**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ХАЛХЎЖАЕВ АХМАД МИЯССАРОВИЧ**

# ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ВА УЧТА БИР ХИЛ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАЛАРГА МОС ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ МУҲИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ ҲАҚИДА

**01.01.01 – математик анализ**
**(физика-математика фанлари)**

**ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2016**

**УДК: 519**

**Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси**
**Оглавление автореферата докторской диссертации**
**Content of the abstract of doctoral dissertation**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ХАЛХЎЖАЕВ АХМАД МИЯССАРОВИЧ**

# ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ВА УЧТА БИР ХИЛ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАЛАРГА МОС ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ МУҲИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ ҲАҚИДА

**01.01.01 – математик анализ**
**(физика-математика фанлари)**

**ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2016**

**Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/В2014.3-4.FM86 рақам билан рўйхатга олинган.**

Докторлик диссертацияси Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

| | |
|---|---|
| **Илмий маслаҳатчи:** | **Лақаев Саидахмат Норжигитович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| **Расмий оппонентлар:** | **Малышев Вадим Александрович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор<br>(Москва давлат университети, Россия) |
| | **Ғанихўжаев Расул Набиевич**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| | **Рахимов Абдуғофур Абдумажидович**<br>физика-математика фанлари доктори |
| **Етакчи ташкилот:** | **Миссури университети** (АҚШ) |

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 14.07.2016.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»___________2016 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz.)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2016 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2016 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

**А.А. Абдушукуров**
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

**Ғ.И. Ботиров**
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш котиби, ф.-м.ф.н.

**А. Садуллаев**
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш хузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор, академик

## КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар физикада мураккаб турғун объектлар одатда уларнинг боғланган пайтдаги энергиясини камайиш имконини берувчи тортишиш кучлари натижасида ҳосил бўлишини кўрсатади. Бироқ кейинги йилларда олимлар томонидан тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар ҳаттоки итаришувчи таъсирлар натижасида ҳам мавжуд бўлишлиги исботланди. Итаришувчи жуфтликларни тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе–Хаббард модели, яъни панжарадаги Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назариясида учрайдиган панжарадаги заррачалар системаси гамильтонианларига мос Шредингер операторларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий тадбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан бутун сонли панжарадаги заррачалар системаси гамильтонианларига мос Шредингер операторларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Панжарадаги икки ва уч заррачали системага мос Шредингер операторлари учун муҳим спектрдан ташқарида боғланган ҳолатлар мавжудлиги ва уларнинг сони ҳамда муҳим спектр тубидаги эффектларни аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди.

Ҳозирги кунда панжарадаги икки ва уч квант заррачали система гамильтонианларига мос Шредингер операторлари оиласининг спектри система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу операторлар оилалари спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан уч заррачали дискрет Шредингер операторлари учун боғланган ҳолатлар мавжудлигини кўрсатиш ва унинг сонини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли ёки бозонли) системага мос Шредингер операторининг дискрет спектрини тадқиқ этиш; ушбу оператор муҳим спектри тубидаги бўсағавий ходисаларни аниқлаш; уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматлари сони учун асимптотик формулалар топиш; бир ва икки ўлчамли панжарада уч заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлигини кўрсатиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2006 йил 7 августдаги ПҚ-436-сон «Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш ва бошқаришни такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ҳамда

2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида» Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[1].**

Узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари ҳамда Фридрихс моделларига оид тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Universitat Innsbruck (Австрия), University of Missouri, Princeton University, Harvard University (АҚШ), Россия Фанлар академияси ахборотларни узатиш муаммолари институти, Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Universität Bonn ва Universität Mainz (Германия), Россия Фанлар академияси Математика институти Санкт-Петербург бўлими, Россия Фанлар академияси назарий физика институти, Москва давлат университети (Россия), University Roma and SISSA (Italy), University of Basel, Universität Zürich (Switzerland), Universidade de São Paulo (Бразилия), University of Toronto (Канада), Universiti Kuala Lumpur (Малайзия) да олиб борилмоқда.

Оптик панжарадаги заррачали системалар, икки ва уч заррачали Шредингер операторлари ҳамда Фридрихс моделларига оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: итаришувчи жуфтликларни тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе–Хаббард гамильтониани, яъни панжарадаги Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси қилиб олинган ва тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар итаришувчи таъсирлар натижасида ҳам мавжуд бўлиши мумкинлиги исботланган (Universitat Innsbruck (Австрия)); икки заррачали узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари хос қийматларининг боғланиш доимийсига боғлиқлиги ўрганилган (Princeton University (АҚШ), University of Basel (Швейцария), Самарқанд давлат университети); юқори температураларда гиббс майдонларининг кенг синфи трансфер-матрицалари учун икки заррачали боғланган ҳолатлари ўрганилган (Россия Фанлар академияси ахборотларни узатиш муаммолари институти); кластерлик параметрининг кичик қийматларида икки заррачали кластер операторлари боғланган ҳолатларининг мавжудлиги исботланган (Россия Фанлар академияси

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: Letter nature doi:10.1038/nature04918, Annals of Physics doi:10.1016/j.aop.2004.09.010, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104253518, Annales del'I.H.P. Physique théorique. http://eudml.org/doc/76764, Функц. анализ и его прил., http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v27/i3/p15, Commun. Math. Phys. doi:10.1007/s00220-005-1454-y, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908588, Матем. сборник http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567, J. Funct. Anal. doi:10.1016/0022-1236(91)90038-7 ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

ахборотларни узатиш муаммолари институти); ихтиёрий потенциалли икки заррачали дискрет Шредингер оператори хос қийматлари мавжудлик шартлари топилган (Universität Bonn (Германия), University of Missouri (АҚШ), Самарқанд давлат университети); уч заррачали узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари учун Ефимов эффекти исботланган (Россия Фанлар академияси физика-техника институти, Россия Фанлар академияси Математика институти Санкт-Петербург бўлими, Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Россия Фанлар академияси назарий физика институти, Самарқанд давлат университети); уч заррачали Шредингер операторлари хос қийматлари сони учун муҳим спектр чап чеккасига интилиш асимптотикалари олинган (Universität Bonn (Германия), Kyoto University (Япония), University of Toronto (Канада), Самарқанд давлат университети).

Дунёда бугунги кунда, панжарадаги икки ва уч заррачали системаларга мос Шредингер операторлари спектри ва резонансларини тадқиқ этиш бўйича бир қатор, жумладан: панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари хос қийматлари сони ва уларнинг жойлашув ўрнини панжаранинг ўлчами, заррачаларнинг ўзаро таъсир энергиялари ва система квазиимпульсига боғлиқ равишда аниқлаш, муҳим спектр тубидаги бўсаға ҳодисаларини тадқиқ этиш, панжарадаги уч заррачали системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектрини тавсифлаш, бу операторларнинг хос қийматлари мавжудлиги ва уларга мос хос функцияларнинг хоссаларини аниқлаш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назариясининг асосий масалалари Шредингер операторларини ўрганишга қаратилган. Бу соҳада олинган натижалар тўғрисида кўплаб маълумотлар математик физиканинг “энциклопедияси” – М.Рид ва Б.Саймоннинг тўрт томли китобида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида Д.С.Маттис, А.И.Могильнер томонидан қаралиб бошланди ва унга оид тадқиқотлар жадал ривожланди. Панжарадаги Шредингер операторларини математик маънода тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди. Яъни, дастлаб бир, икки заррачали ва ҳоказо кўп заррачали операторларни ўрганиш талаб этилади. Узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари ҳамда умумлашган Фридрихс моделлари учун дискрет спектр мавжудлиги, хос қийматнинг узлуксиз спектр атрофидаги ёйилмалари, ўзаро таъсир константасининг бўсағавий қийматини аниқлаш масалалари М. Клауз, Б. Саймон, Г.М. Граф, Д. Шенкер, Р.А.Фариа да Веига, Е.Л. Лакштанов, Р.А. Минлос, С.Н. Лақаев, К. Макаров каби олимлар томонидан ўрганилган.

Маълумки, икки заррачали Шредингер операторларида ўзаро таъсир константаси кичрайиши натижасида боғланган ҳолат энергияси узлуксиз спектр чеккасига яқинлашади ва таъсир константасининг чекли қийматида чегара билан устма-уст тушади. Бу бўсағавий қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал ҳолат мос келишини аниқлаш масаласи билан Дж.Раух, Б. Саймон, М. Клауз ва С.Н.Лақаевлар шуғулланган. С. Албеверио, С. Лақаев, К. Макаров ва З. Муминовлар томонидан $d$-ўлчамли $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, панжарада ихтиёрий икки заррачали система гамильтонианига мос икки заррачали Шредингер оператори учун хос қийматларнинг мавжудлик шартлари топилган. Бундан ташқари ушбу операторнинг муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматлари сонининг чеклилиги исботланган.

Уч заррачали Шредингер операторлари учун потенциалга қўйилган маълум шартларда муҳим спектрдан чапда чексиз сондаги хос қийматлар пайдо бўлиш ҳодисаси дастлаб В.Н. Ефимов томонидан очилган. Ушбу ҳодиса кейинчалик физик олимлар Д.С.Маттис, А.И.Могильнер томонидан ўрганилган. Унинг қатъий математик исботи биринчи бўлиб Д.Р. Яфаев томонидан берилган. Кейинчалик эса Ю. Овчинников, И.М. Сигал, Ҳ. Тамура томонидан исботланган. Д.Р. Яфаев Ефимов эффектини Фаддеев интеграл тенгламалар усулидан фойдаланиб исботлаган. Бироқ Ю. Овчинников ва И.М. Сигал иккитаси оғир ва биттаси енгил бўлган жуфт-жуфти билан сферик симметрик потенциаллар ёрдамида таъсирлашувчи уч заррачали система учун вариацион принципдан фойдаланиб ушбу ҳодисани исботлаган. Ҳ. Тамура эса Ефимов эффектини заррачалар массасига чегара қўймасдан жуфт-жуфти билан (сферик симметрик потенциалларсиз) таъсирлашувчи уч заррачали система учун барча икки заррачали системалар нолда виртуал сатҳга эга бўлганда вариацион принципдан фойдаланиб исботлаган. Соболев томонидан уч заррачали узлуксиз Шредингер операторининг муҳим спектрдан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формула топилган. Кулон потенциалли уч заррачали модель гамильтонианлар учун дискрет спектр чеклилига оид натижалар дастлаб, Дж.Ушияма томонидан олинган. Унинг усулидан фойдаланиб, М.А.Антонец, Г.М.Жислин, И.А.Шерешевскийлар турли уч заррачали системалар учун дискрет спектр чеклилиги масаласини ҳал этган. Бир ва икки ўлчамли ҳолда уч заррачали система гамильтониани учун дискрет спектр чеклилиги Г.Жислин томонидан исботланган. Дастлаб панжарадаги жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи учта бир хил заррачали системага мос Шредингер операторлари учун система квазиимпульсининг маҳкамланган қийматида Ефимов эффектининг мавжудлиги С.Н.Лақаев томонидан исботланган. С.Н.Лақаев, Ж.Абдуллаев ва З. Мўминовлар томонидан жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи уч заррачали системага мос айирмали Шредингер операторлари учун муҳим спектрдан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формула олинган. Бир ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи уч заррачали системага Шредингер операторлари хос қийматлари чеклилиги М. Муминов ва Н. Алиев томонидан исботланган.

**Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти ЎзР ФА Самарқанд бўлимининг ФА-Ф1-Ф045 “Панжарадаги кўп заррачали система гамильтонианлари. Спектр ва резонанслар” (2007-2011 йй.); ЎзР ФА Самарқанд бўлимининг ФМ-1-016

“Панжарадаги икки ва уч заррачали системаларда қуйи энергетик эффектлар” (2008-2009 йй.);Самарқанд давлат университетининг Ф4-ФА-Ф079 “Панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системаси гамильтонианларининг спектрал таҳлили” (2012-2016) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада ўзаро таъсирлашувчи икки ва учта бир хил заррачали (фермионлар ёки бозонлар) системаларга мос икки ва уч заррачали Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари**:

ихтиёрий ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг мавжуд бўлишлик шартларини аниқлаш;

панжарадаги икки ва уч заррачали Шредингер операторлари учун Бирман-Швингер принципи ўхшаши (аналоги)ни ўрнатиш;

панжарада жуфт-жуфти билан қўшни тугунларда ўзаро таъсирлашувчи икки заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори хос қийматлари сонини ва муҳим спектр бўсаға ҳодисаларини заррачалар таъсир энергияси ва икки заррачали система тўла квазиимпульсига боғлиқ ҳолда аниқлаш;

уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори чексиз кўп хос қийматга эга эканлиги (Ефимов эффекти)ни исботлаш ва хос қийматлар сони учун асимптотик формулалар топиш;

бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлигини ва сонининг чеклилигини кўрсатиш.

**Тадқиқотнинг объекти** панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада ўзаро таъсирлашувчи икки ва уч заррачали системаларга мос Шредингер операторларидан иборат.

**Тадқиқотнинг предмети** панжарадаги иккита бир хил заррачали (фермион ёки бозонли) системага мос икки заррачали Шредингер операторлари, панжарадаги учта бир хил заррачали (бозонли) системага мос уч заррачали Шредингер операторларининг спектрал тадқиқотларидан иборат.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг мавжуд бўлишлик шартлари топилган;

ихтиёрий ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг чеклилиги исботланган;

панжаранинг қўшни тугунларида таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори параметрларининг барча қийматларида хос қийматлар сони ва жойлашув ўрни аниқ топилган;

уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системага мос Шредингер операторининг муҳим спектридан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формулалар олинган;

уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системага мос Шредингер оператори учун система квазиимпульсининг ноль нуқта атрофидаги нолдан фарқли қийматларида муҳим спектридан чапдаги хос қийматлари сонининг чеклилиги кўрсатилган;

илк бор бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқарида хос қийматларининг мавжудлиги исботланган;

бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда хос қийматлари сонининг чеклилиги кўрсатилган.

**Тадқиқотнинг амалий натижаси** боғланган ҳолатларнинг аналитиклиги ҳақидаги хулосалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлашда ва сонли ҳисоблашларда қўлланилиши мумкинлигидан иборат.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** математик анализ, математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясида, квант механикаси, қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги икки ва уч заррачали система гамильтонианларининг спектрлари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижалариининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари хос қийматини аниқлаш усуллари QJ130000.2426.01G11 “Eigenvalue problem for the two particle Schrodinger operataor on lattice” грант лойиҳсида икки ва уч заррачали дискрет Шредингер операторлари учун қўлланилган (Малайзия технология университетининг 1 ноябрдаги малумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган икки заррачали операторларининг асосий хоссаларини тадқиқ этиш ва махсус экзотик потенциалли уч заррачали система гамильтонианларининг муҳим спектрини тавсифлаш имконини берган;

икки заррачали дискрет Шредингер операторлари учун олинган натижалардан ERGS/1/2/2013/STG06/UKM/01/2 “Investigations of the Roles of theThird Variables in Analysing Statistical relationship functions” грант лойиҳасида ранги бирга тенг умумлашган Фридрихс моделлари учун қўлланилган (Малайзия Кебангсаан университетининг 26 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанингқўлланилиши натижасида ушбу оператор хос қийматлари учун Пюизо қаторлари олинган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Тадқиқотнинг натижалари илмий-амалий анжуманларда мухокама қилинган, шу жумладан: Ёш олимлар республика конференцияси (Тошкент, 2003 й., 2004 й.), «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳамда анализ ва информатиканинг турдош муаммолари» (Тошкент, 2005 й.), «Математик физиканинг ва информацион технологияларининг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2005 й.), «Операторлар алгебраси ва квант эҳтимолликлар назарияси» (Тошкент, 2005 й.), «Математик анализнинг долзарб муаммолари» (Урганч, 2012 й.), «Математик анализ ва математик физиканинг нокоррект ва ноклассик масалалари» (Самарқанд, 2012 й.), «International Seminar on Mathematics and Natural Sciences» (Самарқанд, 2013 й.), «Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари ва уларнинг татбиқлари» (Тошкент, 2013 й.), «Математик физиканинг ноклассик тенгламалари ва уларнинг татбиқлари» (Тошкент, 2014 й.), «Замонавий математик физика усуллари ва уларнинг татбиқлари» (Тошкент, 2015 й.), Турк дунёси математиклари жамияти конгресси (Баку, 2011 й.), III халқаро Россия–Қозоғистон симпозиуми (Нальчик, 2014 й.) да баён этилган ҳамда апробациядан ўтказилган. Тадқиқотнинг натижалари Самарқанд давлат университети қошидаги «Математик анализ ва унинг замонавий математик физикага татбиқлари» семинарида мунтазам равишда, Бонн университети «Амалий математика» институти илмий семинарида (Германия, 2004 й., 2007 й.), Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Операторлар алгебралари ва уларнинг татбиқлари» Республика семинарида (2012-2016 йй.), Ўзбекистон Миллий университетининг «Функционал анализ ва унинг татбиқлари» семинарида (2014-2016 йй.) муҳокама қилинган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.** Диссертация мавзуси бўйича жами 41 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 13 та мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

**Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.** Диссертация кириш кисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 161 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Чегараланган операторларнинг спектрал хоссалари (Бошланғич маълумотлар)»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни олишда зарур бўлган муҳим тушунчалар, ўз-ўзига қўшма операторлар ва оператор қўзғалишлар назариясининг спектрларига оид теоремалар келтирилган.

Диссертациянинг «**Панжарадаги икки заррачали (фермионли) системага мос икки заррачали Шредингер операторлари**» деб номланувчи иккинчи боби ихтиёрий ўлчамли панжарада ўзаро таъсирлашувчи икки заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторларининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишга бағишланган. Қаралаётган операторларнинг система квазиимпульсига боғлиқ хос қийматлари ва муҳим спектрининг бўсаға ҳодисалари ўрганилган.

$\mathbb{Z}^d-$ $d-$ ўлчамли бутун сонли панжара ва $(\mathbb{Z}^d)^2-$ $\mathbb{Z}^d$ нинг декарт кўпайтмаси бўлсин. $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]-$ орқали $(\mathbb{Z}^d)^2$ да аниқланган квадрати билан жамланувчи функцияларнинг гильберт фазосини ва $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]\subset\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]-$ орқали антисимметрик функциялардан тузилган қисм фазосини белгилаймиз.

Иккита бир хил заррача (фермионли) системанинг эркин гамильтониани $\hat{h}_0$ координата тасвирида $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ гильберт фазосида

$$\hat{h}_0=\frac{1}{2m}\Delta_{x_1}+\frac{1}{2m}\Delta_{x_2} \qquad (1)$$

кўринишдаги оператор ёрдамида аниқланади, бунда $\Delta_{x_1}=\Delta\otimes I$ ва $\Delta_{x_2}=I\otimes\Delta,\ m>0$ – фермионнинг массаси, $I$ – $l^2(\mathbb{Z}^d)$ фазодаги бирлик оператор ва $\otimes$ тензор кўпайтма. Панжаравий Лапласиан $\Delta-$ заррачанинг бир тугундан қўшни тугунга кўчишини тавсифловчи айирма операторидир, яъни

$$(\Delta\hat{\psi})(x)=\sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x)-\hat{\psi}(x+s)],\quad \hat{\psi}\in\ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

бунда $|s|=|s^{(1)}|+\ldots+|s^{(d)}|;\ s=(s^{(1)},\ldots,s^{(d)})\in\mathbb{Z}^d$.

