi_1^{(1)}(\rho) = a_1 + a_2\rho - \frac{a_3\rho^2}{a_4 - \rho}, \quad \varphi_1^{(2)}(\rho) = a_5 - a_6\rho, \quad (1.6)$$

в модели Шехтмана [3]

$$\varphi_1^{(3)}(\rho) = a_7 - \rho, \quad (1.7)$$

где a_i - постоянные ($i = 1, 2, \dots, 7$). Уравнения динамики аналогичны (хотя и не тождественны) системе динамики сорбции при внешней диффузии и прямоугольной изотерме [1].

Характерной особенностью всех этих моделей является существование концентрации осадка ρ_0 , при которой $\varphi_1^{(k)}$ обращается в нуль, т.е. прекращается накопление осадка за счет адгезии (напомним, что отрыв осадка модели не учитывают).

В моделях (1.6), (1.7) учитывается формирование в пористом слое невымываемой части осадка, но не учитывается образование вымываемой части, что несомненно доказано экспериментально [7].

Осадок в пористом пространстве глобулярной структуры фильтра имеет две формы – вымываемую и невымываемую. Соответственно зоны

фильтра назовем активными и пассивными. Активные зоны, омываемые струйной составляющей потока, формируют вымываемый осадок с концентрацией ρ_a , пассивные зоны, являющиеся застойными, формируют невымываемый осадок с концентрацией ρ_n . Обозначим полную емкость фильтра через ρ_0 . Из изложенного следуют

$$\rho_0 = \rho_{a0} + \rho_{n0},$$

где ρ_{a0} и ρ_{n0} - емкости соответственно активных и пассивных зон. Подчеркнем, что указанные емкости являются динамическими характеристиками. Они зависят не только от «качества» дисперсной фазы, но и от скорости и структуры потока, а также геометрии слоя [1].

Степень вымываемости осадка характеризует величина

$$\gamma = \rho_{a0} / \rho_{n0}.$$

При фильтровании суспензий уравнение кинетики необходимо записывать для обеих зон: активной и пассивной. Приведем такой подход в соответствии с [1].

Уравнение кинетики для вымываемой формы осадка

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \beta_a \left(c - \frac{\rho_a}{\Gamma_a} \right), \quad \Gamma_a = \frac{\rho_{a0}}{c_0}$$

совпадает с линейной моделью фильтрации (1.5). Кинетика образования невымываемой формы осадка описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \beta_n(\rho_n)c$$

и аналогична моделям безотрывного фильтрования (1.6). Изменение β_n связано с эффектом уплотнения (старения) осадка.

В [1] описан процесс старения осадка пассивной зоны. В соответствии с этим описанием пока объем пассивной зоны не заполнен, каждая частица, подошедшая к ее границе, переходит в невымываемый осадок. Если же зона заполнена, то вероятность такого перехода меньше единицы. Обозначим

вакантную часть поверхности через α . Тогда при частично вакантной зоне кинетический коэффициент равен $\alpha\beta_{n0}$, если для свободной поверхности он был равен β_{n0} . Уменьшение β_n происходит непрерывно, поскольку за счет старения осадка появляются новые вакансии в пассивной зоне. Наиболее точно экспериментальные данные описывает следующая аппроксимация α :

$$\alpha(\rho_n) = \begin{cases} 1 & \text{для } \rho_n < \rho_{n1}, \\ \rho_{n1}/\rho_n & \text{для } \rho_{n1} < \rho_n < \rho_{n0}, \\ 0 & \text{для } \rho_n = \rho_{n1}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Следовательно, в начале формирования осадка $\alpha = 1$. Начиная с некоторой концентрации ρ_{n1} , значение α становится меньше единицы, и дальнейшее уменьшение α идет обратно пропорционально количеству осадка ρ_n . Наконец, при концентрации осадка, близкой к насыщению, α уменьшается более быстро. Этот участок аппроксимируется ступенькой (аналогично аппроксимации сильновыпуклых изотерм прямоугольной изотермой в динамике сорбции).

Старение осадка влияет на кинетику в интервале $\rho_{n1} \leq \rho_n \leq \rho_{n0}$ и характеризуется безразмерным параметром $q_c = \rho_{n1}/\rho_{n0} \leq 1$. Если $q_c \cong 1$, то эффектом старения можно пренебречь.

Уравнение баланса

$$v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = 0 \quad (1.9)$$

замыкает систему динамики осветления, которое при кольматации фильтра обычно решается при условиях

$$c(t, 0) = c_0, \quad \rho_a(0, x) = \rho_n(0, x) = 0. \quad (1.10)$$

Решение уравнения получено сначала для малых времен. Основной вывод для этого диапазона времени заключается в том, что на достаточно коротких слоях можно наблюдать активных зон еще до того, когда начнет «ухудшаться» кинетика пассивных зон. Решение получено также при

предположении отсутствия активной составляющей скорости формирования осадка.

1.2. Модифицированные кинетические уравнения осаждения и освобождения твердых частиц суспензии

Рассмотренная в §1.1 модель не учитывает диффузионный перенос вещества в пористой среде. Кроме того, кинетика осаждения и отрыва частиц в поровом пространстве определяется от характеристик насыщения порового пространства – концентрациями c и ρ . Коэффициенты в кинетическом уравнении β , Γ , K , а также сами функции $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_2(\rho)$ считаются не зависящими от интенсивности гидродинамического процесса фильтрации. Эти предположения, возможно, справедливы, когда скорости фильтрации и, соответственно, градиенты давления не высоки. В [8-11] предлагаются модифицированные уравнения кинетики коагуляции и суффозии, учитывающие вероятностный подход. Уравнение кинетики осаждения частиц с учетом коагуляции и суффозии записано в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 \zeta |\nabla p|, \quad (1.11)$$

где в указанных работах под ζ обозначено насыщение осевшими частицами в рыхлом теле, δ - насыщение частицами в свободной жидкости, $|\nabla p|$ - модель градиента давления, ω_0 , ω_1 , γ - параметры.

Напишем уравнение кинетики [1] с учетом динамических факторов. Сначала кинетическое уравнение представим в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(1 + \alpha\rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}. \quad (1.12)$$

Первый член справа в (1.12) учитывает, как отмечалось в §1.1, эффект «зарядки» фильтра, характеризующий улучшение эффективности

массопереноса из-за увеличения удельной поверхности зарядки при образовании осадка.

Второй член справа (1.12) соответствует нелинейной модели фильтрования [5].

Когда в уравнении кинетики (1.12) образование осадка в пассивной зоне принимаем в соответствии с моделями безотрывного фильтрования, получаем следующее

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \left(a_1 + a_2 \rho - \frac{a_3 \rho^3}{a_4 - \rho} \right) c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(a_5 - a_6 \rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (1.14)$$

$$a_i = \text{const}, \quad i = \overline{1,6}.$$

Первый член в правой части (1.13) соответствует модели Айвеса [6], а в (1.14) – модели Шехтмана [3].

Кинетические уравнения (1.13), (1.14) необходимо рассматривать совместно с уравнением баланса, которого в одномерном случае с учетом диффузионных эффектов запишем в виде

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1.15)$$

где m_0 - пористость среды, D - коэффициент эффективной диффузии, v - скорость фильтрации, const .

Если гидродинамический поток создается не с заданной скоростью фильтрации $v = v_0 = \text{const}$, а с заданными давлениями на концах фильтра, то необходимо получить уравнение и для поля давления. Принимая закон фильтрации в виде

$$v = -K(m) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad m = m_0 - \rho, \quad (1.16)$$

где $K(m)$ - коэффициент фильтрации, используя уравнение неразрывности в виде

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.17)$$

получаем

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'_m(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (1.18)$$

где $K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}$.

Для конечного фильтра длиной L граничные условия для (1.18) могут быть заданы в виде

$$p(t, 0) = p_n, \quad p(t, L) = p_k, \quad (1.19)$$

p_n, p_k - заданные давления.

В соответствии с [8-11] кинетические уравнения (1.12), (1.13), (1.14) с учетом динамических факторов в работе [12] записываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta(1 + \alpha\rho)c}{1 + \gamma|\nabla p|} - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma|\nabla p|} \left(a_1 + a_2\rho - \frac{a_3\rho^3}{a_4 - \rho} \right) - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma|\nabla p|} (a_5 - a_6\rho)c - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (1.22)$$

где γ, ω - постоянные коэффициенты.

Уравнения (1.20), (1.21), (1.22) учитывают динамические факторы, что представляют модификации уравнений (1.12), (1.13), (1.14), соответственно.

§ 2. Задачи фильтрации суспензии в пористой среде

В этом параграфе решаются задачи фильтрации суспензии в пористой среде на основе предложенной в 1.2 модели.

2.1. Решение задачи фильтрации суспензии с заданным скоростным режимом

Рассмотрим полубесконечный однородный пласт с первоначальной пористостью m_0 , заполненный однородной жидкостью (т.е. жидкостью без дисперсных частиц). В точке $x=0$, начиная с $t > 0$ в пласт поступает дисперсная жидкость с концентрацией твердых частиц c_0 со скоростью фильтрации $v(t) = v_0 = \text{const}$.

Система уравнений фильтрования суспензий с заданным скоростным режимом, без учета динамических факторов, состоит из уравнения баланса и кинетики.

Рассмотрим несколько вариантов системы уравнений, различающихся между собой уравнением кинетики.

I вариант. Система уравнений состоит из (1.15) и (1.12). Тогда в одномерном случае она представляется в виде [13]

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(1 + \alpha\rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}. \quad (2.1)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 0, & c(0, x) &= 0, \\ c(t, 0) &= c_0, & c(t, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для решения задачи (2.1) - (2.2) применим метод конечных разностей [14]. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку, где T - максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого

интервал $[0, \infty)$ разбиваем с шагом h , а $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ . В результате имеем сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, \dots, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J\}.$$

Вместо функций $c(t, x)$, $\rho(t, x)$ будем рассматривать сеточные функции, значения которых в узлах (x_i, t_j) соответственно обозначим c_i^j , ρ_i^j .

Первое уравнение системы (2.1) аппроксимируется на сетке $\omega_{h\tau}$ в следующем виде

$$m_0 \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + v_0 \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{h} + \frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau} = D \frac{c_{i-1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i+1}^{j+1}}{h^2}. \quad (2.3)$$

Разностная схема для второго уравнения системы (2.1) будет иметь вид:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau} = \beta(1 + \alpha\rho_i^{j+1})c_i^j - \frac{\rho_i^{j+1}}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)}. \quad (2.4)$$

Начальные и граничные условия (2.2) также представляются в сеточном виде

$$\begin{aligned} \rho_i^j &= 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = 0, \quad c_i^j = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = 0, \\ c_i^j &= c_0, \quad i = 0, \quad j = \overline{0, J}, \\ c_i^j &= 0, \quad i = I, \quad j = \overline{0, J}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где I - достаточно большое число, для которого приблизительно выполняется $c_I^j = 0$.

Разностная схема (2.3) приведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ac_{i-1}^{j+1} - Bc_i^{j+1} + Ec_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (2.6)$$

где

$$A = \frac{\tau D}{h^2} + \frac{\tau v}{h}, \quad B = 2\frac{\tau D}{h^2} + \frac{\tau v}{h} + m_0, \quad E = \frac{\tau D}{h^2},$$

$$F_i^j = m_0 c_i^j - (\rho_i^{j+1} - \rho_i^j).$$

Схема (2.4) представляется в виде

$$\rho_i^{j+1} = \zeta_i^j \rho_i^j + \xi_i^j, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (2.7)$$

где

$$\zeta_i^j = \frac{\Gamma(1 - K\rho_i^j)}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 - \alpha\beta\tau c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\beta\tau\Gamma(1 - K\rho_i^j)c_i^j}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 - \alpha\beta\tau c_i^j) + \tau}.$$

Систему (2.6) решаем методом прогонки при известных ρ_i^{j+1} , определенных в соответствии (2.7)

$$c_i^{j+1} = \eta_{i+1} c_{i+1}^{j+1} + \mu_{i+1}, \quad i = \overline{I-1, 0}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (2.8)$$

где

$$\eta_{i+1} = \frac{E}{B - A\eta_i}, \quad \mu_{i+1} = \frac{A\mu_i + F_i^j}{B - A\eta_i}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Из граничного условия имеем

$$c_0^{j+1} = \eta_1 c_1^{j+1} + \mu_1, \quad \text{откуда } \eta_1 = 0, \quad \mu_1 = c_0. \quad (2.9)$$

Вычисления проводятся в следующей последовательности. Согласно (2.7) определяются значения ρ_i^{j+1} через известные величины ρ_i^j и c_i^j нижнего слоя в соответствующих точках, из (2.8) находятся c_i^{j+1} .

В качестве исходных параметров примем следующие числовые величины: $c_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $v_0 = 10^{-4}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с.

Проведем анализ численных результатов. С течением времени значения c , ρ в фиксированных точках пласта возрастают (Рис.2.1 - 2.4). При увеличении параметра β , графики показывают увеличение значений концентрации осадка ρ и уменьшение концентрации взвешенных твердых частиц в жидкости c в соответствующих точках пласта (Рис.2.1, 1 и 2 случаи). Сравнивая рис.2.1 (1 случай) с рис. 2.2 (1 случай) можно сказать, что увеличение параметра α также приводит к увеличению концентрации осадка

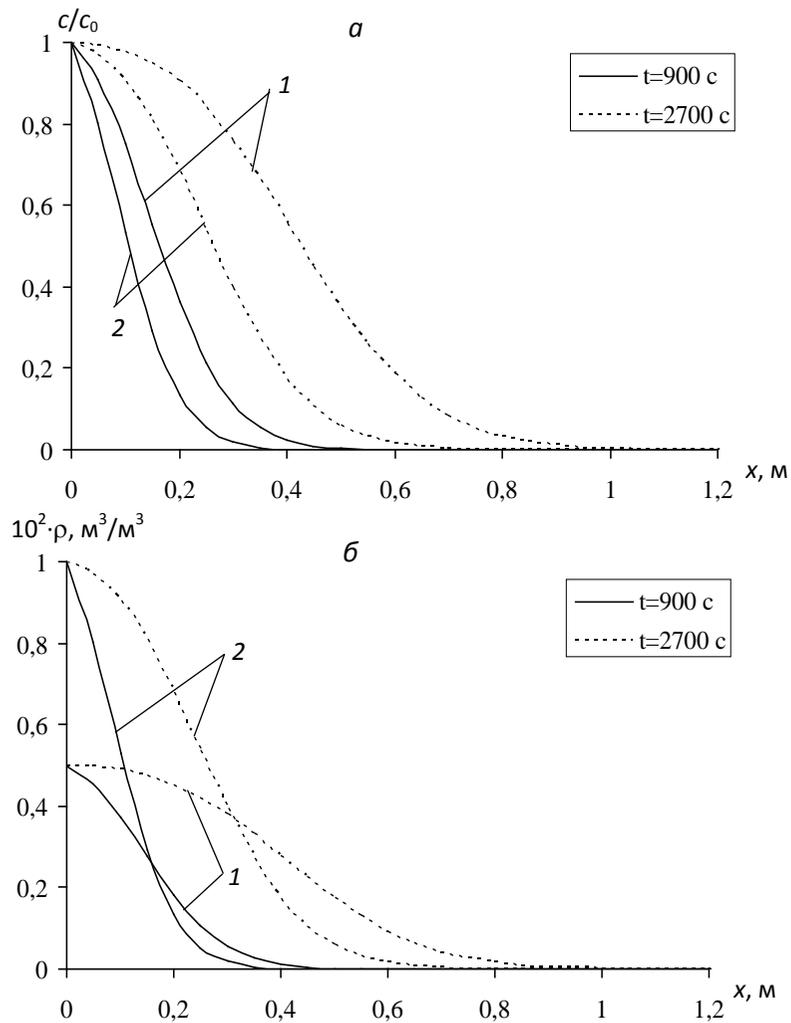


Рис. 2.1. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $\alpha = 1$, $K = 1$.

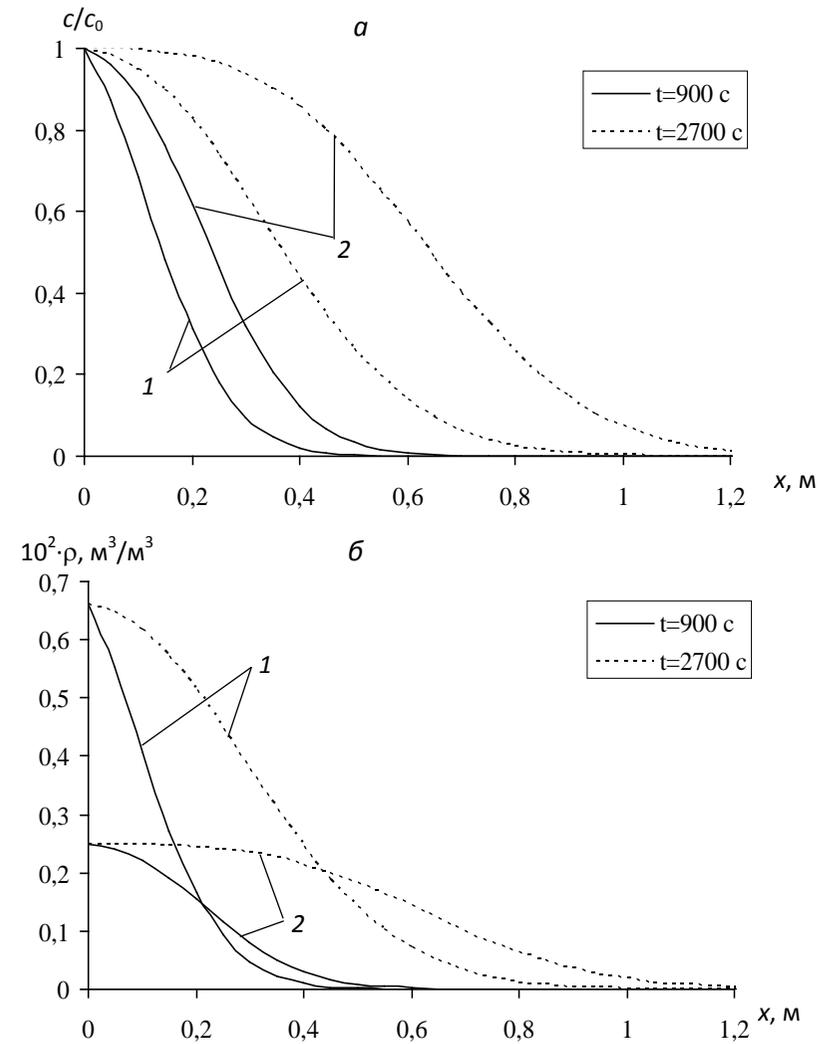


Рис. 2.2. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$;

$\Gamma = 5$ с. $\alpha = 50$ (1); $\Gamma = 2,5$ с. $\alpha = 1$ (2).

ρ и уменьшению c в фиксированных точках пласта. Уменьшение значения параметра Γ приводит к увеличению отрыва частиц, за счет этого уменьшаются абсолютные значения ρ в одинаковых точках пласта. В случае $\Gamma = 5$ с, в точке $x = 0$ было $\rho \approx 0,005$ (Рис.2.1б, 1 случай), а при $\Gamma = 2,5$ с, имеем $\rho \approx 0,0025$ (Рис.2.2б, 2 случай). Сравнивая графические результаты рис.2.1 (1 случай) с рис.2.3 (2 случай) можно сказать, что при увеличении параметра K уменьшаются значения ρ , но не очень значительно. При увеличении значения K в 50 раз, значения ρ понижаются приблизительно на 20 % от предыдущего случая (при $K = 1$). При увеличении коэффициента эффективной диффузии D в уравнении баланса профили показателей c и ρ распространяются более широким фронтом. Увеличив скорость фильтрации v_0 замечаем ускоренное продвижение фронта в глубь пласта (Рис.2.4).

