

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ
ИНСТИТУТ

КАФЕДРА «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И
СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ»

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ
(методическое пособие)

ТАШКЕНТ-2016

Данное методическое пособие посвящено изучению сложного (составного) движения материальной точки. В нем подробно изложены основные программные вопросы, приведены методические рекомендации к решению задач. Показаны примеры решения задач и методика выполнения расчетно-графических работ. Предложены многовариантные задачи для самостоятельного решения.

Методическое пособие соответствует программе курса «Теоретическая механика» и предназначено для студентов всех специальностей высших учебных заведений.

Составитель к.ф.-м.н., доц. К.Кенжаев

Рецензенты: В.Б.Латипов – профессор кафедры «Математика и механика» Ташкентского Государственного Технического Университета, доктор технических наук.

М.К.Назарова к.т.н., доцент кафедры «Строительная механика и сейсмостойкость сооружений» Ташкентского Архитектурно-строительного института

Методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры «Строительная механика и сейсмостойкость сооружений» факультета «Строительство зданий и сооружений» Ташкентского Архитектурно-строительного института (протокол №_____ от _____ г.)

Методическое пособие утверждено Ученым советом факультета «Строительство зданий и сооружений» Ташкентского Архитектурно-строительного института (протокол №_____ от _____ г.)

Методическое пособие рассмотрено и одобрено научно-методическим Советом Ташкентского Архитектурно-строительного института (протокол №_____ от _____ г.)

Оглавление

Предисловие.....	3
ГЛАВА I. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.	5
§ 1.1. Относительное, переносное и абсолютное движение точки.	5
§ 1.2. Сложение движений. Определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки	7
§ 1.3. Сложение скоростей. Определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.....	8
§ 1.4. Сложение ускорений. Определение абсолютного ускорения в случае непоступательного переносного движения.....	10
§ 1.5. Модуль и направление Кориолисов ускорения.....	11
§ 1.6. Определение абсолютного ускорения точки при переносном поступательном движении.....	13
ГЛАВА II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ.....	14
§ 2.1. Методические указания и примеры решения задач на определение траекторий, уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки.....	14
§ 2.1а. Примеры решения задач на определение уравнения и траектории абсолютного движения точки.....	15
§ 2.1б. Примеры решения задач на определения уравнения и траектории относительного движения точки.....	20
§ 2.2. Методические указания к решению задач на определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.....	24
§ 2.3. Примеры решения задач на определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.....	26
§ 2.4. Методические указания к решению задач на определение ускорений при переносном поступательном движении точки.....	31
§ 2.5. Примеры решения задач на определении ускорений при переносном поступательном движении.....	32
§ 2.6. Методические указания к решению задач на определения ускорений при непоступательном переносном движении....	41
§ 2.7. Примеры решения задач на определении ускорений точки при поступательном переносном движении.....	41
ГЛАВА III. ПРИМЕРНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ.....	57
ГЛАВА IV. МНОВОВАРИАНТНОЕ ЗАДАНИЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ, ПЕРЕНОСНОМ И АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТОЧКИ.....	60
Литература	

Предисловие

При изучении поступательного и вращательного движений, которые являются простейшими движениями твердого тела, мы рассматривали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако, при решении задач механики в ряде случаев оказывается целесообразным и необходимым рассматривать движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых считается основной или условно неподвижной, а другая совершает некоторое движение по отношению к первой.

Движение, совершаемое при этом точкой или телом, называют составным или сложным. Такое движение совершает человек, перемещающийся по лестнице движущегося эскалатора, пассажир, перемещающийся в вагоне движущегося поезда и т.д. Разложение составного или сложного движения точки или тела путём введения дополнительной подвижной системы отсчета широко применяется в кинематических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения.

В данном методическом пособии рассматриваются способы определения кинематических характеристик точки или тела при их сложном движении. Результаты этой теории широко используются в динамике при изучении равновесия и относительного движения тел под действием сил, которым объясняются многие интересные природные явления (отклонение падающих тел от вертикали к востоку, подмывание правых берегов реки в северном полушарии и т.д.)

ГЛАВА I. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.

§ 1.1 Относительное, переносное и абсолютное движение точки.

Если точка (тело) одновременно участвует в двух или нескольких движениях, то такое движение точки (тела) называется сложным.

Рассмотрим движущееся тело A (рис 1) и точку M , которая не принадлежит этому телу, а совершает по отношению к нему некоторое движение. Через произвольную точку O движущегося тела проведем связанные с этим телом оси $x_1 y_1 z_1$. Образованную систему осей называем подвижной системой отсчета.

Систему осей $O_1 x_1 y_1 z_1$, связанную с некоторым условно-неподвижным телом, обычно с Землей, называем неподвижной системой отсчета. Введем следующее определение.

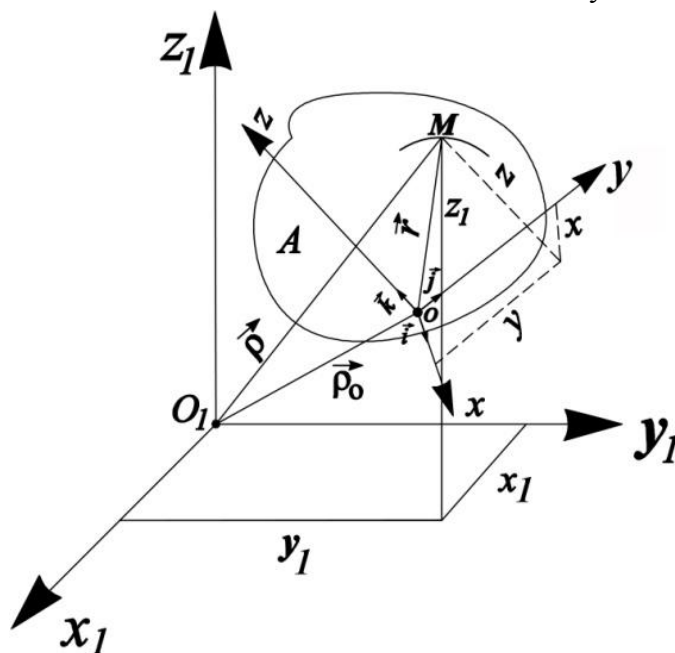


Рис. 1

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Ox_1y_1z_1$), называется *относительным движением*. Относительное движение будет видно наблюдателю, который связан с этими осями и перемещается вместе с ними. Траектория, описываемая точкой M в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость точки M по отношению к телу A и связанный с ним осям $Ox_1y_1z_1$ называется *относительной скоростью* (обозначается $V_{от}$), а ускорение — *относительным ускорением* (обозначается $a_{от}$). Следует отметить, что при вычислении $V_{от}$ и $a_{от}$ необходимо мысленно остановить переносное движение, т.е. рассматривать систему осей $Ox_1y_1z_1$ как неподвижные.

2. Движение подвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ и неизменно связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M *переносным движением*. При этом следует учитывать, что точки тела A , совершая различные движения, имеют в рассматриваемый момент времени различные скорости и ускорения. Поэтому скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Ox_1y_1z_1$ точки тела A , с которой в рассматриваемый момент времени совпадает движущаяся точка M , называется *переносной скоростью* (обозначается $V_{пер}$), и ускорение этой точки — *переносным ускорением* (обозначается $a_{пер}$).

Следует отметить, что при вычислении $V_{\text{пер}}$ и $a_{\text{пер}}$ необходимо мысленно остановить относительное движение, т.е. можно движения осей O_{xy} во внимание не принимать, рассматривая их как неподвижные.

3. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета, $Oxyz$ называется абсолютным или сложным. Траектория этого движения называется абсолютной траекторией, скорость-абсолютной скоростью (обозначается V_{ab}), а ускорение этой точки-абсолютным ускорением (обозначается a_{ab}).

Приведенные выше определения можно легко представить в следующем примере.

Пусть человек идет вдоль радиуса вращающейся платформы (рис 2). С платформой свяжем подвижную систему отсчета, а с поверхности Земли неподвижную. Тогда движение платформы является переносным, движение человека по отношению к ней - относительным, а движение человека по отношению к Земле - абсолютным. При этом переносной скоростью человека $V_{\text{пер}}$ и его переносным ускорением $a_{\text{пер}}$ является скорость и ускорение той точки платформы, где находится в данный момент человек.

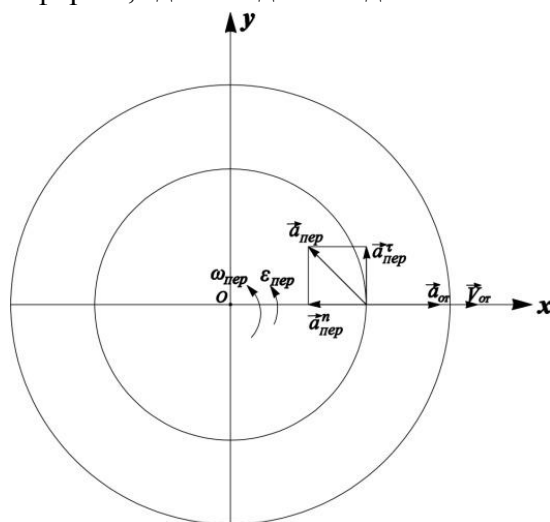


Рис. 2

Основной задачей изучения сложного движения точки является установление зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

§ 1.2 Сложение движений. Определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки.

Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета определяется радиус вектором ρ , проведенным в точку M из начало этой системы O_1 (рис 1). Изменение радиус вектора ρ характеризует абсолютное движение точки.

Положение точки M относительно подвижной системы отсчета определяется радиус вектором r , проведенным в точку M из начала этой системы O или тремя координатами x, y, z в этой системе.

Зависимость между ρ - радиусом вектором точки M в абсолютной системе координат, r - радиусом - вектором той же точки в относительной (подвижной) системе координат и ρ_0 - радиус - вектором начала подвижной, относительной системы координат выражается следующей формулой:

$$\rho = \rho_0 + r, \quad (1)$$

где $r = ix + jy + kz$. (2)

Уравнение движения точки M в относительном движении определяются формулами:

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t), \quad (3)$$

где x, y, z – координаты движущейся точки M в относительной (подвижной) системе координат.

Уравнение (3) определяет относительную траекторию точки M в параметрическом виде. Для определения относительной траектории точки M в координатной форме необходимо исключить время t из системы уравнений (3). Если учесть x_1, y_1, z_1 абсолютные координаты точки M (рис 1), то уравнение абсолютного движения в векторной форме даётся формулой:

$$\rho = \ell_1 x_1 + j_1 y_1 + k_1 z_1. \quad (4)$$

Уравнения движения точки M в абсолютном движении определяются формулами:

$$x_1 = f_1(t), y_1 = f_2(t), z_1 = f_3(t) \quad (5)$$

Уравнения (5) определяют абсолютную траекторию точки M в параметрическом виде. Для определения абсолютной траектории точки M в координатной форме необходимо исключить время t из системы уравнений (5). Следует отметить, что в конкретных задачах уравнения абсолютного и относительного движений точки могут быть получены из более простых, геометрических соображений.

§ 1.3 Сложение скоростей. Определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.

Зависимость между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки, совершающей сложное движение, определяется теоремой сложения скоростей, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$V_{аб} = V_{от} + V_{пер} \quad (6)$$

Для доказательства теоремы допустим, что точка M совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории AB относительное перемещение, определяемое вектором MM' (рис 3).

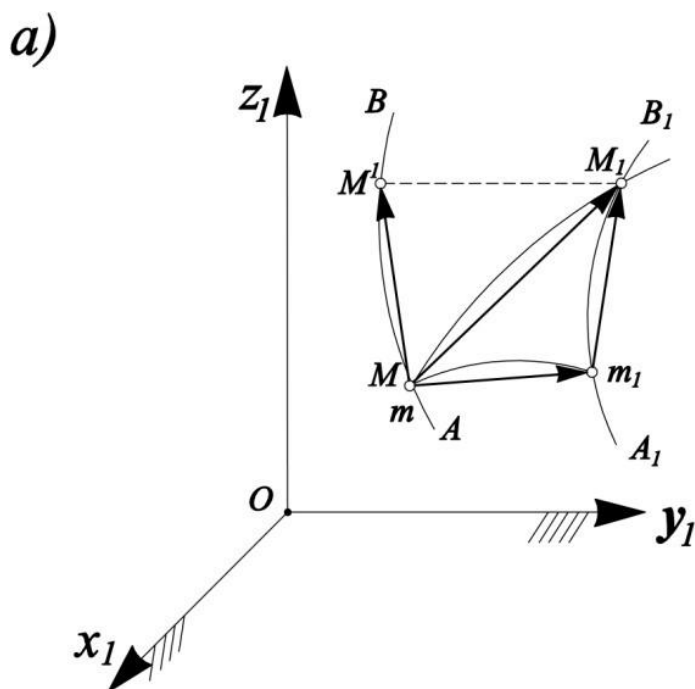


Рис. 3

Кривая AB , двигаясь вместе с подвижными осями $Oxyz$ перейдет за тот же промежуток времени в новое положение A_1B_1 . При этом точка m кривой AB , с которой в момент времени t совпадает точка M , совершает переносное перемещение $mm_1 = Mm_1$. В результате точка M , совершая за время Δt абсолютное перемещение MM_1 занимает положение M_1 .

Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем

$$MM_1 = Mm_1 + m_1M_1. \quad (7)$$

Для обеих частей этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Mm_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_1M_1}{\Delta t}. \quad (8)$$

По определению,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \frac{d(MM_1)}{dt} = V_a, \quad (9)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Mm_1}{\Delta t} = \frac{d(Mm_1)}{dt} = V_{от}, \quad (10)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_1M_1}{\Delta t} = \frac{d(m_1M_1)}{dt} = V_{пер}. \quad (11)$$

В результате находим, что действительно при сложении скоростей точки M совершающей сложное движение, имеет место формула (6).

Фигура построенная на рис. 4 называется параллелограммом скоростей.