Икки заррачали система гамильтониани $\hat{h}$ заррачаларнинг ўзаро таъсирини тавсифлайди ва $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ гильберт фазосида қуйидаги

$$\hat{h}=\hat{h}_0-\hat{v}$$

формула билан аниқланади, бунда $\hat{v}-$ ҳақиқий қийматли функцияга кўпайтириш операторидир:

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_1,x_2)=\hat{v}(x_1-x_2)\hat{\psi}(x_1,x_2),\quad \hat{\psi}\in\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]. \tag{2}$$

*Фараз 1.* Ушбу $\hat{v}(s)\ge 0$ функция $\mathbb{Z}^d$ да жуфт ва қуйидаги шартларни қаноатлантирсин

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{2+\varepsilon}\ \hat{v}(s)=0,\quad \textit{агар}\quad d=1\,\textit{ёки}\,2,$$

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{3+\frac{1}{2}+\varepsilon}\ \hat{v}(s)=0,\quad \textit{агар}\quad d=3,$$

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{d+\varepsilon}\ \hat{v}(s)=0,\quad \textit{агар}\quad d\ge 4,$$

бунда $\varepsilon>0-$ мусбат сон.

$\mathbb{T}^d$ – $d-$ўлчамли тор, яъни қарама-қарши ёқлари айний бўлган $(-\pi,\pi]^d$ куб бўлсин. У $\mathbb{R}^d$ да $(2\pi\mathbb{Z})^d$ модул бўйича киритилган қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амалларига нисбатан абель группаси ташкил қилади, $L^2(\mathbb{T}^d)$ – $\mathbb{T}^d$ да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функцяларнинг гильберт фазоси ва $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)-$ тоқ функциялар қисм фазоси бўлсин.

Фурье алмаштиришлари, икки заррачали система тўла квазиимпульси ажратилиши ва импульс кўринишидаги операторларнинг тўғри интеграл йиғиндига ёйилишидан кейин $\hat{h}$ гамильтониан спектрини ўрганиш $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган $h(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ операторлар оиласининг спектрини ўрганишга келтирилади:

$$h(k)=h_0(k)-v. \tag{3}$$

Қўзғалмас $h_0(k)$ оператор $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ фазода $\mathcal{E}_k(q)$ функцияга кўпайтириш операторидан иборат, яъни

$$(h_0(k)f)(q)=\mathcal{E}_k(q)f(q),\quad f\in L^{2,o}(\mathbb{T}^d),$$

бунда

$$\mathcal{E}_k(q)=\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{d}(1-\cos\frac{k^{(i)}}{2}cosq^{(i)}).$$

$v$ – ўзаро таъсир (қўзғатиш) оператори $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$(vf)(q)=(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{T}^d} v(q-t)f(t)dt, \quad f\in L^{2,o}(\mathbb{T}^d).$$

Бу ерда
$$v(k)=(2\pi)^{-d/2}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(s)e^{\mathrm{i}(k,s)}, \tag{4}$$

бунда
$$(k,s)=\sum_{j=1}^{d}k^{(j)}s^{(j)}, \quad k=(k^{(1)},\dots,k^{(d)})\in\mathbb{T}^d, \quad s=(s^{(1)},\dots,s^{(d)})\in\mathbb{Z}^d.$$

Агар $v$ қўзғалиш оператори ядроси фараз 1 ни қаноатлантирса, изли операторлар синфига қарашли бўлади ва натижада муҳим спектр турғунлиги ҳақидаги Вейл теоремасига кўра (3) формула билан аниқланган $h(k)$ операторнинг $\sigma_{ess}(h(k))$ муҳим спектри $h_0(k)$ операторнинг муҳим спектри билан устма-уст тушади. $h_0(k)$ эса функцияга кўпайтириш оператори бўлганлиги учун
$$\sigma_{ess}(h(k))=[\mathcal{E}_{\min}(k),\mathcal{E}_{\max}(k)],$$
тенглик ўринли бўлади, бунда $\mathcal{E}_{\min}(k)=\min\limits_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q), \quad \mathcal{E}_{\max}(k)=\max\limits_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q).$

*Эслатма 1.* $h(k)$ операторнинг муҳим спектри $k=(\pi,\pi,\dots,\pi)\in\mathbb{T}^d$ бўлганда айнийди, яъни нуқтага айланади. Шунинг учун $\sigma_{ess}(h(k))$ ихтиёрий $k\in\mathbb{T}^d$ да абсолют узлуксиз бўла олмайди.

Маълумки, $v$ операторнинг мусбат $v^{\frac{1}{2}}$ квадрат илдизи қуйидаги кўринишга эга:
$$(v^{\frac{1}{2}}f)(p)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{T}^d}v^{\frac{1}{2}}(p-p')f(p')dp',$$

бунда $v^{\frac{1}{2}}(p)$ ядро $\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)$ функциянинг тескари Фурье алмаштиришидир:
$$v^{\frac{1}{2}}(p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)e^{\mathrm{i}(p,s)}.$$

Ҳар бир $k\in(-\pi,\pi)^d$ ва $z\le\mathcal{E}_{\min}(k)$ (ҳар бир $k\in\mathbb{T}^d\setminus(-\pi,\pi)^d$ ва $z<\mathcal{E}_{\min}(k)$) учун $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ фазода
$$\mathbb{B}(k,z;p,s)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^{\frac{1}{2}}(p-t)v^{\frac{1}{2}}(t-s)dt}{\mathcal{E}_k(t)-z}$$
ядроли $\mathbb{B}(k,z)$ Бирман-Швингер интеграл операторни аниқлаймиз.

Таъкидлаймизки, ихтиёрий $z<\mathcal{E}_{\min}(k)$ учун $\mathbb{B}(k,z)=v^{\frac{1}{2}}r_0(k,z)v^{\frac{1}{2}}$ тенглик бажарилади, бунда $r_0(k,z)$ – $h_0(k)$ операторнинг резольвентаси.

*Таъриф 1.* $d=1$ ёки 2 бўлсин ва фараз 1 шартлари бажарилсин. Фараз қилайлик,
$$\mathbb{B}(\mathbf{0},0)\psi=\psi, \ \mathbf{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{T}^d.$$

тенглама нолмас $\psi \in L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ ечимга эга бўлсин. Агар

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p)} \notin L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$$

бўлса, $h(\mathbf{0})$ оператор ноль энергияли резонансга эга дейилади.

Қуйидаги теоремалар иккинчи бобнинг биринчи параграфи учун асосий натижалар ҳисобланади.

Фараз 1 бажарилсин.

*Теорема 1.* $d=1$ ёки 2 бўлсин. Агар $h(\mathbf{0})$ оператор ноль энергияли резонансга эга бўлса ёки ноль сони $h(\mathbf{0})$ операторнинг хос қиймати бўлса, у ҳолда ихтиёрий $k \neq \mathbf{0}$ учун $h(k)$ оператор муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қийматга эга.

*Теорема 2.* $d \geq 3$ бўлсин. Агар $z=0$ сони $h(\mathbf{0})$ операторнинг $n$ каррали хос қиймати бўлса, у ҳолда ихтиёрий $k \neq 0$ учун $h(k)$ оператор муҳим спектрдан чапда ётувчи камида $n$ та хос қийматга.

*Теорема 3.* Ихтиёрий $k \in (-\pi,\pi)^d$ ва $d \in \mathbb{N}$ ларда $h(k)$ операторнинг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қийматлари сони чеклита.

*Эслатма 2.* Қўзғатувчи $v$ оператор мусбат бўлганлиги учун $h(k)$ оператор $\mathcal{E}_{\max}(k)$ дан ўнгда хос қийматларга эга эмас.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида $d-$ ўлчамли $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ панжарада қўшни тугунларда таъсирлашувчи икки фермионли система $\hat{h}_\mu$ гамильтониани қаралган. Ушбу гамильтонианга мос $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ икки заррачали дискрет Шредигер оператори учун оператор параметрлари: заррачалар ўзаро таъсир энергияси $\mu > 0$ ва икки заррачали система тўла квазиимпульси $k \in \mathbb{T}^d$ га боғлиқ равишда хос қийматлар сони ва жойлашув ўрни топилган.

Фараз қилайлик, $\hat{h}_0$ ва $\hat{v}$ операторлар (1) ва (2) формулалар билан аниқланган бўлиб, $\hat{v}$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2} & \textit{агар} \quad |x|=1, \\ 0 & \textit{агар} \quad |x| \neq 1. \end{cases}$$

У ҳолда $v$ ўзаро таъсир (қўзғатиш) оператори ранги $d \geq 1$ бўлган $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ гильберт фазосида

$$(vf)(q) = \mu(2\pi)^{-d} \sum_{i=1}^{d} \sin q^{(i)} \int_{\mathbb{T}^d} \sin t^{(i)} f(t)dt$$

формула билан аниқланган интеграл оператор бўлади.

Айтиш жоизки, $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)=\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q^{(1)},q^{(2)},...,q^{(d)})$ функция ноль нуқтада айнимаган минимумга эга ва $q^{(1)},q^{(2)},...,q^{(d)}$ ўзгарувчиларнинг ўрнини алмаштиришга нисбатан инвариант бўлганлиги учун

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)}dq$$

интеграл мавжуд ва $i=\overline{1,d}$ нинг танланишидан боғлиқ эмас.

$\mu_0=(2\pi)^d(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)}dq)^{-1}, i=\overline{1,d}$ бўлсин.

Ушбу параграфнинг асосий натижасини қуйидаги теоремада келтирамиз.

*Теорема 4.* *a*) $0<\mu<\mu_0$ бўлсин. У ҳолда шундай бўшмас $G_\mu^{(l)}, l=\overline{0,d}$ тўпламлар мавжудки, бу тўпламлар учун

$$G_\mu^{(l)}\bigcap G_\mu^{(j)}=\varnothing,\ l\neq j,\ j=\overline{0,d},\quad \bigcup_{i=0}^{d} G_\mu^{(i)}=\mathbb{T}^d$$

муносабатлар бажарилади ва $k\in G_\mu^{(0)}$ бўлганда $h_\mu(k)$ оператор муҳим спектрнинг қуйи бўсағаси $\mathcal{E}_{\min}(k)$ дан чапда хос қийматга эга эмас; $k\in G_\mu^{(l)}$, $l=\overline{1,d}$ бўлганда $h_\mu(k)$ оператор $\mathcal{E}_{\min}(k)$ дан чапда карралиликлари билан бирга айнан $l$ та $z_\mu^{(i)}(k), i=\overline{1,l}$ хос қийматга эга ва $z_\mu^{(i)}(k)>0, i=\overline{1,l}.$

*b*) $\mu=\mu_0$ бўлсин. $d=1$ ёки 2 бўлганда $h_\mu(\mathbf{0})$ оператор $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0})=0$ бўсағада ноль энергияли резонансга эга. $d\geq 3$ бўлганда $h_\mu(\mathbf{0})$ оператор учун $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0})=0$ бўсаға $d$ каррали хос қиймат бўлади. Ихтиёрий $d\in N$ ва $k\in\mathbb{T}^d, k\neq\mathbf{0}$ учун $h_\mu(k)$ оператор $\mathcal{E}_{\min}(k)$ бўсағадан чапда карралиликлари билан бирга айнан $d$ та $z_\mu^{(i)}(k),\ i=\overline{1,d}$ хос қийматга эга ва $z_\mu^{(i)}(k)>0, i=\overline{1,d}.$

*c*) $\mu>\mu_0$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k\in\mathbb{T}^d$ учун $h_\mu(k)$ оператор $\mathcal{E}_{\min}(k)$ бўсағадан чапда айнан $d$ та $z_\mu^{(i)}(k), i=\overline{1,d}$ хос қийматга эга. $\mu>4d$ бўлганда $z_\mu^{(i)}(k)<0,\ i=\overline{1,d}$ бўлади.

Диссертациянинг **«Панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори хос қийматлари учун асимптотика»** деб номланувчи учинчи бобида уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системага мос Шредингер оператори учун Ефимов эффекти исботланган ва муҳим спектрдан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формулалар олинган. Система квазиимпульсининг ноль нуқта атрофидаги нолдан фарқли қийматларида муҳим спектридан чапдаги хос қийматлари сонининг чеклилиги кўрсатилган.

Учинчи бобнинг биринчи ва иккинчи параграфларида $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи икки ва уч заррачали системаларнинг $\hat{h}$, $\hat{H}$ энергия операторлари қаралган. Бу операторлар импульс кўринишида тасвирланган. Система тўла квазиимпульслари ажратилгач, импульс кўринишидаги $h$, $H$ операторлар Фон-Нейман тўғри интеграл йиғиндига ёйилган ва $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$ операторлар оиласини ўрганишга келтирилган.

$\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]$ орқали $(\mathbb{Z}^d)^m, d = 1,2,...$ да аниқланган квадрати билан жамланувчи функцияларнинг гильберт фазосини ва $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^m] \subset \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]$ орқали ихтиёрий иккита ўзгарувчисининг ўрнини алмаштиришга нисбатан симметрик функциялар қисм фазосини белгилаймиз.

$\mathbb{Z}^d$ – $d$ ўлчамли бутун сонли панжарада $m = 1$ массали иккита эркин заррачалар (заррачалар бозон бўлган ҳол) системасининг энергия оператори координата кўринишида $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ гильберт фазосида қуйидаги

$$\hat{h}_0 = \Delta \otimes I + I \otimes \Delta$$

ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор билан аниқланади.

Панжарада қисқа масофада ўзаро таъсирлашувчи иккита бир хил квант заррачали (бозонли) системанинг тўла гамильтониани $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ гильберт фазосида $\hat{h}_0$ эркин гамильтонианнинг $\hat{v}$ қўзғалиши орқали қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v}.$$

Бу ерда

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_\beta, x_\gamma) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_\beta, x_\gamma), \quad \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2].$$

*Фараз 2.* $\hat{v}(s)$ – функция $\mathbb{Z}^d$ да аниқланган, жуфт, номанфий ва

$$\lim_{|s| \to \infty} |s|^{d+\theta} \hat{v}(s) = 0, \quad \theta > \frac{1}{2}$$

шартни қаноатлантиради.

Мос равишда $\mathbb{Z}^d$ – $d$ ўлчамли бутун сонли панжарада учта эркин квант заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системанинг $\hat{H}_0$ энергия оператори $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\hat{H}_0 = \Delta \otimes I \otimes I + I \otimes \Delta \otimes I + I \otimes I \otimes \Delta.$$

Жуфт-жуфти билан икки заррачали қисқа $\hat{v} = \hat{v}_\alpha = \hat{v}_{\beta\gamma}, \alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$ потенциалли учта бир хил заррачали системанинг тўла $\hat{H}$ энергия оператори $\hat{H}_0$ операторнинг чегараланган қўзғалишидан иборат:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mathbb{V}},$$

бунда $\hat{\mathbb{V}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{V}_\alpha, \hat{V}_\alpha = \hat{V}, \alpha = 1,2,3$ – $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$ фазода функцияга кўпайтириш оператори бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланади:

$$(\hat{V}_\alpha \hat{\psi})(x_1, x_2, x_3) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3), \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3].$$

$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^m] \subset L^2[(\mathbb{T}^d)^m]$ орқали $(\mathbb{T}^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$ да аниқланган симметрик функциялардан тузилган қисм фазони белгилаймиз.

$\mathcal{F}$ – стандарт фурье алмаштириши

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d), \quad [\mathcal{F}(f)](p) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-\mathrm{i}(p,x)} f(x)$$

ва унинг тескари алмаштириши

$$\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{T}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad [\mathcal{F}^*(\psi)](x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{\mathrm{i}(p,x)} \psi(p) dp$$

ҳамда $\hat{\Delta} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^* -\ \Delta$ – Лапласианнинг фурье алмаштириши бўлсин. Таъкидлаш жоизки, $\hat{\Delta}\ -\ \varepsilon(\cdot)$ функцияга кўпайтириш оператори, яъни

$$(\hat{\Delta} f)(k) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

бунда

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, ..., p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d.$$

Импульс тасвирида икки заррачали тўла системага мос $h$ оператор $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ фазода

$$h = h_0 - v$$

формула билан аниқланади. Иккита эркин заррачали системанинг энергия оператори $h_0$ қуйидаги кўринишга эга

$$h_0 = \hat{\Delta} \otimes I + I \otimes \hat{\Delta},$$

яъни $h_0\ -\ \varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)$ функцияга кўпайтириш оператори:

$$(h_0 f)(k_\beta, k_\gamma) = (\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)) f(k_\beta, k_\gamma), \ \ f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2].$$

$v$ эса ўрама типидаги интеграл оператордан иборат:

$$(vf)(k_\beta, k_\gamma) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} v(k_\beta - k_{\beta'}) \delta(k_\beta + k_\gamma - k_{\beta'} - k_{\gamma'}) f(k_{\beta'}, k_{\gamma'}) dk_{\beta'} dk_{\gamma'}, \ \ f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

бунда $\delta(\cdot) -\ \mathbb{T}^d$ даги Диракнинг делта-функцияси. $v(k)$ функция эса (4) кўринишидаги Фурье қатори ёрдамида аниқланади.

Уч заррачали системанинг тўла энергия оператори $H$ импульс тасвирида $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3]$ гильберт фазосидаги ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор сифатида аниқланади:

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3,$$

бунда

$$H_0 = \hat{\Delta} \otimes I \otimes I + I \otimes \hat{\Delta} \otimes I + I \otimes I \otimes \hat{\Delta},$$

яъни учта эркин заррачанинг $H_0$ энергия оператори $\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon(k_\alpha)$ функцияга кўпайтириш оператори бўлади:

$$(H_0 f)(k_1,k_2,k_3) = [\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon(k_\alpha)] f(k_1,k_2,k_3),$$

$$(V_\alpha f)(k_1,k_2,k_3) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{(\mathbb{T}^d)^3} v(k_\beta - k_{\beta'})\times$$

$$\times\delta(k_\alpha - k_{\alpha'})\delta(k_\beta + k_\gamma - k_{\beta'} - k_{\gamma'}) f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_{2'}dk_3', \quad f\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3].$$

$k = k_1 + k_2 \in \mathbb{T}^d$ ва $K = k_1 + k_2 + k_3 \in \mathbb{T}^d$ орқали мос равишда икки ва уч заррачали система тўла квазиимпульсларини белгилаймиз.