II вариант. Система уравнений состоит из (1.15) и (1.13)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \left(a_1 + a_2 \rho - \frac{a_3 \rho^3}{a_4 - \rho} \right) c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}. \quad (2.10)$$

В этом варианте уравнение кинетики системы (2.10) после аппроксимация принимается, как в (2.7), в виде

$$\rho_i^{j+1} = \zeta_i^j \rho_i^j + \xi_i^j, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (2.11)$$

$$\text{где } \zeta_i^j = \frac{\Gamma(1 - K\rho_i^j)}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 - \tau\beta a_2 c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\Gamma(1 - K\rho_i^j)\tau\beta(a_1(a_4 - \rho_i^j) - a_3(\rho_i^j)^2)c_i^j}{(\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 - \tau\beta a_2 c_i^j) + \tau)(a_4 - \rho_i^j)}.$$

Результаты численных экспериментов представлены на рис. 2.5-2.6. В этом варианте, как и в предыдущем, с увеличением параметра β увеличивается концентрация осадки и уменьшается концентрация взвешенных частиц (Рис. 2.5). С увеличением значений параметров a_1

(Рис.2.6, 1 случай) и a_2 (Рис. 2.6, 2 случай) также происходит увеличение ρ и уменьшение c в фиксированных точках пластах.

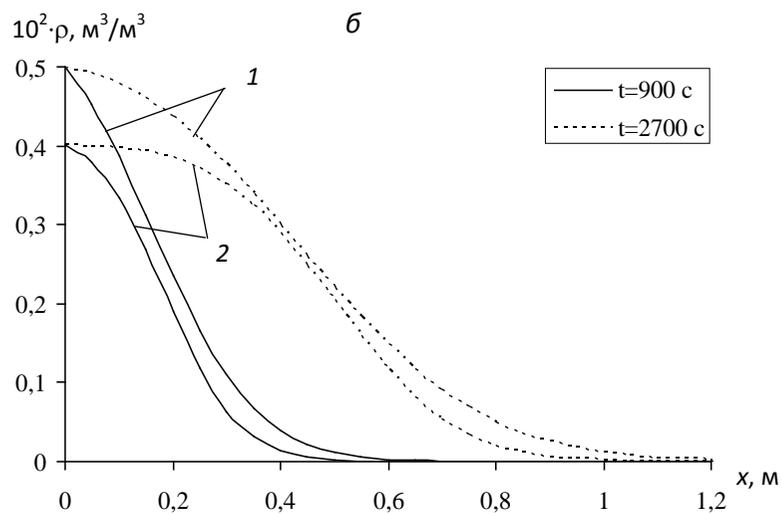
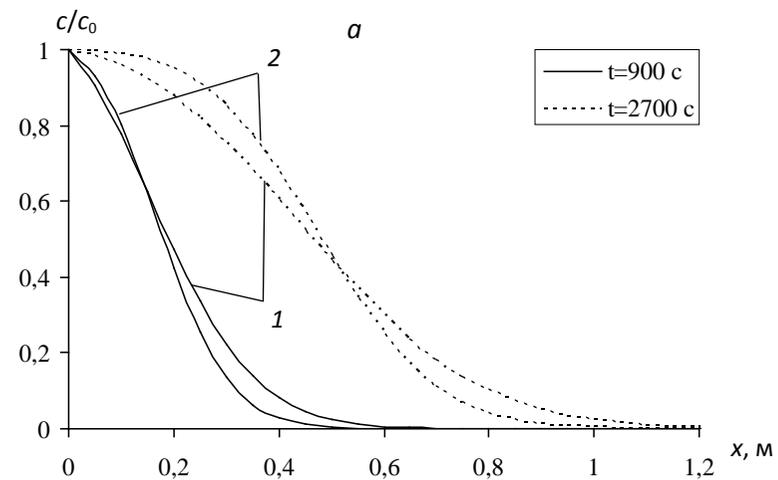


Рис. 2.3. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $\beta = 0,1 \text{ c}^{-1}$; $\Gamma = 5 \text{ c}$; $\alpha = 1$; $v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $K = 50$ (1);

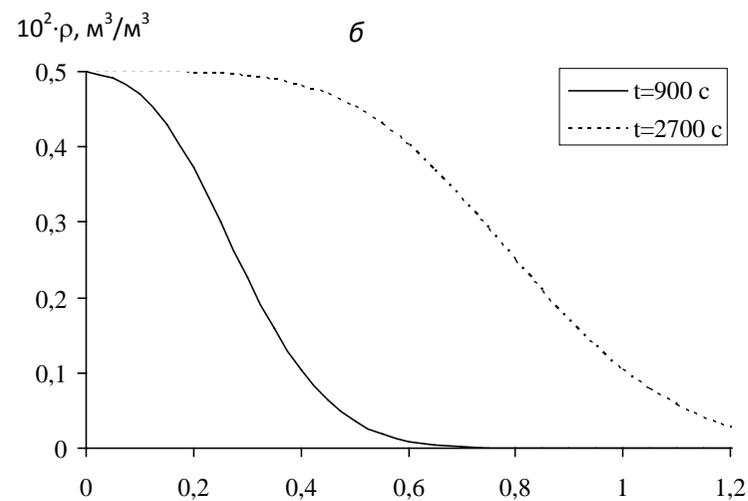
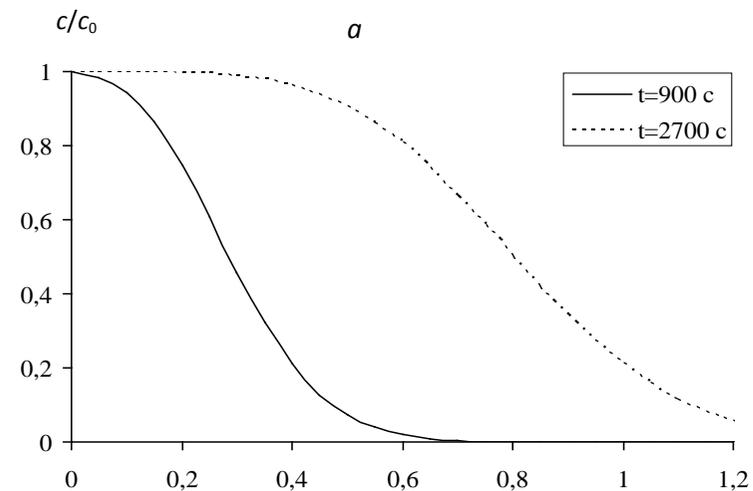


Рис. 2.4. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$; $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\beta = 0,1 \text{ c}^{-1}$; $K = 1$; $\Gamma = 5 \text{ c}$; $\alpha = 1$.

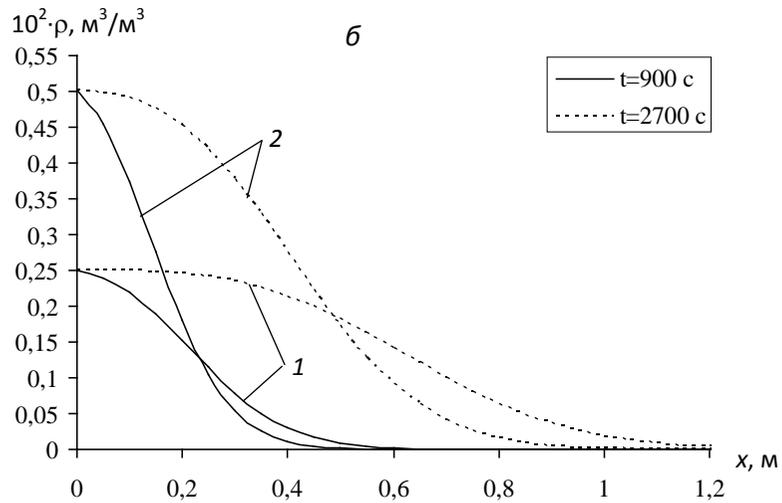
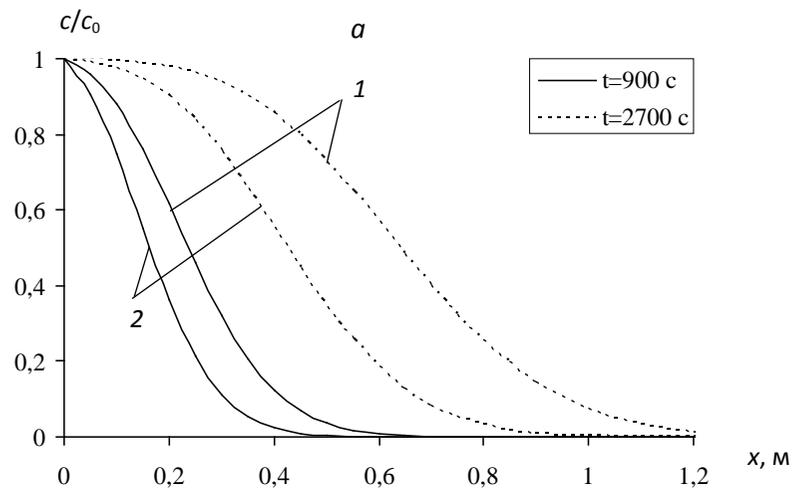


Рис. 2.5. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $K = 1$.

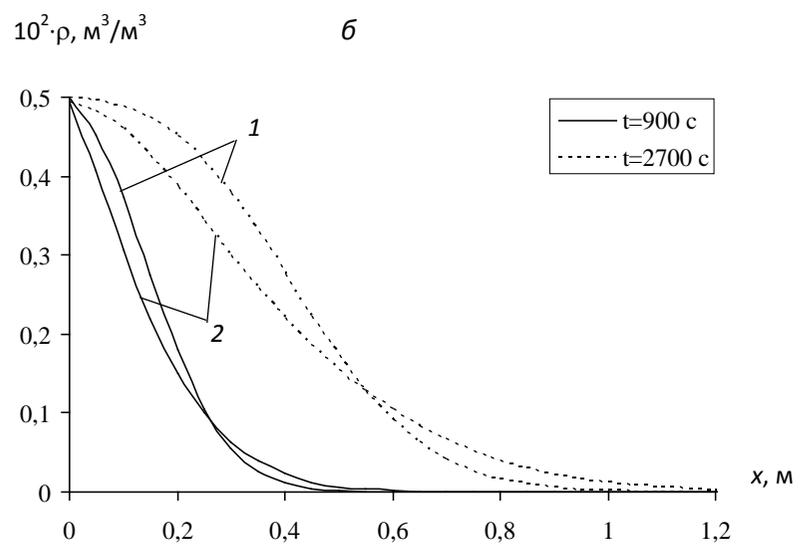
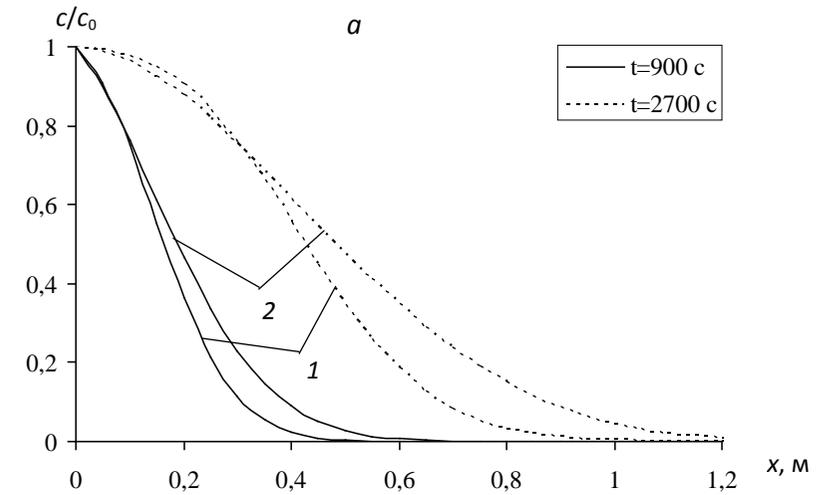


Рис. 2.6. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$;

III вариант. Система уравнений состоит из (1.15) и (1.14)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(a_5 - a_6 \rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}. \quad (2.12)$$

В этом варианте кинетическое уравнение аппроксимируется аналогично (2.11), а ζ_i^j и ξ_i^j в (2.11) выражаются следующими соотношениями

$$\zeta_i^j = \frac{\Gamma(1 - K\rho_i^j)}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 + \tau\beta a_6 c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\Gamma(1 - K\rho_i^j)\tau\beta a_5 c_i^j}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)(1 + \tau\beta a_6 c_i^j) + \tau}. \quad (2.13)$$

Результаты численных экспериментов представлены на рис. 2.7 - 2.8. Сравнивая 1 и 2 случаи рис.2.8 можно сказать, что при увеличении значений параметра a_5 скорость прилипания частиц увеличивается, за счет этого уменьшается значение концентрации взвешенных частиц, а с увеличением значения параметра a_6 уменьшается ρ , увеличивается c и наблюдается продвижение фронта в глубь пласта.

2.2. Решение задачи фильтрации в конечном фильтре с заданным режимом по давлению

Здесь рассматривается задача для конечной области с граничным режимом по давлению.

В однородный пласт длины l , пористостью m_0 , насыщенный чистой (без частиц) жидкостью с некоторого момента времени $t > 0$ начинает поступать дисперсная система с концентрацией взвешенных твердых частиц c_0 . Течение происходит под действием градиента давления, создаваемого постоянными граничными давлениями p_n и p_k . Исходя из сформулированных условий задачи начальные и граничные условия записываются так

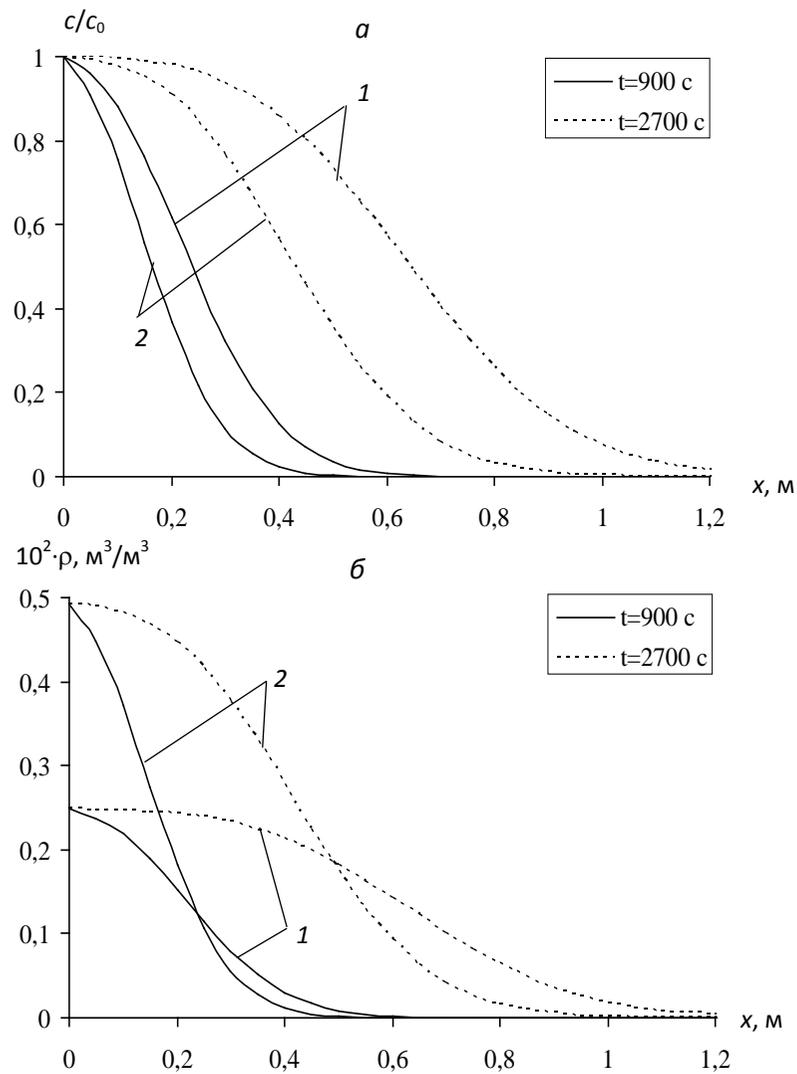


Рис. 2.7. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_5 = 0,5$, $a_6 = 1$, $K = 1$.

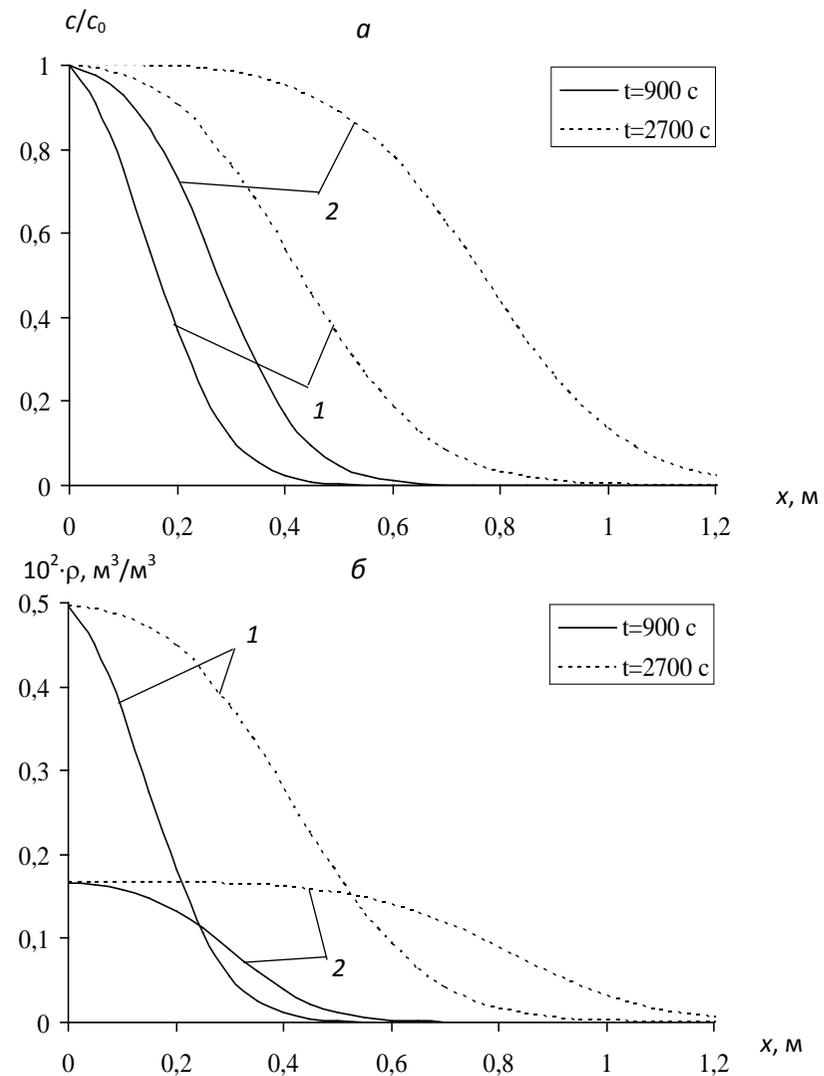


Рис. 2.8. Профили концентраций c/c_0 (а) и ρ (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$;

$a_5 = 1$, $a_6 = 1$ (1); $a_5 = 0,5$, $a_6 = 100$ (2).

$$\rho(0, x) = 0, \quad c(0, x) = 0, \quad c(t, 0) = c_0, \quad p(t, 0) = p_n, \quad p(t, l) = p_k. \quad (2.14)$$

Таким образом, для определения неизвестных $p(t, x)$, $c(t, x)$, $\rho(t, x)$ необходимо решить систему, состоящую из уравнения баланса, уравнения кинетики, закона фильтрации (уравнение (1.16) в 1.2) и уравнения (1.18) в 1.2. Как в параграфе 2.1 рассмотрим следующие варианты, зависящие от вида кинетического уравнения.

I вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.12), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(1 + \alpha\rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (2.15)$$

$$v = K(m)|\nabla p|, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'_m(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Система решается при условиях (2.14) методом конечных разностей.

В области $D = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, \dots, I, h = l/I, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J\},$$

где T - максимальное время, в течение которого исследуется процесс, I, J - количество точек деления сетки.

Последнее уравнение системы (2.15), когда коэффициент фильтрации $K(m)$ выражается законом Кармана-Козени ($K(m) = k_0 m^3 / (1 - m)^2$), представим в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{3 - m_0 + \rho}{(m_0 - \rho)(1 - m_0 + \rho)} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Сеточное решение, определенное в точках (x_i, t_j) для давления p обозначим через p_i^j . В результате получается следующая разностная схема

$$\frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} + q_i^j \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{2h} = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (2.17)$$

где $q_i^j = \frac{3 - m_0 + \rho_i^j}{(m_0 - \rho_i^j)(1 - m_0 + \rho_i^j)} \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_i^j}{h}$.