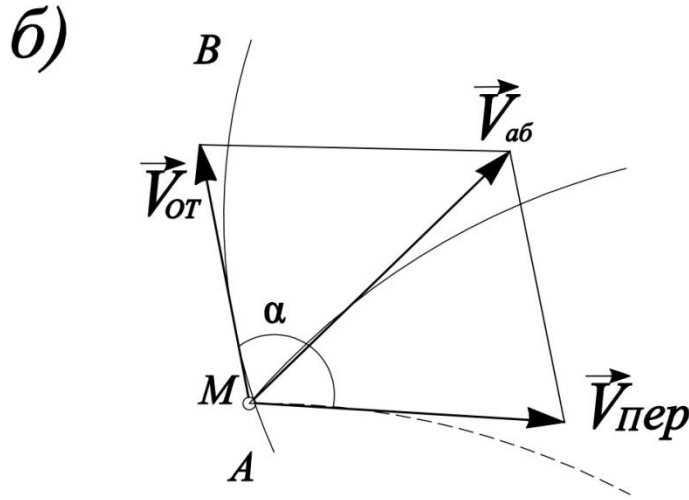


Рис. 4

Если угол между векторами $V_{от}$ и $V_{пер}$ равен α , то модуль абсолютной скорости определяется по теореме косинусов:

$$V_{ab} = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2 + 2 V_{от} V_{пер} \cos \alpha}$$

§ 1.4 Сложение ускорений. Определение абсолютного ускорения в случае непоступательного переносного движения.

Зависимость между относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки определим воспользуясь формулой (6).

По определению

$$a_a = \frac{dV_a}{dt} + \frac{dV_{пер}}{dt}. \quad (12)$$

В этом выражении производные определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении.

Эти изменения слагаются в общем случае из изменений при относительном и при переносном движениях. Если условиться отмечать изменения, которые векторы $V_{от}$ и $V_{пер}$ получают при относительном движении индексом «1», а при переносном движении индексом «2», то равенство (12) примет вид

$$a_a = \frac{(dV_{от})_1}{dt} + \frac{(dV_{от})_2}{dt} + \frac{(dV_{пер})_1}{dt} + \frac{(dV_{пер})_2}{dt} \quad (13)$$

По определению, относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении. Поэтому

$$a_{от} = \frac{(dV_{от})_1}{dt}. \quad (14)$$

Переносное движение при этом во внимание не принимается.

Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении. Поэтому

$$a_{пер} = \frac{(dV_{пер})_2}{dt}. \quad (15)$$

В результате из равенства (13) получим

$$a_a = a_{от} + a_{пер} + \frac{(dV_{от})_2}{dt} + \frac{dV_{пер}_1}{dt}. \quad (16)$$

Введем обозначение:

$$a_{кор} = \frac{(dV_{от})_2}{dt} + \frac{(dV_{пер})_1}{dt}. \quad (17)$$

Величина $a_{кор}$ характеризующая изменение относительной скорости при переносном движении и изменение переносной скорости при относительном движении, называется кориолисовым или поворотным ускорением точки.

В результате равенство (16) примет следующий вид

$$a_a = a_{от} + a_{пер} + a_{кор}. \quad (18)$$

Формула (18) выражает теорему Кориолиса о сложении ускорений при непоступательном переносном движении: *при сложном движении, когда переносное движение непоступательное, ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и Кориолисова или поворотного ускорений.*

Считая переносное движение слагающимся из поступательного движения с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью, называемой переносной угловой скоростью, можно доказать, что

$$\frac{(dV_{от})_2}{dt} = \omega \times V_{от}, \quad (19)$$

$$\frac{(dV_{пер})_1}{dt} = \omega \times V_{от}. \quad (20)$$

Подставляя величины (19), (20) в равенство (17), получим

$$a_{\text{кор}} = 2(\omega \times V_{\text{от}}). \quad (21)$$

Таким образом, Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

Кориолисово ускорение характеризует:

- 1) изменение модуля и направления переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;
- 2) изменение направления относительной скорости точки вследствие вращательного переносного движения;

§ 1.5. Модуль и направление Кориолисова ускорения.

Модуль Кориолисова ускорения определяется как модуль векторного произведения (21):

$$a_{\text{кор}} = 2 \omega V_{\text{от}} \sin(\omega \wedge V_{\text{от}}). \quad (22)$$

Кориолисово ускорение равно нулю в случаях:

- 1) если $\omega=0$, т.е. когда переносное движение поступательное или в моменты обращения в нуль угловой скорости непоступательного движения;
- 2) если $V_{\text{от}}=0$, т.е. в случае относительного покоя или в моменты равенства нулю относительной скорости движущейся точки;
- 3) если $\sin(\omega \wedge V_{\text{от}})=0$, т.е. в случае, когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения.

Вектор $a_{\text{кор}}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ω и $V_{\text{от}}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение ω с $V_{\text{от}}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис 5).

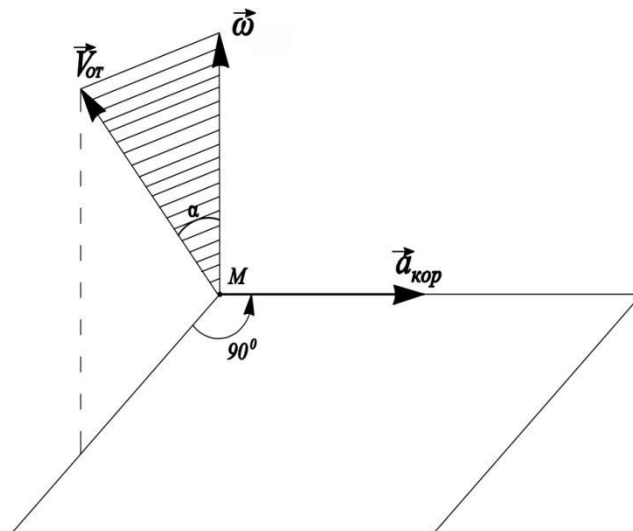


Рис. 5

Направление $a_{\text{кор}}$ также можно определить правилом Жуковского: спроектируем относительную скорость на плоскость, перпендикулярную к угловой скорости ω , и повернем проекцию в этой плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения (рис 6).

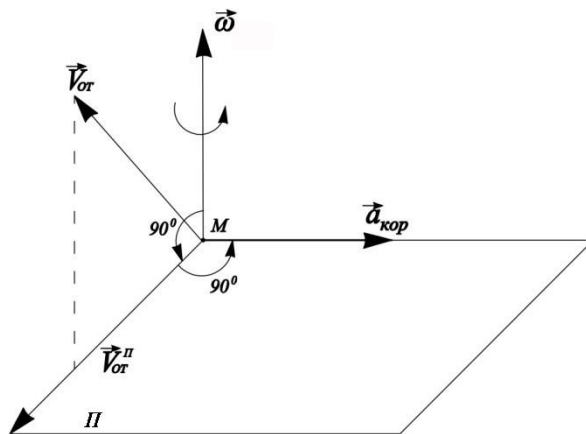


Рис. 6

Полученное направление указывает направление кориолисова ускорения.

§1.6 Определение абсолютного ускорения точки при переносном поступательном движении.

В случае поступательного переносного движения $\omega=0$ и, следовательно $a_{кор} = 0$. Кроме того, скорости всех точек, неизменно связанных с подвижной системой отсчета в каждый момент времени геометрически равны. Поэтому, в случае поступательного переносного движения формула (18) принимает вид

$$a_{аб} = a_{от} + a_{пер} \quad (23)$$

Таким образом, в случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Полученный результат является следствием теоремы Кориолиса и в случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение точки определяется диагональю параллелограмма, построенного на относительном и переносном ускорениях.

Модуль абсолютного ускорения точки в этом случае можно вычислить по формуле:

$$a_{аб} = \sqrt{a_{от}^2 + a_{пер}^2 + 2 a_{от} a_{пер} \cos(\alpha_{от} \wedge \alpha_{пер})}. \quad (24)$$

ГЛАВА II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ.

§2.1 Методические указания к решению задач на определение траекторий, уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки.

Задачи относящиеся к этому параграфу можно разбить на два основных типа:

1. Зная относительное и переносное движения точки, найти уравнения траектории абсолютного движения этой точки.
2. Зная абсолютное и переносное движения точки, найти уравнения траектории относительного движения этой точки.

Следует отметить, что первая задача сводится к сложению относительного и переносного движений точки. Вторая задача заключается в разложении известного абсолютного движения на заданное переносное движение и неизвестное относительное движение.

При решении этих задач необходимо прежде всего установить подвижную и неподвижную системы отсчета и выяснить характер движения того тела, с которым

неизменно связана выбранная подвижная система отсчета, т.е. характер переносного движения.

Такой подход к решению задач позволяет легко установить, какое движение рассматриваемой точки является абсолютным движением, и какое относительным.

При решении первого типа задач рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) разложим известное абсолютное движение точки на переносное и относительное движений;
- 2) выбираем две системы координат: абсолютную, условно принимаемую неподвижной и относительную, связанную с движущимся телом;
- 3) составляем уравнения относительного движения точки;
- 4) составляем уравнения абсолютного движения точки в параметрической форме.

При решении второго типа задач рекомендуется следующая последовательность действия:

- 1) раскладываем абсолютное движение точки на два движения; переносное и относительное;
- 2) выбираем условно неподвижную – абсолютную и подвижную – относительную систему координат;
- 3) составляем уравнение абсолютного движения точки;
- 4) находим уравнение относительного движения точки в параметрической форме;
- 5) исключая время из уравнения относительного движения точки, находим уравнение относительного движения точки в координатной форме.

§2.1а. Примеры решения задач на определение уравнения и траектории абсолютного движения точки.

Задача 1. При вращении поворотного крана вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω_1 груз A поднимается вверх посредством каната, повернутого на барабан B . Барабан B радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 (рис 7).

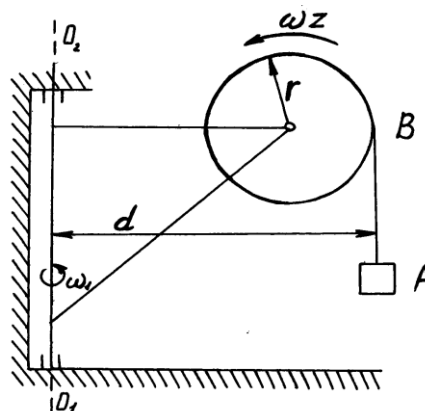


Рис. 7

Определить абсолютную траекторию груза, если вылет крана равен d .

Решение. Вращение поворотного крана вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω_1 принимаем за переносное движение. Движение груза A вверх посредством каната, накрученного на барабан B , рассматриваем как относительное движение.

Систему осей $O_1x_1y_1z_1$ связанных с основой поворотного крана принимаем условно за неподвижную систему координат. Систему осей $O_2x_2y_2z_2$ связанных с поворотным краном, принимаем за подвижную систему координат. При этом ось x_1 проходит через ось O_1O_2 и начальное положение груза, ось z_1 направлена вверх по оси вращения крана (рис 8).

Положение груза A в его абсолютном движении определяется координатами (рис. 8а, 8б):

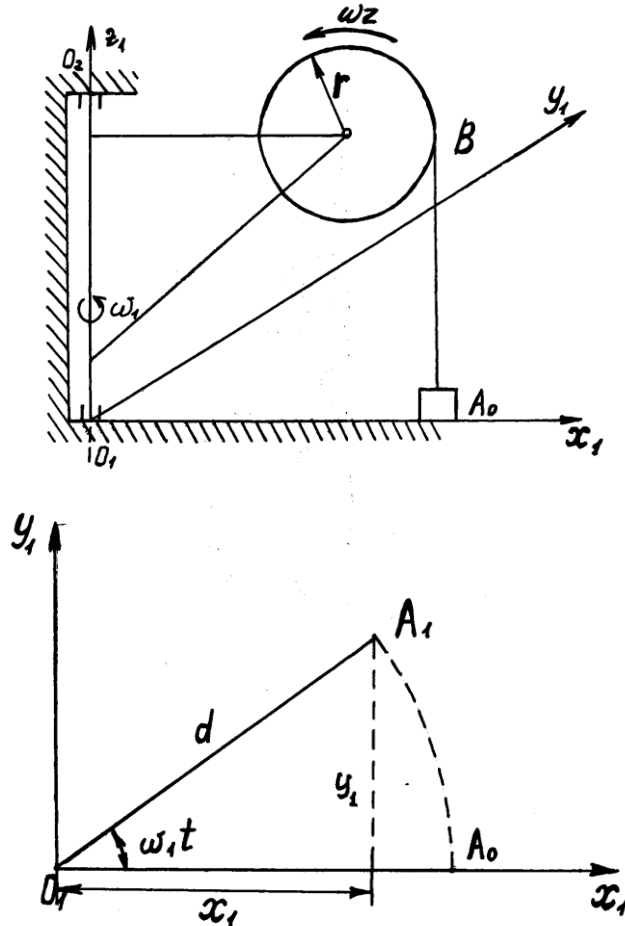


Рис. 8а, 8б

$$\begin{aligned}x_1 &= d \cos \omega_1 t \\y_1 &= d \sin \omega_1 t \\z_1 &= r \omega_2 t\end{aligned}$$

Полученные уравнения движения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории груза A .

Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим параметр t из уравнений движения:

$$t = \frac{z_1}{\omega_2 r};$$

$$x_1 = d \cos \frac{\omega_1 z_1}{\omega_2 r}, \quad y_1 = d \sin \frac{\omega_1 z_1}{\omega_2 r}.$$

Полученная система уравнений представляет уравнение винтовой линии.

Задача 2. При совмещении работы механизмов подъема груза и перемещения крана груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. Барабан B радиуса $r=0,5$

м, на который навит канат, поддерживающий груз A , вращается при пуске в ход с угловой скоростью

$\omega = 2\pi \text{ рад/с}$. Кран перемещается в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $V = 0,5 \text{ м/с}$. Определить абсолютную траекторию груза, если начальные координаты груза $x_0 = 10 \text{ м}$, $y_0 = 6 \text{ м}$. (рис 9).

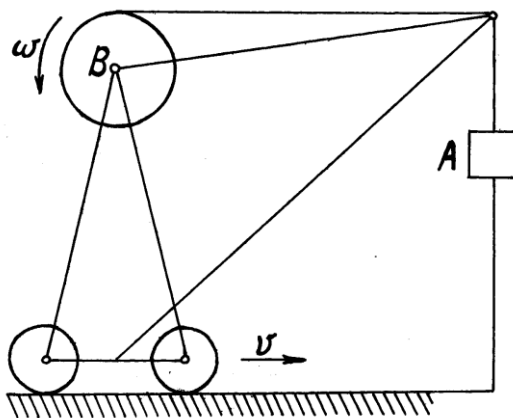


Рис. 9

Решение. Перемещение крана в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $V_0 = 5 \text{ м/с}$ принимаем за переносное движение.