$L^{2,e}(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)-$ жуфт функциялар қисм фазоси бўлсин. $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ ва $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3]$ гильберт фазоларининг

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2] = \int_{k\in\mathbb{T}^d} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T}^d)dk$$

ва

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3] = \int_{K\in\mathbb{T}^d} \oplus L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]dK$$

тўғри интеграл йиғиндига ёйилмаси $h$ ва $H$ энергия операторларининг

$$h = \int_{k\in\mathbb{T}^d} \oplus \widetilde{h}(k)dk \tag{5}$$

ва

$$H = \int_{K\in\mathbb{T}^d} \oplus \widetilde{H}(K)dK \tag{6}$$

тўғри интеграл йиғиндига ёйилмасига мос келади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида икки заррачали дискрет Шредингер оператори учун ноль энергияли резонанс тушунчаси киритилган.

$d = 3$ бўлсин. (5) формулада келтирилган $\widetilde{h}(k),\ k\in\mathbb{T}^3$ қобиқ оператор қуйидаги $h(k),\ k\in\mathbb{T}^3$ операторга унитар эквивалент:

$$h(k) = h_0(k) - v.$$

$h_0(k)$ ва $v$ операторлар $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ гильберт фазосида қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$(h_0(k) f)(k_\beta) = \mathcal{E}_k(k_\beta) f(k_\beta), \quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

бунда

$$\mathcal{E}_k(k_\beta) = \varepsilon(\frac{k}{2} - k_\beta) + \varepsilon(\frac{k}{2} + k_\beta)$$

ва

$$(vf)(k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(k_\beta - k_\beta') f(k_{\beta'})dk_{\beta'}, \quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^3).$$

(6) формулада келтирилган $\widetilde{H}(K),\ K\in\mathbb{T}^3$ қобиқ оператор қуйидаги $H(K),\ K\in\mathbb{T}^3$ операторга унитар эквивалент:

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3.$$

$H_0(K)$ ва $V_\alpha \equiv V, \alpha = 1,2,3$ операторлар $L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2] \cong L^2(\mathbb{T}^3) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ гильберт фазосида $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ координаталарда қуйидаги кўринишда тасвирланади:

$$(H_0(K)f)(k_\alpha, k_\beta) = E(K; k_\alpha, k_\beta) f(k_\alpha, k_\beta), \quad f \in L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2],$$

$$E(K; k_\alpha, k_\beta) = \varepsilon(K - k_\alpha) + \varepsilon(\frac{k_\alpha}{2} - k_\beta) + \varepsilon(\frac{k_\alpha}{2} + k_\beta),$$

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(k_\beta - k'_\beta) f(k_\alpha, k_{\beta'}) dk_{\beta'}, \quad f \in L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2].$$

$\mathcal{E}_k(q)$ функция $q = 0$ нуқтада айнимаган минимумга эга бўлганлиги учун ҳар бир $k \in U_\delta(0)$ ва $z \le \mathcal{E}_{\min}(k)$ да

$$\mathbb{B}(p, q; k, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^{\frac{1}{2}}(p - t) v^{\frac{1}{2}}(t - q) dt}{\mathcal{E}_k(t) - z}$$

интеграл чекли.

$L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ фазода $\mathbb{B}(k, z)$ интеграл операторни қуйидаги формула орқали аниқлаймиз

$$\mathbb{B}(k, z) f(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbb{B}(p, q; k, z) f(q) dq.$$

*Эслатма 3.* $h(\mathbf{0})$ оператор $z \le \mathcal{E}_0(\mathbf{0}) = 0$ хос қийматга эга бўлиши учун $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ фазода аниқланган $\mathbb{B}(\mathbf{0}, z)$ оператор учун 1 сони хос қиймат бўлиши ва унга мос $\psi \in \operatorname{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z))$ хос функция учун

$$f(p) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p) - z} \quad д.б. \quad p \in \mathbb{T}^3$$

формула билан аниқланган $f$ функция $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ фазога қарашли бўлиши зарур ва етарли. Бундан ташқари, агар $z < 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$\dim \operatorname{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) = \dim \operatorname{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \text{ ва}$$

$$\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) = \{ f | f(\cdot) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - z}, \ \psi \in \operatorname{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \}.$$

*Таъриф 2.* Агар 1 сони $\mathbb{B}(\mathbf{0}, 0)$ оператор учун (битта ёки бир нечта) хос қиймат бўлса ва унга мос $\psi$ хос функция учун

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot)} \notin L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$$

муносабат ўринли, яъни $1 \le \dim \operatorname{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \ge \dim \operatorname{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) + 1$ бўлса, у ҳолда $h(0)$ оператор ноль энергияли резонансга эга дейилади.

*Теорема 5*. Фараз 2 ўринли, $h(\mathbf{0})\geq 0$ ва $h(\mathbf{0})$ оператор ноль энергияли резонансга эга бўлсин. У ҳолда барча $k\in\mathbb{T}_0^3$ лар учун $h(k)$ оператор муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона $z(k)$ хос қийматга эга бўлади. Бундан ташқари ноль нуқтанинг шундай $U_\delta(\mathbf{0})$ атрофи мавжудки, барча $k\in U_\delta(\mathbf{0})$ лар учун $z(k)-$ функция мусбат ва $U_\delta(\mathbf{0})$ да узлуксиз бўлади.

$E_{\min}(K)\equiv \min\limits_{k_\alpha,k_\beta\in\mathbb{T}^3} E(K;k_\alpha,k_\beta),\quad E_{max}(K)\equiv \max\limits_{k_\alpha,k_\beta\in\mathbb{T}^3} E(K;k_\alpha,k_\beta)$ бўлсин.

*Теорема 6*. $H(K),K\in\mathbb{T}^3$ операторнинг муҳим спектри учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sigma_{ess}(H(K))=\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}\{\sigma_d(h(p))+\varepsilon(K-p)\}\cup[E_{min}(K),E_{max}(K)],$$

бунда $\sigma_d(h(k))$ – $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$ операторнинг дискрет спектри.

$$\sigma_{ess}^{(2)}(H(K))=\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}\{\sigma_d(h(p))+\varepsilon(K-p)\} \text{ ва}$$

$$\sigma_{ess}^{(3)}(H(K))=[E_{min}(K),E_{max}(K)]=\bigcup_{k_\alpha,k_\beta\in\mathbb{T}^3}\{E(K;k_\alpha,k_\beta)\}$$

тўпламлар мос ҳолда $H(K)$ муҳим спектрининг икки заррачали ва уч заррачали қисмлари дейилади.

$N(K,z)$ орқали $H(K)$, $K\in\mathbb{T}^3$ операторнинг $z\leq\tau(K)$ дан чапдаги хос қийматлари сонини белгилаймиз, бунда $\tau(K)=\inf\sigma_{ess}(H(K))$.

*Эслатма 5*. Теорема 5 шартлари бажарилса, $\sigma_{ess}(H(0))=[0,E_{max}(\mathbf{0})]$ ва $\sigma_{ess}(H(K))=[\tau(K),E_{max}(K)]$ тенгликлар ўринли бўлади, бунда ҳар бир $K\in\mathbb{T}_0^3$ учун $\tau(K)>0$.

*Теорема 7*. Теорема 5 нинг шартлари бажарилсин. У ҳолда $H(\mathbf{0})$ оператор муҳим спектр қуйи чегарасидан чапда чексизта хос қийматга эга бўлади ва $N(\mathbf{0},z)$ функция учун

$$\lim_{z\to-0}\frac{N(\mathbf{0},z)}{|\log|z||}=\frac{\lambda_0}{2\pi},$$

муносабат бажарилади, бунда $\lambda_0$

$$\lambda=\frac{8\sinh\pi\lambda/6}{\sqrt{3}\cosh\pi\lambda/2}$$

тенгламанинг ягона мусбат ечими.

*Теорема 8*. Теорема 5 нинг шартлари бажарилсин. У ҳолда барча $K\in U_\delta^0(\mathbf{0})$ ларда $N(K,0)$ сони чекли ва қуйидаги

$$\lim_{|K|\to 0}\frac{N(K,0)}{|\log|K||}=\frac{\lambda_0}{\pi}$$

асимптотика ўринли.

*Эслатма 6*. $h(\mathbf{0})$ оператор манфий хос қийматга эга бўлса, у ҳолда $\sigma_{ess}(H(K))=[\tau(K),E_{max}(K)]$ тенглик ўринли бўлади, бунда ҳар бир $K\in\mathbb{T}^3$

учун $\tau(K)<0$. Бу ҳолда уч заррачали оператор бўш бўлмаган икки заррачали муҳим спектрга эга ва $N(K,\tau(K))<\infty$.

Диссертациянинг **«Панжарадаги уч заррачали Шредингер операторлари хос қийматларининг мавжудлиги ва сонининг чеклилиги ҳақида»** деб номланувчи тўртинчи бобида бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи учта бир хил заррачали (бозонли) системага мос Шредингер операторининг муҳим спектридан чапда хос қийматлари мавжудлиги ва уларнинг сони чеклилиги исботланган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи икки ва учта бир хил заррачали системага мос Шредингер операторлари импульс кўринишида тасвирланади. Фараз қилайлик,

$$\hat{v}(x_\beta - x_\gamma) = \delta_{x_\beta x_\gamma},$$

бунда $\delta_{x_\beta x_\gamma}$ – Кронекер символи.

Икки бозонли системанинг контакт потенциалли таъсирлашувига мос икки заррачали $h_\lambda(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ Шредингер оператори $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланади:

$$h_\lambda(k) = h_0(k) + \lambda v.$$

Бу ерда

$$(vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(q)dq, \quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^d),$$

$\lambda<0$ ($\lambda>0$)– тортишувчи (итаришувчи) заррачаларнинг контакт таъсирлашув энергияси.

Юқоридагидек, уч заррачали $H_\lambda(K),\ K\in\mathbb{T}^d$ оператор қуйидаги формула билан аниқланади:

$$H_\lambda(K) = H_0(K) + \lambda(V_1+V_2+V_3).$$

Бу ерда $H_0(K), K\in\mathbb{T}^d$ – $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ фазода функцияга кўпайтириш оператори:

$$(H_0(K)f)(p,q) = E(K;p,q)f(p,q), \quad f\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

бунда

$$E(K;p,q) = \varepsilon(K-p-q)+\varepsilon(p)+\varepsilon(q).$$

$\mathbb{V} = V_1+V_2+V_3$ оператор эса $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ фазода $(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2$ координаталарда

$$(\mathbb{V}f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(p,t)dt + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,q)dt + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,K-p-q)dt$$

кўринишида аниқланади.

*Теорема* 9. Ихтиёрий $\lambda\neq 0$ да $H_\lambda(K)$ операторнинг муҳим спектри учун

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) = \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d}\{e_\lambda(k)+\varepsilon(K-k)\}\bigcup[\mathrm{E}_{\min}(K),\mathrm{E}_{\max}(K)]$$

тенглик ўринли, бунда $e_\lambda(k)$ – $h_\lambda(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ операторнинг ягона хос қиймати.

$U_{\delta(K)}[p_\lambda(K)]=\{K\in\mathbb{T}^d : |K-p_\lambda(K)|<\delta\}-$ $p_\lambda(K)\in\mathbb{T}^d$ нуқтанинг $\delta=\delta(K)-$ атрофи бўлсин.

$H_\lambda(K)$ оператор хос қийматлари сонининг чеклилиги, хос қийматлари ва уларга мос боғланган ҳолатларнинг регулярлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринли.

*Теорема 10.* $d=1,2$ ва $\lambda<0$ бўлсин. У ҳолда

1. Шундай $\delta>0$ мавжудки, барча $K\in U_\delta[0]$ лар учун $H_\lambda(K)$ оператор муҳим спектри $\sigma_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$ дан чапда чеклита $E_{1,\lambda}(K),\ldots,E_{n,\lambda}(K)$ хос қийматларга эга.

2. $H_\lambda(K)$ операторнинг $E_\lambda(K),\ K\in U_\delta[0]$ хос қийматга мос $\psi_{\lambda,E_\lambda(K)(\cdot,\cdot)}\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ хос функцияси $(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2$ бўйича регуляр. Бундан ташқари, $E_\lambda(\cdot),\ K\in U_\delta[0]$ хос қиймат ва вектор қийматли

$$\psi_\lambda : U_\delta[0]\to L^2[U_\delta[0];L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]],\qquad K\to\psi_{\lambda,E_\lambda(K)}$$

акслантириш $K\in\mathbb{T}^d$ бўйича регуляр.

Ушбу бобнинг асосий натижаларидан бири бўлган $H_\lambda(K),\ K\in\mathbb{T}^d$ оператор боғланган ҳолатлари мавжудлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

*Теорема 11.* $d=1,2$ бўлсин.

1. Барча $\lambda<0$ ва $K\in\mathbb{T}^d$ ларда $H_\lambda(K)$ оператор муҳим спектр туби $\tau^b_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$ дан чапда $E_\lambda(K)$ хос қийматга эга.

2. Барча $\lambda>0$ ва $K\in\mathbb{T}^d$ ларда $H_\lambda(K)$ оператор муҳим спектр ўнг чети $\tau^t_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$ дан ўнгда $E_\lambda(K)$ хос қийматга эга.

*Натижа 2.* Етарлича катта $|\lambda|>0$ лар учун икки заррачали $h_\lambda$ ва уч заррачали $H_\lambda$ гамильтонианлар

$$[\min_k e_\lambda(k),\max_k e_\lambda(k)]\ \text{ва}\ [\min_K E_\lambda(K),\max_K E_\lambda(K)]$$

яккаланган тармоқли (полосали) спектрларга эга.

## ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада ўзаро таъсирлашувчи икки ва учта бир хил заррачали (фермионлар ёки бозонлар) системаларга мос икки ва уч заррачали Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Бир ва икки ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори учун резонанс тушунчаси киритилганлигини таъкидлаш жоиз;
2. Ихтиёрий ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқарида хос қийматлари мавжуд бўлиши шартлари топилганлигини эътироф этиш мумкин.
3. Ихтиёрий ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори параметрларининг барча қийматларида хос қийматлар сони ва жойлашув ўрни топилганлигини қайд қилиш лозим.
4. Уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системага мос Шредингер операторининг муҳим спектридан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формулалар топилган.
5. Уч ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофаларда ўзаро таъсирлашувчи уч заррачали (заррачалар бозон бўлган ҳол) системага мос Шредингер оператори учун система квазиимпульсининг ноль нуқта атрофидаги нолдан фарқли қийматларида муҳим спектридан чапдаги хос қийматлари сонининг чеклилиги кўрсатилган.
6. Бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан ташқарида хос қийматларининг мавжудлиги исботланганлигини эътироф этиш жоиз.
7. Бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи уч заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда хос қийматлари сонининг чеклилиги кўрсатилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ 14.07.2016.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ХАЛХУЖАЕВ АХМАД МИЯССАРОВИЧ**

# О СУЩЕСТВЕННОМ И ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРАХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СИСТЕМАМ ДВУХ И ТРЕХ ОДИНАКОВЫХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

**01.01.01 – математический анализ**
**(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ**

**Ташкент – 2016**

**Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.3-4.FM86.**

Докторская диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

| | |
|---|---|
| **Научный консультант:** | **Лакаев Саидахмат Норжигитович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Малышев Вадим Александрович**<br>доктор физико-математических наук, профессор<br>(Московский государственный университет, Россия) |
| | **Ганиходжаев Расул Набиевич**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Рахимов Абдугафур Абдумажидович**<br>доктор физико-математических наук |
| **Ведущая организация:** | **Университет Миссури** (США) |

Защита диссертации состоится «____» _____________2016 года в ____ часов на заседании Научного совета 14.07.2016.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___________). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2016 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2016 года).

**А.А. Абдушукуров**
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

**Г.И. Ботиров**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

**А. Садуллаев**
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор, академик

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые в мировом уровне, показывают, что всюду в физике устойчивые сложные объекты обычно образуются в результате действия сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить энергию при их связывании. Однако, последние годы учеными доказано, что в упорядоченных средах устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий. Модель Бозе-Хаббарда, используемый для описания отталкивающих пар, т.е. оператор Шредингера на решетке, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем частиц на решетке, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также решетчатой теории поля, является одним из приоретных направлений.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделяется направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, особое внимание было уделено исследованию операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем частиц на целочисленной решетке. Значительные результаты были достигнуты по определению условий существования связанных состояний и их числа вне существенного спектра, а также пороговых эффектов существенного спектра для операторов Шредингера, соответствующих системам двух и трех частиц на решетке.

Поскольку, спектр семейства операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух и трех квантовых частиц на решетке, является довольно чувствительным к изменению квазиимпульса системы, важную роль играет решение проблем, относящиеся исследований спектров этих операторов, в частности, существование связанных состояний и определить их числа для трехчастичных дискретных операторов Шредингера. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: исследовать дискретный спектр операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (бозонов или фермионов) с парными коротко-действующими потенциалами на решетке, установить пороговые явления существенного спектра для этих операторов, получить асимптотические формулы для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке, показать существование собственных значений трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц на одномерной и двумерной решетках. Научные исследования, проводимые в вышеупомя-нутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-436 от 7 августа 2006 года «О мерах по совер-шенствованию координации и управления развитием науки и технологии», № ПП-916 от 15 июля 2008 года «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства» а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

**Связь исследования к приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].** Научные исследования по изучению спектра непрерывных и дискретных операторов Шредингера, а также модели Фридрихса, ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Universitat Innsbruck (Австрия), University of Missouri, Princeton University, Harvard University (США), Институте проблем передачи информации РАН, Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Universität Bonn и Universität Mainz (Германия), Санкт-Петербургском отделении Математичес-кого института РАН, Московском государственном университете (Россия), University Roma and SISSA (Италия), University of Basel, Universität Zürich (Швейцария), Universidade de São Paulo (Бразилия), University of Toronto (Канада), Universiti Teknologi Malaysia, Universiti Kebangsaan Malaysia (Малайзия).

В результате научных исследований, проведенных для систем частиц на оптической решетке, двух и трехчастичных операторов Шредингера, а также моделей Фридрихса в мире решены целый ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: гамильтониан Бозе-Хаббарда, т.е. дискретный оператор Шредингера, используемый для описания отталкивающих пар, берется в качестве теоретического обоснования экспериментального наблюдения и доказывается, что в упорядоченных средах устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий (Universitat Innsbruck (Австрия)); изучена зависимость собственных значений от константы связи для двухчастичных непрерывных и дискретных операторов Шредигера (Princeton University (США), University of Basel (Швейцария), Самаркандский государственный университет); исследованы двухчастичные связанные состояния трансфер-матриц довольно широкого класса гиббсовских полей при высокой температуре (Институт проблем передачи информации РАН (Россия)); изучена природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности (Институт проблем передачи информации РАН (Россия)); найдены условия существования собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера с произвольным

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Letter nature doi:10.1038/nature04918, Annals of Physics doi:10.1016/j.aop.2004.09.010, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104253518, Annales del'I.H.P. Physique théorique. http://eudml.org/doc/76764, Функц. анализ и его прил., http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v27/i3/p15, Commun. Math. Phys. doi:10.1007/s00220-005-1454-y, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908588, Матем. сборник http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567, J. Funct. Anal. doi:10.1016/0022-1236(91)90038-7 также были исследованы и другие источники.