Условия (2.14) для давления принимают вид:

$$p_0^{j+1} = p_n, \quad p_i^{j+1} = p_k. \quad (2.18)$$

Схема (2.17) также приводится к СЛАУ

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Bp_i^{j+1} + Ep_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (2.19)$$

где

$$A = 1 + \frac{h}{2}q_i^j, \quad B = 2, \quad E = 1 - \frac{h}{2}q_i^j, \quad F_i^j = 0.$$

Решая систему уравнений (2.19) методом прогонки определяется давление на $(j+1)$ -ом слое и в соответствующих точках находится градиент давления по формуле:

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{|p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}|}{h}. \quad (2.20)$$

Затем по схеме (2.7) вычисляются ρ_i^{j+1} . Скорость фильтрации определяется как

$$v_i^{j+1} = K(m_i^{j+1})|\nabla p|_i^{j+1} = k_0 \frac{(m_0 - \rho_i^{j+1})^3}{(1 - m_0 + \rho_i^{j+1})^2} |\nabla p|_i^{j+1}. \quad (2.21)$$

Первое уравнение системы (2.15) аппроксимируется на сетке ω_{ht} в следующем виде

$$m_0 \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + v_i^{j+1} \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{h} + \frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau} = D \frac{c_{i-1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i+1}^{j+1}}{h^2}. \quad (2.22)$$

Схема (2.22) приводится к СЛАУ и решается методом прогонки при известных значениях ρ_i^{j+1} и v_i^{j+1} .

Результаты численных расчетов представлены на рис.2.9 - 2.11. Из этих рисунков видно, что с увеличением времени в одних и тех же точках пласта значения ρ и c возрастают. Анализируя профили $|\nabla p|$ отметим, что они также носят монотонно убывающий характер, а затем стабилизируются достигнув определенной величины. С увеличением времени вблизи $x = 0$

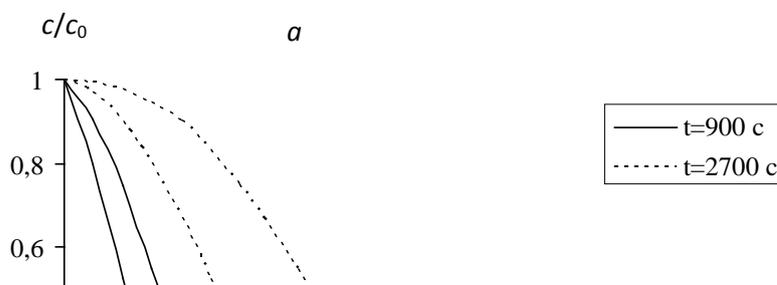


Рис. 2.9. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $\alpha = 1$, $K = 1$.

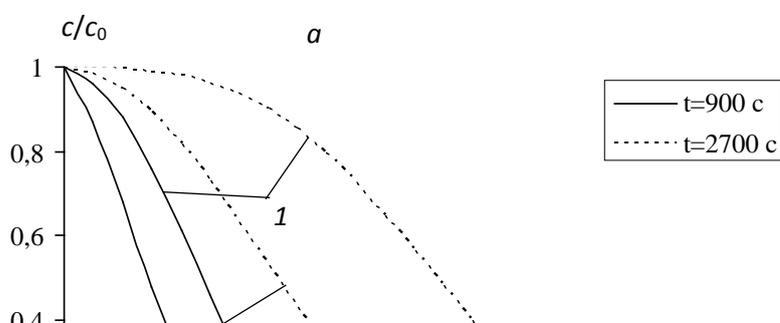


Рис. 2.10. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$;
 $\Gamma = 2,5$ с, $\alpha = 1$ (1); $\Gamma = 5$ с, $\alpha = 50$ (2).

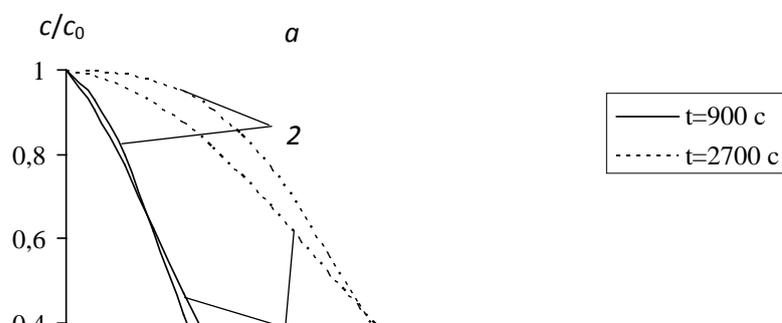


Рис. 2.11. Профили концентраций c/c_0 (а), ρ (б), $|\nabla p|$ (с)

в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $\alpha = 1$;

$D = 7,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с, $K = 1$ (1); $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с, $K = 50$ (2).

уменьшается значение $|\nabla p|$ при увеличении значения параметров Γ , D и K .

Когда увеличиваются значения параметров β , α , в рассмотренной задаче в

полубесконечной области, значение ρ увеличивается, c уменьшается и в этом случае вблизи свободной границы области ($x=0$) наблюдается резкое возрастание абсолютных значений градиента давления (Рис.2.9в,2 случай, рис.2.10в,2 случай).

II вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.13), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \left(a_1 + a_2 \rho - \frac{a_3 \rho^3}{a_4 - \rho} \right) c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (2.23)$$

$$v = K(m) |\nabla p|, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'_m(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Эта система решается при начальных и граничных условиях (2.14). Для определения сеточных значений p , v , ρ и c использованы схемы (2.17), (2.20), (2.11), (2.21) и (2.22).

Результаты численных расчетов представлены графически на рис.2.12, 2.13. Увеличение параметров a_1 и a_2 , как и в задаче, рассмотренной в полубесконечной области, приводит к увеличению концентрации осадка и это можно рассматривать как положительный фактор при фильтровании суспензий в пористой среде.

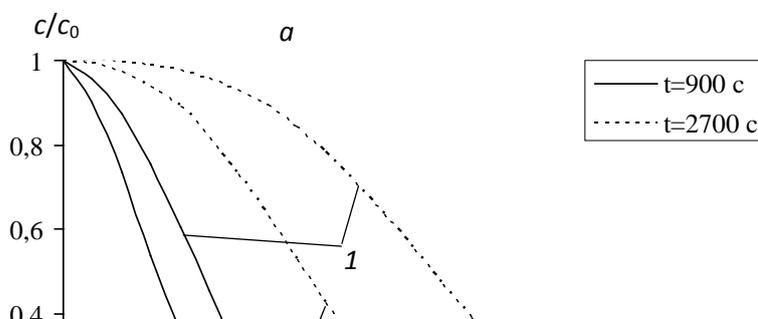


Рис. 2.12. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с^{-1} , $\Gamma = 5 \text{ с}$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $K = 1$.

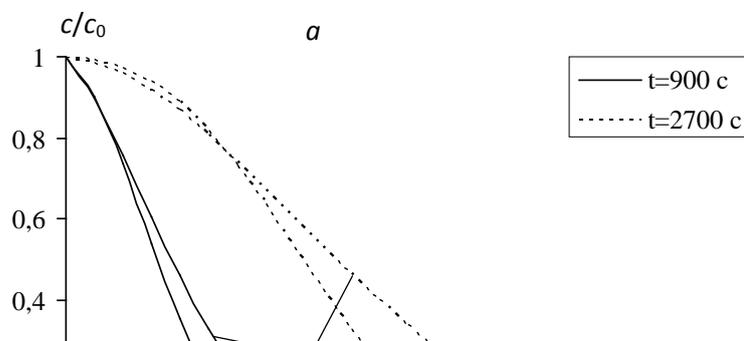


Рис. 2.13. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$;
 $a_1 = 1, a_2 = 1$ (1); $a_1 = 0,5, a_2 = 100$ (2).

III вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.14), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(a_5 - a_6 \rho)c - \frac{\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (2.24)$$

$$v = K(m)|\nabla p|, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Эта система также решается при условиях (2.14). В этом варианте p_i^{j+1} , v_i^{j+1} , c_i^{j+1} определяются как в предыдущем варианте, только для вычисления ρ_i^{j+1} использована схема (2.13).

Результаты численных расчетов представлены на рис.2.14, 2.15.

Из рисунков можно видеть, что при увеличении значения параметра a_5 увеличивается ρ и уменьшается c , а с увеличением значения параметра a_6 уменьшается ρ , увеличивается c в фиксированных точках пласта.

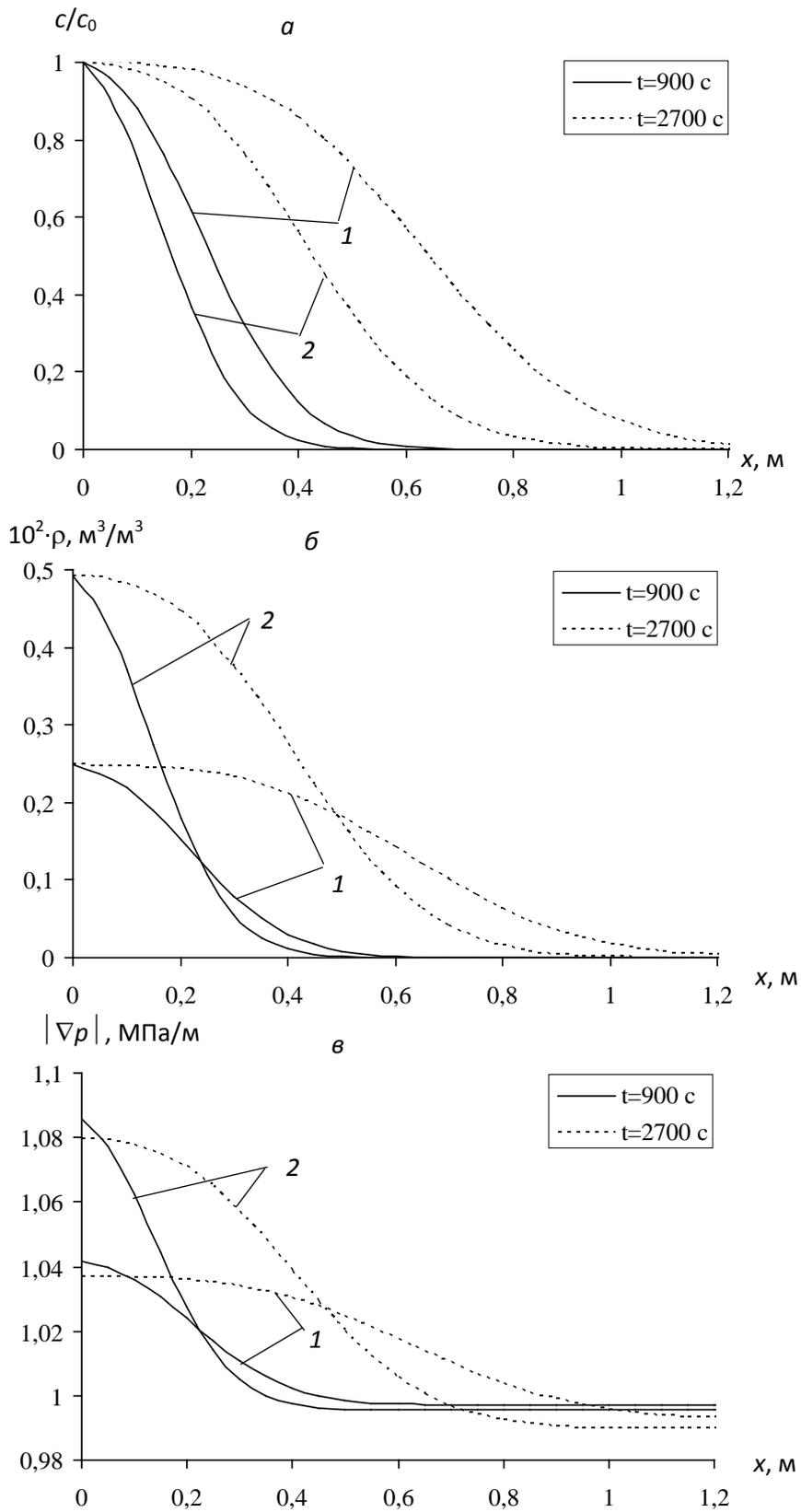


Рис. 2.14. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с^{-1} , $\Gamma = 5 \text{ с}$, $a_5 = 0,5$, $a_6 = 1$, $K = 1$.

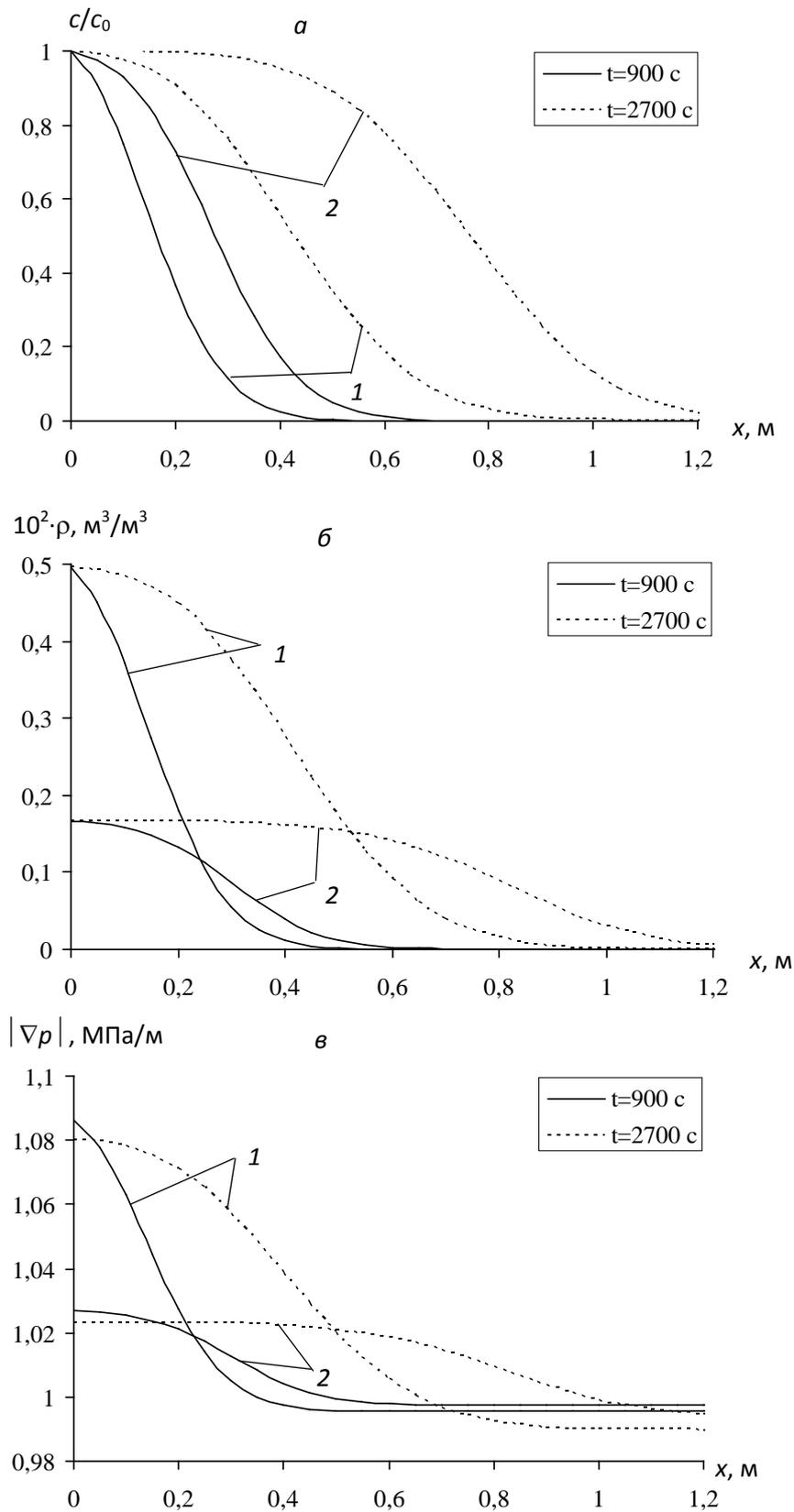


Рис. 2.15. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$$D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \beta = 0,1 \text{ с}^{-1}; \quad K = 1;$$

$$a_2 = 1, \quad a_6 = 1 \text{ (1)}; \quad a_5 = 0,5, \quad a_6 = 100 \text{ (2)}.$$

§ 3. Задачи фильтрации суспензии в пористой среде с учетом динамических факторов

В этом параграфе решаются задачи фильтрования суспензии в пористой среде на основе новых кинетических уравнений, которые учитывают динамические факторы (уравнения (1.20) - (1.22)).

3.1. Решение задачи фильтрации суспензии в полубесконечном пласте

Объектом исследования, как и в параграфе 2.1, является полубесконечный однородный пласт.

Система уравнений фильтрования суспензий с заданным скоростным режимом с учетом динамических факторов, состоит из уравнения баланса, уравнения кинетики и закона Дарси.

Рассмотрим несколько вариантов системы уравнений, различающихся между собой уравнением кинетики, как в 2.1.

I вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.20) и (1.16):

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta(1 + \alpha\rho)c}{1 + \gamma|\nabla p|} - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}. \quad (3.1)$$

$$v_0 = K(m)|\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho.$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) = 0, \quad c(0, x) = 0, \\ c(t, 0) = c_0, \quad c(t, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для решения задачи (3.1) - (3.2) применим метод конечных разностей.

Первое уравнение системы (3.1) аппроксимируется на сетке ω_{ht} как в схеме (2.3), а второе уравнение – в следующем виде

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau} = \beta \frac{(1 + \alpha\rho_i^{j+1})}{1 + \gamma|\nabla p|_i^{j+1}} c_i^j - \frac{\rho_i^{j+1}(1 + \omega|\nabla p|_i^{j+1})}{\Gamma(1 - K\rho_i^j)}. \quad (3.3)$$

Эта схема может быть представлена в виде

$$\rho_i^{j+1} = \zeta_i^j \rho_i^j + \xi_i^j, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\zeta_i^j = \frac{\Gamma_1(1 - K\rho_i^j)}{\Gamma_1(1 - K\rho_i^j)(1 - \alpha\beta_1\tau c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\beta_1\tau\Gamma_1(1 - K\rho_i^j)c_i^j}{\Gamma_1(1 - K\rho_i^j)(1 - \alpha\beta_1\tau c_i^j) + \tau},$$

где

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1 + \gamma|\nabla p|_i^{j+1}}, \quad \Gamma_1 = \frac{\Gamma}{1 + \omega|\nabla p|_i^{j+1}}.$$

Из третьего уравнения системы (3.1) определим $|\nabla p|$

$$|\nabla p| = \frac{v_0(1 - m_0 + \rho)^2}{k_0(m_0 - \rho)^3}. \quad (3.5)$$

Аппроксимируя (3.5) получим

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{v_0(1 - m_0 + \rho_i^j)^2}{k_0(m_0 - \rho_i^j)^3}. \quad (3.6)$$

Вычисления проводятся в следующей последовательности. Согласно (3.6) определяются значения $|\nabla p|_i^{j+1}$ через известные величины ρ_i^j нижнего слоя в соответствующих точках, подставляя найденные $|\nabla p|_i^{j+1}$ в (3.4) находят ρ_i^{j+1} и согласно (2.3) определяются c_i^{j+1} .

По полученным решениям определены профили ρ , c и $|\nabla p|$ в различные моменты времени (Рис. 3.1 - 3.4). Здесь также увеличение значений параметров β (Рис.3.1, 2 случай), α (Рис.3.2, 2 случай), как в решенной задаче в §2.1, действует как положительный фактор к прилипанию частиц, т.е. концентрация осадки возрастает. Уменьшение значения параметра Γ (Рис.3.2, 1 случай) и увеличение K (Рис.3.3, 2 случай) приводит к возрастанию отрыва осевших частиц. Сравнивая рис.2.1 и рис.3.1 оценить влияние градиента давления на процесс кинетики захвата и отрыва частиц.