Перемещение груза в вертикальном направлении рассматриваем как относительное движение.

Систему осей Oxy , связанных с землей, принимаем условно за неподвижную систему координат. Систему осей $A_0x_1y_1$ связанных с краном, который перемещается в горизонтальном направлении, принимаем за подвижную систему координат. При этом начало подвижной системы координат совпадает с начальным положением груза (рис 10).

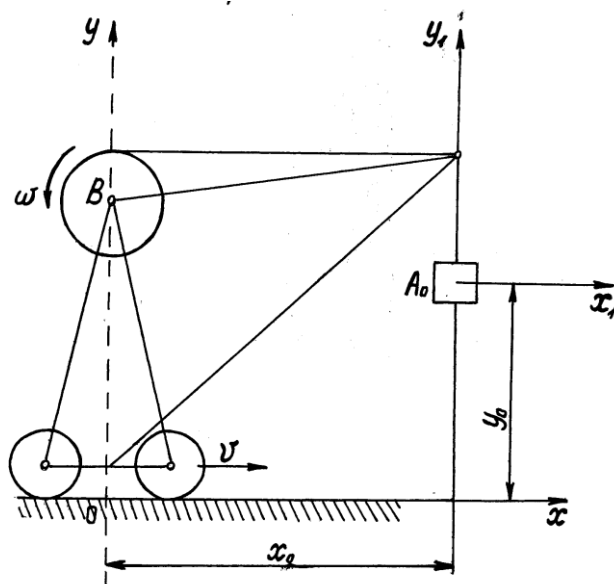


рис 10

Положение груза относительно неподвижной системы координат определяется его координатами:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + Vt, \\ y &= y_0 + \omega \cdot r t. \end{aligned} \quad (1)$$

Полученную систему уравнений можно рассматривать как параметрические уравнения траектории груза. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

$$t = \frac{x - x_0}{V};$$

$$y = y_0 + \omega t \frac{x - x_0}{V} = 6 + 2\pi \cdot 0,5 \frac{x - 10}{0,5} = 6,28x - 56,8 \text{ м.}$$

Задача 3. Точка M движется с постоянной скоростью $V_{от}$ вдоль диаметра AB диска, причем в начальный момент точка находится в центре диска O . Диск одновременно вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр диска. В начальный момент диаметр AB совпадает с осью Ox (рис 11).

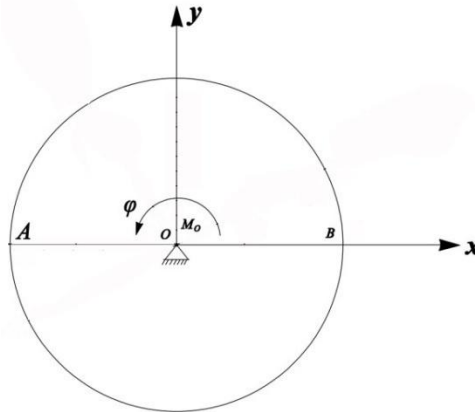


Рис. 11

Определить абсолютную траекторию точки M . Длины даны в метрах, углы – в радианах, время – в секундах.

Решение. Вращение диска с постоянной угловой скоростью принимаем за переносное движение. Движение точки M по диаметру диска AB рассматриваем как относительное движение.

Систему осей Ox_1y_1 , условно принимаем за неподвижную систему координат. Систему осей Oxy , связанных с диском, принимаем за подвижную систему координат (рис 12).

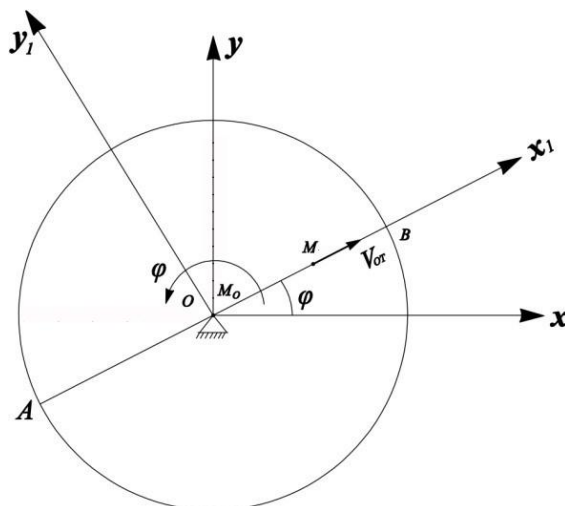


Рис. 12

Данную задачу проще всего решить, применив полярную систему координат: r – модуль радиуса – вектора OM , определяющий расстояние точки M от полюса O , и угол $\varphi = \angle x_1 O x$, определяющий угол поворота радиуса – вектора вокруг точки O .

Тогда уравнения абсолютного движения точки M имеет вид:

$$x = r = V_{от} t \text{ м}, \quad \varphi = \omega t \text{ рад.} \quad (2)$$

Это уравнение называется параметрическим уравнением траектории.

Чтобы получить уравнение траектории в более удобной форме исключим из уравнения (2) параметр t . Для этого из последнего уравнения определяем время

$$t = \frac{\varphi}{\omega};$$

и подставляем это значение в первое уравнение

$$r = \frac{V_{от}}{\omega} \varphi \text{ м.}$$

Это есть уравнение архимедовой спирали в полярной системе координат.

§ 2.16 Примеры решения задач на определение уравнения и траектории относительного движения точки.

Задача 4. Барабан записывающего устройства вращается равномерно со скоростью ω_0 . Радиус барабана r . (рис 13) Самописец соединен с деталью, движущейся по вертикали по закону:

$$y = a \sin \omega_1 t.$$

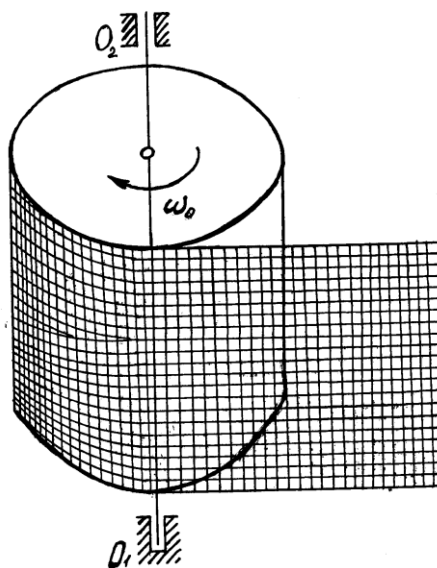


рис 13

Найти уравнение кривой, которую запишет перо на бумажной ленте.

Решение. Равномерное вращение барабана записывающего устройства принимаем за переносное движение. Движение пера самописца барабана записывающего устройства принимаем за относительное движение.

Систему осей $O_1 x_1 y_1$ связанных с Землей условно принимаем за неподвижную систему координат. Систему осей $O x y$ связанных с вращающимся барабаном, за подвижную систему координат. (рис 14)

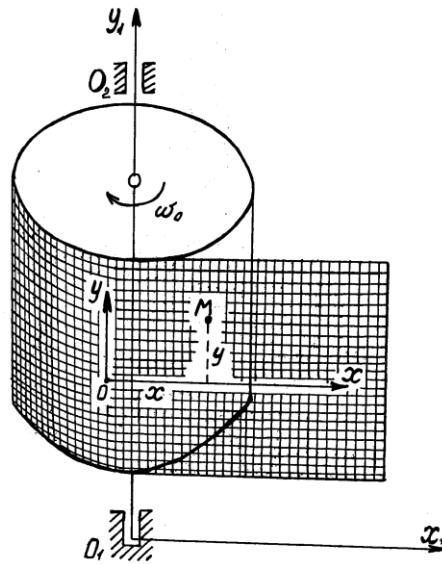


Рис. 14

Пусть в момент времени t перо самописца занимает положение M , которое определяется координатами x, y :

$$\begin{aligned} x &= Vt = \omega_0 r t, \\ y &= a \sin \omega_1 t \end{aligned} \quad (3)$$

Полученную систему уравнений, можно рассматривать как параметрические уравнения относительного движения пера самописца. Чтобы получить уравнение относительного движения пера самописца в координатной форме, исключим время t из уравнений (3).

$$t = \frac{x}{\omega_0 r}, \quad y = a \sin \frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение кривой, которую запишет перо на бумажной ленте.

Задача 5. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O , с постоянной угловой скоростью ω_0 ; угол $\varphi = \omega_0 t$. Длина кривошипа r , длина шатуна $AB = l$: Ползун B движется в направляющих по прямой, проходящих через точку O (рис. 15).

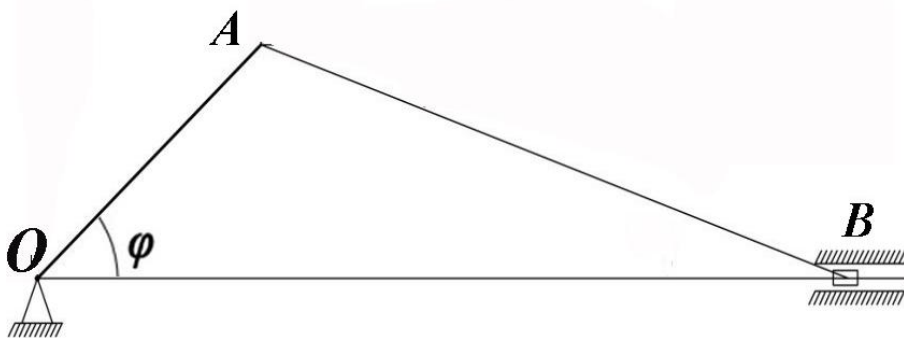


Рис. 15

Определить уравнение относительного движения ползуна В по отношению к системе координат x_1y_1 , начало которой совпадает с точкой соединения кривошипа и шатуна, и которая перемещается поступательно. Рассматривать ползун В как материальную точку. Длины даны в метрах, углы в радианах, время в секундах.

Решение. Разложим сложное движение шатуна АВ на два простых вращательных движения: переносное движение – вращение с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижного центра О, отставить относительное движение – неравномерное вращение шатуна вокруг центра А неподвижной системы координат Ax_1y_1 .

Положение шатуна в этом движении определяется углом $\Psi = \angle x_1AB = \angle ABO$.
Значение угла φ определяем по теореме синусов (рис. 16):

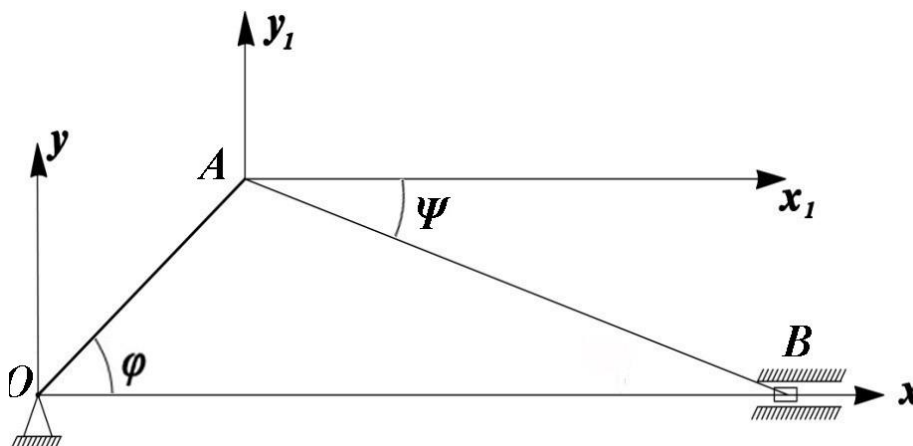


Рис. 16

$$\frac{r}{\sin \psi} = \frac{l}{\sin \varphi},$$

откуда

$$\sin \psi = \frac{r \cdot \sin \varphi}{l} = \frac{r \cdot \sin \omega_0 t}{l}.$$

Следовательно,

$$\psi = \arcsin \frac{r}{l} \sin \omega_0 t \text{ рад.}$$

Полученное уравнение является уравнением относительного движения шатуна АВ.

Чтобы получить уравнение относительного движения ползуна В, необходимо выразить его относительные координаты x_1y_1 через найденный угол ψ :

$$x_1 = l \cos \psi = l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega_0 t} \text{ м.}$$

$$y_1 = -l \sin \psi = -r \sin \omega_0 t \text{ м.}$$

§ 2.2. Методические указания к решению задач на определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.

Известно, что зависимость между абсолютной, переносной и относительной скоростями точки, совершающей сложное (составное) движение, определяется теоремой сложения скоростей, согласно которой *абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей*:

$$V_a = V_{\text{пер}} + V_{\text{от}}. \quad (1)$$

При решении задач по определению относительной скорости точки, следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительную скорость по правилам кинематики.

Для определения переносной скорости точки, необходимо мысленно остановить относительное движение и вычислить переносную скорость точки, как скорость той точки перемещающейся системы координат, с которой в рассматриваемый момент совпадает движущаяся точка.

Применяя теорему о сложении скоростей, можно решать следующие типы задач:

1) известны две стороны треугольника скоростей по модулю и направлению (например, абсолютная и переносная скорость), требуется определить третью сторону треугольника соответствующую относительной скорости точки; (рис. 17).

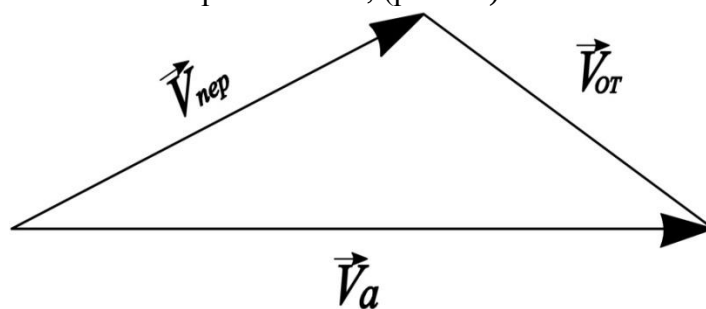


Рис. 17

2) известна одна сторона треугольника по модулю и направлению (например, абсолютная скорость точки), а также направления двух других сторон. Требуется определить модуль переносной и относительной скоростей. (рис. 18).