потенциалом (Universität Bonn (Германия), University of Missouri (США), Самаркандский государственный университет); доказан эффект Ефимова для трехчастичных непрерывных и дискретных операторов Шредингера (Физико-технический институт РАН, Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН (Россия), (Université Paris Nord (Франция)), Kyoto University (Япония), институт теоретической физики РАН (Россия), Самаркандский государственный университет); получена асимптотика для числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра трехчастичного оператора (Universität Bonn (Германия), Kyoto University (Япония), University of Toronto (Канада), Самаркандский государственный университет).

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях по исследованию спектра и резонансов операторов Шредингера систем двух и трех частиц на решетке, такие как нахождение число и расположение собственных значений в зависимости от размерности решетки, энергии взаимодействия частиц и квазиимпульса системы двухчастичного оператора Шредингера на решетке; исследование пороговых явлений существенного спектра этого оператора, описание существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке, установление существования трехчастичных связанных состояний и исследование свойств соответствующих собственных функций этих операторов.

**Степень изученности проблемы.** Основные задачи атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, квантовой теории поля приводятся к изучению операторов Шредингера. Наиболее полный обзор результатов по этой области содержится в энциклопедии современной математической физики – четырехтомнике М. Рида и Б. Саймона. Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С. Маттисом, А.И.Могильнером и после чегл исследования бурно развились. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. А именно, следует сначала изучить одночастичные операторы, а затем двух, трех и т.д. частичные операторы Шредингера. Задачи о существовании дискретного спектра, а также определения порогового значения константы связи для непрерывных и дискретных операторов Шредингера, а также для обобщенной модели Фридрихса изучались в работах М. Клауза, Б. Саймона, Г.М. Графа, Д. Шенкера, Р.А. Фариа да Веига, Е.Л. Лакштанова, Р.А. Минлоса, С.Н. Лакаева, К. Макарова и др.

Известно, что с уменьшением константы связи значение энергии свзанного состояния двухчастичного оператора Шредингера приближается к краю непрерывного спектра, и при некотором конечном значении константы связи попадает на край. Изучению вопроса о соответствии этому пороговому значению связанного состояния или виртуального уровня посвящены работы Д.Р. Яфаева, Дж. Рауха, Б. Саймона, М. Клауза и С.Н.Лакаева.

С. Албеверио, С. Лакаевым, К. Макаровым и З. Муминовым найдены условия существования собственных значений двухчастичных операторов Шредингера, ассоциированных гамильтонианом системы двух произвольных частиц на $d$ - мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

Появление бесконечного числа собственных значений левее существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера при некоторых условиях на потенциал впервые был обнаружен Ефимовым. Этот эффект был изучен во многих физических работах авторов Д.С. Маттис, А.И.Могильнер. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Д.Р. Яфаева, а затем в работах Ю. Овчинникова, И.М. Сигала, Х. Тамура. Д.Р. Яфаев установил эффект Ефимова, используя метод интегральных уравнений Фаддеева. Однако, Ю. Овчинников и И.М. Сигал интересным вариационным методом установили эффект Ефимова для систем трех частиц, из которых две тяжелые, одна легкая, взаимодействующих с помощью сферически-симметричных парных потенциалов. Х. Тамура используя вариационный метод доказал существование эффекта Ефимова, без ограничения на массы частиц, взаимодействующих с помощью парных потенциалов (не обязательно сферически симметричных) в случае, когда все двухчастичные подсистемы имеют виртуальный уровень в нуле. В работе А.В. Соболева найдены асимптотические формулы для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра трехчастичного непрерывного оператора Шредингера. В многочастичном случае первый нетривиальный результат по конечности дискретного спектра был получен Дж. Ушиямой, изучившим один модельный трехчастичный гамильтониан с кулоновскими потенциалами. Применяя его метод М.А. Антонец, Г.М. Жислин и И.А. Шерешевский установили результаты о конечности дискретного спектра разных трехчастичных систем. Конечность дискретного спектра гамильтонина системы трех частиц на Евклидовом пространстве в одномерном и двумерном случаях доказана Г.М. Жислиным. Впервые С.Н. Лакаевым доказано существование эффекта Ефимова для трехчастичного дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе трех одинаковых частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяже-ния при фиксированном значении квазиимпульса системы. В работах С.Н. Лакаева, Ж.И. Абдуллаева и З.Э. Муминова получены асимптотики для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра разностных операторов Шредингера, соответствующих системам трех частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Конечность дискретного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными контактными потенциалами на одномерной решетке установлена М. Муминовым и Н.Алиевым.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.** Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ "Гамильтонианы систем нескольких частиц на решетке. Спектр и резонансы", Самаркандского отделения АН РУз (ФА-Ф1-

Ф045, 2007-2011 гг.); "Низкоэнергетические эффекты в системах двух и трех частиц на решетке" Самаркандского отделения АН РУз (ФМ-1-016, 2008-2009 гг.); Спектральный анализ гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке (Ф4-ФА-Ф079, Самаркандский государственный университет 2012-2016 гг.).

**Целью исследования** является изучение существенного и дискретного спектров двух и трехчастичных операторов Шредингера, соответствующих системам двух и трех одинаковых частиц (фермионов или бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на решетке.

**Задачи исследования:**

найти условия существования собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующими потенциалами для любой размерности решетки;

установить аналог принципа Бирмана-Швингера для двух и трехчастичных операторов Шредингера на решетке;

определить число собственных значений и пороговых явлений существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионов) с парными взаимодействиями на соседних узлах решетки в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса системы двух частиц;

доказать бесконечность числа собственных значений (эффект Ефимова) и установить асимптотику для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными двухчастичными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке;

установить существование и конечность числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными двухчастичными контактными потенциалами на одномерной и двумерной решетках.

**Объект исследования -** операторы Шредингера, соответствующие системам двух и трех частиц с парными короткодействующими потенци-алами на решетке.

**Предмет исследования -** спектральный анализ двухчастичных операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (фермионов или бозонов) на решетке, трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех одинаковых частиц (бозонов) на решетке.

**Методы исследования.** В диссертации использованы методы математического анализа, математической физики, функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

**Научная новизна исследования** заключается в следующем:

найдены условия существования собственных значений вне существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующим потенциалом при всех размерностях решетки;

доказана конечность числа собственных значений вне существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующим потенциалом на решетке;

найдено число и расположение собственных значений оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионов), взаимодействующих на соседних узлах решетки при всех значениях параметров оператора;

получены асимптотики для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке;

показана конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке при ненулевых значениях квазиимпульса в окрестности нуля;

впервые доказано существование собственного значения оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными контактными потенциалами на одномерной и двумерной решетках.

**Практические результаты исследования -** состоят в возможности применения выводов об аналитичности связанных состояний при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

**Достоверность результатов исследования** обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционально-го анализа и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решениях задач связанных со спектром гамильтонианов систем двух и трех частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в физике твердого тела и квантовой механике.

**Внедрение результатов исследования.** Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

методы определения числа собственных значений операторов Шредингера, соответствующих системе двух частиц на решетке использованы в исследованиях зарубежного проекта QJ130000.2426.01G11 “Eigenvalue problem for the two particle Schrodinger operataor on lattice” для некоторых двух и трехчастичных дискретных операторов Шредингера. (Университет технологии

Малайзия, справка от 1 ноября 2016 года). Применение этих научных результатов дает возможность изучить основные свойства двухчастичных операторов и описать существенный спектр гамильтониана системы трех частиц с экзотическими специальными потенциалами;

результаты для дискретных операторов Шредингера, использованы в исследованиях зарубежного проекта LRGS/TD/2011/UKM/ICT/03/02 "Investigations of the Roles of theThird Variables in Analysing Statistical relationship functions" для обобщенной модели Фридрихса ранга один. (Университет Кебангсаан Малайзия, справка от 26 октября 2016 года). Применение этих научных результатов способствовало получить ряды Пюизо для собственных значений этого оператора.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты исследования обсуждались на научно-практических конференциях, в том числе: республиканской конференции молодых ученых (Ташкент, 2003 г., 2004 г.), «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Ташкент, 2005 г.), «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005 г.), «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2005 г.), «Актуальные проблемы математического анализа» (Ургенч, 2012 г.), «Некорректные и неклассические задачи математического анализа и математической физики» (Самарканд, 2012 г.), «International Seminar on Mathematics and Natural Sciences» (Самарканд, 2013 г.), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложе-ния» (Ташкент, 2013 г.), «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2014 г.), «Современные методы математической физики и их приложения», (Ташкент, 2015 г.), «IV Congress of the Turkic World Mathematical Society» (Baku, 2011), Третий международный Рос-сийско-Казахский симпозиум (Нальчик, 2014 г.). Выступления и доклады прошли широкую апробацию. Результаты исследований обсуждались на семинаре «Математический анализ и его приложения в современной математической физике» Самаркандского государственного университета, на семинаре Института прикладной математики (университет Бонн, Германия, 2004 г., 2007 г.), на республиканском семинаре «Операторные алгебры и их приложения» Института Математики при Национальном университете Узбекистана (2013 г., 2016 г.), на городском семинаре «Функциональный аналий и его приложений» Национального университета Узбекистана (2014-2016 гг.).

**Опубликованность результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 41 научных работ, из них 13 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе из них 6 опубликованы в зарубежных журналах и 7 в республиканских научных изданиях.

**Объём и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 161 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Спектральные свойства ограниченных операторов (Предварительные сведения)»**, приведены необходимые предварительные сведения, основные теоремы спектральной теории и теории возмущений самосопряженных операторов, которые будут использованы при изложении основных результатов диссертации.

Вторая глава диссертации, названная **«Двухчастичные операторы Шредингера, соответствующие системам двух частиц (фермионов) на решетке»,** посвящена исследованию спектральных свойств операторов Шредингера, соответствующих системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующими потенциалами на $d$-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Изучены собственные значения и пороговые явления существенного спектра этого оператора в зависимости от квазиимпульса системы.

Пусть $\mathbb{Z}^d$ – $d$-мерная целочисленная решетка и $(\mathbb{Z}^d)^2$ – декартово произведение $\mathbb{Z}^d$. Обозначим через $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^d)^2$ и через $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2] \subset \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]$ – подпространство, состоящее из антисимметричных функций.

Свободный гамильтониан $\hat{h}_0$ системы двух одинаковых частиц (фермионов) в координатном представлении определяется оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ по формуле

$$\hat{h}_0 = \frac{1}{2m}\Delta_{x_1} + \frac{1}{2m}\Delta_{x_2}, \tag{1}$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, а $m > 0$ – масса фермиона, $I$ – единичный оператор в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $\otimes$ тензорное произведение. Решетчатый Лапласиан $\Delta$ – разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x+s)], \quad \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

где $|s| = |s^{(1)}| + \ldots + |s^{(d)}|$; $s = (s^{(1)}, \ldots, s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$.

Гамильтониан системы двух фермионов (двухчастичный гамильтониан) $\hat{H}$ описывает взаимодействие двух частиц в гильбертовом пространстве $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ по формуле

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{v}-$ оператор умножения на вещественнозначную функцию

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]. \tag{2}$$

*Условие 1.* Предположим, что функция $\hat{v}(s) \geq 0$ четна на $\mathbb{Z}^d$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{2+\varepsilon}\,\hat{v}(s) = 0, \text{ при } d = 1, 2$$

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{3+\frac{1}{2}+\varepsilon}\,\hat{v}(s) = 0, \text{ при } d = 3,$$

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{d+\varepsilon}\,\hat{v}(s) = 0, \text{при } d \geq 4,$$

где $\varepsilon > 0-$ некоторое положительное число.

Пусть $\mathbb{T}^d -$ $d$- мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^d$ – с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$, а $L^2(\mathbb{T}^d)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^d$ и $L^{2,o}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d) -$ подпространство нечетных функций.

После преобразований Фурье, выделения полного квазиимпульса системы двух частиц разложения в прямой операторный интеграл, изучение спектра гамильтониана $\hat{h}$ сводится к изучению спектра семейства операторов $h(k), k \in \mathbb{T}^d$, действующих в гильбертовом пространстве $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - v. \tag{3}$$

Невозмущенный оператор $h_0(k)$ есть оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_k(q)$ в $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$, т.е.

$$(h_0(k) f)(q) = \mathcal{E}_k(q) f(q), \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}^d),$$

где

$$\mathcal{E}_k(q) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{d}(1 - \cos\frac{k^{(i)}}{2} cosq^{(i)}).$$

Оператор взаимодействия (оператор возмущения) $v$ действует в гильбертовом пространстве $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$(vf)(q) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{T}^d} v(q-t) f(t)dt, \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}^d).$$

Здесь

$$v(k) = (2\pi)^{-d/2}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(s)e^{\mathrm{i}(k,s)}, \tag{4}$$

где $(k,s)=\sum_{j=1}^{d}k^{(j)}s^{(j)},\quad k=(k^{(1)},\ldots,k^{(d)})\in\mathbb{T}^d,\quad s=(s^{(1)},\ldots,s^{(d)})\in\mathbb{Z}^d.$

При выполнении условия 1 возмущение $v$ оператора $h_0(k)$ принадлежит классу операторов со следом и следовательно, из теоремы Вейля о существенном спектре существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$, определенного по (3), совпадает со спектром оператора $h_0(k)$. Так как $h_0(k)$ есть оператор умножения на функцию,

$$\sigma_{ess}(h(k))=[\mathcal{E}_{\min}(k),\mathcal{E}_{\max}(k)],$$

где

$$\mathcal{E}_{\min}(k)=\min_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q),\quad \mathcal{E}_{\max}(k)=\max_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q).$$

*Замечание 1.* При $k=(\pi,\pi,\ldots,\pi)\in\mathbb{T}^d$ существенный спектр оператора $h(k)$ вырождается, т.е. превращается в точку, и поэтому мы не можем утверждать, что $\sigma_{ess}(h(k))$ является абсолютно непрерывным при любом $k\in\mathbb{T}^d$.

Известно, что положительный корень $v^{\frac{1}{2}}$ оператора $v$ имеет вид

$$(v^{\frac{1}{2}}f)(p)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{T}^d}v^{\frac{1}{2}}(p-p')f(p')dp',$$

где ядро $v^{\frac{1}{2}}(p)$ есть обратное преобразование Фурье функции $\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)$, т.е.,

$$v^{\frac{1}{2}}(p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)e^{\mathrm{i}(p,s)}.$$

Для каждого $k\in(-\pi,\pi)^d$ и $z\le\mathcal{E}_{\min}(k)$ (и для каждого $k\in\mathbb{T}^d\setminus(-\pi,\pi)^d$ и $z<\mathcal{E}_{\min}(k)$) определим интегральный оператор Бирмана-Швингера $\mathbb{B}(k,z)$ с ядром

$$\mathbb{B}(k,z;p,s)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^{\frac{1}{2}}(p-t)v^{\frac{1}{2}}(t-s)dt}{\mathcal{E}_k(t)-z}.$$

Отметим, что для любого $z<\mathcal{E}_{\min}(k)$ имеет место равенство $\mathbb{B}(k,z)=v^{\frac{1}{2}}r_0(k,z)v^{\frac{1}{2}}$ , где $r_0(k,z)$– резольвента оператора $h_0(k)$.

*Определение 1.* Пусть $d=1$ или 2 и выполняется условие 1. Предположим, что уравнение

$$\mathbb{B}(\mathbf{0},0)\psi=\psi,\ \mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{T}^d$$

имеет ненулевое решение $\psi\in L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$. Будем говорить, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p)}\notin L^{2,o}(\mathbb{T}^d).$$

Предположим, что выполняется условие 1. Тогда справедливы следующие теоремы:

*Теорема 1.* Пусть $d=1$ или $d$=2. Если оператор $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией или $z=0$ является собственным значением оператора $h(\mathbf{0})$, то для любого $k\neq 0$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра.

*Теорема 2.* Пусть $d\geq 3$. Если число $z=0$ является $n-$ кратным собственным значением оператора $h(\mathbf{0})$, то для любого $k\neq 0$ оператор $h(k)$ имеет не менее $n$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

*Теорема 3.* Для любых $k\in(-\pi,\pi)^d$ и $d\in\mathbb{N}$ оператор $h(k)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

*Замечание 2.* Так как возмущенный оператор $v$ положителен, $h(k)$ не имеет собственных значений правее $\mathcal{E}_{\max}(k)$.

В параграфе 2 главы 2 рассматривается гамильтониан $\hat{h}_\mu$ системы двух фермионов, движущихся на $d-$ мерной решетке $\mathbb{Z}^d, d\geq 1$ и взаимодейству-ющих на ближайших соседних узлах. Установлены число и местоположение собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, ассоциирова-нного с гамильтонианом $\hat{h}_\mu$ в зависимости от параметров оператора: от значений энергии взаимодействия на соседних узлах $\mu>0$ и полного квазиимпульса системы $k\in\mathbb{T}^d$.

Предположим, что операторы $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ определены по формулам (1) и (2), а функция $\hat{v}$ имеет вид:

$$\hat{v}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu}{2} & \text{при} \quad |x|=1,\\ 0 & \text{при} \quad |x|\neq 1.\end{cases}$$

Тогда оператор возмущения $v$ является интегральным оператором ранга $d\geq 1$, действующим в гильбертовом пространстве $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$(vf)(q)=\mu(2\pi)^{-d}\sum_{i=1}^{d}\sin q^{(i)}\int_{\mathbb{T}^d}\sin t^{(i)} f(t)dt.$$

Заметим, что функция $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)=\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q^{(1)},q^{(2)},\ldots,q^{(d)})$ имеет невырожденный минимум в нуле и инвариантна относительно перестановки аргументов $q^{(1)},q^{(2)},\ldots,q^{(d)}$, следовательно интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^d}\frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)}dq$$

существует и не зависит от выбора $i=\overline{1,d}$.

Пусть

$$\mu_0 = (2\pi)^d \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)} dq\right)^{-1}, i = \overline{1,d}.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

*Теорема 4.* $a$). Пусть $0 < \mu < \mu_0$. Тогда существует разбиение тора $\mathbb{T}^d$, т.е. непустые множества $G_\mu^{(l)}, l = \overline{0,d}$ такие, что

$$G_\mu^{(l)} \bigcap G_\mu^{(j)} = \varnothing,\ l \neq j,\ \ j = \overline{0,d},\ \bigcup_{i=0}^{d} G_\mu^{(i)} = \mathbb{T}^d,$$

и при $k \in G_\mu^{(0)}$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ существенного спектра; при $k \in G_\mu^{(l)}, l = \overline{1,d}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет только $l$ собственных значений $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1,l}$ с учетом кратности, левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ и $z_\mu^{(i)}(k) > 0, i = \overline{1,l}.$

$b$). Пусть $\mu = \mu_0$. При $d = 1$ или 2 оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет $d-$ кратный виртуальный уровень на пороге $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0}) = 0$. При $d \geq 3$ порог $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0}) = 0$ является $d-$ кратным собственным значением оператора $h_\mu(\mathbf{0})$. Для любых $d \in N$ и $k \in \mathbb{T}^d, k \neq \mathbf{0}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно $d$ собственных значений $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1,d}$ с учетом кратности левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ и $z_\mu^{(i)}(k) > 0, i = \overline{1,d}.$

$c$). Пусть $\mu > \mu_0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{T}^d$ оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно $d$ собственных значений $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1,d}$ левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$. При $\mu > 4d$ имеет место $z_\mu^{(i)}(k) < 0, i = \overline{1,d}.$

В третьей главе диссертации, названной **«Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера на решетке»**, доказан эффект Ефимова и получены асимптотики для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке. Показана конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра при ненулевых значениях квазиимпульса в окрестности нуля.