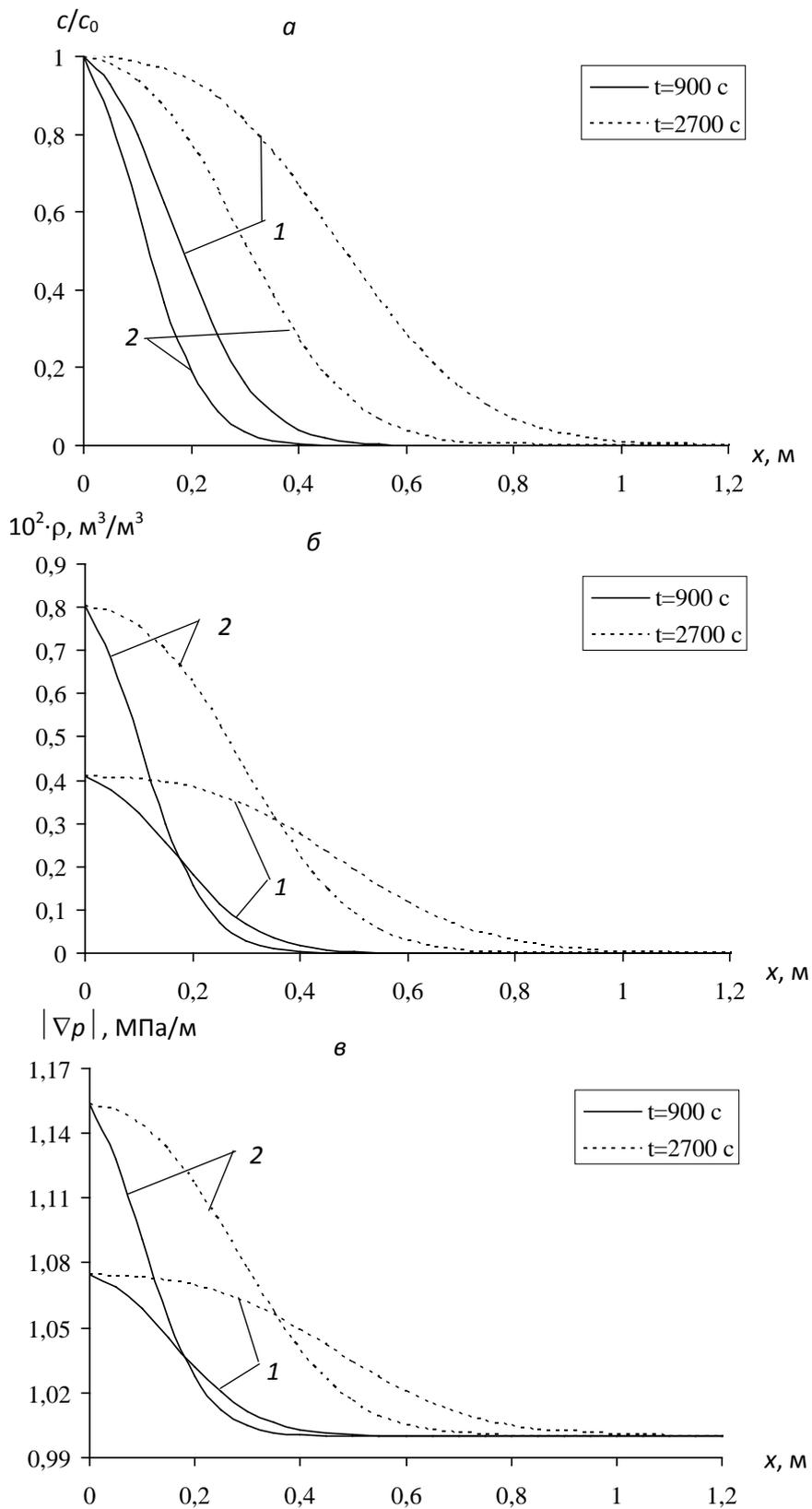


Рис. 3.1. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), 0,2 (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $\alpha = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

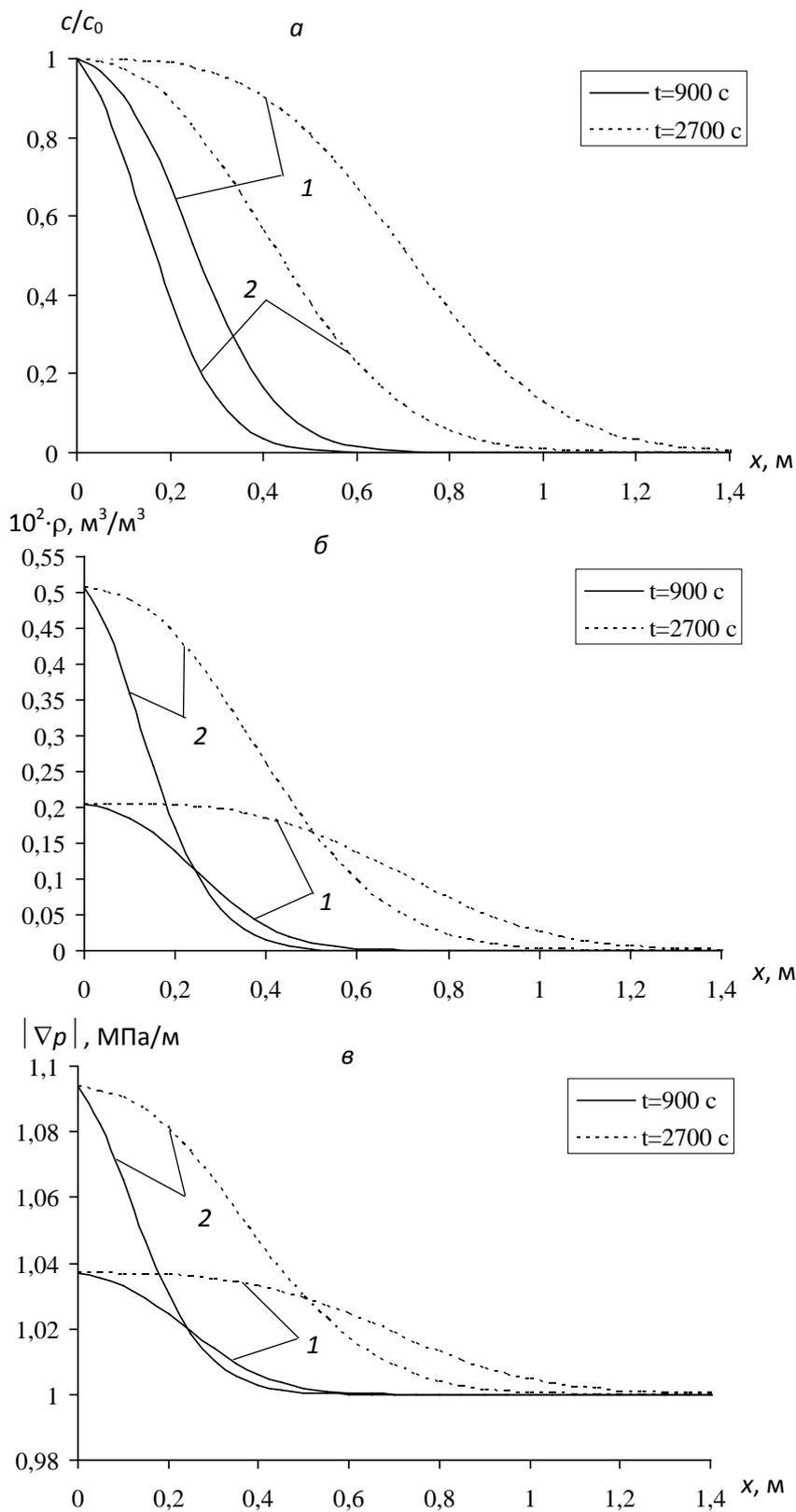


Рис. 3.2. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$; $\gamma = 1,0$ м/МПа; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$\Gamma = 2,5$ с, $\alpha = 1$ (1);

$\Gamma = 5$ с, $\alpha = 50$ (2).

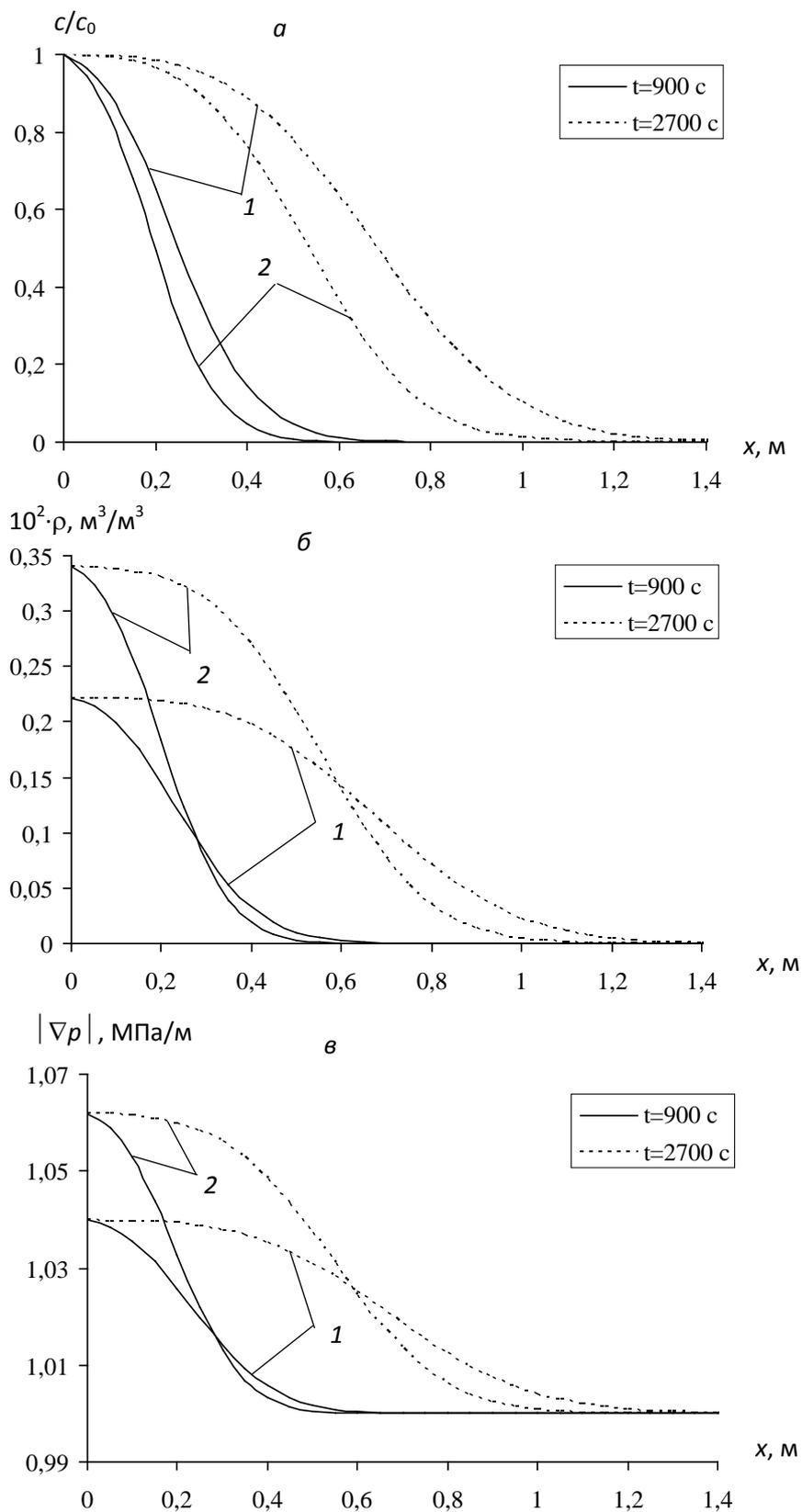


Рис. 3.3. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $\alpha = 1$; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$\gamma = 1,0$ м/МПа, $K = 1$ (1); $\gamma = 0,1$ м/МПа, $K = 50$ (2).

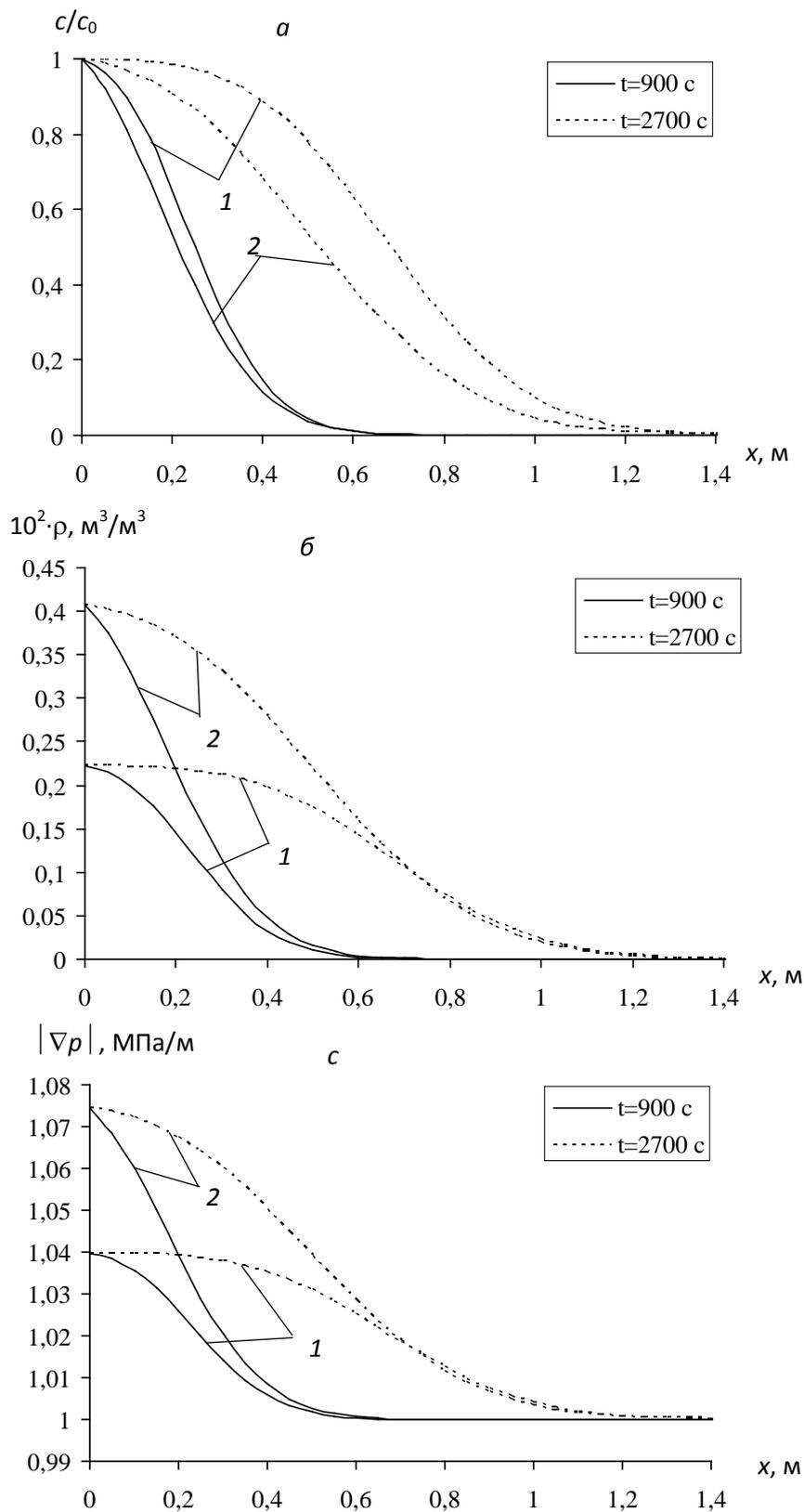


Рис. 3.4. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $\alpha = 1$; $K = 1$; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$\omega = 1,0$ м/МПа, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с (1); $\omega = 0,1$ м/МПа, $D = 7,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с (2).

Если при $\gamma = 0$, $\omega = 0$ в точке $x = 0$ было $\rho \approx 0,005$ (Рис.2.1, 1 случай), то при $\gamma = 0,1$, $\omega = 0,1$ имеем $\rho \approx 0,004$ (Рис.3.1, 1 случай). Таким образом, увеличение параметров γ (Рис.3.3, 1 случай), ω (Рис.3.4, 1 случай) приводит к относительному уменьшению значения ρ и относительному увеличению c .

II вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.21) и (1.16), т.е.

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma |\nabla p|} \left(a_1 + a_2 \rho - \frac{a_3 \rho^3}{a_4 - \rho} \right) - \frac{(1 + \omega |\nabla p|) \rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (3.7)$$

$$v_0 = K(m) |\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho.$$

В этом варианте уравнение кинетики системы (3.7) после аппроксимации приобретает (как в (3.4)) вид

$$\rho_i^{j+1} = \zeta_i^j \rho_i^j + \xi_i^j, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (3.8)$$

Здесь

$$\zeta_i^j = \frac{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j)}{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) (1 - \tau\beta_1 a_2 c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) \tau \beta_1 (a_1 (a_4 - \rho_i^j) - a_3 (\rho_i^j)^2) c_i^j}{(\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) (1 - \tau\beta_1 a_2 c_i^j) + \tau) (a_4 - \rho_i^j)},$$

где

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}}, \quad \Gamma_1 = \frac{\Gamma}{1 + \omega |\nabla p|_i^{j+1}}.$$

Вычисления проводятся, аналогично предыдущему варианту. Только для определения ρ_i^{j+1} вместо схемы (3.4) используется схема (3.8). Результаты нескольких численных расчетов представлены на рис.3.5 - 3.7. Сравнение рис.3.6 с рис.3.5 (1 случай) показывает, что увеличение значений параметров a_1 , a_2 приводит к увеличению концентрации ρ и уменьшению c . Сравнение графических результатов рис.3.7 (2 случай) с рис.3.5 (1 случай) дает, что увеличение параметров γ , ω в 10 раз приводит к резкому