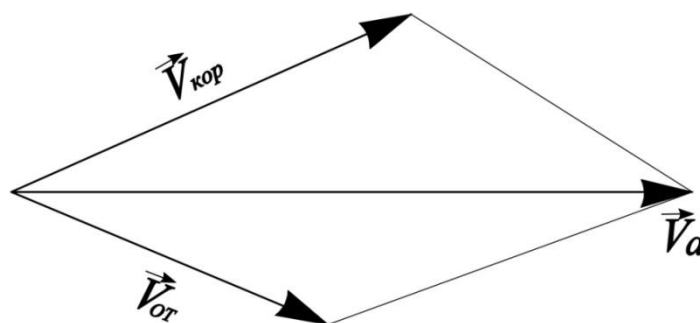


Рис. 18

Решение этих задач может быть получено графически, путем построения замкнутого треугольника скоростей или тригонометрическим путем. Успешно применяется также метод проектирования равенства (1) на декартовой оси координат. Тогда зависимость между проекциями абсолютной, относительной и переносной скоростей определяется формулами:

$$a_{a \ x} = a_{\text{пер} \ x} + a_{\text{от} \ x};$$

$$a_{a \ y} = a_{\text{пер} \ y} + a_{\text{от} \ y},$$

Модуль и направление абсолютной скорости находится по ее проекциям:

$$V_a = \sqrt{V_{a \ x}^2 + V_{a \ y}^2};$$

$$\cos V_a \wedge \bar{x} = \frac{V_x}{V_a};$$

$$\cos V_a \wedge \bar{y} = \frac{V_y}{V}.$$

При решении задач на определение абсолютной скорости точки, рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) определить относительное, переносное и абсолютное движения;
- 2) выбрать неподвижную – абсолютную и подвижную системы координат;
- 3) мысленно остановив переносное движение, найти скорость относительного движения точки;
- 4) мысленно остановив относительное движение, найти скорость переносного движения точки;
- 5) применяя теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость.

§ 2.3. Примеры решения задач на определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.

Задача 6. Берега реки параллельны, лодка вышла из точки A , и держит курс перпендикулярно берегам, достигла противоположного берега через $t_1 = 10$ минут после отправления. При этом она попала в точку C , лежащую на 120 м. ниже точки A по течению реки. Чтобы двигаясь с прежней относительной скоростью, попасть из точки A в точку B , лежащую на прямой AB , перпендикулярной берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения, в этом случае лодка достигает противоположного берега через $t_2 = 12,5$ минут. Определить ширину реки l , относительную скорость V лодки по отношению к воде, и скорость V течения реки.

Решение. В данной задаче движение лодки по отношению к воде, является относительным движением.

Течение реки по отношению к берегу (берег считается неподвижным), рассматривается как переносное движение. Движение лодки относительно берега является абсолютным движением.

а) Рассмотрим движение лодки из точки A перпендикулярно к берегу. При этом она попадает в точку C (рис 20) через $t_1 = 10$ минут после отправления. В этом случае $V_{от}$ – относительная скорость лодки по отношению к воде, $V_{пер}$ – скорость течения реки, для лодки является переносной. Из рис.19

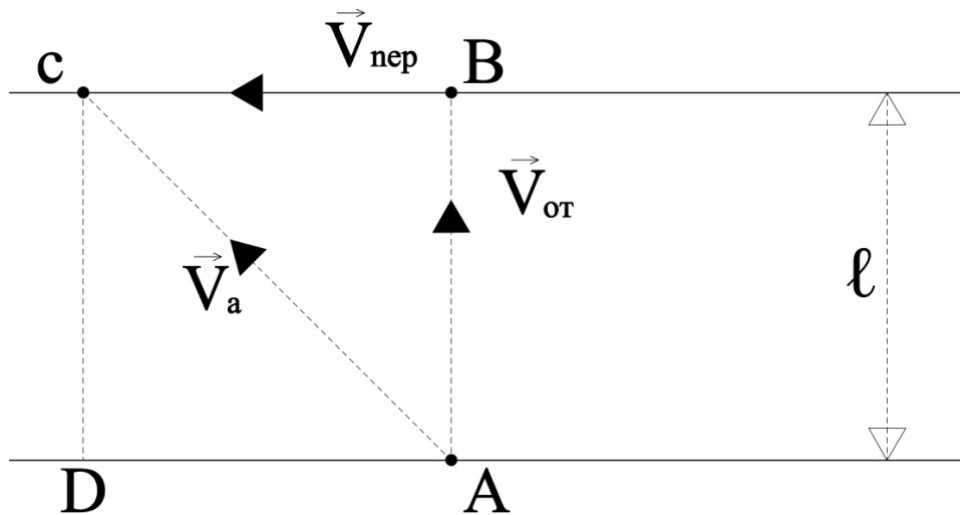


Рис.19

$$V_{\text{пер}} = \frac{AD}{t_1} = \frac{120}{10} = 12 \text{ м/мин.}$$

При этом ширина реки определяется формулой:

$$l = V_{\text{от}} t_1.$$

Отсюда,

$$V_{\text{от}} = \frac{l}{t_1}, \quad (1)$$

б) Теперь рассматриваем движение лодки под некоторым углом к прямой АВ и против течения. При этом она достигает противоположного берега через $t_2 = 12,5$ минут. Из рис. 20

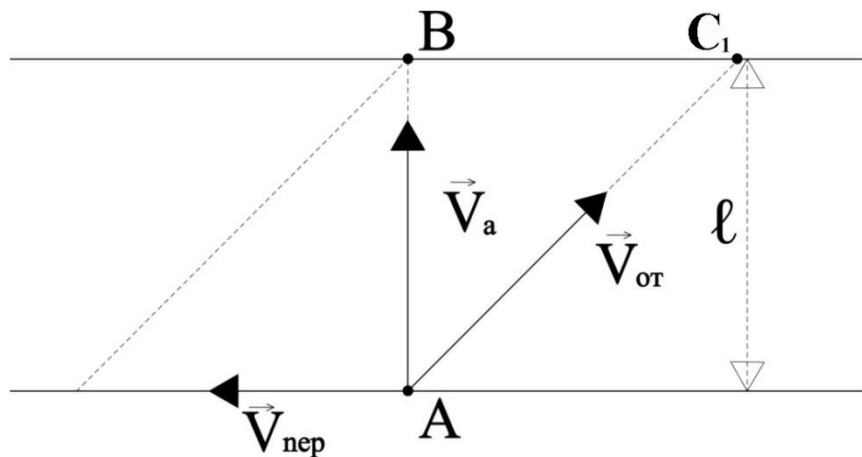


Рис. 20

$$l = V_a \cdot t_2.$$

Отсюда,

$$V_a = \frac{l}{t_2}, \quad (2)$$

Из $\triangle ABC_1$

$$V_{\text{от}}^2 = V_a^2 + V_{\text{пер}}^2. \quad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3)

имеем

$$\frac{l^2}{t_1^2} = \frac{l^2}{t_2^2} + V_{\text{пер}}^2 \quad \text{или} \quad \frac{l^2}{10^2} = \frac{l^2}{(12,5)^2} + 144.$$

Из этого выражения находим l :

$$l = \frac{\overline{144}}{0,0036} = 200 \text{ м.}$$

Тогда

$$V_{\text{от}} = \frac{l}{t_1} = \frac{200}{10} = 20 \text{ м/с.}$$

Задача 7. В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A , перемещаясь вдоль кривошипа OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Расстояние $OK = l$. Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа (рис. 21).

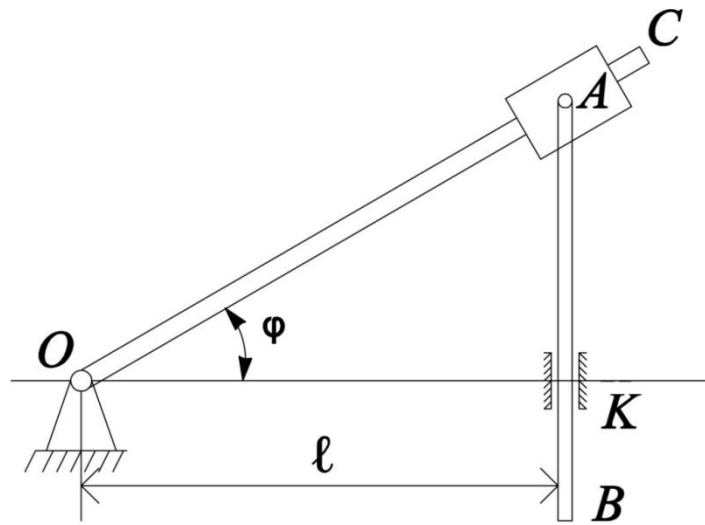


Рис. 21

Решение. В данной задаче качание кривошипа OC вокруг оси O для ползуна A является переносным движением. Движение ползуна A относительно кривошипа OC , является относительным движением.

Скорость той точки кривошипа, которая в рассматриваемый момент совпадает с ползуном A , для ползуна A , является переносной скоростью (рис 22).

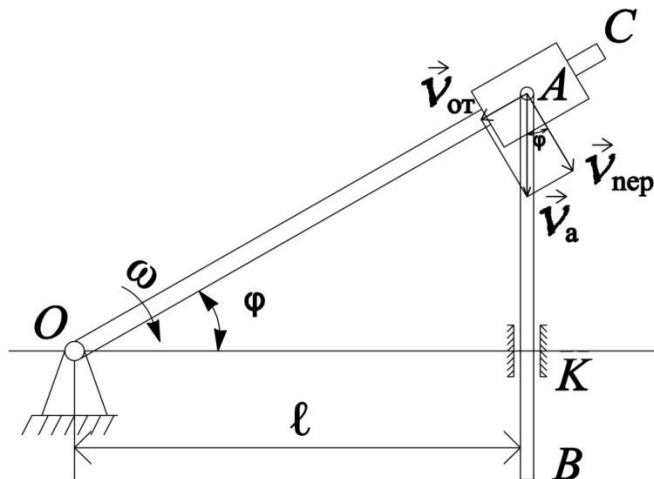


Рис. 22

Поэтому

$$V_{\text{пер}} = \omega \cdot OA.$$

Вектор $V_{\text{пер}}$ направлен перпендикулярно кривошину OC в сторону его вращения.

Из (рис. 22) $OA = \frac{l}{\cos \varphi}$.

Поэтому,

$$V_{\text{пер}} = \frac{\omega l}{\cos \varphi}, \quad (1)$$

Относительная скорость $V_{\text{от}}$ ползуна A направлена по кривошину OC .

В точке A построим параллелограмм скоростей (рис. 22).

Из параллелограмма скоростей видно, что

$$V_{\text{от}} = V_{\text{пер}} \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) имеем

$$V_{\text{от}} = \frac{\omega l}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Задача 8. Пассажир, движущийся со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля, видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя, наклоненных к вертикали под углом 40° . Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

Решение. Движение автомобиля по горизонтальному шоссе является переносным движением.

Траектория капель дождя, наклоненной под углом 40° к вертикали относительно стекла автомобиля, составить относительное движение капли.

Движение дождевых капель отвесно падающего дождя, является абсолютным движением.

Согласно теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость капель дождя равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей (рис. 23).

$$V_a = V_{\text{пер}} + V_{\text{от}}.$$

Построим треугольник скоростей по известным направлениям переносной, относительной и абсолютной скоростей:

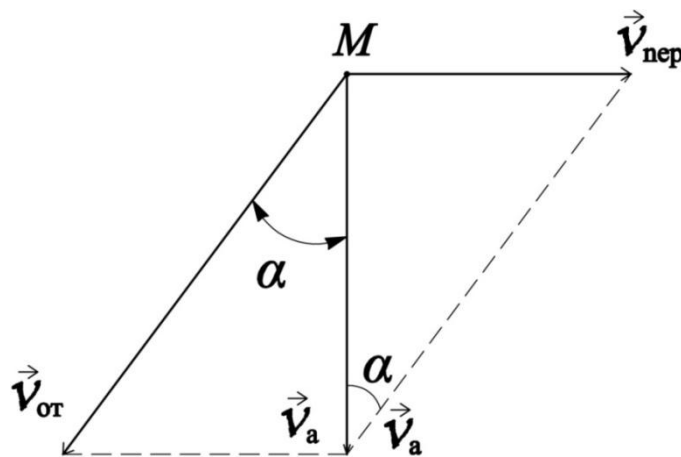


Рис. 23

Из построенного треугольника скоростей следует

$$\frac{V_{\text{пер}}}{V_a} = \operatorname{tg} 40^\circ ; \quad V_{\text{пер}} = 72 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 20 \text{ м/с}.$$

Тогда,

$$V_a = \frac{V_{\text{пер}}}{\operatorname{tg} 40} = \frac{20 \text{ м/с}}{0,839} = 23,8 \text{ м/с}.$$

§ 2.4 Методические указания к решению задач на определение ускорений при переносном поступательном движении точки.

В случае сложного движения точки, когда переносное движение является поступательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме ее переносного и относительного ускорений.

Следовательно,

$$a_a = a_{\text{пер}} + a_{\text{от}} , \quad (1)$$

или

$$a_a = a_{\text{пер}}^{\text{цс}} + a_{\text{пер}}^{\text{вр}} + a_{\text{от}}^{\text{n}} + a_{\text{от}}^{\text{т}} , \quad (2)$$

где $a_{\text{пер}}^{\text{цс}}$ и $a_{\text{пер}}^{\text{вр}}$ – центростремительная и вращающаяся составляющие переносного ускорения точки, а $a_{\text{от}}^{\text{n}}$ и $a_{\text{от}}^{\text{т}}$ – нормальная и касательная составляющие ее относительного ускорения. Если переносное или относительное движение точки являются прямолинейным движением, то соответствующее переносное центростремительное – $a_{\text{пер}}^{\text{цс}}$ или относительное нормальное – $a_{\text{от}}^{\text{n}}$ ускорение будет равно нулю.

Если переносное или относительное движение точки будут криволинейным равномерным, то обращается в нуль соответствующее переносное – $a_{\text{пер}}^{\text{вр}}$ или относительное касательное ускорение – $a_{\text{от}}^{\text{т}}$.

Задачи, относящиеся к этому параграфу можно решить двумя способами:

геометрическим или аналитическим.

При геометрическом способе решении задач, необходимо в выбранном масштабе построить параллелограмм или многоугольник ускорений на основании векторных равенств (2).