В первом и втором параграфах главы 3 диссертации рассматриваются операторы $\hat{h}$, $\hat{H}$ энергии систем двух и трех бозонов на решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения. Эти операторы описываются в импульсном представлении. После выделения полных квазиимпульсов систем частиц, операторы $h$, $H$ в импульсном представлении разлагаются в прямой интеграл Неймана и сводятся к изучению семейств операторов $h(k),\ k \in \mathbb{T}^d$, $H(K),\ K \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]-$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на декартовом произведении $(\mathbb{Z}^d)^m, d = 1,2,...$ и пусть $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^m] \subset \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]$ подпространство симметричных функций относительно перестановки любых двух переменных.

Оператор энергии системы двух свободных одинаковых частиц (бозонов) с массой $m=1$ на $d$-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ в координатном представлении ассоциируется с ограниченным самосопряженным оператором $\hat{h}_0$ в гильбертовом пространстве $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$:

$$\hat{h}_0 = \Delta \otimes I + I \otimes \Delta.$$

Полный гамильтониан системы двух одинаковых квантовых частиц (бозонов) с двухчастичными короткодействующими взаимодействиями $\hat{v}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ и является ограниченным возмущением свободного гамильтониана $\hat{h}_0$:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v}.$$

Здесь

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_\beta, x_\gamma) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_\beta, x_\gamma), \quad \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2].$$

*Условие 2.* Функция $\hat{v}(s)-$ вещественнозначная, четная, неотрицательная на $\mathbb{Z}^d$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{d+\theta}\, \hat{v}(s) = 0, \quad \theta > \frac{1}{2}.$$

Аналогично, оператор энергии $\hat{H}_0$ системы трех свободных одинаковых квантовых частиц (бозонов) на $d$-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ определяется в гильбертовом пространстве $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$ по формуле:

$$\hat{H}_0 = \Delta \otimes I \otimes I + I \otimes \Delta \otimes I + I \otimes I \otimes \Delta.$$

Оператор энергии $\hat{H}$ полной системы трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) с парными двухчастичными потенциалами $\hat{v} = \hat{v}_\alpha = \hat{v}_{\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$ является ограниченным возмущением оператора $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mathbb{V}},$$

где $\hat{\mathbb{V}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{V}_\alpha, \hat{V}_\alpha = \hat{V},\ \alpha = 1,2,3-$ оператор умножения в $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$, определенный по формуле

$$(\hat{V}_\alpha \hat{\psi})(x_1, x_2, x_3) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3), \ \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3].$$

Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d -$ $d-$ мерный тор и $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^m] \subset L^2[(\mathbb{T}^d)^m]-$ подпространство симметричных функций, определенных в декартовом произведении $(\mathbb{T}^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{F}$ – стандартное преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d), \quad [\mathcal{F}(f)](p) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-\mathrm{i}(p,x)}\, f(x)$$

с обратным

$$\mathcal{F}^*: L^2(\mathbb{T}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad [\mathcal{F}^*(\psi)](x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{\mathrm{i}(p,x)} \psi(p) dp,$$

и $\hat{\Delta} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^*$ – преобразование Фурье Лапласиана $\Delta$.

Отметим, что $\hat{\Delta}$ является оператором умножения на функцию $\varepsilon(\cdot)$, т.е.

$$(\hat{\Delta}f)(k) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

где

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, ..., p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d.$$

Двухчастичный оператор $h$ полной системы двух частиц (полный гамильтониан) в импульсном представлении в пространстве $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ определяется по формуле

$$h = h_0 - v.$$

Оператор энергии $h_0$ системы двух свободных частиц (свободный гамильтониан) имеет вид

$$h_0 = \hat{\Delta} \otimes I + I \otimes \hat{\Delta},$$

т.е. оператор $h_0$ является оператором умножения на функцию $\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)$:

$$(h_0 f)(k_\beta, k_\gamma) = (\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)) f(k_\beta, k_\gamma), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2].$$

Интегральный оператор $v-$ оператор типа свертки:

$$(vf)(k_\beta, k_\gamma) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} v(k_\beta - k_{\beta'}) \delta(k_\beta + k_\gamma - k_{\beta'} - k_{\gamma'}) f(k_{\beta'}, k_{\gamma'}) dk_{\beta'} dk_{\gamma'}, \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

где $\delta(\cdot)-$ делта- функция Дирака на $\mathbb{T}^d$, а функция $v(k)$ определяется через ряд Фурье (4).

Трехчастичный оператор $H$ полной системы трех частиц (полный гамильтониан) в импульсном представлении определяется как самосопряженный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ по формуле:

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3,$$

где $H_0$ имеет вид

$$H_0 = \hat{\Delta} \otimes I \otimes I + I \otimes \hat{\Delta} \otimes I + I \otimes I \otimes \hat{\Delta},$$

т.е. оператор энергии $H_0$ системы трех свободных частиц является оператором умножения на функцию $\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon(k_\alpha)$:

$$(H_0 f)(k_1, k_2, k_3) = [\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon(k_\alpha)] f(k_1, k_2, k_3),$$

и

$$(V_\alpha f)(k_1,k_2,k_3)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int\limits_{(\mathbb{T}^d)^3} v(k_\beta-k_{\beta'})\times$$

$$\times\delta(k_\alpha-k_{\alpha'})\delta(k_\beta+k_\gamma-k_{\beta'}-k_{\gamma'})f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_{2'}dk_3',\quad f\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3].$$

Обозначим через $k=k_1+k_2\in\mathbb{T}^d$ соотв. $K=k_1+k_2+k_3\in\mathbb{T}^d$ *двух-* соотв. *трехчастичный квазиимипульс.*

Пусть $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)$ – подпространство четных функций. Разложение гильбертова пространства $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ соотв. $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3]$ в прямой интеграл

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]=\int_{k\in\mathbb{T}^d}\oplus L^{2,e}(\mathbb{T}^d)dk$$

соотв.

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3]=\int_{K\in\mathbb{T}^d}\oplus L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]dK$$

влечет разложение оператора энергии $h$ соотв. $H$ в прямой интеграл

$$h=\int\limits_{k\in\mathbb{T}^d}\oplus\tilde{h}(k)dk \qquad (5)$$

соотв.

$$H=\int\limits_{K\in\mathbb{T}^d}\oplus\tilde{H}(K)dK \qquad (6)$$

В третьем параграфе третьей главы вводится понятие резонанса с нулевой энергией для двухчастичного дискретного оператора Шредингера.

Пусть $d=3$. Слойный оператор $\tilde{h}(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, в разложении в прямой интеграл (5) унитарно эквивалентен оператору $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, который имеет вид

$$h(k)=h_0(k)-v.$$

Операторы $h_0(k)$ и $v$ определяются в гильбертовом пространстве $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$(h_0(k)f)(k_\beta)=\mathcal{E}_k(k_\beta)f(k_\beta),\quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

где

$$\mathcal{E}_k(k_\beta)=\varepsilon(\frac{k}{2}-k_\beta)+\varepsilon(\frac{k}{2}+k_\beta)$$

и

$$(vf)(k_\beta)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{\mathbb{T}^3}v(k_\beta-k_\beta')f(k_{\beta'})dk_{\beta'},\quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^3).$$

Слойный оператор $\tilde{H}(K)$, $K\in\mathbb{T}^3$ в разложении в прямой интеграл (6) унитарно эквивалентен оператору $H(K)$, $K\in\mathbb{T}^3$, и имеет вид

$$H(K)=H_0(K)-V_1-V_2-V_3.$$

Операторы $H_0(K)$ и $V_\alpha \equiv V, \alpha=1,2,3,$ определяются в гильбертовом пространстве $L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2] \cong L_2(\mathbb{T}^3) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ и в координатах $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ принимает следующее представление

$$(H_0(K)f)(k_\alpha,k_\beta) = E(K;k_\alpha,k_\beta)f(k_\alpha,k_\beta), \quad f \in L^{2,e}((\mathbb{T}^3)^2),$$

$$E(K;k_\alpha,k_\beta) = \varepsilon(K-k_\alpha)+\varepsilon(\frac{k_\alpha}{2}-k_\beta)+\varepsilon(\frac{k_\alpha}{2}+k_\beta),$$

$$(V_\alpha f)(k_\alpha,k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{T}^3} v(k_\beta - k'_\beta) f(k_\alpha,k_{\beta'})dk_{\beta'}, \quad f \in L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2].$$

Так как функция $\mathcal{E}_k(q)$ имеет единственный невырожденный минимум в $q=0,$ для каждого $k \in U_\delta(0)$ и $z \le \mathcal{E}_{\min}(k)$ интеграл

$$\mathbb{B}(p,q;k,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v^{\frac{1}{2}}(p-t)v^{\frac{1}{2}}(t-q)dt}{\mathcal{E}_k(t)-z}$$

конечен.

Определим интегральный оператор $\mathbb{B}(k,z)$ в $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$\mathbb{B}(k,z)f(p) = \int_{\mathbb{T}^3}\mathbb{B}(p,q;k,z)f(q)dq.$$

*Замечание 3***.** Ясно, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет собственное значение $z \le \mathcal{E}_0(\mathbf{0}) = 0$, т.е., $\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-zI) \ne 0$, тогда и только тогда, когда компактный оператор $\mathbb{B}(\mathbf{0},z)$ действует в $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$, имеет собственное значение 1 и существует функция $\psi \in \operatorname{Ker}(I-\mathbb{B}(\mathbf{0},z))$, что функция $f$, определенная по

$$f(p) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p)-z} \qquad \text{п.в.} \quad p \in \mathbb{T}^3,$$

принадлежит в $L^2(\mathbb{T}^3)$. В этом случае $f \in \operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-zI)$.

Кроме того, если $z<0$, тогда

$$\dim\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-zI) = \dim\operatorname{Ker}(I-\mathbb{B}(\mathbf{0},z))$$

и

$$\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-zI) = \{f \mid f(\cdot) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot)-z}, \ \psi \in \operatorname{Ker}(I-\mathbb{B}(\mathbf{0},z))\}.$$

*Определение 2.* Оператор $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергиий (пороговый), если 1 собственное значение оператора $\mathbb{B}(\mathbf{0},0)$ и для соответствующей собственной функции (нормализованной) $\psi$ выполняется соотношение

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot)} \notin L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

т.е.,

$$1 \le \dim \operatorname{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \ge \dim \operatorname{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) + 1.$$

*Теорема 5.* Предположим, что выполняется условие 2. Пусть $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией и $h(\mathbf{0}) \ge 0$. Тогда при всех $k \in \mathbb{T}_0^3$ оператор $h(k)$ имеет единственное положительное собственное значение $z(k)$, лежащее левее существенного спектра. Кроме того, существует окрестность нуля $U_\delta(\mathbf{0})$, что при всех $k \in U_\delta(\mathbf{0})$ функция $z(k)-$ является четной и непрерывной в $U_\delta(\mathbf{0})$.

Пусть:

$$E_{\min}(K) \equiv \min_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} E(K, k_\alpha, k_\beta), \quad E_{max}(K) \equiv \max_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} E(K, k_\alpha, k_\beta).$$

*Теорема 6***.** Для существенного спектра оператора $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ имеет место следующее равенство:

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h(p)) + \varepsilon(K-p)\} \cup [E_{min}(K), E_{max}(K)],$$

где $\sigma_d(h(k))$ дискретный спектр оператора $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$.

Множество

$$\sigma_{ess}^{(3)}(H(K)) = [E_{min}(K), E_{max}(K)] = \bigcup_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} \{E(K; k_\alpha, k_\beta)\}$$

(соотв.

$$\sigma_{ess}^{(2)}(H(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h(p)) + \varepsilon(K-p)\})$$

называется трехчастичной частью (соотв. двухчастичной частью) существенного спектра $H(K)$.

Обозначим через $N(K, z)$ число собственных значений оператора $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, лежащих левее $z \le \tau(K)$, где

$$\tau(K) = \inf \sigma_{ess}(H(K)).$$

*Замечание 5.* При предположниях теоремы 5 выполняются $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0})) = [0, E_{max}(\mathbf{0})]$ и $\sigma_{ess}(H(K)) = [\tau(K), E_{max}(K)]$, где $\tau(K) > 0$ для каждого $K \in \mathbb{T}_0^3$.

*Теорема 7.* Предположим, что выполнены условия теоремы 5. Тогда оператор $H(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее нижнего края существенного спектра, и для функции $N(\mathbf{0}, z)$ выполняется соотношение

$$\lim_{z \to -0} \frac{N(\mathbf{0}, z)}{|\log|z||} = \frac{\lambda_0}{2\pi},$$

где $\lambda_0$ единственное положительное решение уравнения

$$\lambda = \frac{8 \sinh \pi\lambda/6}{\sqrt{3} \cosh \pi\lambda/2}.$$

*Теорема 8***.** Пусть выполнены предположения теоремы 5. Тогда при всех $K \in U_\delta^0(\mathbf{0})$ число $N(K,0)$ конечно и выполняется следующая асимптотика

$$\lim_{|K|\to 0} \frac{N(K,0)}{|\log|K||} = \frac{\lambda_0}{\pi}.$$

*Замечание 6.* Если оператор $h(\mathbf{0})$ имеет отрицательное собственное значение, то $\sigma_{ess}(H(K)) = [\tau(K), E_{max}(K)]$, где $\tau(K) < 0$ для каждого $K \in \mathbb{T}^3$. В этом случае трехчастичный оператор имеет непустой двухчастичный существенный спектр и $N(K, \tau(K)) < \infty$.

В четвертой главе диссертации, названной «**О существовании и конеч-ности числа собственных значений трехчастичного оператора Шредин-гера на решетке**», доказаны существование и конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех одинаковых частиц (бозонов) с парными контактными потенциалами на одномерной и двумерной решетке.

В первом параграфе четвертой главы операторы Шредингера, соответствующие системам двух и трех одинаковых частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов представляется в импульсном представлении. Пусть

$$\hat{v}(x_\beta - x_\gamma) = \delta_{x_\beta x_\gamma},$$

где $\delta_{x_\beta x_\gamma}$ – символ Кронекера.

Двухчастичный оператор Шредингера $h_\lambda(k),\ k \in \mathbb{T}^d$, соответствуюший системе двух бозонов с контактным потенциалом, действует в $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ по формуле:

$$h_\lambda(k) = h_0(k) + \lambda v.$$

Здесь

$$(vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(q)dq, \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d),$$

$\lambda < 0$ $(\lambda > 0)$– энергия контактного взаимодействия притяжения (отталкивания) частиц.

Аналогично, трехчастичный оператор $H_\lambda(K),\ K \in \mathbb{T}^d$, определяется по формуле:

$$H_\lambda(K) = H_0(K) + \lambda(V_1 + V_2 + V_3).$$

Здесь $H_0(K), K \in \mathbb{T}^d$, действует в $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ как оператор умножения на функцию:

$$(H_0(K)f)(p,q) = E(K;p,q)f(p,q), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

где

$$E(K;p,q) = \varepsilon(K-p-q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q).$$

Оператор $\mathbb{V} = V_1 + V_2 + V_3$ действует в $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ и в координатах $(p,q) \in (\mathbb{T}^d)^2$ имеет вид

$$(\mathbb{V}f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(p,t)dt+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,q)dt+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,K-p-q)dt.$$

*Теорема 9.* Для любого $\lambda \neq 0$ существенный спектр оператора $H_\lambda(K)$ определяется равенством

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K))=\bigcup_{k\in\mathbb{T}^d}\{e_\lambda(k)+\varepsilon(K-k)\}\bigcup[\mathrm{E}_{\min}(K),\mathrm{E}_{\max}(K)],$$

где $e_\lambda(k)$ единственное собственное значение оператора $h_\lambda(k),\ k\in\mathbb{T}^d$.

Пусть $U_{\delta(K)}[p_\lambda(K)]=\{K\in\mathbb{T}^d :|K-p_\lambda(K)|<\delta\}-$ $\delta=\delta(K)-$ окрестность точки $p_\lambda(K)\in\mathbb{T}^d$.

Справедлива теорема, утверждающая конечность числа собственных значений оператора $H_\lambda(K)$, а также регулярность собственных значений и соответствующих связанных состояний.

*Теорема 10.* Пусть $d=1{,}2$ и $\lambda<0$. Тогда

1. Существует $\delta>0$, что при всех $K\in U_\delta[0]$ оператор $H_\lambda(K)$ имеет конечное число собственных значений $E_{1,\lambda}(K),\ldots,E_{n,\lambda}(K)$, лежащих левее нижнего края существенного спектра $\sigma_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$.

2. Связанное состояние $\psi_{\lambda,E_\lambda(K)(\cdot,\cdot)}\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ оператора $H_\lambda(K)$, соответствующее собственному значению $E_\lambda(K),\,K\in U_\delta[0]$ регулярно по $(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2$. Кроме того, собственное значение $E_\lambda(\cdot),\,K\in U_\delta[0]$ и векторнозначное отображение

$$\psi_\lambda:U_\delta[0]\to L^2[U_\delta[0];L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]],\qquad K\to\psi_{\lambda,E_\lambda(K)}$$

также регулярны по $K\in\mathbb{T}^d$.

Сформулируем теорему о существовании связанных состояний оператора $H_\lambda(K),\ K\in\mathbb{T}^d$, которая является одним из основных результатов этой главы.

*Теорема 11.* Пусть $d=1{,}2$.

1. При всех $\lambda<0$ и $K\in\mathbb{T}^d$ оператор $H_\lambda(K)$ имеет собственное значение $E_\lambda(K)$, лежащее левее нижнего края $\tau^b_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$ существенного спектра.

2. При всех $\lambda>0$ и $K\in\mathbb{T}^d$ оператор $H_\lambda(K)$ имеет собственное значение $E_\lambda(K)$, лежащее правее верхнего края $\tau^t_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$ существенного спектра.

*Следствие 2.* Для достаточно большого $|\lambda|$ двухчастичный $h_\lambda$ (соотв. трехчастичный гамильтониан $H_\lambda$) имеет изолированный полосатый спектр

$$[\min_k e_\lambda(k),\max_k e_\lambda(k)]\ \ ([\min_K E_\lambda(K),\max_K E_\lambda(K)]).$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Диссертационная работа посвящена исследованию существенного и дискретного спектров двух и трехчастичных операторов Шредингера, соответствующих системам двух и трех одинаковых частиц (фермионов или бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на решетке.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Введено понятия резонанса для оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующим потенциалом на одномерной и двумерной решетках.
2. Найдены условия существования собственных значений вне существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующим потенциалом при всех размерностях решетки.
3. Найдены число и расположение собственных значений оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионов), взаимодействующих на соседних узлах решетки при всех значениях параметров оператора.
4. Получены асимптотические формулы для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке.
5. Показана конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (бозонов) с парными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке при ненулевых значениях квазиимпульса в окрестности нуля.
6. Впервые доказано существование собственного значения вне существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными контактными потенциалами на одномерной и двумерной решетках.
7. Установлена конечность числа собственных значений, лежащих левее нижнего края существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными контактными потенциалами на одномерной и двумерной решетках.