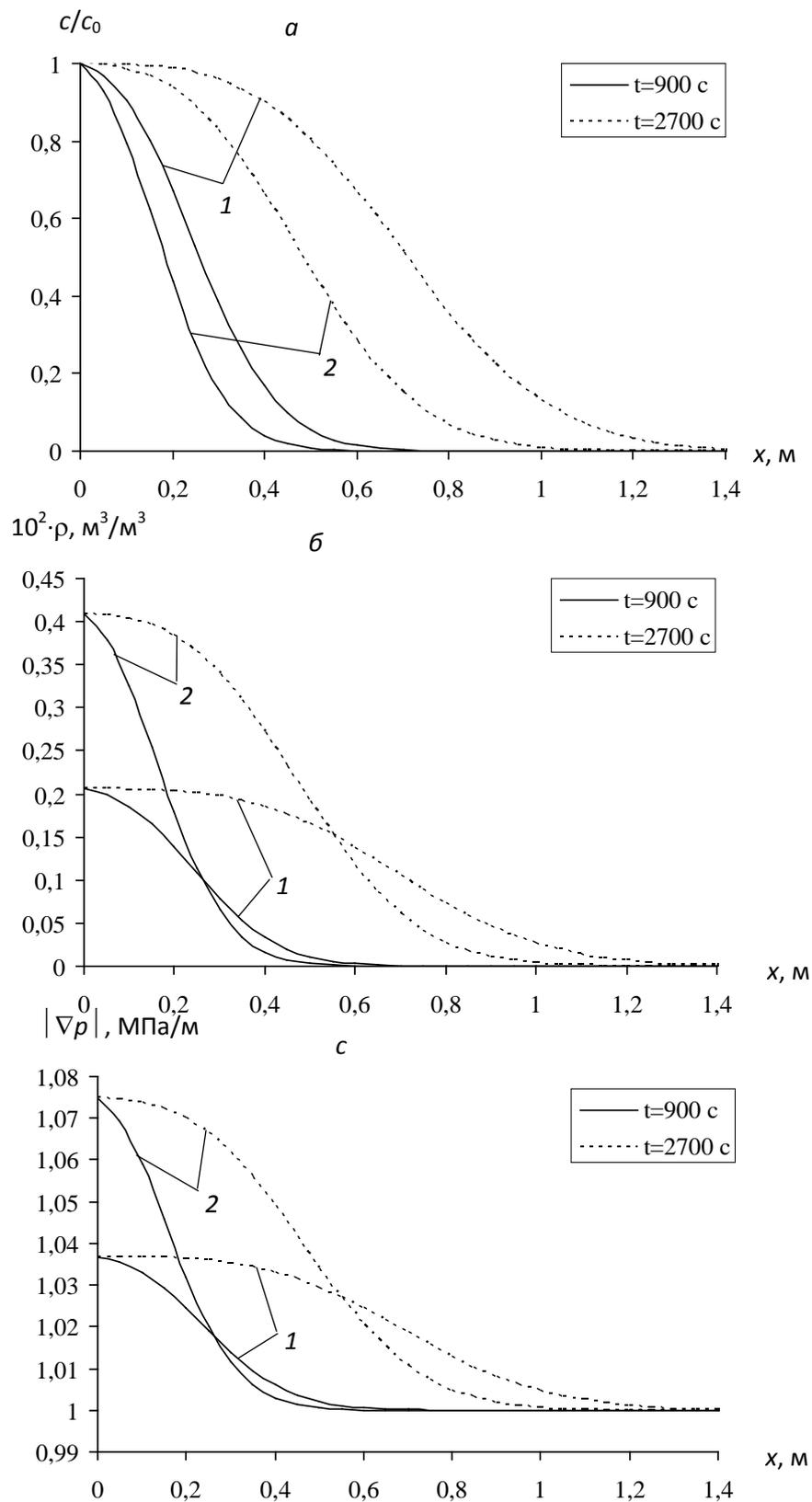


Рис. 3.5. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

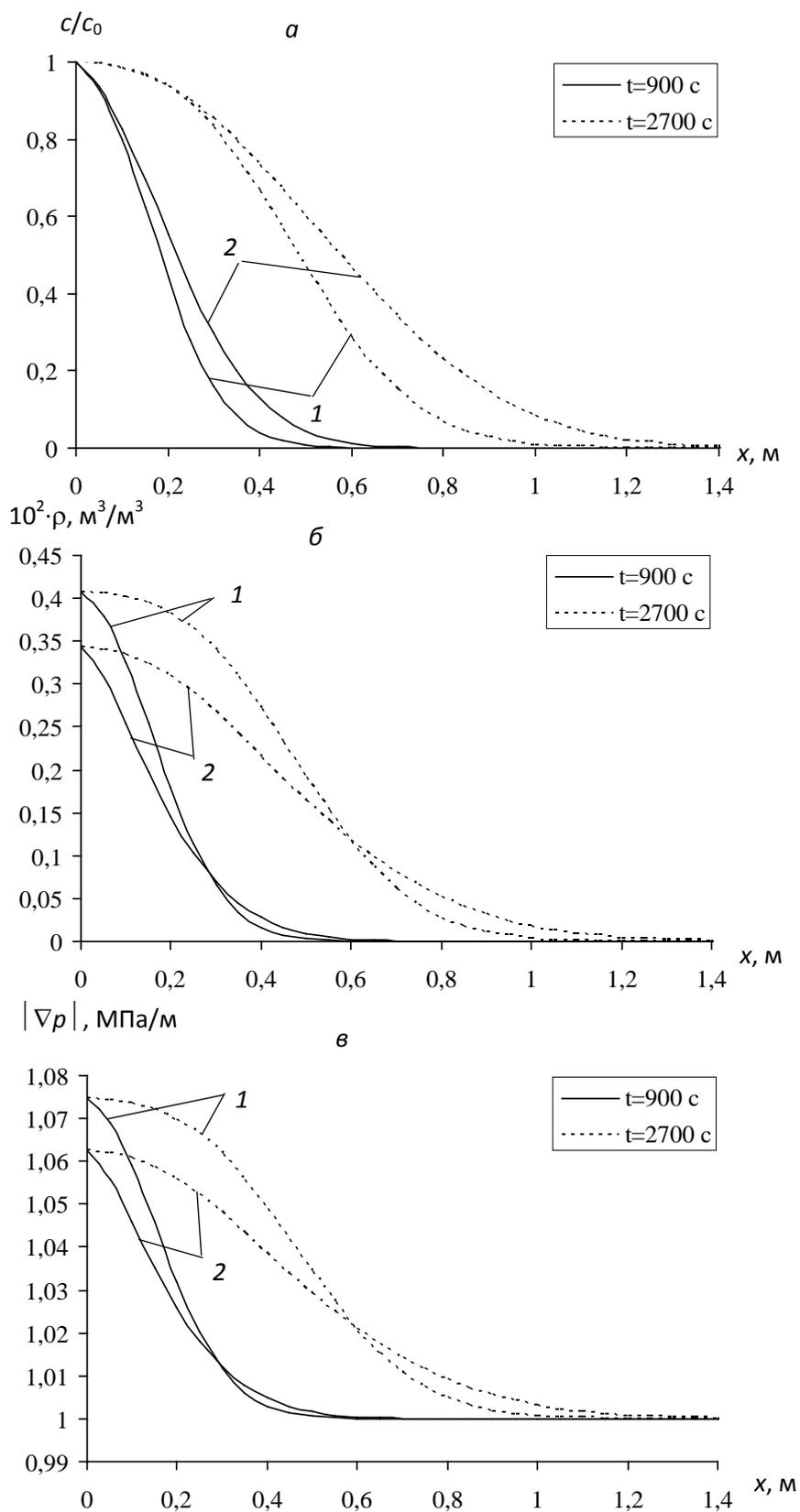


Рис. 3.6. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$; $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\beta = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $K = 1$; $\Gamma = 5 \text{ с}$; $a_3 = 1$; $a_4 = 1$;

$\gamma = 1,0 \text{ м/МПа}$; $\omega = 0,1 \text{ м/МПа}$;

$a_1 = 1, a_2 = 1$ (1);

$a_1 = 0,5, a_2 = 100$ (2).

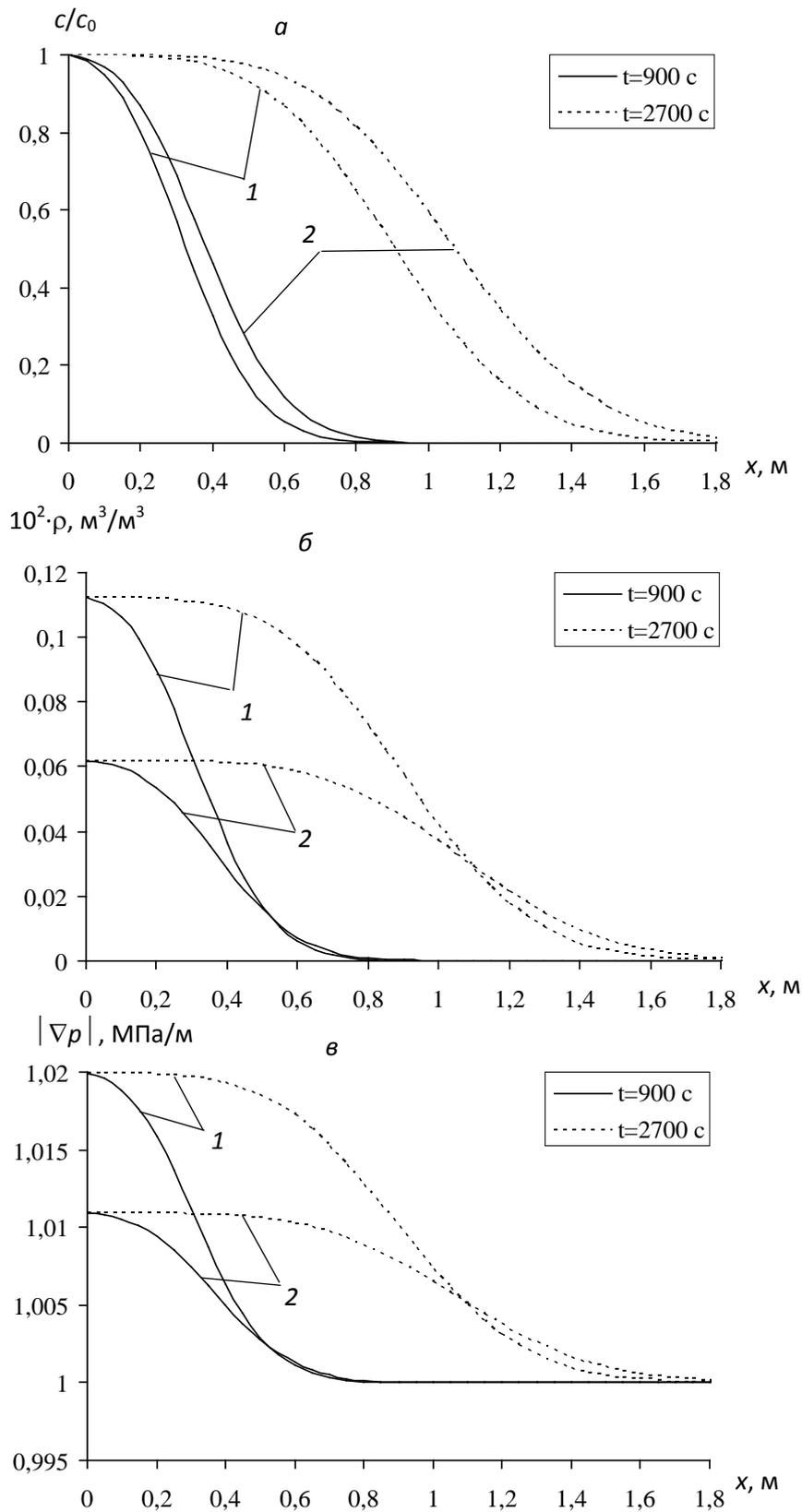


Рис. 3.7. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с; $K = 1$; $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$; $a_4 = 1$;

$$\gamma = 1,0 \text{ м/МПа}, \quad \omega = 0,1 \text{ м/МПа (1)};$$

$$\gamma = 1,0 \text{ м/МПа}, \quad \omega = 1,0 \text{ м/МПа (2)}.$$

относительному уменьшению значений ρ , $|\nabla p|$ и увеличению c в фиксированных точках пласта.

III вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.22) и (1.16), т.е.

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma |\nabla p|} (a_5 - a_6 \rho) c - \frac{(1 + \omega |\nabla p|) \rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (3.9)$$

$$v_0 = K(m) |\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho.$$

Второе уравнение этой системы аппроксимируется аналогично (3.8), а ζ_i^j и ξ_i^j выражаются следующими соотношениями

$$\zeta_i^j = \frac{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j)}{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) (1 + \tau \beta_1 a_6 c_i^j) + \tau}, \quad \xi_i^j = \frac{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) \tau \beta_1 a_5 c_i^j}{\Gamma_1 (1 - K\rho_i^j) (1 + \tau \beta_1 a_6 c_i^j) + \tau}, \quad (3.10)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}}, \quad \Gamma_1 = \frac{\Gamma}{1 + \omega |\nabla p|_i^{j+1}}.$$

Результаты этих расчетов представлены на рис.3.8 - 3.10. Сравнение рис.3.8 с рис.3.9 (1 случай) показывает, что увеличение значения параметра a_5 приводит к относительному увеличению концентрации ρ и уменьшению c , а увеличение a_6 (Рис.3.9, 2 случай) - к уменьшению ρ и увеличению c в соответствующих точках пласта. Увеличение параметров γ и ω (Рис.3.10), также приводит к возрастанию отрыва осевших частиц.

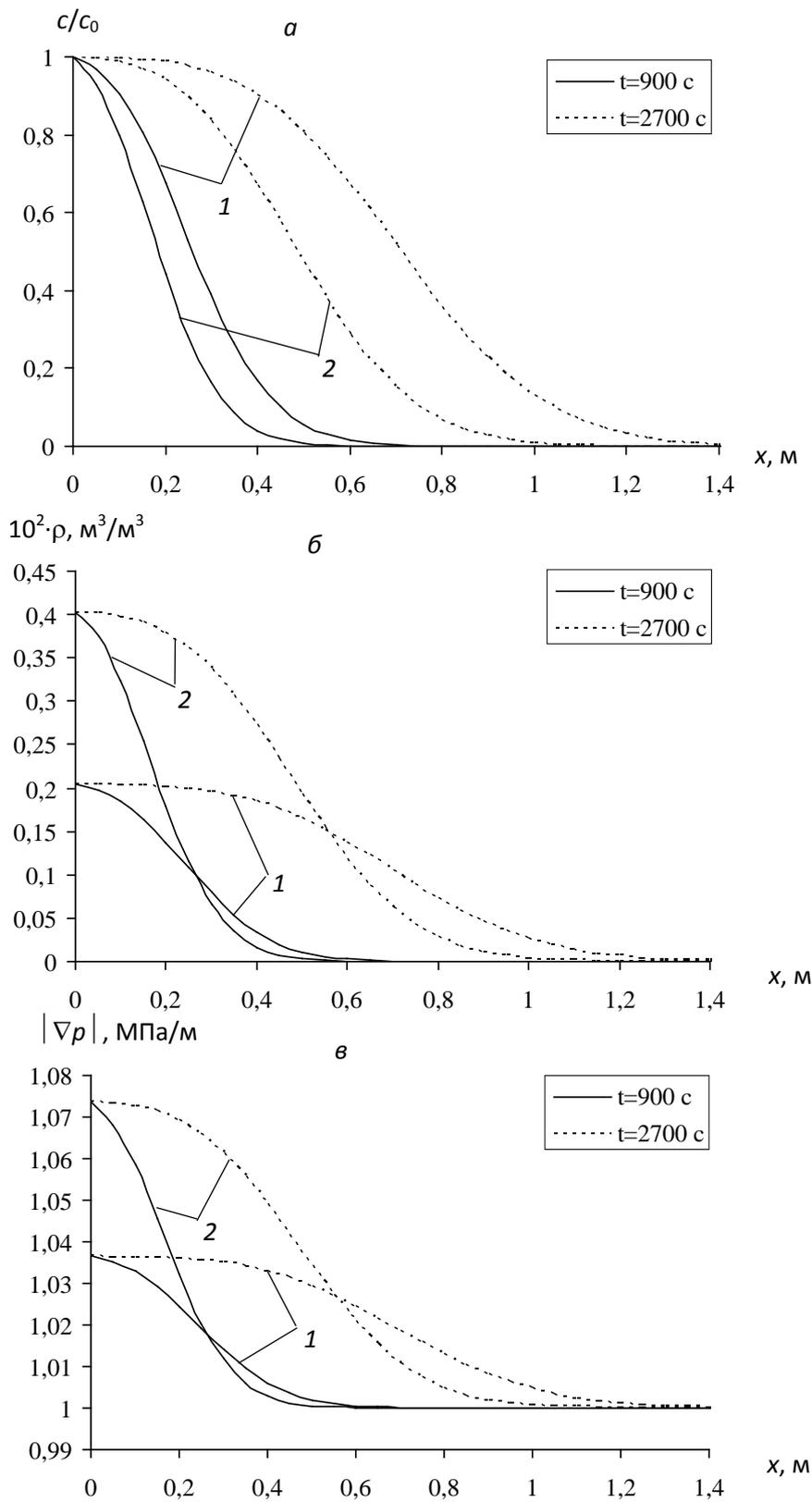


Рис. 3.8. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_5 = 0,5$, $a_6 = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

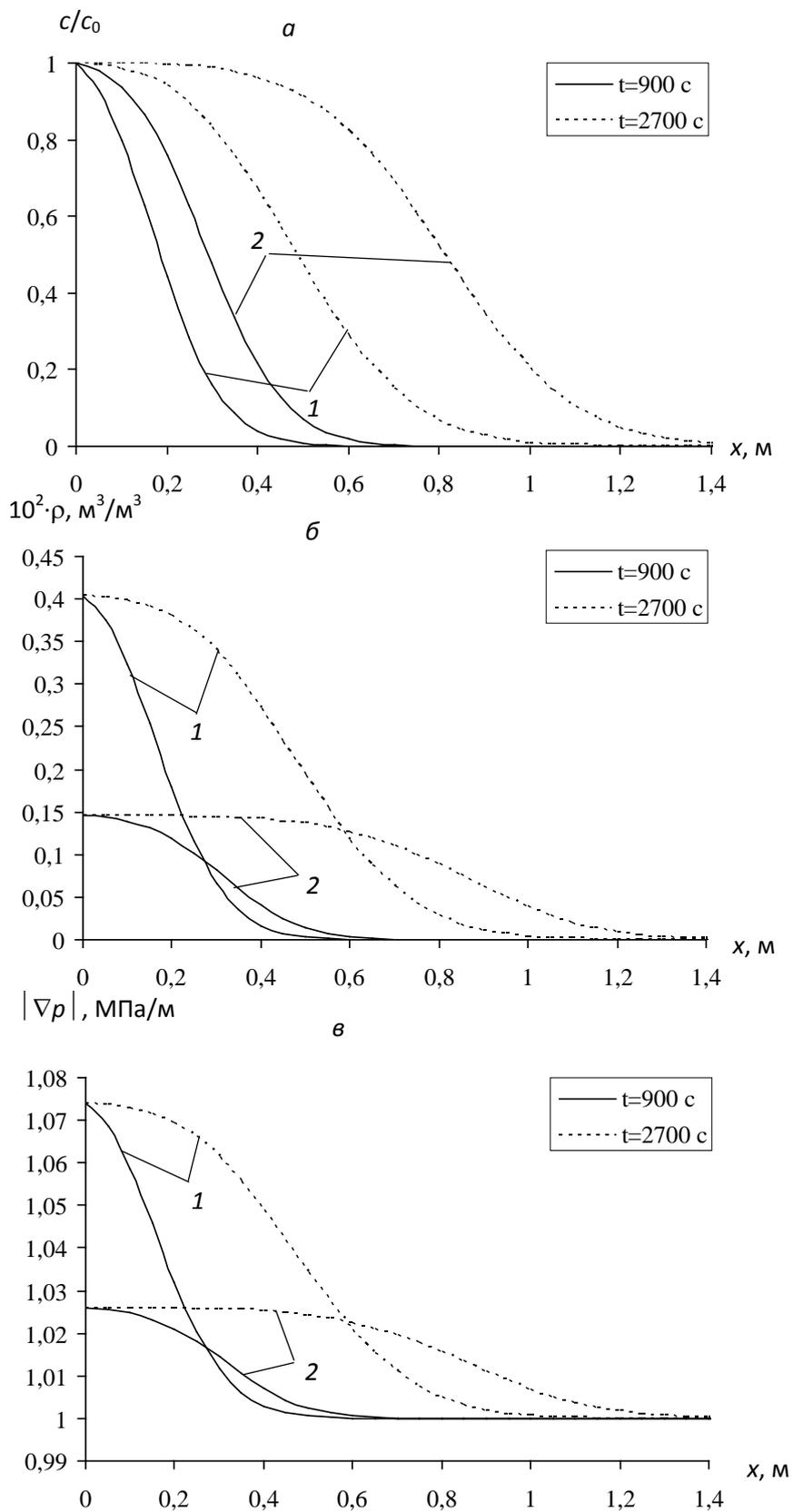


Рис. 3.9. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$; $\Gamma = 5$ с;

$\gamma = 1,0$ м/МПа; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$a_5 = 1, a_6 = 1$ (1);

$a_5 = 0,5, a_6 = 100$ (2).