При аналитическом способе решении задач применяется метод проекций. При этом, выбирая какую – либо систему координат $xOyOz$ и проецируя равенство (2) на каждую из этих осей, находим

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_{\text{пер}x}^{\text{цс}} + a_{\text{пер}x}^{\text{вр}} + a_{\text{от}x}^{\text{n}} + a_{\text{от}x}^{\text{т}} ; \\ a_{ay} &= a_{\text{пер}y}^{\text{цс}} + a_{\text{пер}y}^{\text{вр}} + a_{\text{от}y}^{\text{n}} + a_{\text{от}y}^{\text{т}} ; \\ a_{az} &= a_{\text{пер}z}^{\text{цс}} + a_{\text{пер}z}^{\text{вр}} + a_{\text{от}z}^{\text{n}} + a_{\text{от}z}^{\text{т}} . \end{aligned}$$

При этом модуль абсолютного ускорения определяется по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} ,$$

а его направление по формулам

$$\begin{aligned}\cos a_a \wedge x &= \frac{(a_a)_x}{a}, \\ \cos a_a \wedge y &= \frac{(a_a)_y}{a}, \\ \cos a_a \wedge z &= \frac{(a_a)_z}{a},\end{aligned}$$

При решении задач рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) разложить движение на составляющие. Определить абсолютное, переносное и относительное движения;
- 2) выбрать неподвижную (абсолютную) и подвижную систему координат;
- 3) мысленно остановив относительное движение, определить скорость и ускорение точки в переносном движении;
- 4) мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении;
- 5) пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат;
- 6) по найденным проекциям абсолютного ускорения, найти модуль и направление абсолютного ускорения.

§ 2.5 Примеры решения задач на определение ускорений при переносном поступательном движении.

Задача 9. Точка M движется относительно тела D . Уравнения относительного движения точки M : $OM = S_{om} = 6\pi t^2$. Уравнение движения тела D : $\varphi = \frac{\pi t^3}{6}$.

По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D , определить для момента времени $t=1$ с. абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M . (рис 24). $R = 18$ см, $O_1O = OA = 20$ см.

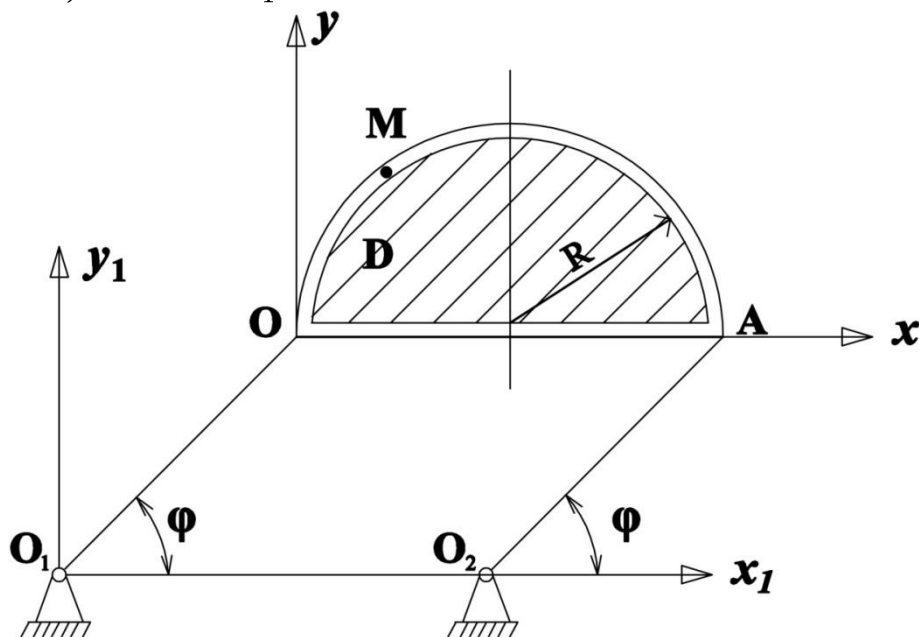


Рис. 24

Решение. В данной задаче движение точки M относительно тела D , является относительным движением.

Поступательное движение тела D для точки M , является переносным движением.

Систему координат $O_1x_1y_1$ связанной с Землей условно принимаем за неподвижную систему координат. Систему координат Oxy , связанной с телом D рассматриваем как подвижную систему координат.

Положение тело D в плоскости чертежа определяется углом φ .

При $t = 1\text{с}$.

$$\varphi = \frac{\pi t^3}{6} = 30^\circ.$$

Положение точки M на тела D определяется углом $\alpha = \frac{S_{от}}{R}$.

При $t=1\text{с}$.

$$\alpha = \frac{6\pi t^2}{R} = \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Положение тела D и положение точки M относительно тело D показаны на рис. 25

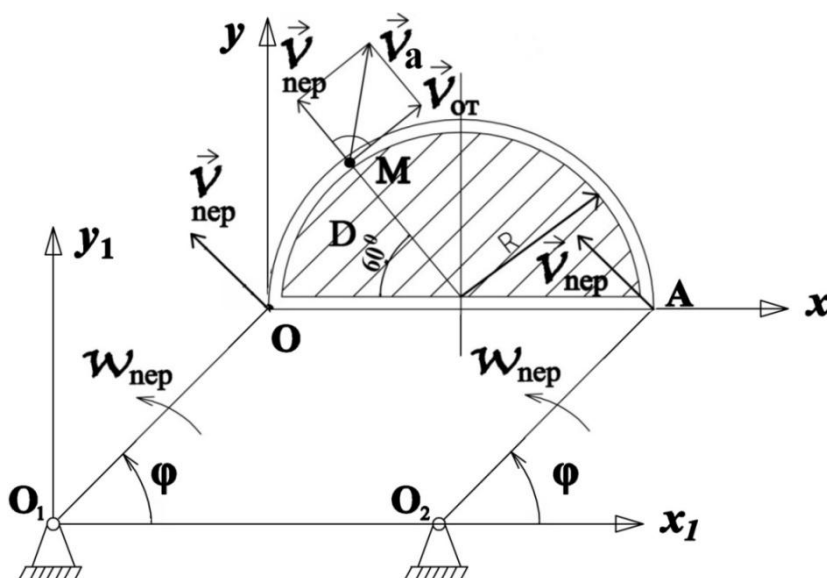


Рис. 25

I. Определение абсолютной скорости точки M .

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$V_a = V_{от} + V_{пер}.$$

Модуль относительной скорости

$$V_{от} = \tilde{V}_{от} = S' = 12 \pi t.$$

При

$$t = 1\text{с}.$$

$$V_{от} = 37,68 \text{ см/с}.$$

Положительный знак у $\tilde{V}_{от}$ показывает, что вектор $V_{от}$ направлен в сторону возрастания $S_{от}$ (рис. 25).

Переносное движение тела D является поступательным. При поступательном движении твердого тела все точки тела описывают одинаковые траектории, и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения. Поэтому переносная скорость точки M будет равна скорости точки O , которая совершает вращательное движение вокруг центра O_1 . Модуль переносной скорости равна

$$V_{\text{пер}} = V_o = \omega R,$$

где ω – модуль угловой скорости стержня O_1O :

$$\omega = \varphi' = \frac{3\pi t^2}{6} = \frac{\pi t^2}{2}.$$

При $t = 1\text{с}$.

$$\omega = 1,57 \text{ рад/с.} \quad \omega = 1,57 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пер}} = \omega R = 1,57 \cdot 20 = 31,4 \text{ см/с}.$$

Положительный знак у ω показывает, что вращение стержня O_1O происходит вокруг точки O_1 в сторону увеличения угла φ (рис 25).

Так как $V_{\text{от}}$ и $V_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$V_a = \sqrt{V_{\text{от}}^2 + V_{\text{пер}}^2} = \sqrt{37,68^2 + 31,4^2} = 49,05 \text{ см/с}.$$

II. Определение абсолютного ускорения точки M .

Абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$a_a = a_{\text{от}} + a_{\text{пер}} = a_{\text{от}}^n + a_{\text{от}}^{\tau} + a_{\text{пер}}^{\text{нс}} + a_{\text{пер}}^{\text{вр}}.$$

Вследствие того, что в данной задаче переносное движение поступательное, кориолисова ускорение равно нулю.

$$a_c = 2(\omega_{\text{пер}} \times V_{\text{от}}) = 0.$$

Относительное нормальное ускорение точки M

$$a_{\text{от}}^n = \frac{V_{\text{от}}^2}{R} = \frac{(37,68)^2}{18} = 78,88 \text{ см/с}^2.$$

Относительное касательное ускорение точки M

$$a_{\text{от}}^{\tau} = \frac{dV_{\text{от}}}{dt} = 12\pi = 37,68 \text{ см/с}^2.$$

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_{\text{пер}}^{\text{нс}} = \omega^2 \cdot O_1O = (1,57)^2 \cdot 20 = 49,30 \text{ см/с}^2.$$

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_{\text{пер}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot 0_1 0,$$

$$\text{где } \varepsilon = \varepsilon = \omega = \pi t.$$

При $t = 1 \text{ с}$.

$$\varepsilon = 3,14 \text{ рад/с}^2.$$

Следовательно,

$$a_{\text{пер}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot 0_1 0 = 3,14 \cdot 20 = 62,8 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак у ε показывает, что направление вектора $a_{\text{пер}}^{\text{вр}}$ совпадает с направлением вектора $V_{\text{пер}}$ (рис 26)

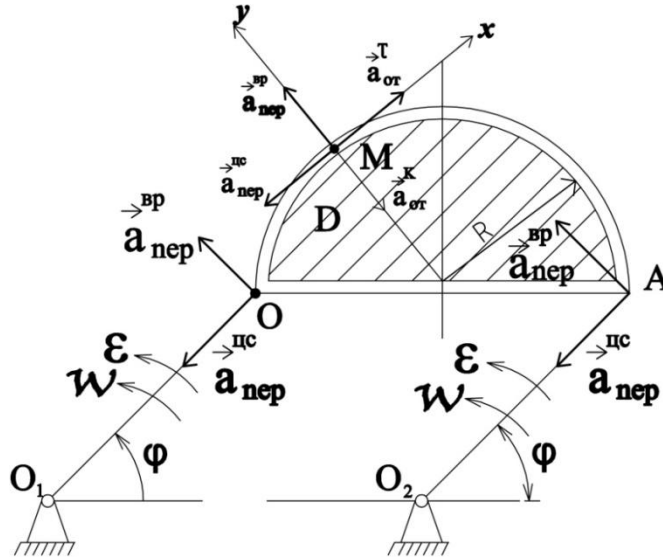


рис 26

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекции:

$$a_{a \ x} = a_{\text{от}}^{\tau} - a_{\text{пер}}^{\text{цс}} = 37,68 - 49,30 = -11,62 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{a \ y} = -a_{\text{от}}^n + a_{\text{пер}}^{\text{вр}} = -78,88 + 62,8 = -16,08 \text{ см/с}^2.$$

Следовательно,

$$a_a = \sqrt{(a_a)_x^2 + (a_a)_y^2} = 19,84 \text{ см/с}^2.$$

Задача 10. На тележке, движущейся по горизонтали вправо по закону $x = t^3 + 4t \text{ м}$, установлен электродвигатель, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$, причем угол φ измеряется в радианах. Радиус ротора равен $0,2 \text{ м}$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M , лежащей на ободе ротора при $t = 1 \text{ с}$, если в этот момент точка M находится в положении, указанном на рис. 27.

Решение. Вращение ротора и вместе с ним точки M его обода является относительным движением точки M . Движение тележки и установленного на нем электродвигателя, является для точки M переносным движением.

Систему координат Ax_1y , связанной с Землей, принимаем условно за неподвижную систему координат.

Систему координат O_{xy} , связанную с тележкой, рассматриваем как подвижную систему координат.

Будем считать, что в заданный момент времени тележка и установленный на нее электромотор занимает положение, указанное на рис. 27.

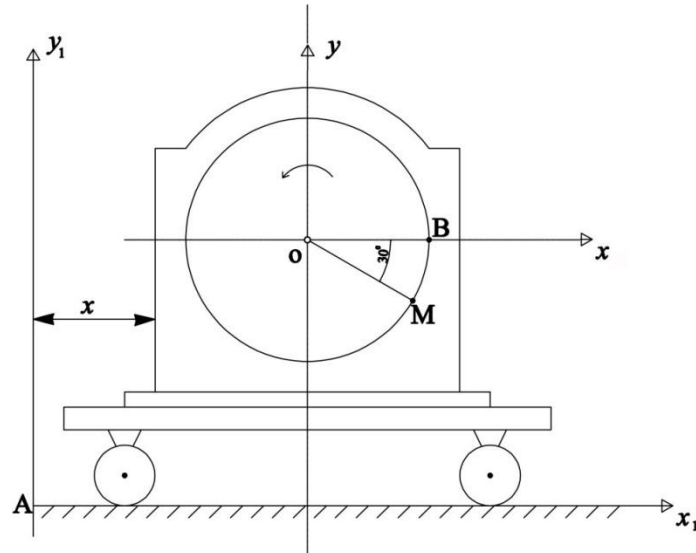


Рис. 27.

I. Определение абсолютной скорости точки M.

Абсолютную скорость точки M, найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$V_a = V_{от} + V_{пер}.$$

Модуль переносной скорости

$$V_{пер} = \dot{x},$$

где

$$V_{пер} = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4.$$

При $t = 1$ с.

$$V_{пер} = 3 + 4 = 7 \text{ см/с.}, \quad V_{пер} = 7 \text{ см/с.}$$

Положительный знак у $V_{пер}$ показывает, что вектор $V_{пер}$ направлен в сторону возрастания x (рис 28).

Модуль относительной скорости

$$V_{от} = \omega_{от} \cdot R, \tag{1}$$

где R – радиус ротора, $\omega_{от}$ – модуль угловой скорости ротора:

$$\omega_{пер} = \omega_{от}; \quad \omega_{от} = \frac{d\varphi}{dt} = 2t.$$

При $t = 1$ с.

$$\omega_{от} = 2 \text{ рад/с}, \quad \omega_{от} = 2 \text{ рад/с.}$$

Положительный знак у величины $\omega_{от}$ показывает, что вращение ротора происходит в направлении отсчета угла φ .

Модуль относительной скорости по формуле (1) равна

$$V_{от} = 0,4 \text{ м/с.}$$

Вектор $V_{от}$ направлен по касательной к окружности, которую описывает точка М ротора, в сторону его вращения (рис. 28).