**SCIENTIFIC COUNCIL 14.07.2016.FM.01.01 ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**SAMARKAND STATE UNIVERSITY**

**KHALKHUJAEV AHMAD MIYASSAROVICH**

# ON THE ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRA OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR ASSOCIATED TO A SYSTEM OF TWO AND THREE IDENTICAL PARTICLES ON LATTICES

**01.01.01 – mathematical analysis**
**(Physical and Mathematical Sciences)**

## ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

**Tashkent – 2016**

**The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number №30.09.2014/B2014.3.FM186.**

Doctoral dissertation is carried out at Samarkand State University.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web pages of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

| | |
|---|---|
| **Scientific adviser:** | **Lakaev Saidakhmat Norzhigitovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| **Official opponents:** | **Malishev Vadim Aleksandrovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Moscow State University, Russia) |
| | **Ganikhodzhaev Rasul Nabievich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| | **Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences |
| **Leading organization:** | **University of Missouri** (USA) |

Defense will take place «____» _____________2016 at _____ at the meeting of Scientific Council number 14.07.2016.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2016 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2016 year)

**A.A. Abdushukurov**
Chairman of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S., Professor

**G.I. Botirov**
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, C.F.M.S.

**A. Sadullaev**
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S., academician

## INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

**Actuality and demand of the theme of dissertation.** Numerous scientific and applied researches conducted around the world show the following fact: throughout physics stable composite objects are usually formed by way of attractive forces, which allow the constituents to lower their energy by binding together. Repulsive forces separate particles in a free space. However, in recent years scientists have proved that in a structured environment such a periodic potential and in the absence of dissipation, stable composite objects can exist even for repulsive interactions. The Bose-Hubbard models, which have been used to describe the repulsive pairs, i.e. the Schrödinger operators on lattices is the theoretical basis for the experimental observations and applications. In this regard, the study of Schrödinger operators, associated to Hamiltonians of systems of particles moving on lattices, which appear in models of solid state physics and lattice field theory, is one of the priority areas of science.

In our country in the years of independence, a great attention has been paid to scientific areas having a practical importance; in particular, a great emphasis has been placed on study of Schrödinger operators associated to Hamiltonian of a system of particles moving on integer lattices. Significant results have been achieved in finding conditions for the existence of bound states and for their number, the energy of which is located outside the essential spectrum, and also to the threshold effects of the essential spectrum for Schrödinger operators, associated to systems of two and three particles on lattices.

Since the spectrum of the family of the Schrödinger operators appears quite sensitive to a change of the quasi-momentum of system, solving problems related to the spectrum of these operators, in particular, to prove the existence of bound states as well as to determine their number depending to the quasi-momentum of system, for three particle discrete Schrödinger operators is of highly importance. In this regard, the implementation of investigations in the following directions is one of the main problems: to investigate the discrete spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of two identical particles (bosons or fermions) with short-range pair potentials on lattices; to establish the threshold phenomenon of the essential spectrum for these operators; to obtain an asymptotic formula for the number of eigenvalues for the three-particle Schrödinger operator associated to a system of three identical particles on the three-dimensional lattice with a short-range pair interaction; to show the existence of eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator associated to a system of three identical particles on lattices of dimensions one and two. Many research activities carried out in the aforementioned scientific areas all around the world exhibit a great interest and motivation to the topic of dissertation.

The research conducted in this thesis corresponds to the tasks specified in the Decree of the President of the Republic of Uzbekistan № PD-436 on August 7, 2006 “On measures to improve coordination and management of the development of science and technology”, No. PD-916 from July 15, 2008 “On additional measures to stimulate innovative projects and technologies” and other normative and legal acts relating to the fundamental sciences.

**Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic.** This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, “Mathematics, Mechanics and Computer Science”.

**A review of foreign scientific research on the theme of the dissertation[3].**

Studies of the continuous and discrete spectrum of the Schrödinger operator, and the Friedrich's model, conducted in major scientific centers and universities of the world, in particular: in the Universität Innsbruck (Austria), University of Missouri, Princeton University (USA), Institute for information transmission problems of the Russian Academy of Sciences, Université Paris Nord (France), Kyoto University (Japan), Universität Bonn and the Universität Mainz (Germany), St. Petersburg Department of the Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow State University (Russia), University Roma and SISSA (Italy), University of Basel, Universität Zürich (Switzerland), Universidade de São Paulo (Brazil), Universiti Teknologi Malaysia, Universiti Kebangsaan Malaysia (Malaysia).

As a result of scientific research conducted on a system of particles in the optical lattice, for the two and three-particle Schrödinger operators, as well as Friedrichs' models a number of problems have been solved; in particular: Bose-Hubbard Hamiltonian, i.e., the discrete Schrödinger operator, which is used to describe the repulsive pair is a basis of experimental observations and applications, where it is proven the existence stable objects for repulsive interactions in a structured environment and in the absence of dissipation (Universitat Innsbruck (Austria)); the dependence of the eigenvalues to the two-particle coupling constant for continuous and discrete Schrödinger operators has been studied (Princeton University (USA), University of Basel (Switzerland), Samarkand State University); the bound states of the transfer matrices for a wide class of Gibbs fields at high temperature have been explored (Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Russia)); the nature of appearance of bound states of the two-particle cluster operator for small values of the parameter of clustering is studied (Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Russia)); the conditions for the existence of eigenvalues of the two-particle discrete Schrödinger operator with arbitrary potential have been found (Universität Bonn (Germany), University of Missouri (USA), Samarkand State University); the existence Efimov’s effect for the continuous and discrete three-particle Schrödinger operators is proven (University of Toronto (Canada), St. Petersburg Department of the Steklov Institute of Mathematics, RAS (Russia), University of

---

[3] Review of foreign scientific research on the topic of the dissertation: Journal of Approximation Theory, Applied Letter nature doi:10.1038/nature04918, Annals of Physics doi:10.1016/j.aop.2004.09.010, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid. pp/1104253518, Annales del'I.H.P. Physique théorique. http://eudml.org/doc/76764, Func. anal and its apl., http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v27/i3/p15, Commun. Math. Phys. doi:10.1007/s00220-005-1454-y, Comm. Math. Phys. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908588, Math. collec http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567, J. Func. Anal. doi:10.1016/0022-1236(91)90038-7

Sussex, Brighton, (United Kingdom), Kyoto University (Japan), Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences (Russia), Samarkand State University); an asymptotics for the number of eigenvalues accumulating to the left edge of the essential spectrum for the continuous and discrete three-particle Schrödinger operators has been obtained (University of Sussex, Brighton (United Kingdom)), Universität Bonn (Germany), Kyoto University (Japan)) , Samarkand State University).

Also there are a number of research projects in priority areas for the study of the spectrum and resonances of the Schrödinger operators of systems of two and three particles on lattices: to study the location of the eigenvalues depending on the lattice dimension, the interaction energy of the particles and the quasi-momentum of system of the two-particle Schrödinger operators; to explore the threshold phenomenon of the essential spectrum for the two-particle Schrödinger operator; to describe of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices; to establish the existence of bound states and to study their analytical properties of the two and three-particle Schrödinger operators.

**The degree of scrutiny of the problem.** The main problems of the atomic and molecular physics, solid state physics, quantum field theory leads to the study of the Schrödinger operators. We refer to the four-volume encyclopedia of modern mathematical physics of M. Reed and B. Simon for more comprehensive overview of the results in this area. The Schrödinger operators corresponding to particle systems on lattices was considered for the first time in 90-ies of the last century by D.S. Mattis, A.I. Mogilner and then the related research has evolved rapidly. From the mathematical point of view in the theory of the lattice Schrödinger operators the same problems and the same order of study can be observed as in the theory of continuous Schrödinger operators. Namely, it is necessary to understand first the one-particle case, then two, three, etc. particle lattice Schrödinger operators. The problems of existence of a discrete spectrum, as well as the determination of the coupling constant threshold for continuous and discrete Schrödinger operators has been studied by M. Klaus, B. Simon, G.M. Graf, D. Schenker, R.A. Faria da Veiga, E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos, S.N. Lakaev, K. Makarov and etc.

It is known that with a decrease of the coupling constant the energy of a bound state of a two-particle Schrödinger operator becomes close to the edge of the continuous spectrum, and sometimes it attains the edge for some finite value of coupling constant. The study the problem of whether this threshold of the essential spectrum is a bound state or a virtual level has been devoted several papers of D.R Yafaev, J. Rauch, B. Simon and M. Klaus, S.N. Lakaev.

Unlike the continuous Schrödinger operators the discrete Schrödinger operators non trivially depend on the quantity so-called quasi-momentum (analogue of the *momentum* in the former case). S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov and Z.E. Muminov have found conditions for the existence of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator, associated to the Hamiltonian of a system of two arbitrary particles on lattice, depending on the quasi-momentum.

The existence of infinite number of eigenvalues lying below the essential spectrum of the three-particle Schrödinger operator under certain conditions on the potential has been first discovered by V. Efimov. A rigorous mathematical proof of the existence of the Efimov effect was first proved by D.R. Yafaev using the Faddeev integral equations method. Later Yu.Ovchinnikov and I.M. Sigal have proved the Efimov effect using an interesting variational method for a system of three particles, two of which are heavy and one of them is light, interacting via spherically symmetric pair potentials. H. Tamura proved the existence of Efimov effect, using the variational method, without restriction on the mass of particles interacting via the pair potentials (not necessarily spherically symmetric), when all the two-particle subsystems have a virtual level at zero. A.V. Sobolev has found an asymptotic formula for the number of eigenvalues lying below the essential spectrum of three-particle continuous Schrödinger operator. In multi-particle case the first nontrivial result on the finiteness of the discrete spectrum has been established by J. Ushiyama for a model of the three-particle Hamiltonian with Coulomb potentials. Using the method of Ushiyama M.A. Antonets, G.M. Zhislin and I.A. Shereshevskii have established results on the finiteness of the discrete spectrum of different three-particle systems: for instance the finiteness of the discrete spectrum of a system of three-particles moving on Euclidean space of dimensions one and two, has been proven by G.M. Zhislin.

In case of the discrete Schrödinger operators, the existence of the Efimov effect for the discrete three-particle Schrödinger operator, associated to a system of three-identical particles interacting via zero-range attractive pair potentials was first proved by S. N. Lakaev using the Faddeev integral equations method for the fixed value of the quasi-momentum of the system.

In the works of S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov and S.N. Lakaev, J.I. Abdullayev an asymptotics for the number of the eigenvalues lying below the essential spectrum of the Schrödinger operators associated to the systems of three arbitrary and identical particles interacting via pair attractive zero-range potentials have been established. The finiteness of the discrete spectrum of the discrete Schrödinger operator corresponding to a system of three particles on one-dimensional lattice, interacting via pair zero-range attractive pair potentials has been established by N. M. Aliev and M. E. Muminov.

**Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out.** The dissertation work is done in accordance with the planned theme of scientific research “Hamiltonians of systems of multi-particles on lattice” Samarkand branch of Uzbekistan Academy of Sciences (FA-F1-F045, 2007-2011); “Low-energy effects in the systems of two and three particles on lattice” of Samarkand branch of Uzbekistan Academy of Sciences (FM-1-016, 2008-2009); Spectral analysis of Hamiltonian of a systems with non-conserved limited number of particles on lattice (F4-FA-F079, Samarkand State University, 2012-2016).

**The aim of the research** is studying the essential and discrete spectrum of two and three-particle Schrödinger operators associated to a system of two or three identical particles (bosons or fermions) with short-range pair potentials on lattice.

**Research problems**:

to find conditions for existence of eigenvalues of two-particle Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (fermions) with a short-range potential in any dimensional lattice;

to establish an analogue of the Birman-Schwinger principle for two and three-particle Schrödinger operators on lattice;

for the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two particles (fermions) with pair interactions on neighboring sites of lattice to determine the number of eigenvalues and threshold phenomena of the essential spectrum depending on the interaction energy of the particles and the total quasi-momentum of the system of two particles;

to prove infiniteness of the number of eigenvalues (the Efimov effect) and to establish the asymptotic behavior of the eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator associated to a system of three particles (bosons) with pair two-particle short-range potentials in the three-dimensional lattice;

to establish the existence and finiteness of the number of eigenvalues of Schrödinger operators associated to a system of three particles with a pair two-particle zero-range potential on the one and two-dimensional lattices.

**The research object -** Schrödinger operators associated to systems of two and three particles on lattice interacting via short-range pair potentials.

**The research subject -** spectral analysis of two-particle Schrödinger operators associated to systems of two identical particles (fermions or bosons) on lattice, the three-particle Schrödinger operator associated to a system of three identical particles (bosons) on lattice.

**Research methods -** methods of mathematical analysis, mathematical physics, functional analysis and complex analysis.

**The scientific novelty** consists of the following:

the conditions for existence of the eigenvalues outside the essential spectrum of the Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (fermions) with a short-range potential in all dimensions of the lattice is found;

the finiteness of the number of eigenvalues lying outside of the essential spectrum of the Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (fermions) with a short-range potential on lattice is proved;

the number and location of eigenvalues of Schrödinger operator associated to a system of two particles (fermions), interacting on neighboring sites of lattice for all values of the parameters of the operator is determined;

the asymptotic behavior of eigenvalues lying below of the essential spectrum of the Schrödinger operator associated to a system of three particles (bosons) with short-range pair potentials in the three-dimensional lattice is studied;

the finiteness of the number of eigenvalues lying below the essential spectrum of the Schrödinger operator associated to a system of three particles (bosons) with short-range pair potentials in the three-dimensional lattice for nonzero values of the quasi-momentum in the neighborhood of zero is shown;

the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator associated to a system of three particles with pair two-particle zero-range potential in the one and two-dimensional lattices is proved. Our result is the first one in the theory of the three-particle Schrödinger operators.

**Practical results of the study** consists in the possibility of using the findings of the analyticity of bound states in the study of qualitative properties of experimental observations and numerical calculations in solid state physics and quantum mechanics.

**The reliability of the results of the study.** Our results have been obtained under the rigorous of mathematical reasoning using the methods of mathematical analysis, mathematical physics, functional analysis and complex analysis.

**The scientific and practical significance of the research results.** The scientific importance of the results of the study lies in the fact that they can be used in the spectral theory of self-adjoint operators, quantum mechanics, solid state physics, quantum field theory, in particular, solutions of problems related to the spectrum of Hamiltonians of systems of two and three particles on lattice. The practical significance of the dissertation work is determined by the fact that the obtained results serve as a theoretical basis of experimental observations, carried out in solid-state physics and quantum mechanics.

**Implementation of the research results.** The results obtained in the dissertation work were used in the following international research projects:

our methods of determining the number of eigenvalues of the Schrödinger operator associated to a system of two particles on lattice have been used in the foreign project research QJ130000.2726.01K82 on “Eigenvalue problem for the two particle Schrödinger operator on lattice” for some two and three-particle discrete Schrödinger operator. (Malaysia Technology University, a certificate, dated November 1, 2016). The application of our results helps to study the basic properties of the two-particle operators and describe the essential spectrum of the Hamiltonian of system of three particles with some exotic specific potentials;

our the results for discrete Schrödinger operators have been used in the foreign research project ERGS/1/2/2013/STG06/UKM/01/2 on “Investigations of the Roles of the Third Variables in Analysing Statistical relationship functions” for the generalized Friedrichs model of rank one. (University Kebangsaan Malaysia, a certificate dated October 26, 2016). The application of results of the dissertation helped to get Puiseux series for the eigenvalues of aforementioned model operator.

**Approbation of the research results.** The main results of the study has been discussed at scientific conferences, including: the Republican Conference of Young Scientists (Tashkent, 2003, 2004), “Partial Differential Equations and related problems of analysis and informatics” (Tashkent, 2005), “Modern problems of mathematical physics and information technology” (Tashkent, 2005), “The algebra of operators and the quantum theory of probability” (Tashkent, 2005), “Modern problems of mathematical analysis” (Urgench, 2012), “Ill-posed and non-classical problems of mathematical analysis and mathematical physics” (Samarkand, 2012), “International Seminar on Mathematics and Natural Sciences” (Samarkand, 2013), “Modern problems of differential equations and their applications” (Tashkent, 2013 .), “Non-classical equations of mathematical physics and their applications” (Tashkent, 2014), “Modern methods of mathematical physics and their applications" (Tashkent, 2015), "IV Congress of the Turkishc World mathematical Society" (Baku 2011), the third international Russian-Kazakh Symposium (Terskol, 2014). Talks and reports passed a wide approbation. The results also have been discussed in the seminar on "Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics" (Samarkand State University), in the seminar of the Institute of Applied Mathematics (University of Bonn, Germany, 2004, 2007), in the national seminar on "Operator algebras and their applications" (Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan, 2013, 2016), in the seminar on "Functional analysis and application" (National University of Uzbekistan, 2014-2016).

**Publications of the research results.** On the topic of the dissertation 41 research papers has been published in the scientific journals, 13 of which are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the doctoral theses, in addition 6 of them were published in international mathematics and physics journals and other 7 in national mathematical journals.

**The volume and structure of the dissertation.** The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 161 pages.

## THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

**In the introduction** besides the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic, we present a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we reduce the theoretical and practical importance of the obtained results, and give an information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the thesis, titled **"Spectral properties of bounded operators (Preliminary information)"** we reduce some necessary preliminary information, including theorems of spectral theory of self-adjoint operators, perturbation theory, which we employ in the formulation of the main results of the thesis.

The second chapter, titled **"Two-particle Schrödinger operators corresponding to systems of two particles (fermions) on the lattice"**, is devoted to the study of the spectral properties of Schrödinger operators corresponding to the system of two identical particles (fermions) interacting via short-range potentials on *d*- dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. We study the eigenvalues and threshold effects of the essential spectrum of the operator depending on the quasi-momentum of the system. Let $\mathbb{Z}^d$ be $d$-dimensional lattice and $(\mathbb{Z}^d)^2 -$ Cartesian product of $\mathbb{Z}^d$. Denote by $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]$ Hilbert space of square-summable functions defined on $(\mathbb{Z}^d)^2$ and by $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2] \subset \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2]$ subspace of antisymmetric functions.

Free Hamiltonian $\hat{h}_0$ of the system of two identical particles (fermions) in the coordinate representation is defined by the operator acting in Hilbert space $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$:

$$\hat{h}_0 = \frac{1}{2m}\Delta_{x_1} + \frac{1}{2m}\Delta_{x_2}, \tag{1}$$

where $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ and $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, and $m > 0$ – mass of the fermion, $I$ – the identity operator in space $l^2(\mathbb{Z}^d)$ and the symbol $\otimes$ denotes the tensor product of operators. The lattice Laplacian $\Delta$ is the difference operator which describes the transfer of particles from one site to the neighboring one, i.e.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x+s)], \quad \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

where $|s| = |s^{(1)}| + \ldots + |s^{(d)}|$; $s = (s^{(1)}, \ldots, s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$.