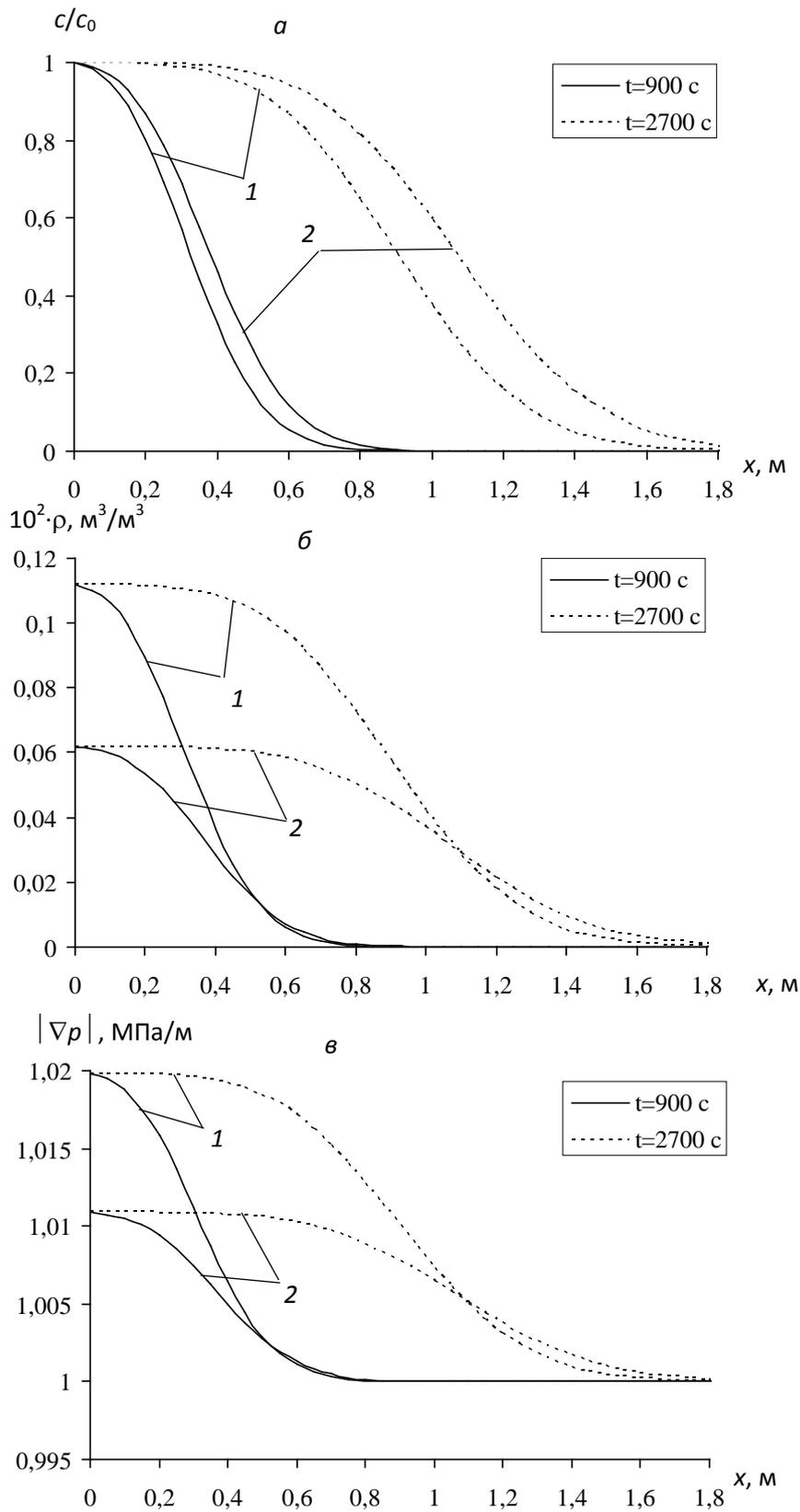


Рис. 3.10. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с; $K = 1$; $a_5 = 0,5$; $a_6 = 1$;

$\gamma = 1,0$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа (1);

$\gamma = 1,0$ м/МПа, $\omega = 1,0$ м/МПа (2).

3.2. Решение задачи фильтрации в конечном фильтре

Здесь рассматривается задача для конечной области с граничным режимом по давлению, как в 2.2. Аналогично рассмотрим следующие варианты, зависящие от вида кинетического уравнения.

I вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.20), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta(1 + \alpha\rho)c}{1 + \gamma|\nabla p|} - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (3.11)$$

$$v = K(m)|\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'_m(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Начальные и граничные условия записываются как (2.14):

$$\rho(0, x) = 0, \quad c(0, x) = 0, \quad c(t, 0) = c_0, \quad p(t, 0) = p_n, \quad p(t, l) = p_k. \quad (3.12)$$

Первое уравнение системы (3.11) аппроксимируется как (2.22), второе – (3.4), 3-ое – (2.21) и 4-ое уравнение как (2.17).

Последовательность расчета – как в параграфе 2.2. Сначала решая систему (2.19) определяются значения градиента давления, затем по схеме (3.4) вычисляется ρ_i^{j+1} , а также скорость фильтрации по (2.21). Подставляя найденные ρ_i^{j+1} и v_i^{j+1} в (2.22) находятся c_i^{j+1} .

II вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.21), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma|\nabla p|} \left(a_1 + a_2 \rho - \frac{a_3 \rho^3}{a_4 - \rho} \right) - \frac{(1 + \omega|\nabla p|)\rho}{\Gamma(1 - K\rho)}, \quad (3.13)$$

$$v = K(m)|\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Система решается методом конечных разностей при условиях (3.12).

Последовательность расчета – как в первом варианте, только при определении ρ_i^{j+1} используется схема (3.8).

III вариант. Система уравнений состоит из (1.15), (1.22), (1.16), (1.18)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\beta c}{1 + \gamma |\nabla p|} (a_5 - a_6 p) c - \frac{(1 + \omega |\nabla p|) p}{\Gamma(1 - K p)}, \quad (3.14)$$

$$v = K(m) |\nabla p|, \quad K(m) = k_0 \frac{m^3}{(1 - m)^2}, \quad m = m_0 - \rho,$$

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + K'(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad K'_m(m) = \frac{\partial K}{\partial m}.$$

Здесь при определении ρ_i^{j+1} используется схема (3.10).

Результаты численных расчетов представлены на рис.3.11 - 3.14 для *I варианта*, на рис.3.15 - 3.17 для *II варианта*, на рис.3.18 - 3.20 для *III варианта*.

В отличие от результатов, которые приведены в параграфе 2.2, здесь исследуется роль параметров γ и ω . Результаты показывают, что увеличение параметров γ и ω приводит к относительному уменьшению ρ и увеличению c .

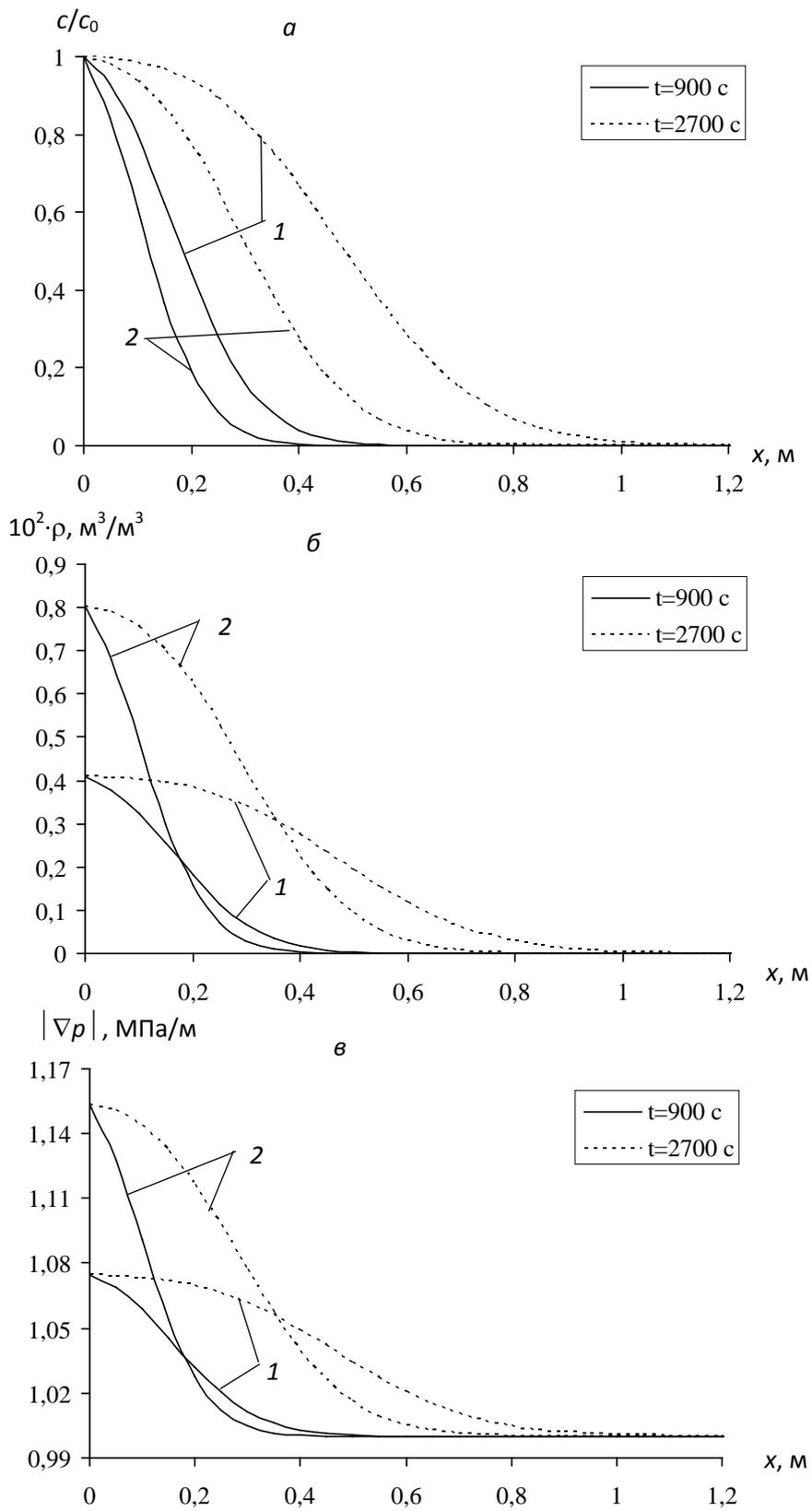


Рис. 3.11. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), 0,2 (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $\alpha = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

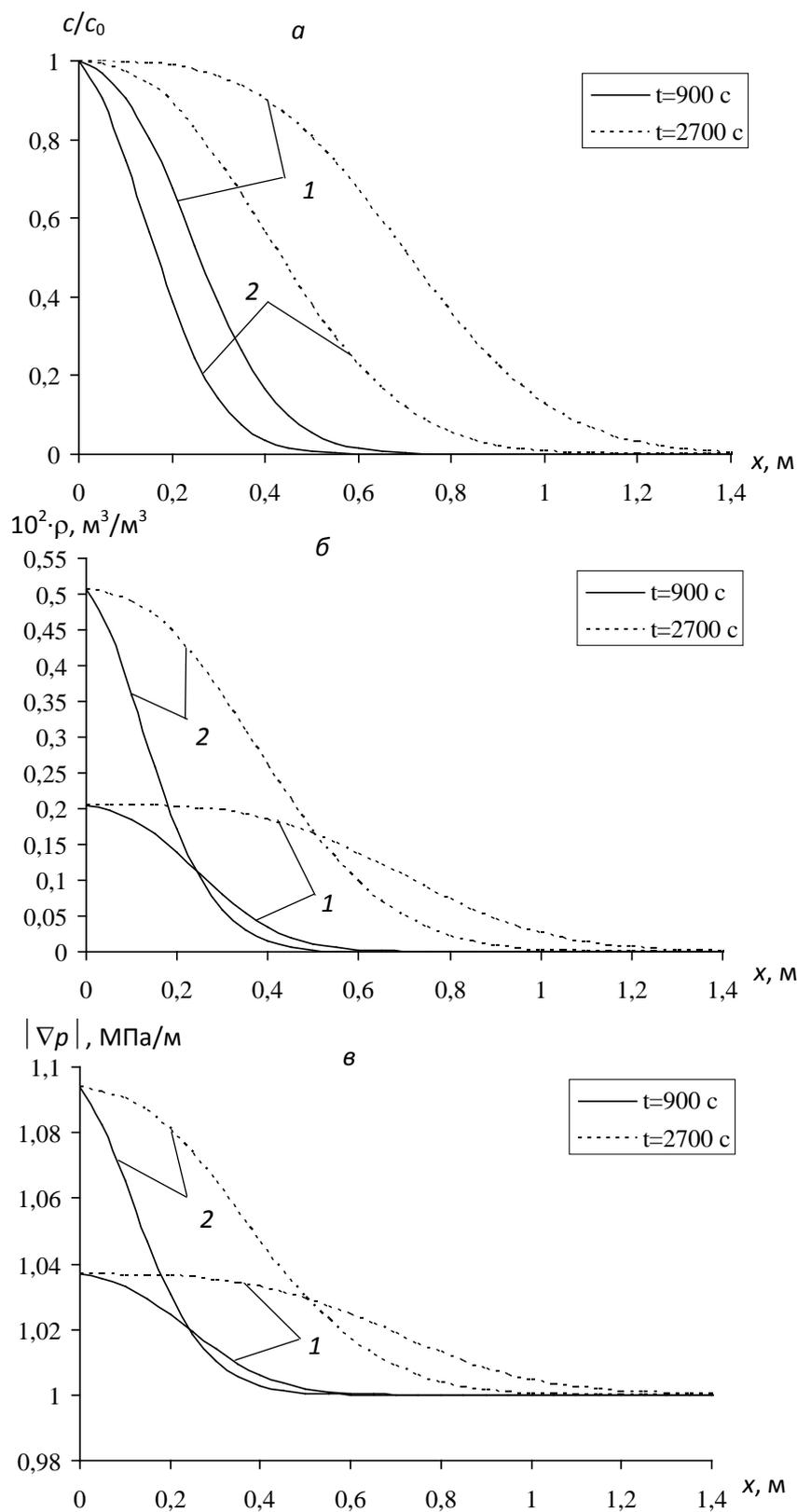


Рис. 3.12. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$; $\gamma = 1,0$ м/МПа; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$$\Gamma = 2,5 \text{ с}, \quad \alpha = 1 \text{ (1)};$$

$$\Gamma = 5 \text{ с}, \quad \alpha = 50 \text{ (2)}.$$

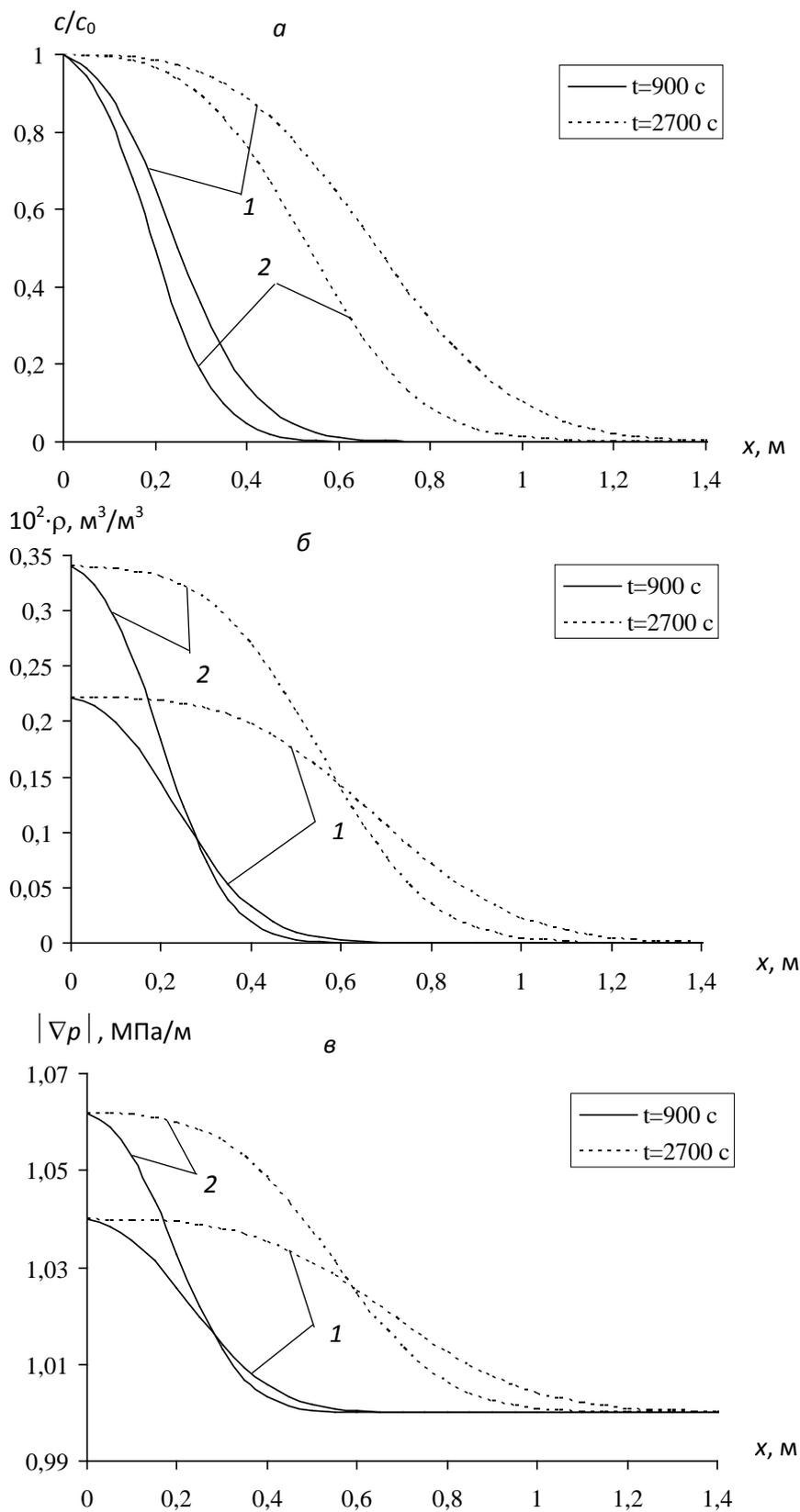


Рис. 3.13. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $\alpha = 1$; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$\gamma = 1,0$ м/МПа, $K = 1$ (1); $\gamma = 0,1$ м/МПа, $K = 50$ (2).

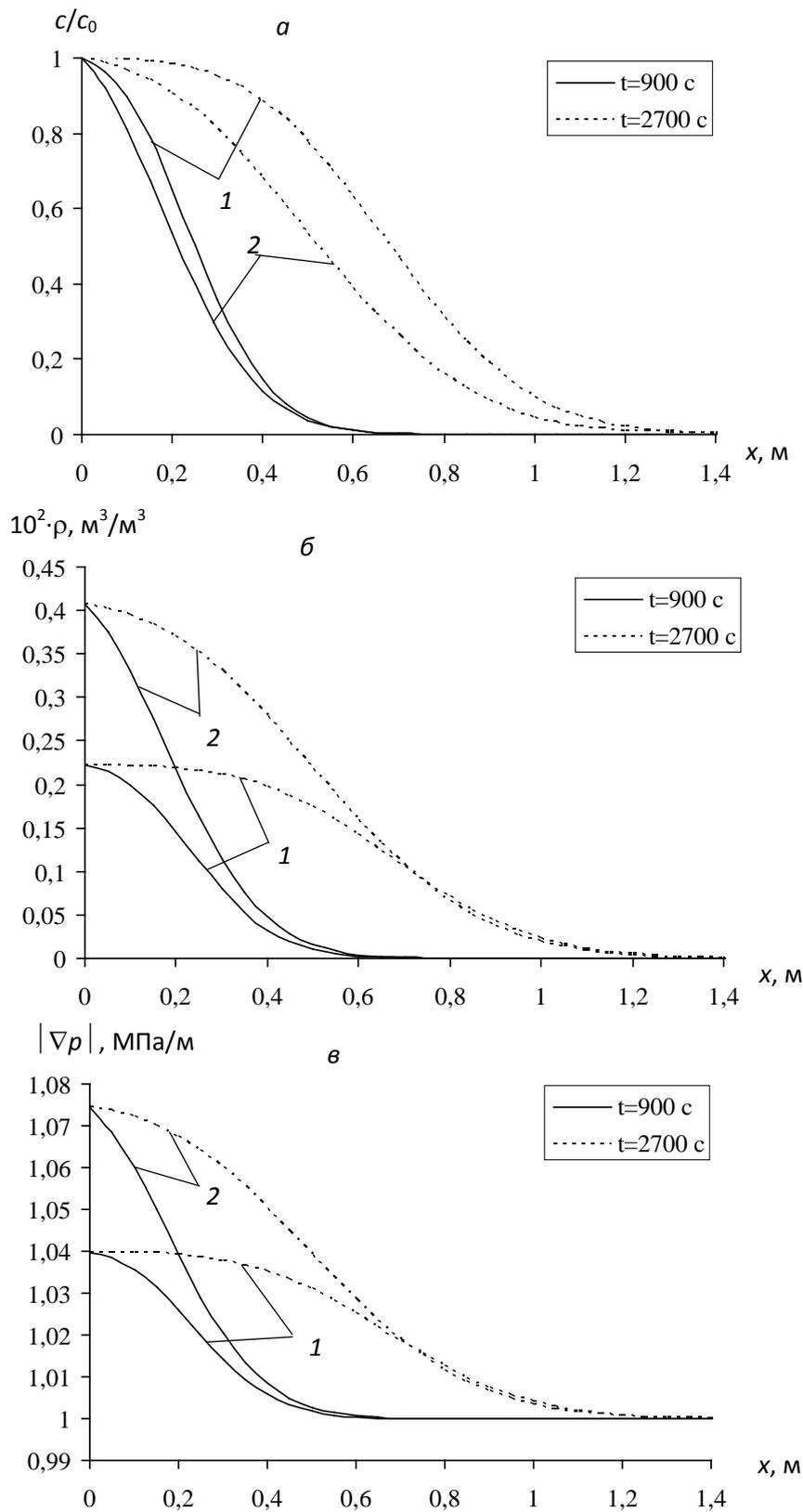


Рис. 3.14. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$; $\beta = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\Gamma = 5 \text{ с}$; $\alpha = 1$; $K = 1$; $\omega = 0,1 \text{ м/МПа}$;

$\omega = 1,0 \text{ м/МПа}$, $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (1); $\omega = 0,1 \text{ м/МПа}$, $D = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (2).