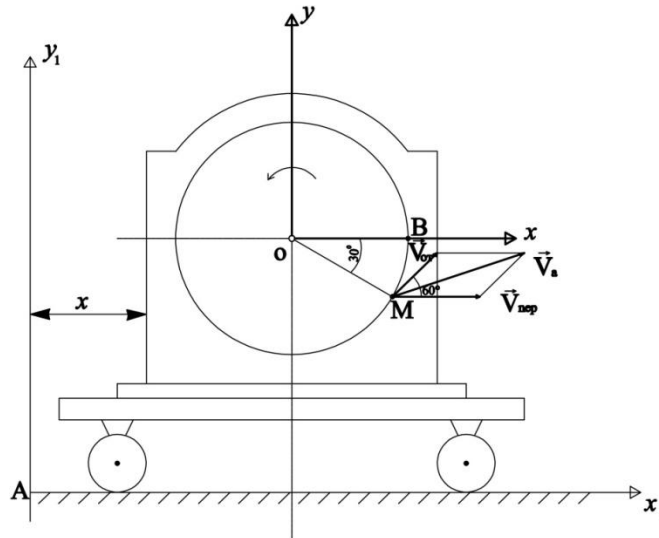


Рис. 28

Абсолютная скорость точки М определяется диагональю параллелограмма построенного на векторах $V_{от}$ и $V_{пер}$. Модуль абсолютной скорости

$$V_a = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2 + 2 \cdot V_{от} \cdot V_{пер} \cos 60^\circ} = 7,21 \text{ см/с}^2.$$

II. Определение абсолютного ускорения точки М.

В рассматриваемой задаче переносное движение поступательное.

Поэтому абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$a_a = a_{от} + a_{пер},$$

или в развернутом виде

$$a_a = a_{от}^n + a_{от}^r + a_{пер}.$$

Модуль переносного ускорения

$$a_{пер} = a_{пер},$$

где

$$a_{пер} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 6t.$$

При $t = 1 \text{ с}$.

$$a_{пер} = 6 \text{ см/с}^2, a_{пер} = 6 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак $a_{пер}$ показывает, что направление $a_{пер}$ совпадает с направлением $V_{пер}$, т.е движение тележки с электромотором ускоренное (рис. 29).

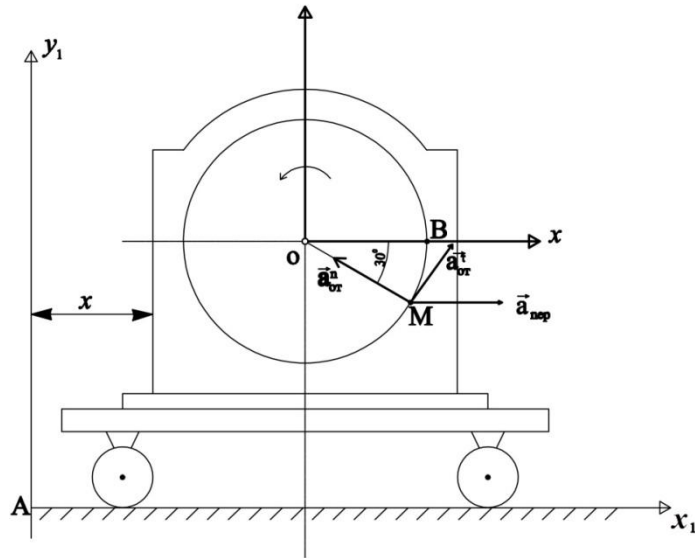


Рис. 29

Относительное нормальное ускорение

$$a_{от}^n = \frac{V_{от}^2}{R} = \frac{0,16}{0,2} = 0,8 \text{ см/с}^2.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_{от}^\tau = \varepsilon_{от} \cdot R. \quad (2)$$

Модуль углового ускорения ротора:

$$\varepsilon = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Big| = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\varepsilon_{от}$ и $\omega_{от}$ одинаковы, следовательно, вращение ротора ускоренное

Согласно (2)

$$a_{от}^\tau = 0,4 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения находим способом проекций:

$$\begin{aligned} a_{a \ x} &= a_{пер} - a_{от}^n \cos 30^\circ + a_{от}^\tau \cos 60^\circ = 5,52 \text{ см/с}^2 \\ a_{a \ y} &= a_{от}^n \cos 60^\circ + a_{от}^\tau \cos 30^\circ = 0,74 \text{ см/с}^2 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_a = \sqrt{(a_a)_x^2 + (a_a)_y^2} = 5,6 \text{ м/с}^2.$$

§ 2.6. Методические указания к решению задач на определение ускорений при непоступательном переносном движении.

В случае сложного движения точки, когда переносное движение непоступательное, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова или поворотного, ускорений

$$a_a = a_{\text{пер}} + a_{\text{от}} + a_{\text{кор}}$$

или

$$a_a = a_{\text{пер}}^{\text{пс}} + a_{\text{пер}}^{\text{вр}} + a_{\text{от}}^{\text{п}} + a_{\text{от}}^{\text{т}} + a_{\text{кор}}.$$

Известно, что кориолисово ускорение равно удвоенному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки (см § 1.4)

Порядок действий при определении абсолютного ускорения точки при непоступательном переносном движении такой же, как и в случае переносного поступательного движения (см § 2.4). Только необходимо после 5 го пункта действий добавить следующий пункт:

– По известной угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении, найти кориолисово ускорение точки.

Порядок дальнейших действий остается без изменений.

§ 2.7. Примеры решения задач на определение ускорений точки при поступательном переносном движении.

Задача 11. Точка М равномерно движется по образующей кругового конуса от вершины к основанию с относительной скоростью $V_{\text{от}}$; угол $MOA = \alpha$. В момент $t = 0$ расстояние $OM_0 = b$. Конус равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти абсолютное ускорение точки М (рис. 30).

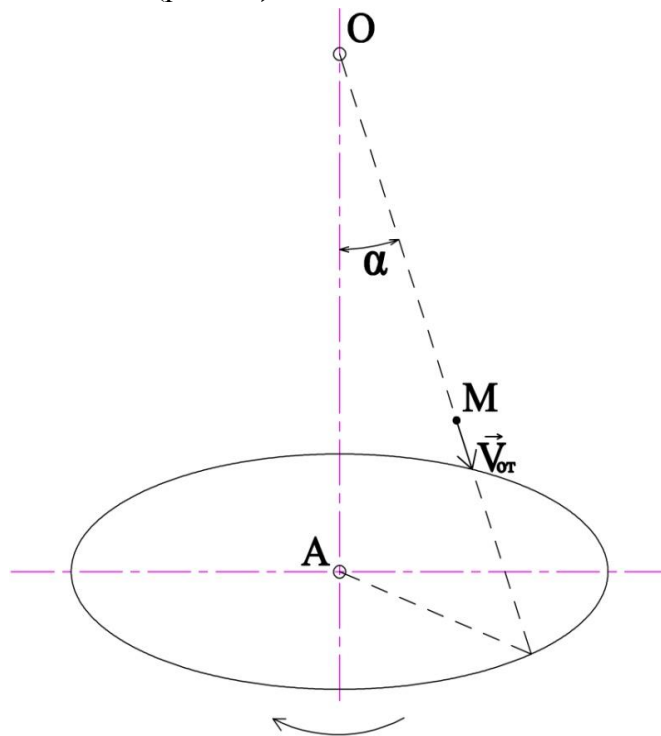


Рис. 30

Решение. Равномерное движение точки М по образующей кругового конуса, является относительным движением. Вращение конуса вокруг своей оси, является для точки М переносным движением.

Согласно теореме Кориолиса о сложении ускорений абсолютное ускорение точки М равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорения

$$a_a = a_{\text{от}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}}.$$

Относительное движение точки M прямолинейное равномерное.

Поэтому $V_{от} = \text{const}$

Следовательно, $a_{от} = \frac{dV_{от}}{dt} = 0$.

Переносное ускорение точки M , равно ускорению той точки образующей конуса, которая в рассматриваемый момент времени совпадает с движущейся точкой M

$$a_{пер} = a_{пер}^{цс} + a_{пер}^{вр}$$

Вращение конуса происходит с постоянной угловой скоростью ω . Следовательно, $\omega_{пер} = \omega = \text{const}$,

$$\varepsilon_{пер} = \frac{d\omega_{пер}}{dt} = 0.$$

Поэтому

$$a_{пер}^{вр} = 0.$$

Тогда,

$$a_a = a_{пер}^{цс}.$$

Модуль переносного центростремительного ускорения точки M .

$$a_{пер}^{цс} = \omega^2 \cdot R,$$

где

$$R = (b + V_{от} t) \sin \alpha.$$

Поэтому

$$a_{пер}^{цс} = \omega^2 (b + V_{от} t) \sin \alpha.$$

Модуль Кориолисова ускорения

$$a_{кор} = 2 \omega_{пер} \cdot V_{от} \sin (\omega_{пер} \wedge V_{от}) = 2 \omega \cdot V_{от} \sin 30^\circ = \omega V_{от}.$$

Кориолисова ускорение направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ω и $V_{от}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение ω и $V_{от}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 31). В рассматриваемой задаче $a_{кор} \perp a_{пер}^{цс}$.

Поэтому модуль абсолютного ускорения точки M равна

$$a_a = \sqrt{(a_{пер}^{цс})^2 + a_{кор}^2} = \sqrt{[\omega^2 (b + V_{от} t) \sin \alpha]^2 + \omega^2 V_{от}^2}$$

Абсолютное ускорение лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и представляет собой гипотенузу треугольника с катетами $a_{пер}^{цс}$ и $a_{кор}$ (рис. 31).

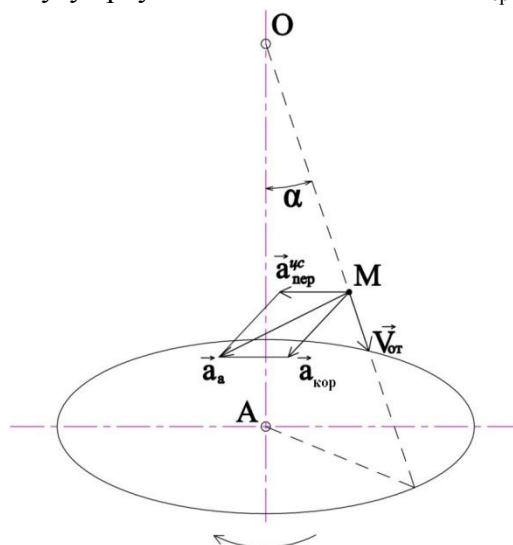


Рис. 31

Задача 12. Точка М движется относительно тело D. Уравнение относительного движения точки М:

$$OM = S = 40\pi \cos \frac{\pi t}{3} \text{ см.}$$

Радиус полого кольца $R = 40$ см.

Тело D вращается вокруг оси АВ. Уравнение вращательного движения тело D $\varphi = 3t - 0,5t^3, \text{ рад.}$

Определить для момента времени $t = 1 \text{ с.}$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М (рис. 32).

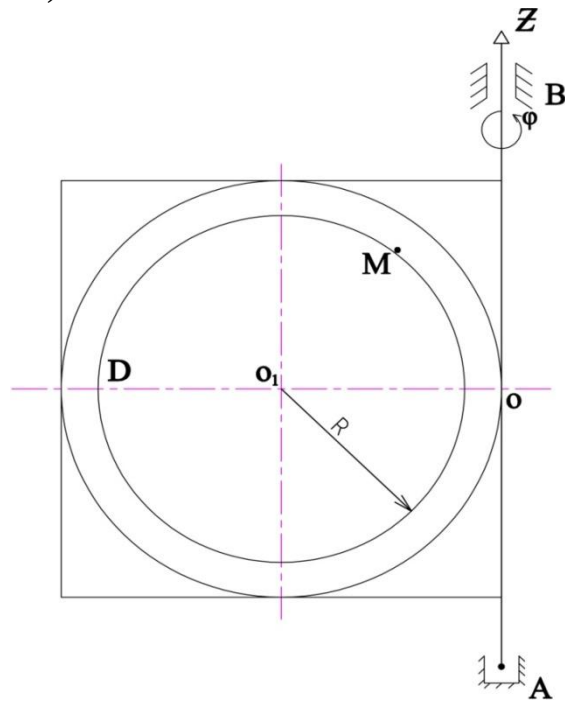


Рис. 32

Решение. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью тело D

Движение точки М внутри полого кольца относительно тело D принимаем за относительное движение.

Вращение тело D вокруг оси АЗ рассматриваем как переносное движение. Движение точки М по отношению к Земле является абсолютным движением.

Систему координат А х, у, z связанной с Землей считаем условно неподвижной, систему координат О, $x_1 y_1 z_1$ связанной с вращающимся телом D принимаем за подвижную систему координат.

Положение точки М определяется формулой

$$\alpha = \frac{s_{от}}{R} = \frac{40\pi \cos(\pi t/3)}{R}.$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \quad \alpha = \frac{40\pi \cos 60^\circ}{R} = \frac{20\pi}{40} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

I. Определение абсолютной скорости точки M .

Абсолютную скорость точки M , найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$V_a = V_{от} + V_{пер}.$$

Модуль относительной скорости

$$V_{от} = |V_{от}|,$$

где

$$V_{от} = \frac{dS}{dt} = -40\pi^2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t = 1$ с.

$$V_{от} = \frac{-40 \cdot (3,14)^2}{3} \cdot 0,87 = -113,06 \text{ см/с},$$

Следовательно

$$V_{от} = 113,06 \text{ см/с}.$$

Отрицательный знак у $V_{от}$ показывает, что вектор $V_{от}$ направлен по касательной к полюму кольца в сторону уменьшения $S_{от}$ (рис 33).

Модуль переносной скорости

$$V_{пер} = \omega_{пер} \cdot R_{пер},$$

где $R_{пер}$ – радиус окружности, описываемой той точкой полого кольца, с которой в данный момент совпадает точка M .

$$R_{пер} = R = 40 \text{ см}; \quad \omega_{пер} \text{ – модуль угловой скорости тела } D:$$

$$\omega_{пер} = |\omega_{пер}|; \quad \omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = 3 - 1,5 t^2.$$

При $t = 1$ с.

$$\omega_{пер} = 1,5 \text{ рад/с}; \quad \omega_{пер} = 1,5 \text{ рад/с}$$

Положительный знак у величины $\omega_{пер}$ показывает, что вращение квадрата происходит вокруг оси Az в сторону возрастания угла φ . Вектор $\omega_{пер}$ направлен по оси Az вверх (рис. 33).