Hamiltonian of a system of two fermions (two-particle Hamiltonian) $\hat{H}$ describes the interaction of two particles in a Hilbert space $\ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ as

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

where $\hat{v}$ – the multiplication operator by the real-valued function of the form

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell^{2,a}[(\mathbb{Z}^d)^2]. \tag{2}$$

*Hypothesis 1.* Assume that $\hat{v}(s) \geq 0$ is even nonnegative function on $\mathbb{Z}^d$ and satisfies the conditions

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{2+\varepsilon}\, \hat{v}(s) = 0, \text{ in case } d = 1, 2$$

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{3+\frac{1}{2}+\varepsilon}\, \hat{v}(s) = 0, \text{ in case } d = 3,$$

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{d+\varepsilon}\, \hat{v}(s) = 0, \text{ in case } d \geq 4,$$

where $\varepsilon > 0$ – some positive number.

Let $\mathbb{T}^d$ be $d$- dimensional torus, i.e. cube $(-\pi, \pi]^d$ – with properly identified opposite faces. It is regarded as an Abelian group with the operations of addition and multiplication by a real number given by the addition and multiplication by a real number in $\mathbb{R}^d$ by moduloe $(2\pi\mathbb{Z})^d$, and $L^2(\mathbb{T}^d)$ be Hilbert space of square-integrable functions defined on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,o}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ be subspace of odd functions.

After application of the Fourier transform and separation of the total quasi-momentum of the system of two particles and decomposition to the direct integral of von Neumann, the study of spectrum of Hamiltonian $\hat{h}$ reduces to the study of the spectra of the family operators $h(k), k \in \mathbb{T}^d$, acting in the Hilbert space $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ as

$$h(k) = h_0(k) - v. \tag{3}$$

Unperturbed operator $h_0(k)$ is the multiplication operator by the function $\mathcal{E}_k(q)$ in $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$, i.e.

$$(h_0(k)f)(q) = \mathcal{E}_k(q)f(q), \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}^d),$$

where

$$\mathcal{E}_k(q) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{d}(1-\cos\frac{k^{(i)}}{2}cosq^{(i)}).$$

The interaction operator (perturbation operator) $v$ acts in Hilber space $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ by formula

$$(vf)(q) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{T}^d} v(q-t)f(t)dt, \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}^d).$$

Here

$$v(k) = (2\pi)^{-d/2}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(s)e^{\mathrm{i}(k,s)}, \tag{4}$$

with $(k,s) = \sum_{j=1}^{d} k^{(j)}s^{(j)}, \quad k = (k^{(1)},\ldots,k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d, \quad s = (s^{(1)},\ldots,s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d.$

By Hypothesis 1 perturbation $v$ of the operator $h_0(k)$ belongs the trace class operators, consequently, by the Weyl theorem the essential spectrum $\sigma_{ess}(h(k))$ of the operator $h(k)$, which is defined in (3), coincides with the spectrum of the operator $h_0(k)$. Since $h_0(k)$ is the operator of multiplication by the function we get

$$\sigma_{ess}(h(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(k) = \min_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q), \quad \mathcal{E}_{\max}(k) = \max_{q\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(q).$$

*Remark 1.* If $k = (\pi,\pi,\ldots,\pi) \in \mathbb{T}^d$ then the essential spectrum of the operator $h(k)$ degenerates, i.e. it becomes a point, and the essential spectrum $\sigma_{ess}(h(k))$ of $h(k)$ is therefore not absolutely continuous for any $k \in \mathbb{T}^d$.

It is known that the positive root $v^{\frac{1}{2}}$ of the operator $v$ is defined as

$$(v^{\frac{1}{2}}f)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{T}^d} v^{\frac{1}{2}}(p-p')f(p')dp',$$

where kernel $v^{\frac{1}{2}}(p)$ is the inverse Fourier transform of the function $\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)$, i.e.

$$v^{\frac{1}{2}}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(s)e^{\mathrm{i}(p,s)}.$$

For any $k \in (-\pi,\pi)^d$ and $z \le \mathcal{E}_{\min}(k)$ (analogously for any $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi,\pi)^d$ and $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$) we define the Birman-Schwinger integral operator $\mathbb{B}(k,z)$ with the kernel

$$\mathbb{B}(k,z;p,s)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^{\frac{1}{2}}(p-t)v^{\frac{1}{2}}(t-s)dt}{\mathcal{E}_k(t)-z}.$$

We note that for all $z<\mathcal{E}_{\min}(k)$

$$\mathbb{B}(k,z)=v^{\frac{1}{2}}r_0(k,z)v^{\frac{1}{2}},$$

where $r_0(k,z)$ is the resolvent of the operator $h_0(k)$.

*Defination 1.* Let $d=1$ or 2 and Hypothesis 1 holds. Assume that equation

$$\mathbb{B}(\mathbf{0},0)\psi=\psi,\ \mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{T}^d$$

has a nonzero solution $\psi\in L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$. We say that the operator $h(\mathbf{0})$ has a zero energy resonance, if

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p)}\notin L^{2,o}(\mathbb{T}^d).$$

Assume, that Hypothesis 1 holds. Then the following statements hold:

*Theorem 1.* Let $d=1$ or $d$=2. If the operator $h(\mathbf{0})$ has a zero energy resonance or $z=0$ is eigenvalue of the operator $h(\mathbf{0})$, then for any $k\neq 0$ the operator $h(k)$ has eigenvalue below the essential spectrum.

*Theorem 2.* Let $d\geq 3$. If the number $z=0$ is an eigenvalue of multiplicity $n$ of the operator $h(\mathbf{0})$, then for all $k\neq 0$ the operator $h(k)$ has at least $n$ eigenvalues below the essential spectrum.

*Theorem 3.* For any $k\in(-\pi,\pi)^d$ and $d\in\mathbb{N}$ the operator $h(k)$ may have only a finite number of eigenvalues below the essential spectrum.

*Remark 2.* Since perturbed operator $v$ is positive, $h(k)$ has no eigenvalue above $\mathcal{E}_{\max}(k)$.

In section 2 of Chapter 2 we considered Hamiltonian $\hat{h}_\mu$ of a system of two fermions acting in the $d-$dimensional lattice $\mathbb{Z}^d, d\geq 1$ and interacting on the neighboring sites. We determine the number and location of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator associated to $\hat{h}_\mu$ depending on the parameters of the operator and interaction energy $\mu>0$ as well as the total quasi-momentum of the system $k\in\mathbb{T}^d$.

Let the operators $\hat{h}_0$ and $\hat{v}$ be defined by the formulas (1) and (2), the function $\hat{v}$ has a form:

$$\hat{v}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu}{2} & for\quad |x|=1,\\ 0 & for\quad |x|\neq 1.\end{cases}$$

Then the perturbed operator $v$ is the integral operator of rank $d\geq 1$, acting in Hilbert space $L^{2,o}(\mathbb{T}^d)$ by the formula

$$(vf)(q) = \mu(2\pi)^{-d} \sum_{i=1}^{d} \sin q^{(i)} \int_{\mathbb{T}^d} \sin t^{(i)} f(t) dt.$$

We note that, the function $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q) = \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(d)})$ has a nondegenerated minimum at zero and invariant with respect to permutations of the arguments $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(d)}$, consequently the following integral

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)} dq$$

exists and does not depend on the choice of $i = \overline{1, d}$.

Let

$$\mu_0 = (2\pi)^d \Big( \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q)} dq \Big)^{-1}, i = \overline{1, d}.$$

The main theorem of this paragraph is the following.

*Theorem 4. a*). Let $0 < \mu < \mu_0$. there exists a partition of the torus $\mathbb{T}^d$, into nonempty sets $G_\mu^{(l)}, l = \overline{0, d}$ such that

$$G_\mu^{(l)} \bigcap G_\mu^{(j)} = \varnothing, \ l \neq j, \ \ j = \overline{0, d}, \ \bigcup_{i=0}^{d} G_\mu^{(i)} = \mathbb{T}^d,$$

and if $k \in G_\mu^{(0)}$ then the operator $h_\mu(k)$ has no eigenvalue to the left of threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$ of the essential spectrum; if $k \in G_\mu^{(l)}, l = \overline{1, d}$ the operator $h_\mu(k)$ has exactly $l-$ eigenvalues $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1, l}$ with the multiplicity to the left of the threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$, moreover $z_\mu^{(i)}(k) > 0, i = \overline{1, l}.$

*b*). Let $\mu = \mu_0$. If $d = 1$ or $d$=2 then the operator $h_\mu(\mathbf{0})$ has a virtual level of multiplicity $d$ at the threshold $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0}) = 0$. If $d \geq 3$ then the threshold $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{0}) = 0$ is an eigenvalue of the multiplicity $d$ of the operator $h_\mu(\mathbf{0})$. For all $d \in N$ and $k \in \mathbb{T}^d, k \neq \mathbf{0}$ the operator $h_\mu(k)$ has exactly $d$ eigenvalues $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1, d}$ counted with the multiplicity lying to the left of the threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$, moreover $z_\mu^{(i)}(k) > 0, i = \overline{1, d}.$

*c*). Let $\mu > \mu_0$. Then for any $k \in \mathbb{T}^d$ the operator $h_\mu(k)$ has exactly $d$ eigenvalues $z_\mu^{(i)}(k), i = \overline{1, d}$ lying to the left of the threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$. If $\mu > 4d$ then $z_\mu^{(i)}(k) < 0, i = \overline{1, d}.$

In the third chapter of the thesis titled **“The Asymptotics of the eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator on a lattice”**, we prove the existence of the Efimov effect and obtain asymptotic formulas for the number of eigenvalues lying to the left of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three particles (bosons) with short-range pair potentials on the three-dimensional lattice. We show the finiteness of the number of eigenvalues located to the left of the essential spectrum for nonzero values of the quasi-momentum in the neighborhood of zero.

In the first and second sections of Chapter 3 of the thesis the energy operators $\hat{h}$, $\hat{H}$ of systems of two and three bosons on the lattice $\mathbb{Z}^d, d \ge 1$, interacting via attractive short-range pair potentials. These operators are described in the momentum representation. After separation of the total quasi-momentum of the system, the operators $h$, $H$ are decomposed into von Neumann direct integral and are reduced to the study of families of operators $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$.

Let $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]$ be the Hilbert space of square-summable functions, defined on the Cartesian product $(\mathbb{Z}^d)^m, d = 1,2,...$ and let $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^m] \subset \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^m]$ be subspace of symmetric functions with respect to permutations of variables.

In the coordinate representation the energy operator of the system of two free identical particles (bosons) with a mass of $m = 1$ on $d$ - dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$ is represented by a bounded self-adjoint operator $\hat{h}_0$ in a Hilbert space $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$:

$$\hat{h}_0 = \Delta \otimes I + I \otimes \Delta.$$

Now the total Hamiltonian of the system $\hat{v}$ acts on Hilbert space $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2]$ and is bounded perturbation of the free Hamiltonian $\hat{h}_0$ :

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v}.$$

Here

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_\beta, x_\gamma) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_\beta, x_\gamma), \quad \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^2].$$

*Hypothesis 2*. The function $\hat{v}(s)$ is real valued, even, non-negative on $\mathbb{Z}^d$ satisfying

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{d+\theta}\, \hat{v}(s) = 0, \quad \theta > \frac{1}{2}.$$

Similarly, the free energy operator $\hat{H}_0$ of the system of three identical free quantum particles (bosons) on $d$ - dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$ is defined in the Hilbert space $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$ by formula:

$$\hat{H}_0 = \Delta \otimes I \otimes I + I \otimes \Delta \otimes I + I \otimes I \otimes \Delta.$$

The total energy operator $\hat{H}$ of the complete system of three identical quantium particles (bosons) with two particle pair potentials $\hat{v} = \hat{v}_\alpha = \hat{v}_{\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$ is bounded perturbation operator $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mathbb{V}},$$

where $\hat{\mathbb{V}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{V}_\alpha, \hat{V}_\alpha = \hat{V}$, $\alpha = 1,2,3$ is the multiplication operator on $\ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3]$, defined by the formula

$$(\hat{V}_\alpha\hat{\psi})(x_1, x_2, x_3) = \hat{v}(x_\beta - x_\gamma)\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3), \; \hat{\psi} \in \ell^{2,s}[(\mathbb{Z}^d)^3].$$

Let $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^m] \subset L^2[(\mathbb{T}^d)^m]$ be the subspace of symmetric functions defined on the Cartesian product $(\mathbb{T}^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{F}$ –be standard Fourier transform

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d), \quad [\mathcal{F}(f)](p) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{-\mathrm{i}(p,x)} f(x)$$

with the inverse

$$\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{T}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad [\mathcal{F}^*(\psi)](x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{\mathrm{i}(p,x)} \psi(p) dp,$$

and $\hat{\Delta} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^*$ Fourier transformation of the Laplace operator $\Delta$.
We note that the $\hat{\Delta}$ is the operator of multiplication by the function $\varepsilon(\cdot)$, i.e.

$$(\hat{\Delta}f)(k) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

where

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)},\ldots,p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d.$$

In the momentum representation the two-particle operator $h$ of the full two particles system (i.e. total Hamiltonian) is defined in the space $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ as

$$h = h_0 - v.$$

Here the unperturbed operator $h_0$ is of the form

$$h_0 = \hat{\Delta} \otimes I + I \otimes \hat{\Delta},$$

i.e. operator $h_0$ is the operator of multiplication by a function $\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)$:

$$(h_0 f)(k_\beta, k_\gamma) = (\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)) f(k_\beta, k_\gamma), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2].$$

The perturbation $v$ is a convolution type operator:

$$(vf)(k_\beta, k_\gamma) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} v(k_\beta - k_{\beta'}) \delta(k_\beta + k_\gamma - k_{\beta'} - k_{\gamma'}) f(k_{\beta'}, k_{\gamma'}) dk_{\beta'} dk_{\gamma'}, \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

where $\delta(\cdot)-$ Dirac delta function on $\mathbb{T}^d$ and the function $v(k)$ is defined by the Fourier series (4).

Three particle operator $H$ of the complete system of three particles (total Hamiltonian) in the momentum representation is defined as a self-adjoint bounded operator in a Hilbert space $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ by the formula:

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3,$$

where $H_0$

is the multiplication operator by the function $\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon(k_\alpha)$:

$$(H_0 f)(k_1, k_2, k_3) = [\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon(k_\alpha)] f(k_1, k_2, k_3),$$

and

$$(V_\alpha f)(k_1,k_2,k_3) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{(\mathbb{T}^d)^3} v(k_\beta - k_{\beta'}) \times$$

$$\times \delta(k_\alpha - k_{\alpha'})\delta(k_\beta + k_\gamma - k_{\beta'} - k_{\gamma'}) f(k_1', k_2', k_3') dk_1' dk_{2'} dk_3', \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3].$$

Denote by $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{T}^d$ resp. $K = k_1 + k_2 + k_3 \in \mathbb{T}^d$ *two* resp. *three particle quasi-momentum.*

Let $L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ be the subspace of even functions. Decomposition of $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ resp. $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3]$ into direct integral

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2] = \int_{k\in\mathbb{T}^d} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T}^d) dk$$

resp.

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^3] = \int_{K\in\mathbb{T}^d} \oplus L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2] dK$$

and commutations of operator $h$ resp. $H$ with the Abelian group of translations in $(\mathbb{Z}^d)^2$ resp. $(\mathbb{Z}^d)^3$ imply their decomposability into the direct integral

$$h = \int\limits_{k\in\mathbb{T}^d} \oplus \tilde{h}(k) dk \qquad (5)$$

resp.

$$H = \int\limits_{K\in\mathbb{T}^d} \oplus \tilde{H}(K) dK \qquad (6)$$

In the third section of Chapter 3 we introduce the notion of a resonance with zero energy for the two-particle discrete Schrödinger operator.

Let $d = 3$. The fiber operator $\tilde{h}(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ in the decomposition (5) is unitarily equivalent to the operator $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$

$$h(k) = h_0(k) - v.$$

The operator $h_0(k)$ and $v$ are defined in the Hilbert space $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ by the formula

$$(h_0(k) f)(k_\beta) = \mathcal{E}_k(k_\beta) f(k_\beta), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

where

$$\mathcal{E}_k(k_\beta) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} - k_\beta\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + k_\beta\right)$$

and

$$(vf)(k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{T}^3} v(k_\beta - k_\beta') f(k_{\beta'}) dk_{\beta'}, \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^3).$$

The fiber operator $\tilde{H}(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ in (6) is unitarily equivalent to the operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3.$$

The operators $H_0(K)$ and $V_\alpha \equiv V, \alpha = 1,2,3$ are defined in Hilbert space $L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2] \cong L_2(\mathbb{T}^3) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ and in the coordinates $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ has the following representation

$$(H_0(K)f)(k_\alpha, k_\beta) = E(K; k_\alpha, k_\beta) f(k_\alpha, k_\beta), \quad f \in L^{2,e}((\mathbb{T}^3)^2),$$

$$E(K; k_\alpha, k_\beta) = \varepsilon(K - k_\alpha) + \varepsilon(\frac{k_\alpha}{2} - k_\beta) + \varepsilon(\frac{k_\alpha}{2} + k_\beta),$$

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(k_\beta - k'_\beta) f(k_\alpha, k_{\beta'}) dk_{\beta'}, \quad f \in L^{2,e}[(\mathbb{T}^3)^2].$$

Since the function $\mathcal{E}_k(q)$ has a unique non-degenerate minimum at $q = 0$ for all $k \in U_\delta(0)$ and $z \le \mathcal{E}_{\min}(k)$ integral

$$\mathbb{B}(p, q; k, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^{\frac{1}{2}}(p-t) v^{\frac{1}{2}}(t-q) dt}{\mathcal{E}_k(t) - z}$$

is finite.