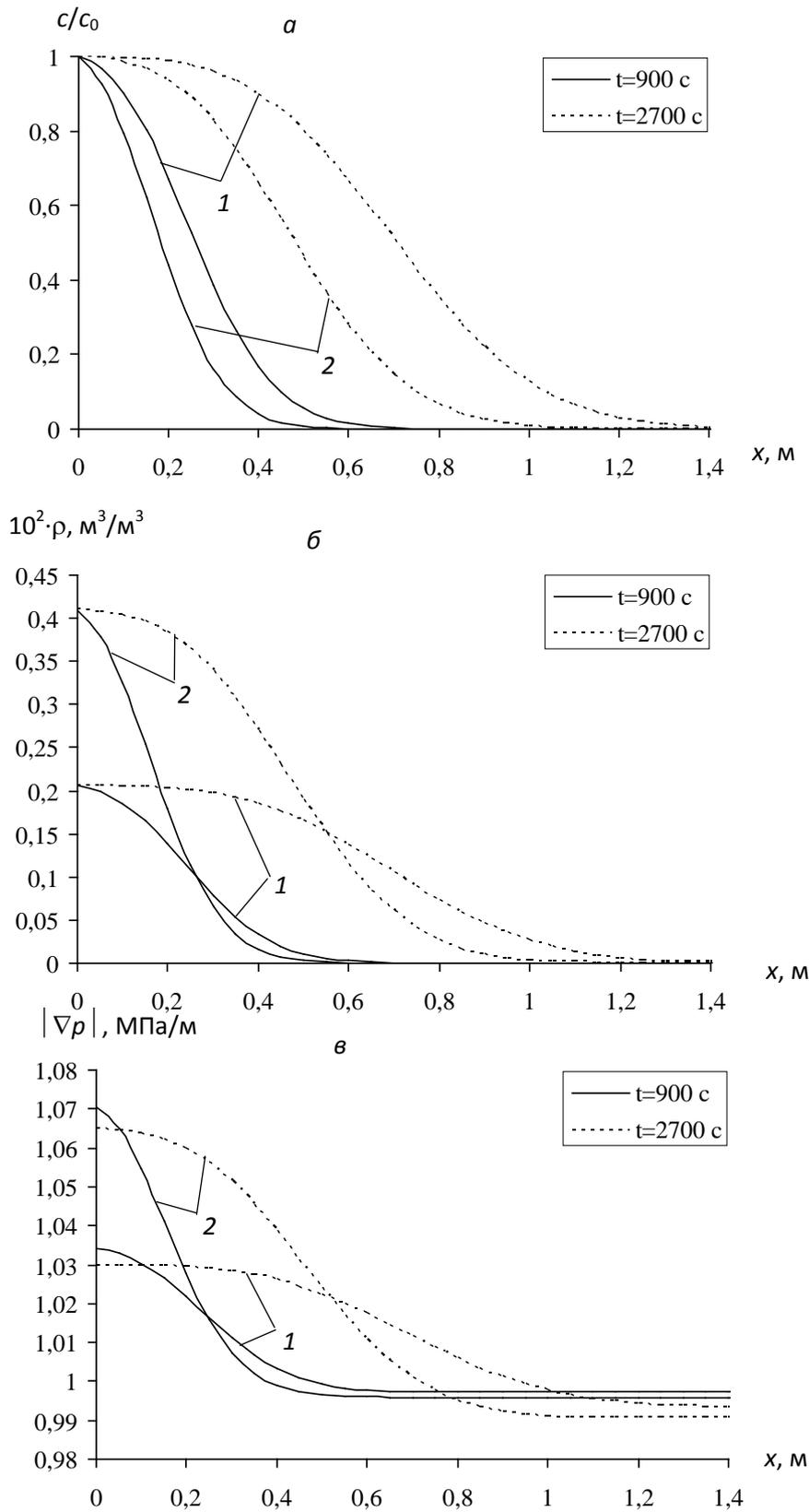


Рис. 3.15. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

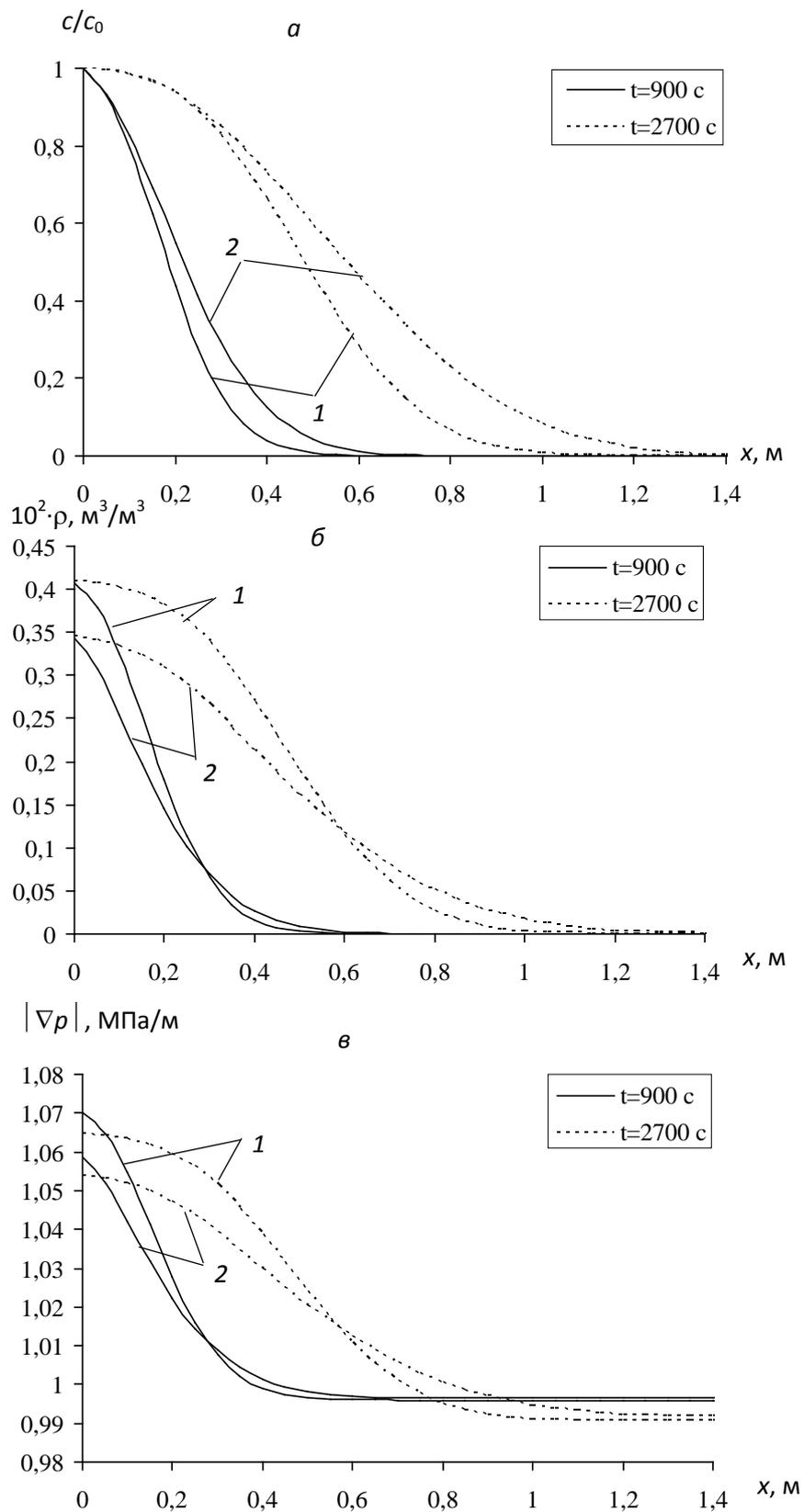


Рис. 3.16. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$; $\Gamma = 5$ с; $a_3 = 1$; $a_4 = 1$;

$\gamma = 1,0$ м/МПа; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$a_1 = 1, a_2 = 1$ (1);

$a_1 = 0,5, a_2 = 100$ (2).

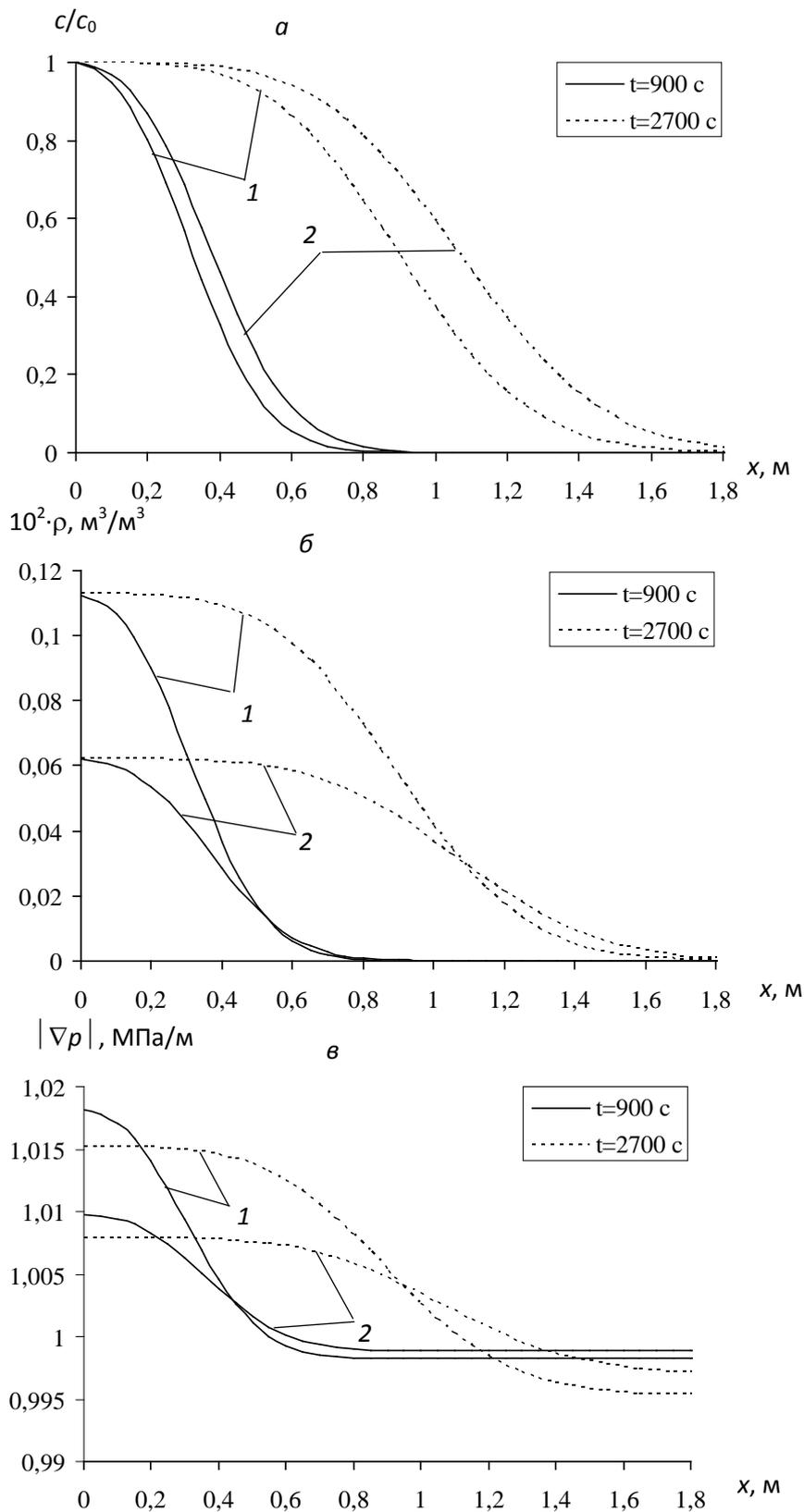


Рис. 3.17. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4} \text{ м}/\text{с}$; $\beta = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\Gamma = 5 \text{ с}$; $D = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $K = 1$; $a_3 = 1$; $a_4 = 1$;

$\gamma = 1,0 \text{ м}/\text{МПа}$, $\omega = 0,1 \text{ м}/\text{МПа}$ (1);

$\gamma = 1,0 \text{ м}/\text{МПа}$, $\omega = 1,0 \text{ м}/\text{МПа}$ (2).

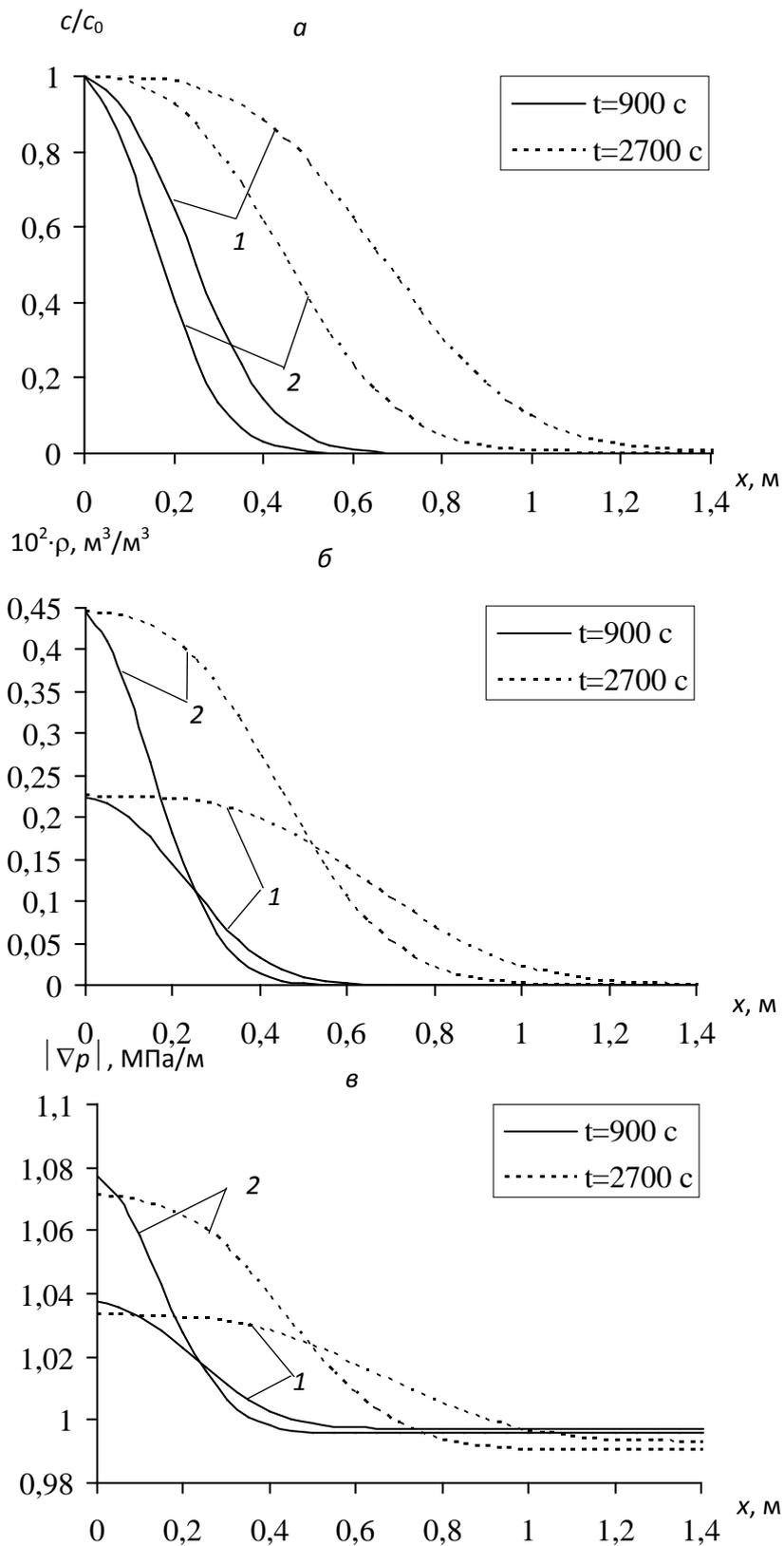


Рис. 3.18. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\beta = 0,1$ (1), $0,2$ (2) с⁻¹, $\Gamma = 5$ с, $a_5 = 0,5$, $a_6 = 1$, $K = 1$, $\gamma = 0,1$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа.

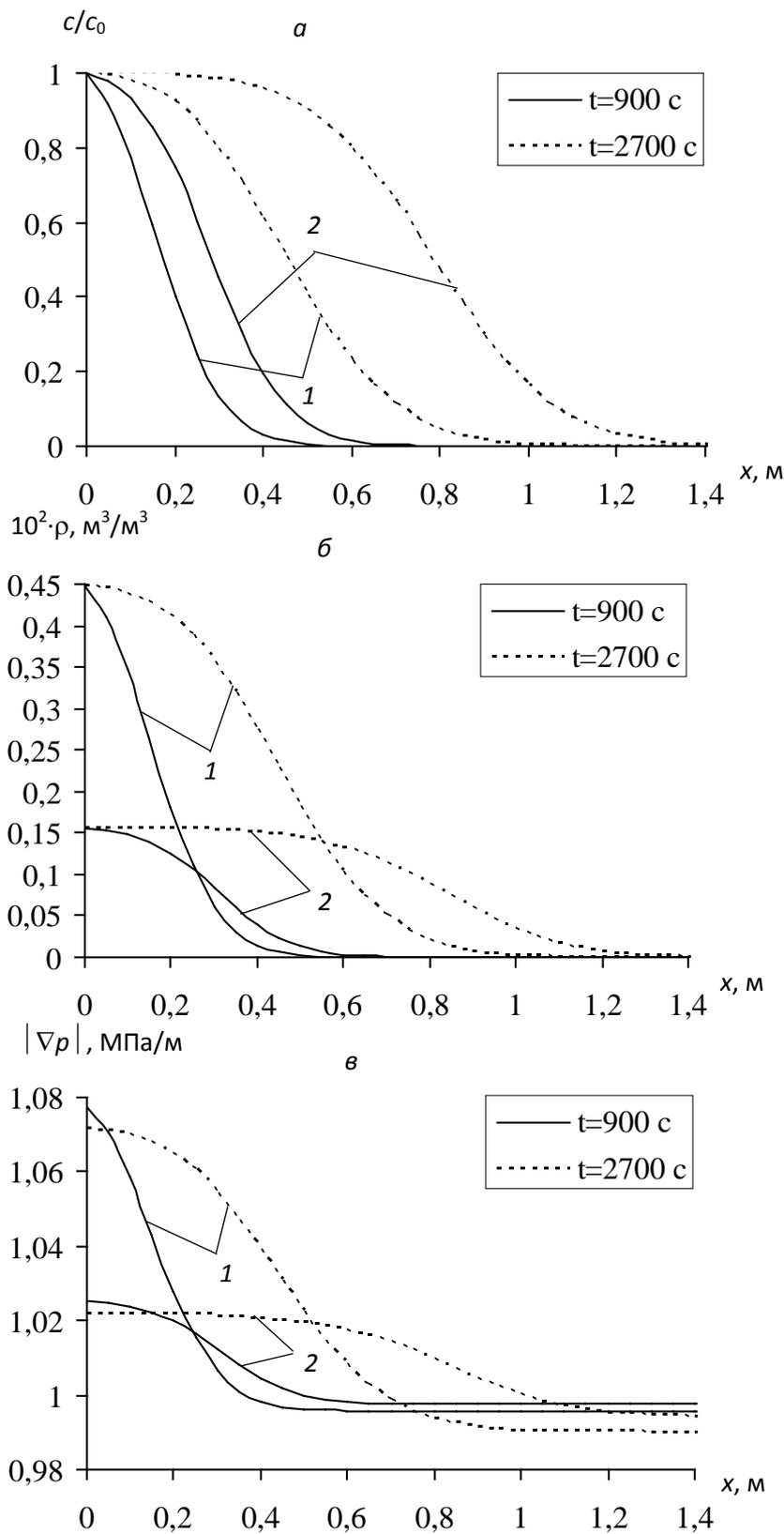


Рис. 3.19. Профили c/c_0 (а), ρ (б) и $|\nabla p|$ (в) в различные моменты времени при

$v_m = 10^{-4}$ м/с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\beta = 0,1$ с⁻¹; $K = 1$; $\Gamma = 5$ с;

$\gamma = 1,0$ м/МПа; $\omega = 0,1$ м/МПа;

$a_5 = 1, a_6 = 1$ (1);

$a_5 = 0,5, a_6 = 100$ (2).