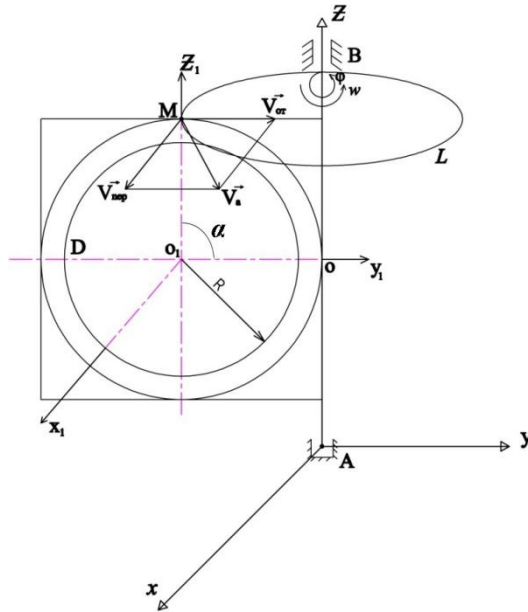


Рис. 33

Модуль переносной скорости

$$V_{\text{пер}} = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ см/с.}$$

Вектор $V_{\text{пер}}$ направлен по касательной к окружности в сторону возрастания угла φ . Векторы $V_{\text{от}}$ и $V_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль абсолютной скорости точки M равен

$$V_a = \sqrt{V_{\text{от}}^2 + V_{\text{пер}}^2} = 128 \text{ см/с.}$$

II. Определение абсолютного ускорения точки M .

Абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$a_a = a_{\text{от}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}}$$

или в развернутом виде

$$a_a = a_{\text{от}}^n + a_{\text{от}}^\tau + a_{\text{пер}}^{\text{ис}} + a_{\text{пер}}^{\text{вр}} + a_{\text{кор}}.$$

Модуль относительного нормального ускорения

$$a_{\text{от}}^n = \frac{V_{\text{от}}^2}{R} = 319,56 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_{\text{от}}^n$ направлен к точке O_1 центра полого кольца (рис. 34).

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_{\text{от}}^\tau = |a_{\text{от}}^\tau|,$$

где

$$a_{\text{от}}^\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{-40 \pi^3}{9} \sin \frac{\pi t}{3} = -68,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{\text{от}}^\tau = 68,3 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак $a_{от}^{\tau}$ показывает, что вектор $a_{от}^{\tau}$ направлен в сторону уменьшения $S_{от}$. Знаки $V_{от}$ и $a_{от}^{\tau}$ одинаковы, следовательно, относительное движение точки М ускоренное.

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_{пер}^{цс} = \omega_{пер}^2 \cdot R = 90 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_{пер}^{цс}$ направлен к центру окружности L .

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_{пер}^{вр} = \varepsilon_{пер} \cdot R, \quad (1)$$

где

$\varepsilon_{пер} = |\varepsilon_{пер}|$ - модуль углового ускорения квадрата с полым кольцом :

$$\varepsilon_{пер} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -3t.$$

При $t = 1 \text{ с}$.

$$\varepsilon_{пер} = -3 \text{ рад/с}^2; \varepsilon_{пер} = 3 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\omega_{пер}$ и $\varepsilon_{пер}$ разные, следовательно, вращение квадрата с полым кольцом замедленное. Вектор $\varepsilon_{пер}$, направлен по оси Az вниз (рис. 34).

Согласно (1)

$$a_{пер}^{вр} = 120 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_{пер}^{вр}$ направлен противоположно вектору $V_{пер}$ (рис. 34).

Кориолисова ускорение

$$a_{кор} = 2 (\omega_{пер} \times V_{от}).$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2 \cdot V_{пер} V_{от} \sin (\omega_{пер} \wedge V_{от}),$$

где

$$\sin (\omega_{пер} \wedge V_{от}) = \sin 90^\circ = 1.$$

С учетом найденных выше значений $\omega_{пер}$ и $V_{от}$ получаем

$$a_{кор} = 339,18 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_{кор}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\omega_{пер}$ и $V_{от}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\omega_{пер}$ и $V_{от}$ видно проходящим против хода часовой стрелки (рис. 34).

Направление $a_{кор}$ и $a_{пер}^{вр}$ совпадают.

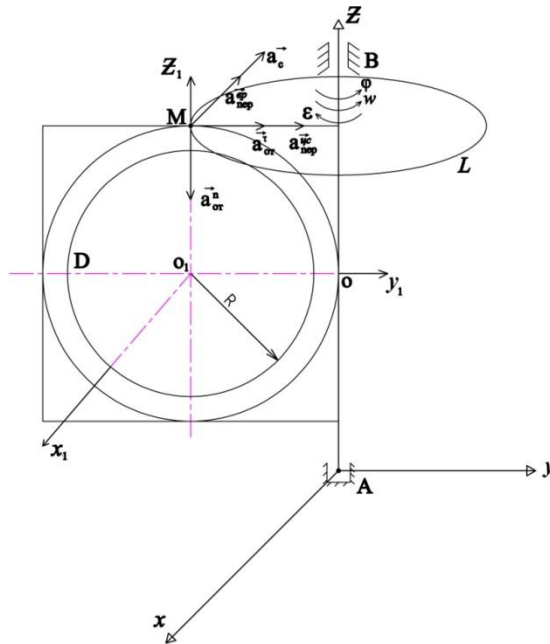


Рис. 34

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= -a_{nep}^{bp} - a_c = -459,18 ; \\ a_{ay} &= -a_{nep}^{nc} + a_{от}^r = 158,3 ; \\ a_{az} &= -a_{от}^n = -319,56 ; \end{aligned}$$

Тогда

$$a_a = \sqrt{(a_a)_x^2 + (a_a)_y^2 + (a_a)_z^2} = 663,43 \text{ см/с}^2.$$

Задача 13. Наклонная плоскость AB , составляющая угол 45° с горизонтом,

движется прямолинейно параллельно оси Ox с постоянным ускорением $0,1 \text{ м/с}^2$.

По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $0,1 \text{ м/с}^2$; начальные скорости плоскости и тела равны нулю, начальное положение тела определяется координатами $x_0 = 0, y_0 = h$.

Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела (рис. 35).

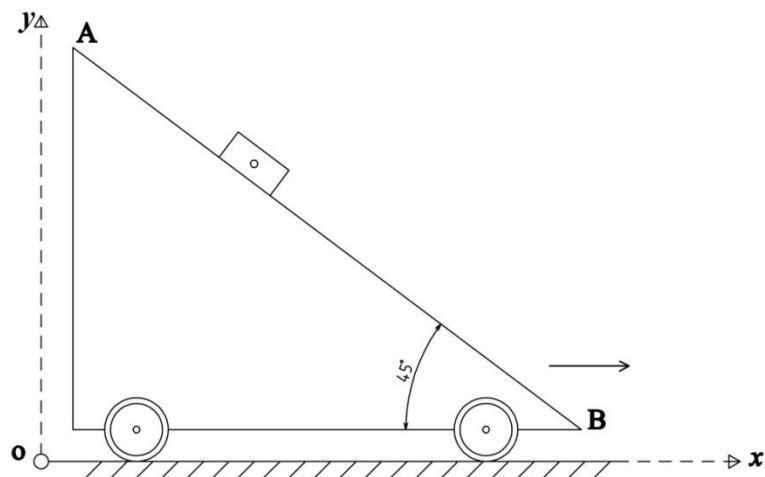


Рис. 35

Решение. Прямолинейное движение наклонной плоскости параллельно оси Ox является переносным движением.

Спуск тела P по этой плоскости рассматривается как относительное движение.

Систему координат Oxy , связанной с землей, принимаем за неподвижную систему отсчета.

Тогда движение тела P по отношению к системе координат Oxy является абсолютным движением.

Переносное ускорение определяется формулой:

$$a_{\text{пер}} = \frac{dV_{\text{пер}}}{dt} = 0,1.$$

Проинтегрирую это равенство по времени t в соответствующих пределах, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{V_{\text{пер}}} dV_{\text{пер}} &= 0,1 \int_0^t dt; \\ V_{\text{пер}} &= 0,1 t. \end{aligned} \quad (1)$$

Вектор $V_{\text{пер}}$ направлен параллельно оси Ox в сторону движения тележки.

Относительное ускорение определяется формулой $a_{\text{от}} = \frac{dV_{\text{от}}}{dt} = 0,1 \sqrt{2}$.

Проинтегрировав это равенство по времени t в соответствующих пределах, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{V_{\text{от}}} dV_{\text{от}} &= 0,1 \sqrt{2} \int_0^t dt; \\ V_{\text{от}} &= 0,1 \sqrt{2} t; \end{aligned} \quad (2)$$

Вектор $V_{\text{от}}$ направлен вдоль наклонной плоскости вниз по направлению движения тела P .

Согласно теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей (рис. 36).

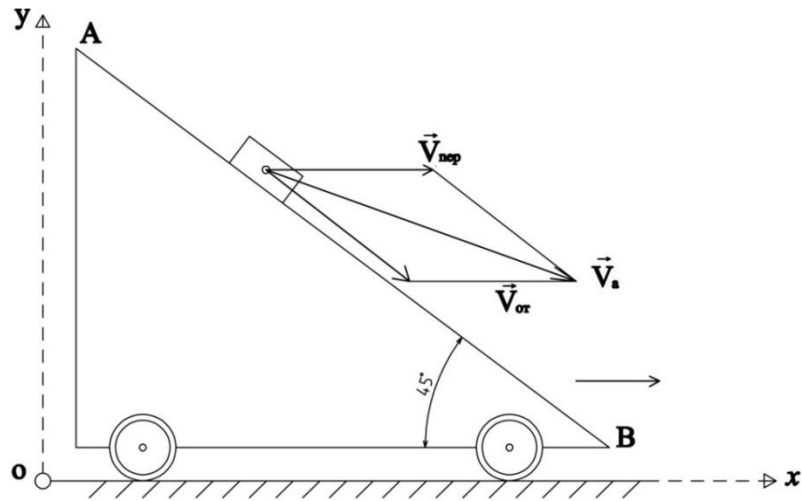


Рис. 36

$$V_a = V_{\text{пер}} + V_{\text{от}}.$$

Модуль абсолютной скорости находим способом проекции:

$$V_{a\ x} = (V_{\text{пер}} + V_{\text{от}} \cos 45^\circ) t = (0,1 + 0,1 \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}) t = (0,1 + 0,1) t = 0,2t;$$

$$V_{a\ y} = (-V_{\text{от}} \cos 45^\circ) t = - (0,1 \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}) t = -0,1 t;$$

$$V_a = \sqrt{(V_{a\ x})^2 + (V_{a\ y})^2} = 0,22 \text{ т м/с}.$$

В данной задаче переносное движение поступательное. Поэтому, согласно теореме о сложении ускорений, абсолютное ускорение тело Р равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений:

$$a_a = a_{\text{пер}} + a_{\text{от}}$$

Модуль абсолютного ускорения находим путем построения параллелограмма ускорений (рис. 37);

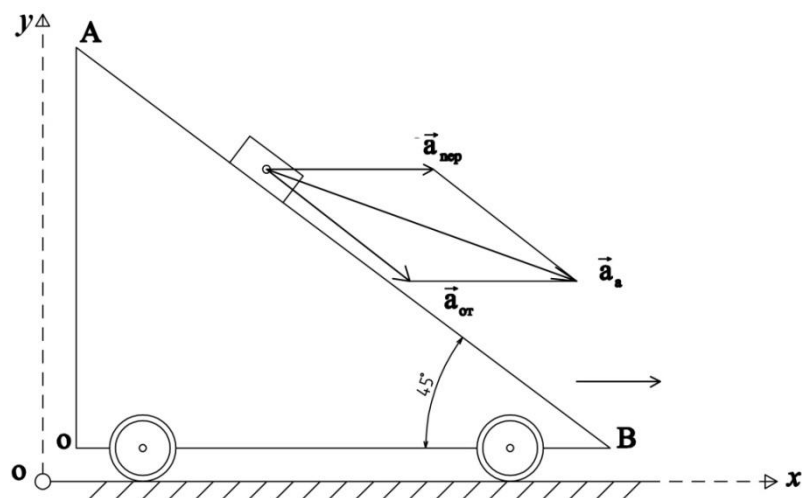


Рис. 37

По теореме косинусов

$$a_a = \sqrt{a_{\text{пер}}^2 + a_{\text{от}}^2 + 2a_{\text{пер}}a_{\text{от}} \cos 45^\circ} = 0,22 \text{ м/с}^2.$$

Определим траекторию тело P .

Известны, что

$$(V_a)_x = \frac{dx}{dt} = 0,2 \text{ т};$$

$$(V_a)_y = \frac{dy}{dt} = -0,1 \text{ т};$$

Проинтегрировав по времени t в соответствующих пределах, получим

$$x = 0,2 \frac{t^2}{2} = 0,1 t^2;$$

$$y - h = -0,1 \frac{t^2}{2} = -0,05 t^2;$$

Полученная система уравнений представляет собой параметрическое уравнение траектории тело P . Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим параметр t :

$$t^2 = \frac{x}{0,1}; \quad y - h = \frac{-0,05 x}{0,1} = -0,5x;$$

Следовательно, $y = h - 0,5x$.

Траектория тело P прямая линия с началом $y = h$.

Задача 14. По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t \text{ рад/с}$ в направлении от центра диска к его ободу, движется точка M по закону $OM = 4t^2 \text{ см}$. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1 \text{ с}$. (рис. 38).