We define the integral operator $\mathbb{B}(k,z)$ in $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ as

$$\mathbb{B}(k,z) f(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbb{B}(p, q; k, z) f(q) dq.$$

*Remark 3***.** The operator $h(\mathbf{0})$ has an eigenvalue $z \le \mathcal{E}_0(\mathbf{0}) = 0$, i.e. $\mathrm{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) \ne 0$ if and only if the compact operator $\mathbb{B}(\mathbf{0}, z)$ acting in $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$ has an eigenvalue 1 and there exists a function $\psi \in \mathrm{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z))$, such that the function $f$ defined by

$$f(p) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(p)}{\mathcal{E}_0(p) - z} \qquad \text{almost all} \qquad p \in \mathbb{T}^3$$

belongs to $L^2(\mathbb{T}^3)$. In this case $f \in \mathrm{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI)$. Moreover, if $z < 0$, then

$$\dim \mathrm{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) = \dim \mathrm{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z))$$

and

$$\mathrm{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) = \{ f \,|\, f(\cdot) = \frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - z}, \ \psi \in \mathrm{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \}.$$

*Definition 2.* We say that the operator $h(\mathbf{0})$ has zero energy resonance (threshold), if 1 is eigenvalue of the operator $\mathbb{B}(\mathbf{0},0)$ and the corresponding eigenfunction(normalized) $\psi$ satisfies the condition

$$\frac{(v^{\frac{1}{2}}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot)} \notin L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

i.e.

$$1 \le \dim \mathrm{Ker}(I - \mathbb{B}(\mathbf{0}, z)) \ge \dim \mathrm{Ker}(h(\mathbf{0}) - zI) + 1.$$

*Theorem 5.* Suppose that the *Hypothesis* 2 is satisfied. Let $h(\mathbf{0})$ has a zero energy resonance and $h(\mathbf{0}) \geq 0$. Then for all $k \in \mathbb{T}_0^3$ the operator $h(k)$ has a unique positive eigenvalue $z(k)$ located to the left of essential spectrum. Moreover, there exists a neighbourhood $U_\delta(\mathbf{0})$ of zero, such that for all $k \in U_\delta(\mathbf{0})$ the function $z(k)$ is even and continuous in $U_\delta(\mathbf{0})$.

Let $E_{\min}(K) \equiv \min_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} E(K, k_\alpha, k_\beta), \quad E_{max}(K) \equiv \max_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} E(K, k_\alpha, k_\beta).$

*Theorem 6.* For the essential spectrum of the operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ the following equality holds:

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h(p)) + \varepsilon(K-p)\} \cup [E_{min}(K), E_{max}(K)]$$

holds, where $\sigma_d(h(k))$ is the discrete spectrum of the operator $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$.

The sets

$$\sigma_{ess}^{(3)}(H(K)) = [E_{min}(K), E_{max}(K)] = \bigcup_{k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{T}^3} \{E(K; k_\alpha, k_\beta)\}$$

(resp.

$$\sigma_{ess}^{(2)}(H(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h(p)) + \varepsilon(K-p)\})$$

are called the three particle part (resp. two particle part) of the essential spectrum of $H(K)$.

We denote by $N(K,z)$ the number of eigenvalues of the operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ lying below $z \leq \tau(K)$, where $\tau(K) = \inf \sigma_{ess}(H(K))$.

*Remark 5.* Under the assumption of Theorem 5. the equalities $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0})) = [0, E_{max}(\mathbf{0})]$ and $\sigma_{ess}(H(K)) = [\tau(K), E_{max}(K)]$ hold, where $\tau(K) > 0$ for any $K \in \mathbb{T}_0^3$.

*Theorem 7.* We suppose that the condition of the theorem 5 is fulfilled. Then the operator $H(\mathbf{0})$ has infinitely many eigenvalues lying below the bottom of the essential spectrum and the function $N(\mathbf{0}, z)$ obeys the relation

$$\lim_{z \to -0} \frac{N(\mathbf{0}, z)}{|\log|z||} = \frac{\lambda_0}{2\pi},$$

where $\lambda_0$ is the unique positive solution of the equation

$$\lambda = \frac{8 \sinh \pi\lambda/6}{\sqrt{3} \cosh \pi\lambda/2}.$$

*Theorem 8.* Let the assumption of the Theorem 5 is fulfilled. Then for all $K \in U_\delta^0(\mathbf{0})$ the number $N(K, 0)$ is finite and has the asymptotics

$$\lim_{|K| \to 0} \frac{N(K,0)}{|\log|K||} = \frac{\lambda_0}{\pi}.$$

*Remark 6.* If the operator $h(\mathbf{0})$ has a negative eigenvalue, then $\sigma_{ess}(H(K)) = [\tau(K), E_{max}(K)]$, where $\tau(K) < 0$ for all $K \in \mathbb{T}^3$. In this case, the three particle operator has a non-empty two particle essential spectrum and $N(K,\tau(K))<\infty.$

In the fourth chapter of the thesis, titled “**About the existence and finiteness of the number of eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator on lattice**” we show the existence and finiteness of the number of eigenvalues located to the left of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three identical particles (bosons), interacting with pair wise zero-range potential on the one-dimensional and two-dimensional lattice.

In the first section of the chapter, the Schrödinger operators corresponding to the system of two and three identical particles, interacting via a pair wise zero-range potential, is presented in the momentum representation.

Let

$$\hat{v}(x_\beta - x_\gamma) = \delta_{x_\beta x_\gamma},$$

where $\delta_{x_\beta x_\gamma}$ – Kronecker symbol.

Two particle Schrödinger operator $h_\lambda(k),\ k\in\mathbb{T}^d$, corresponding to the system of two bosons with a zero-range potential acts in $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ as

$$h_\lambda(k) = h_0(k) + \lambda v.$$

Where

$$(vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(q)dq, \quad f\in L^{2,e}(\mathbb{T}^d),$$

$\lambda<0$ ($\lambda>0$) is contact interaction energy of attractive(repulsive) particles.

Similarly, the three particle operator $H_\lambda(K),\ K\in\mathbb{T}^d$ is defined by the formula:

$$H_\lambda(K) = H_0(K) + \lambda(V_1+V_2+V_3).$$

Here $H_0(K), K\in\mathbb{T}^d$ acts in $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ as the multiplication operator by the function:

$$(H_0(K)f)(p,q) = E(K;p,q)f(p,q), \quad f\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

where

$$E(K;p,q) = \varepsilon(K-p-q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q).$$

The operator $\mathbb{V} = V_1+V_2+V_3$ acts in $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ and can be represented in the coordinates $(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2$ as

$$(\mathbb{V}f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(p,t)dt + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,q)dt + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(t,K-p-q)dt.$$

*Theorem 9***.** For any $\lambda\neq 0$ the essential spectrum of $H_\lambda(K)$ defined by the equality

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) = \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d}\{e_\lambda(k)+\varepsilon(K-k)\}\bigcup[\mathrm{E}_{\min}(K),\mathrm{E}_{\max}(K)],$$

where $e_\lambda(k)$ is a unique eigenvalue of the operator $h_\lambda(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ .

Let $U_{\delta(K)}[p_\lambda(K)] = \{K \in \mathbb{T}^d : |K - p_\lambda(K)| < \delta\} -$ $\delta = \delta(K)$ be neighbourhood of the point $p_\lambda(K) \in \mathbb{T}^d$.

We have the theorem, which states that the number of eigenvalues of the operator $H_\lambda(K)$ as well as the regularity of the eigenvalues and the corresponding bound states.

*Theorem 10.* Let $d = 1{,}2$ and $\lambda < 0$.

1. There is $\delta > 0$, such that for all $K \in U_\delta[0]$ the operator $H_\lambda(K)$ has a finite number of eigenvalues $E_{1,\lambda}(K),\ldots,E_{n,\lambda}(K)$ lying below the bottom of the essential spectrum $\sigma_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$.

2. Bound state $\psi_{\lambda,E_\lambda(K)(\cdot,\cdot)} \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ of the operator $H_\lambda(K)$ corresponding to eigenvalue $E_\lambda(K), K \in U_\delta[0]$ is regular as a function of $(p,q) \in (\mathbb{T}^d)^2$. Moreover, the eigenvalue $E_\lambda(\cdot), K \in U_\delta[0]$ and the vector-valued mapping $\psi_\lambda : U_\delta[0] \to L^2[U_\delta[0]; L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]],$ $K \to \psi_{\lambda,E_\lambda(K)}$ are also regular as a function of $K \in \mathbb{T}^d$.

One of the main results of this chapter is the following theorem on existence of bound states of the operator $H_\lambda(K),\ K \in \mathbb{T}^d$

*Theorem 11.* Let $d = 1{,}2$.

1. For all $\lambda < 0$ and $K \in \mathbb{T}^d$ the operator $H_\lambda(K)$ has an eigenvalue $E_\lambda(K)$ lying below the bottom of essential spectrum $\tau^b_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$.

2. For all $\lambda > 0$ and $K \in \mathbb{T}^d$ the operator $H_\lambda(K)$ has an eigenvalue $E_\lambda(K)$, lying above the top of essential spectrum $\tau^t_{\text{essspec}}(H_\lambda(K))$

*Corollary 2.* For sufficiently large $|\lambda| > 0$ two particle $h_\lambda$ resp. three particle Hamiltonian $H_\lambda$ has an isolated band spectrum $[\min_k e_\lambda(k), \max_k e_\lambda(k)]$ and $[\min_K E_\lambda(K), \max_K E_\lambda(K)]$.

## CONCLUSION

The thesis is devoted to investigate the essential and discrete spectra of two and three-particle Schrödinger operator corresponding to the system of two or three identical particles (bosons or fermions) interacting via short-range pair potentials on lattices.

Basic results of the research are as follows.

1. We introduce the notion of resonance for the Schrödinger operator corresponding to a system of two identical particles (fermions) interacting via short-range potential on one-dimensional and two-dimensional lattice.
2. We find the conditions for existence of the eigenvalues lying outside of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of two identical particles (fermions) interacting via short-range potential for all dimensions of the lattice.
3. We determine the number and location of the eigenvalues of the Schrödinger operator corresponding to a system of two particles (fermions), interacting on neighboring sites of latticefor all parameters of the operator.
4. We obtain an asymptotic formula for the number of eigenvalues lying to the left of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three particles (bosons) with short-range pair potentials in the threedimensional lattice.
5. We show the finiteness of the number of eigenvalues lyingbelow the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three particles (bosons) with short-range pair potentials on thethree dimensional lattice for nonzero values of the quasi-momentum in the neighborhood of zero.
6. We prove the existence of an eigenvalue lying outside of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three particles with pair contact potentials on one dimensional and two dimensional lattice, which is the only result in the theory of discrete Schrödinger operators.
7. Weestablish the finiteness of the number of eigenvalues lying below the bottom of the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to a system of three particles with zero-range pair potentials on oneand two-dimensional lattices.

## ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I бўлим (Часть I; Part I)


1. Лакаев С. Н., Халмухамедов А. Р., Халхужаев А.М. О связанных состояниях оператора Шредингера системы трех бозонов на решетке // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2016. - т. 188. - № 2. - С. 36-48. (№ 11. Springer. IF=0.831).
2. Dell'Antonio G., Lakaev S. N., Khalkhuzhaev A. M. Existence of isolated bands in a system of three particles in an optical lattice // Journal of Physics. A:. Mathematical an Theoretical.- 49, - 2016.- 145204. -p. 1-15. (№ 40. Research Gate. IF=1.84).
3. Халхужаев А.М., Хамидов Ш. И. О спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке с контактным потенциалом // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015.- №2,- С. 127-136. (01.00.00; №6).
4. Халхужаев А.М. Кулжонов Ж. Асимптотики собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов на одномерной решетке // Научный вестник СамГУ.- Самарканд, 2014.- № I.-С.13-20. (01.00.00; №2).
5. Халхужаев А.М., Лакаев Ш. С. Асимптотики собственного значения гамильтониана системы двух фермионов на одномерной решетке // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2013. -№4, -С. 152-164. (01.00.00; №6).
6. Лакаев С. Н., Халхужаев А.М. , Лакаев Ш.С.. Асимптотики собственного значения двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2012. – т. 171. – №3. – с. 438-451. (№ 11. Springer. IF=0.831).
7. Albeverio S., Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schodinger Operators on Lattice // Markov Processes and Related Fields. - Moskow, -2012. -18, № 3., -pp. 387-420. (40. Research Gate. IF=0.81).
8. Халхужаев А.М. О дискретном спектре двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2012.- №3, -С. 139-149. (01.00.00; №6).
9. Халхужаев А.М., Лакаев Ш. С. Асимптотика собственных значений дискретного оператора Шредингера с контактным потенциалом // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2011. - №3, -С. 196-208. (01.00.00; №6).
10. Лакаев С. Н., Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2009. - т. 158. - № 2. - С. 263-276. (№ 11. Springer. IF=0.831).

11. Лакаев С. Н., Халхужаев А.М. О спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2008. - т. 155. - № 2. - С. 287-300. (№ 11. Springer. IF=0.831).

12. Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке с взаимодействием на соседних узлах // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2000. -С. 32-39. (01.00.00; №6).

13. Халхужаев А.М. О дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера с парными и трехчастичными взаимодествиями // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. -Ташкент, 1999. -№8. -С. 6-8. (01.00.00; №7).

**II бўлим (Часть II; Part II)**

14. Халхужаев А.М. Спектральные свойства двухчастичного оператора Шредингера с взаимодействием на соседних узлах на трехмерной решетке// Труды КНИИРП Сам. Отд. АН РУз. - Самарканд, 2003. - С. 16-23.

15. Dell'Antonio G., Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. Existence of an isolated bands in a system of three particles in an optical lattice // Preprint: arXiv: 1411997 [math.SP]. www.arxiv.org.-2015.-14 p.

16. Lakaev S.N., Khalmukhamedov A. R., Khalkhuzhaev A.M. Number of bound states of the Schrodinger operator of a system of three bosons in an optical lattice // arXiv: 1508.07581v1 [math.SP]. www.arxiv.org. -2015. -17 p.

17. Albeverio S., Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. Discrete spectrum asymptotics for the three-particle Hamiltonians on lattice// Preprint: arXiv: 0703301v1[math.SP]. www.arxiv.org. -2007. - 15 p.

18. Khalkhuzhaev A.M. On the Discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator on a lattice // Quantum Theory, partial differential equations of mathematical physics and their applications. International Silk Road Conference. -Tashkent, 2003, -p.37.

19. Халхужаев А.М. О дискретном спектре двухчастичного дискретного оператора Шредингера, описывающего системы двух фермионов // Тезисы докладов Респ. конф. молодых ученых. -Ташкент, 2004. - С. 45.

20. Халхужаев А.М. Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа: Труды Межд. науч. конф. 16-19 ноября, 2004. Т.1, -Ташкент, 2004. - С. 36.

21. Халхужаев А.М. О дискретном спектре двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов // Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды Межд. конф. 18-24 апреля 2005. Тошкент, 2005. - С. 200-205.

22. Халхужаев А.М. О конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера // Операторные алгебры и квантовая Теория вероятностей: Тез. докл. Межд. науч. конф. 7-10 сентября, 2005.-Ташкент, 2005. - С. 209-212.

23. Халхужаев А.М. Панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектри жойлашиш ўрни ҳақида // УзР Мустақиллигининг 15 йиллиги ва Хоразм Маъмун академиясининг 1000 йиллигига бағишланган ёш олимларнинг халқаро илмий конф-си. 1-3 июнь, 2006. -Ургенч-Хива, 2006. - С. 28.

24. Халхужаев А.М. О дискретном спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач: Межд. науч. конф. 19-20 октября, 2007. -Самарканд, 2007. – С. 226.

25. Xalxujayev A.M., Lakaev Sh.S. Asymptotics of eigenva-lues of the discrete Schrodinger operators // IV Congress of the Turkic World Mathematical society. Book of Abstracts, 1-3 jule 2011, -Baku, Azerbaijan, 2011. –p. 198.

26. Халхужаев А.М., Маматкулов З., Мажидов Ш. О дискретном спектре двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке // Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа: Матер. конф. 5-6 июля 2012. - Самарканд, 2012. - С. 100-101.

27. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора, ассоциированного с системой трех фермионов // Операторные алгебры и смежные проблемы: Тезисы докл. Респ. науч. конф. 12-14 сентября 2012. - Ташкент, 2012. - С. 87-88.

28. Халхужаев А.М. Асимптотика собственного значения двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке // Операторные алгебры и смежные проблемы: Тезисы докл. Респ. науч. конф. 12-14 сентября 2012. - Ташкент, 2012. - С. 90-91.

29. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О спектре трехчастичного оператора Шредингера системы трех частиц с парными контактными и трехчасичными взаимодействиями на соседних узлах // Актуальные проблемы математического анализа: Матер. Респуб. науч. конф. 9-10 ноября 2012. УргГУ, -Ургенч, 2012. - С. 46-47.

30. Халхужаев А.М., Лакаев Ш.С. Асимптотики собственного значения двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке // Актуальные проблемы математического анализа: Матер. Респуб. науч. конф. 9-10 ноября 2012. УргГУ, -Ургенч, 2012. - С. 49-50.

31. Lakaev S.N., Xalxujayev A.M. Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schoedinger Operators on Lattice // Актуальные проблемы математического анализа: Матер. Респуб. науч. конф. 9-10 ноября 2012. УргГУ, Ургенч, 2012. - С. 52-53.

32. Xalxujayev A.M., Lakaev Sh. S. Expansion of eigenvalues of the two-particle discrete Schrodinger operator on one dimensional lattice // International Seminar on Mathematics and Natural Sciences. 15-17 august, 2013. -Samarkand, 2013. - pp. 15-16.

33. Xalxujayev A.M., Mamatov Sh.M. Invariantness of Some Hilbert Spaces Corresponding to the Two Particle Shrodinger Operatoron Lattices // International Seminar on Mathematics and Natural Sciences. 15-17 august, 2013. -Samarkand, 2013. - pp. 49-50.

34. Халхужаев А.М., Хамидов Ш.И. О спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке с контактным потенциалом // Современные методы математической физики и их приложения: Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. 15-17 апреля, 2015. - Тошкент, 2015. - С. 99-100.

35. Халхужаев А.М., Хамидов Ш.И. О собственном значении двухчастичного оператора Шредингера на решетке с контактным потенциалом // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари: Респуб. Илмий амалий конф. 25 апрель, 2015. –Навоий, 2015. - С. 26-27.

36. Lakaev S.N., Xalxujayev A.M. The existence of bound states of the three-particle Schrödinger operators on lattices // Современные методы математической физики и их приложения: Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. 15-17 апреля, 2015. - Тошкент, 2015. - С. 122.

37. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. Существенный спектр трехчастичного оператора, соответствующего системе трех фермионов на решетке // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари: Респуб. илмий амалий конф. 25 апрель, 2015. -Навоий, 2015. - С. 23-25.

38. Халхужаев А.М., Махмудов Х. Ш. Асимптотика собственных значений двухчастичного решетчатого оператора шредингера // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари: Респуб. илмий амалий конф. 25 апрель, 2015. -Навоий, 2015. - С. 16-17.

39. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М., Махмудов Х. Ш. О конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Уравнения смешенного типа, родственные проблемы анализа и информатики: Матер. III Межд. Российско-Казахского симпозиума. - Нальчик, 2014. -С.118.

40. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О связанных состояниях оператора Шредингера системы трех бозонов на решетке // Математик физика ва анализнинг турдош масалалари: Республика илмий амалий анжумани. 26-27 ноябрь, 2015. -Бухоро, 2015. - С. 106.

41. Халхужаев А.М., Хамдамов Х. О спектре одного дискретного оператора Шредингера системы двух частиц // Анализнинг долзарб муаммолари: Республика илмий конференцияси материаллари. 22-23 апрель, 2016. - Қарши, 2016. - С. 23-24.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
29.11.2016 йил.

Босишга рухсат этилди: 1.12.2016 йил
Бичими 60x45 $^{1}/_{16}$ , «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: ____

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ» ДУК