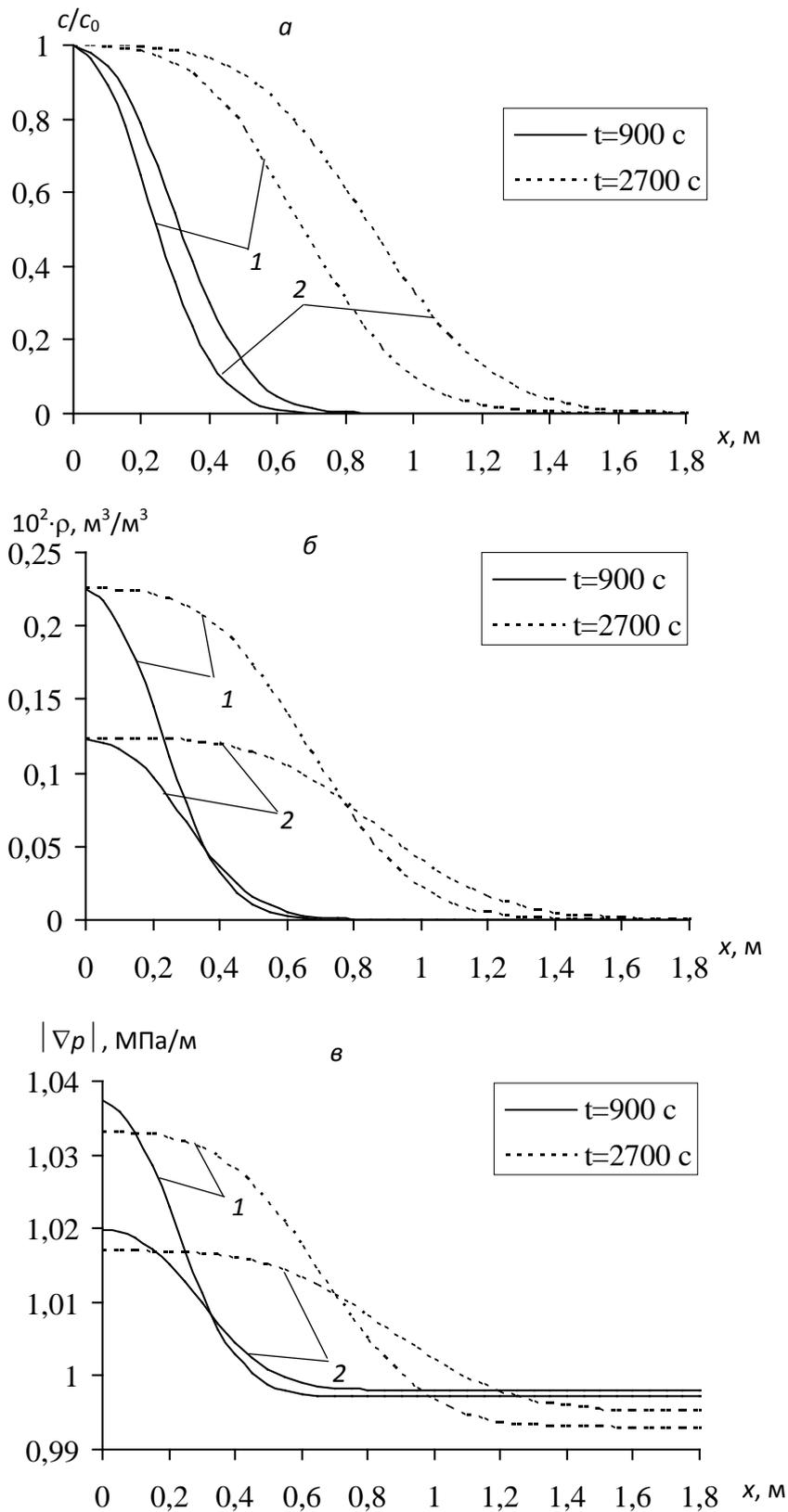


Рис. 3.20. Профили c/c_0 (*a*), ρ (*б*) и $|\nabla p|$ (*в*) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 0,1$ с $^{-1}$; $\Gamma = 5$ с; $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с; $K = 1$; $a_5 = 0,5$; $a_6 = 1$;
 $\gamma = 1,0$ м/МПа, $\omega = 0,1$ м/МПа (1); $\gamma = 1,0$ м/МПа, $\omega = 1,0$ м/МПа (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

1. Поставлены начально-краевых задач фильтрации суспензии с нового кинетического уравнения, учитывающие динамических факторов для различных режимов течения.

2. Численно решены задачи фильтрации суспензии в пористой среде с использованием обобщенного кинетического уравнения. Установлены закономерности влияния различных параметров уравнения переноса и кинетического уравнения на распределение концентрации взвешенных и осевших твердых частиц, градиента давления.

3. Решены задачи переноса вещества в пористой среде с использованием кинетического уравнения, учитывающего динамические факторы, в полубесконечной и конечной пористой среде с заданными режимами по скорости фильтрации и давлений на концах фильтра. Установлено, что в рамках принятых феноменологических допущений учет динамических факторов приводит к усилению суффозионных и ослаблению кольматационных эффектов. Это, в свою очередь, изменяет характер распределения концентрации взвешенных и осевших твердых частиц – концентрационные профили твердых взвешенных и осевших частиц продвигаются более интенсивно в направлении переноса, значения концентрации осевших твердых частиц относительно уменьшаются.

Литература

1. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. – М.: Наука, 1983. – 237 с.
2. Радушкевич Л.В. Природа вторичных процессов при фильтрации аэрозолей. Сообщ. 1. Простейшая теория соосаждения частиц в фильтре и кинетика коагуляции // Изд. АН СССР. Сер.хим., 1963, № 3. С. 407-414.
3. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоцентрированных суспензий. - М.: Изд-во АН СССР. 1961. - 212 с.(13)
4. Минц Д.М. Кинетика фильтрации малоцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах // ДАН СССР, 1951. Т. 78, № 2. С. 315-318.
5. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н., Сенявин М.М. О возможности распространения теории динамики сорбции на расчет осветления воды зернистыми фильтрами // ДАН СССР, 1970. Т. 195, № 3. С. 658-661.
6. Ives K.J. Simulation of filtration on an electronic digital computer // J. Amer. Water Works Assoc., 1960. V. 52, N. 7. Pp. 933-939.
7. Mints D.M. Modern theory of filtration. – In: Inter. water supply Congr. Barselona, 1966. Sp. sub.N 10. 32 p.
8. Хужаёров Б. Х. Модель фильтрации суспензии с учетом коагуляции и суффозии // ИФЖ. 1992. Т. 63, № 1. С. 72-79.
9. Зубаров А.Ю., Хужаёров Б.Х., К теории релаксационной фильтрации // ИФЖ. 1988. Т. 55. № 3. С. 442-447.
10. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О моделях переноса твердых частиц в пористой среде // «Актуальные проблемы механики контактного взаимодействия». Сб. тр. респ. науч. конф. Самарканд, 1997. С. 167-169.
11. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О модификации модели коагуляционно-суффозионной фильтрации // ДАН РУз, 1997. № 5. С. 25-28.
12. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Математическое моделирование процессов фильтрации суспензии в пористой среде с учетом образования осадков // Труды

научной конференции “Проблемы современной математики”, 22-23.04.2011. г.Карши. С.543-547.

13. Махмудов Ж.М., Пардаев А.И., Шаимов К.М. Численное решение задачи фильтрации суспензии в пористой среде // Труды научной конференции “Проблемы современной математики”, 22-23.04.2011. г.Карши. С.431-434.

14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. - 656 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
program Concentration;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
Const
  al=1.0{50.0};  Gam=5.0{2.5};  K=1.0{50.0};
  betta=0.1{0.2};
      N=80;      m0=0.2;
      D=2.5e-6{7.5e-6};  v=1e-4{2e-4};  c00=0.01;
  tmax=2700;
      h=0.05;
  tau=1;
  Type massiv=array [0..N] of real;
  Var  ro,ro0,c,c0:massiv;
  alpha,bet:array[0..N] of real;
  i,j:integer;
  out:text;
  Procedure Nach_Dan;{Boshlang'ichvachegaraviyshartlar}
  begin
  for i:=0 to N do
  begin
  ro0[i]:=0;
  c0[i]:=0;
  end;
  c0[0]:=c00;
  end;
  Procedure Progonka; {x yo`nalishb`yicha D1 soxada}
  varA,B,E,F:real;
  Begin
```

```

A:=tau*D/(h*h)+tau*v/h;
B:=2*tau*D/(h*h)+tau*v/h+m0;
E:=tau*D/(h*h);
alpha[1]:=0;
bet[1]:=c00;
for i:=1 to N-1 do
begin
    F:=m0*c0[i]-(ro[i]-ro0[i]);
bet[i+1]:=(F+A*bet[i])/(B-A*alpha[i]);
alpha[i+1]:=E/(B-A*alpha[i]);
end;
c[N]:=(F+A*bet[N])/(B-A*alpha[N]);
for i:=N-1 downto 0 do
c[i]:=alpha[i+1]*c[i+1]+bet[i+1];
    END;
    Procedure Otvet1(k:integer);
        Begin
writeln(out);
write (out,' ':10,' c t= ',k*tau:4);
writeln(out);
        For i:=0 to N do
writeln (out,i*h:4:2,' ',c[i]/c00:4:12,' ',1e2*ro[i]:4:12);
        End;
    Procedure Asosiy;
Varkk:real;
    BEGIN
Nach_dan;
j:=0;
for i:=0 to N do
begin

```

```

ro[i]:=ro0[i];
c[i]:=c0[i];
end;
for j:=1 to tmax do
    Begin
for i:=0 to N do
begin
kk:=Gam*(1-k*ro0[i])-beta*al*c0[i]*tau*Gam*(1-k*ro0[i])+tau;
ro[i]:=Gam*(1-k*ro0[i])/kk*ro0[i]+tau*beta*c0[i]*Gam*(1-k*ro0[i])/kk;
end;
Progonka;
for i:=0 to N do
begin
c0[i]:=c[i];
ro0[i]:=ro[i];
end;
if j mod 900=0 then
Otv1(j);
end;
    END;
begin
assign(out,'ORG.out');
Rewrite(out);
writeln (out,'  Γ=',Gam:4:2,'  K=',k:4:2,'  Betta=',Betta:4:2,'  Alfa=',al:4:2);
writeln (out,'  D=',D:4:6,'  V=',V:4:6);
Asosiy;
Close(Out);
end.
program Concentration;

```

```

{$APPTYPE CONSOLE}

uses
  SysUtils;

Const
  al=1.0 {50.0};  Gam=5.0{2.5}; K=1.0{50.0};
  betta=0.1{0.2};
  gamma=0.1{1.0}; omega=0.1{1.0};
      N=80;    m0=0.2;
      D=2.5e-6{7.5e-6}; v=1e-4{2e-4}; c00=0.01;
tmax=2700;
      h=0.05;
tau=1;
      k0=8e-3;

  Type massiv=array [0..N] of real;
Var  N_p,ro,ro0,c,c0:massiv;
alpha,bet:array[0..N] of real;
i,j:integer;
out:text;
Np:real;

  Procedure Nach_Dan;{Boshlang'ichvachegaraviyshartlar}
begin
  for i:=0 to N do
  begin
    ro0[i]:=0;
    c0[i]:=0;
  end;
  c0[0]:=c00;
end;

  Procedure Progonka; {x yo`nalishb`yicha D1 soxada}
varA,B,E,F:real;

```

```

Begin
  A:=tau*D/(h*h)+tau*v/h;
  B:=2*tau*D/(h*h)+tau*v/h+m0;
  E:=tau*D/(h*h);
alpha[1]:=0;
bet[1]:=c00;
for i:=1 to N-1 do
begin
  F:=m0*c0[i]-(ro[i]-ro0[i]);
bet[i+1]:=(F+A*bet[i])/(B-A*alpha[i]);
alpha[i+1]:=E/(B-A*alpha[i]);
end;
c[N]:=(F+A*bet[N])/(B-A*alpha[N]);
for i:=N-1 downto 0 do
c[i]:=alpha[i+1]*c[i+1]+bet[i+1];
  END;
  Procedure Otvet1(k:integer);
    Begin
writeln(out);
write (out,' ':10,' c t= ',k*tau:4);
writeln(out);
      For i:=0 to N do
writeln (out,i*h:4:2,' ',c[i]/c00:4:12,' ',1e2*ro[i]:4:12,' ',N_p[i]:4:12);
      End;
  Procedure Asosiy;
  Varkk:real;
    BEGIN
  Nach_dan;
  j:=0;
  for i:=0 to N do

```

```

begin
ro[i]:=ro0[i];
c[i]:=c0[i];
end;
for j:=1 to tmax do
    Begin
for i:=0 to N do
begin
Np:=v*sqr(1-m0+ro0[i])/(k0*sqr(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i]));
kk:=(1-k*ro0[i])*(1+gamma*Np)-tau*beta*al*c0[i]*(1-
k*ro0[i])+(1+omega*Np)/Gam*tau*(1+gamma*Np);
ro[i]:=(1+gamma*Np)*(1-K*ro0[i])/kk*ro0[i]+tau*beta*c0[i]*(1-k*ro0[i])/kk;
end;
Progonka;
for i:=0 to N do
begin
c0[i]:=c[i];
ro0[i]:=ro[i];
end;
if j mod 900=0 then
begin
for i:=0 to N do
N_p[i]:=v*sqr(1-m0+ro0[i])/(k0*sqr(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i]));
Otv1(j);
end;
end;
    END;
begin
assign(out,'ORG.out');
Rewrite(out);

```

```

Asosiy;
Close(Out);
end.

program Concentration;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
SysUtils;
Const
    K=1.0{50.0};
    betta=0.1{0.2};
    a5=0.5{1.0}; a6=1.0{100.0};
    Gam=5.0{2.5};
    N=80;
    m0=0.2;
    D=2.5e-6; v=1e-4;
    c00=0.01;
    tmax=2700;
    h=0.05;
    tau=1;
    k0=8e-3;
    gamma=0.1{1.0}; omega=0.1{1.0};
    pn=4; pk=0;
    Type massiv=array [0..N] of real;
    Var W,N_p,p,ro,ro0,c,c0:massiv;
    alpha,bet:array[0..N] of real;
    i,j:integer;
    out,tez:text;
    Procedure Nach_Dan;{Boshlang'ichvachegaraviyshartlar}
begin

```

```

for i:=0 to N do
begin
ro0[i]:=0;
c0[i]:=0;
end;
c0[0]:=c00;
end;
  Procedure Progonka1; {x yo`nalishb`yicha D1 soxada}
var A,B,E,F,q:real;
Begin
alpha[1]:=0;
bet[1]:=pn;
for i:=1 to N-1 do
begin
q:=(3-m0+ro0[i])/((m0-ro0[i])*(1-m0+ro0[i]))*(ro0[i]-ro0[i-1])/h;
  A:=1+h/2*q;
  B:=2;
  E:=1-h/2*q;
  F:=0;
bet[i+1]:=(F+A*bet[i])/(B-A*alpha[i]);
alpha[i+1]:=E/(B-A*alpha[i]);
end;
p[N]:=pk;
for i:=N-1 downto 0 do
p[i]:=alpha[i+1]*p[i+1]+bet[i+1];
  END;
Procedure Progonka2; {x yo`nalishb`yicha D1 soxada}
var A,B,E,F,v:real;
Begin
alpha[1]:=0;

```

```

bet[1]:=c00;
for i:=1 to N-1 do
begin
v:=k0*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])/sqr(1-(m0-ro0[i]))*abs(p[i+1]-p[i])/h;
    A:=tau*D/(h*h)+tau*v/h;
    B:=2*tau*D/(h*h)+tau*v/h+m0;
    E:=tau*D/(h*h);
    F:=m0*c0[i]-(ro[i]-ro0[i]);
bet[i+1]:=(F+A*bet[i])/(B-A*alpha[i]);
alpha[i+1]:=E/(B-A*alpha[i]);
end;
c[N]:=(F+A*bet[N])/(B-A*alpha[N]);
for i:=N-1 downto 0 do
c[i]:=alpha[i+1]*c[i+1]+bet[i+1];
    END;
    Procedure Otvet(k:integer);
    Begin
writeln (tez,k:4,'    ',1e3*W[i]:4:12);
    End;
    Procedure Otvet1(k:integer);
    Begin
writeln(out);
write (out,' ':10,' c t= ',k*tau:4);
writeln(out);
    For i:=0 to N do
writeln (out,i*h:4:2,' ',c[i]/c00:4:12,' ',1e2*ro[i]:4:12,' ',N_p[i]:4:12,'
',1e3*W[i]:4:12);
    End;
    Procedure Asosiy;
Var kk,Gam1,be:real;

```

```

BEGIN
Nach_dan;
j:=0;
for i:=0 to N do
begin
ro[i]:=ro0[i];
c[i]:=c0[i];
end;
for j:=1 to tmax do
    Begin
        Progonka1;
for i:=0 to N do
begin
N_p[i]:=abs(p[i+1]-p[i])/h;
be:=betta/(1+Gamma*abs(N_p[i]));
        Gam1:=Gam/(1+Omega*abs(N_p[i]));
kk:=(Gam1*(1-K*ro0[i])*(1+a6*betta*c0[i]*tau)+tau)/(Gam1*(1-K*ro0[i]));
ro[i]:=ro0[i]/kk+(tau*betta*a5*c0[i])/kk;
end;
        Progonka2;
for i:=0 to N do
begin
c0[i]:=c[i];
ro0[i]:=ro[i];
end;
if j<50 then
begin
if (j mod 5=0) or (1 mod j=0) then
begin
i:=35;

```

```

        W[i]:=abs(k0*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])/sqr(1-(m0-
ro0[i]))*abs(p[i+1]-p[i])/h);
Otvjet(j);
end;
end
else
if j mod 50=0 then
begin
i:=35;
        W[i]:=abs(k0*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i])/sqr(1-(m0-
ro0[i]))*abs(p[i+1]-p[i])/h);
Otvjet(j);
end;
if j mod 900=0 then
begin
for i:=0 to N do
w[i]:=N_p[i]*k0*(sqr(m0-ro0[i])*(m0-ro0[i]))/sqr(1-m0+ro0[i]);
Otvjet1(j);
end;
end;
        END;
begin
assign(out,'ORG.out');
assign(tez,'ORG.tez');
Rewrite(out);
Rewrite(tez);
writeln (out,'  Γ=',Gam:4:2,'   K=',k:4:2,'   Betta=',Betta:4:2);
writeln (out,'  D=',D:4:8);
Asosiy;
Close(Out);

```

```
Close(tez);  
end.
```