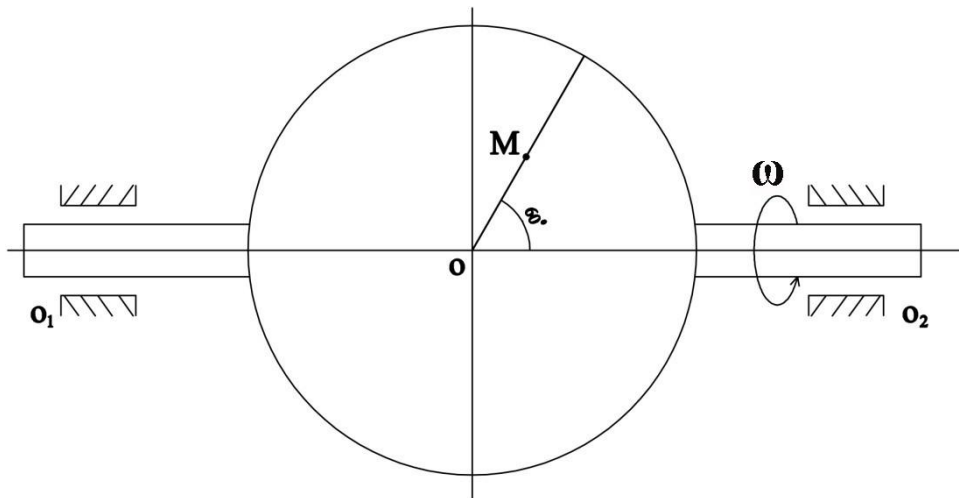


Рис. 38

Решение. Движение точки M от центра диска к его ободу, является относительным движением. Вращение диска вокруг оси O_1O_2 для точки M , является переносным движением.

Систему координат $O_1x_1y_1z_1$, связанную с землей, принимаем за неподвижную – абсолютную систему координат. Систему координат $OxyZ$, связанную с диском и вращающегося с ним вокруг оси O_1O_2 , рассматриваем как подвижную систему отсчета.

Считаем, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 39) совпадает с плоскостью диска. Положение точки M определяется расстоянием OM .

При $t=1c$.

$$OM = 4t^2 = 4 \text{ см.}$$

I. Определение абсолютной скорости точки M .

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$V_a = V_{от} + V_{пер}.$$

Модуль относительной скорости

$$V_{от} = \left| V_{от} \right|,$$

где

$$V_{от} = \frac{d(OM)}{dt} = 8t.$$

При $t=1c$.

$$V_{om} = 8 \cdot 1 = 8 \text{ см/с}; \quad V_{от} = 8 \text{ см/с.}$$

Положительный знак у V_{om} показывает, что вектор V_{om} направлен в сторону возрастания OM (рис 39).

Модуль переносной скорости

$$V_{пер} = \omega_{пер} \cdot R_{пер}, \quad (1)$$

где R – радиус окружности L описываемой той точкой диска, с которой в данный момент совпадает точка M . $R_{пер} = OM \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,87 = 3,48 \text{ см}$; $\omega_{пер}$ – модуль угловой скорости диска:

$$\omega = 2t.$$

При $t=1c$.

$$\omega_{пер} = 2 \text{ рад/с.}$$

Направление ω показано на рис. 39

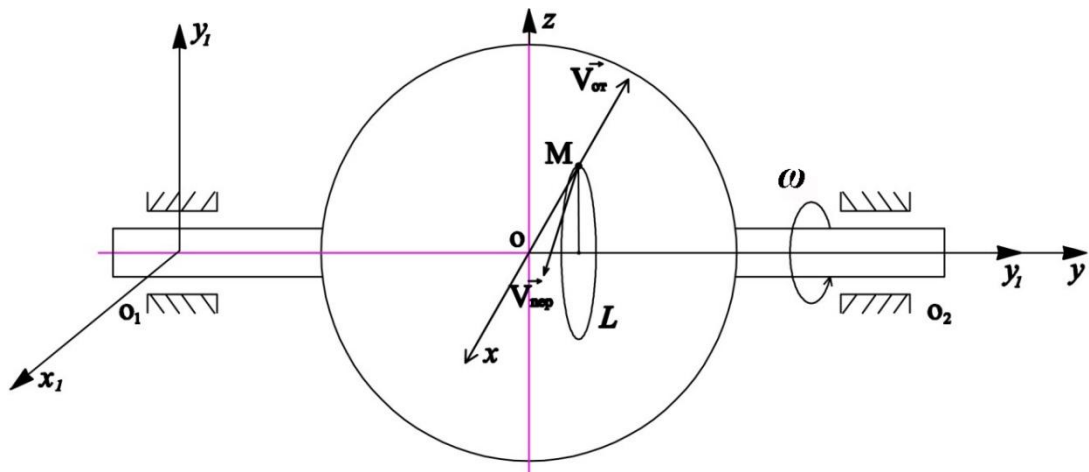


Рис. 39

Модуль переносной скорости определяется по формуле (1)

$$V_{\text{пер}} = 14 \text{ см/с.}$$

Вектор $V_{\text{пер}}$ направлен перпендикулярно плоскости диска по направлению ω .

Так как $V_{\text{от}}$ и $V_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$V_a = \sqrt{V_{\text{от}}^2 + V_{\text{пер}}^2} = 16,1 \text{ см/с.}$$

II. Определение абсолютного ускорения точки M

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$a_a = a_{\text{от}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}}.$$

Или в развернутом виде

$$a_a = a_{\text{от}} + a_{\text{пер}}^{\text{цс}} + a_{\text{пер}}^{\text{вр}} + a_{\text{кор}}.$$

Модуль относительного ускорения

$$a_{\text{от}} = \frac{d^2(OM)}{dt^2} = 8 \text{ см/с}^2; \quad a_{\text{от}} = 8 \text{ см/с}^2;$$

Положительные знаки $a_{\text{от}}$ и $V_{\text{от}}$ показывает, что вектор $a_{\text{от}}$ и вектор $V_{\text{от}}$ имеют одинаковые направления, следовательно, относительное движение точки M ускоренное.

Переносное центростремительное ускорение

$$a_{\text{пер}}^{\text{цс}} = \omega_{\text{пер}}^2 \cdot R_{\text{пер}} = 4 \cdot 3,48 = 13,92 \text{ см/с}^2;$$

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_{\text{пер}}^{\text{вр}} = \varepsilon_{\text{пер}} \cdot R_{\text{пер}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{\text{пер}} = |\varepsilon_{\text{пер}}|$ - модуль углового ускорения диска:

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_{\text{пер}} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\varepsilon_{\text{пер}}$ и $\omega_{\text{пер}}$ одинаковы, следовательно, вращение диска ускоренное. Направление векторов $\omega_{\text{пер}}$ и $\varepsilon_{\text{пер}}$ совпадают (рис 40).

Согласно (2)

$$a_{\text{пер}}^{\text{вр}} = 6,96 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_{\text{пер}}^{\text{вр}}$ направлен в ту сторону, что и $V_{\text{пер}}$.

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2 \omega_{\text{пер}} V_{\text{от}} \sin(\omega_{\text{пер}} \wedge V_{\text{от}}),$$

$$\text{где} \quad \sin \omega_{\text{пер}} \wedge V_{\text{от}} = \sin 60^\circ = 0,87.$$

С учетом выше найденных значений $\omega_{\text{пер}}$ и $V_{\text{от}}$

$$a_{\text{кор}} = 27,84 \text{ см/с}^2.$$

Вектор a_c направлен согласно правилу векторного произведения (рис. 40).

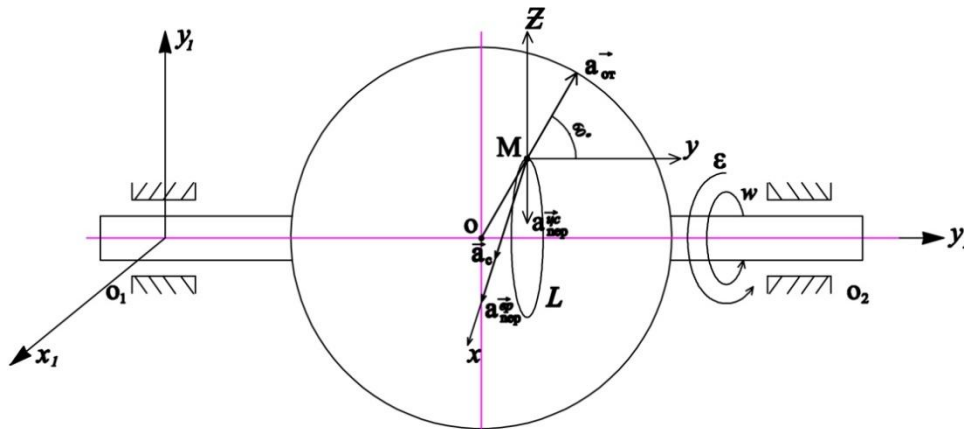


Рис. 40

Модуль абсолютного ускорения точки М находим способом проекций:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_{\text{пер}}^{\text{вр}} + a_c = 6,96 + 27,84 = 34,8 \text{ см/с}^2; \\ a_{ay} &= a_{\text{от}} \cos 60^\circ = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ см/с}^2; \\ a_{az} &= a_{\text{от}} \cos 30^\circ - a_{\text{пер}}^{\text{ц}} = 8 \cdot 0,87 - 13,92 = -6,96 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Следовательно

$$a_a = \sqrt{(a_a)_x^2 + (a_a)_y^2 + (a_a)_z^2} = 95,7 \text{ см/с}^2.$$

ГЛАВА III. ПРИМЕРНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ.

1. *Какое движение материальной точки называется абсолютным?*

- а) точка одновременно участвующая в двух или более движениях.
- б) движение, относящееся к подвижной системе отсчета.
- в) движение подвижной системы координат к неподвижной.
- г) вращательное движение точки вокруг неподвижной оси.

2. *Какое движение точки называется относительным?*

- а) движение материальной точки относительно подвижной системы координатных осей.
- б) движение материальной точки относительно неподвижной системы координат.
- в) движение подвижной системы координат относительно неподвижной.
- г) поступательное движение точки.

3. *Какое движение точки называется переносным?*

- а) движение подвижной системы осей относительно неподвижной.
- б) движение материальной точки, относящееся к неподвижным осям координат.
- в) движение материальной точки относительно подвижной системы координатных осей.
- г) движение подвижной системы отсчета.

4. *Укажите правильное выражение абсолютной скорости точки.*

а) $V_a = V_r + V_e$

б) $V = \omega \cdot R$

в) $V = \frac{dr}{dt}$

г) $V = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

5. *Укажите правильное выражение абсолютного ускорения точки в случае, когда переносное движение точки- непоступательное.*

а) $a_a = a_r + a_e + a_{кор}$

б) $a_a = a_r + a_e$

в) $a_a = a_e + a_k$

г) $a_a = a_a = a_k = 2(\omega_{пер}^x V_{от})$

6. Укажите правильное выражение абсолютного ускорения точки в случае, когда переносное движение точки поступательное.

а) $a_a = a_r + a_e$

б) $a_a = a_r + a_e + a_{kop}$ Место для формулы.

в) $a_a = a_e + a_{kop}$

г) $a_a = a_r^{\tau} + a_r^n$

7. Укажите правильное выражение модуля Кориолисова ускорения.

а) $a_{kop} = 2\omega_{пер} V_{от} \sin \omega_{пер} \wedge V_{от}$

б) $a_{kop} = 2\omega_{пер} \cdot V_{от}$

в) $a_{kop} = 2\omega_{пер} \times V_{от}$

г) $a_{kop} = 2\omega_{пер} V_{от} \cos \omega_{пер} \wedge V_{от}$

8. В каких случаях Кориолисова ускорение равно нулю?

а) $\omega_{пер} = 0$

$V_{от} = 0$

$\omega_{пер} \parallel V_{от}$

б) $\omega_{пер} \neq 0$

$V_{от} = 0$

$\omega_{пер} \parallel V_{от}$

в) $\omega_{пер} = 0$

$V_{от} \neq 0$

$\omega_{пер} \parallel V_{от}$

г) $\omega_{пер} = 0$

$V_{от} = 0$

$\omega_{пер} \perp V_{от}$

9. Укажите правильное выражение Кориолисова ускорения.

а) $a_{kop} = 2 \omega_{пер} \times V_{от}$

б) $a_{kop} = a_r + a_n$

в) $a_{kop} = \frac{dV_a}{dt}$

г) $a_{kop} = \frac{v^2}{\rho} n^0$

10. В каком ответе правильно отражено Правило Жуковского

а) Чтобы найти направление кориолисова ускорения, спроектировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону переносного вращения.

б) Кориолисово ускорение направлено перпендикулярно оси переносного вращения.

в) Кориолисово ускорение направлено параллельно оси переносного вращения.

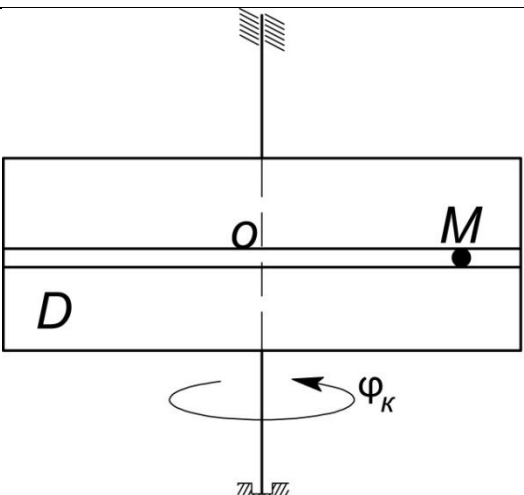
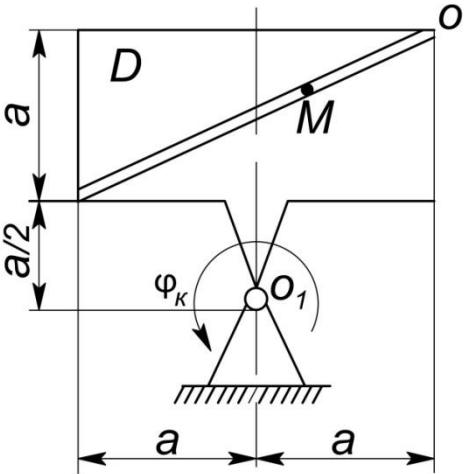
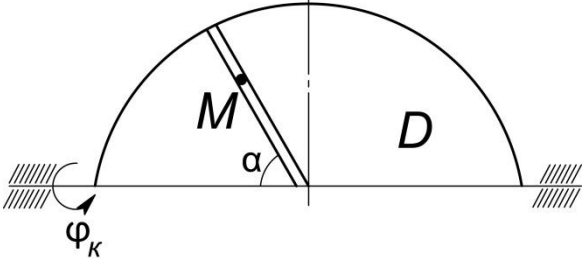
г) Чтобы найти направление кориолисова ускорения, спроектировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону противоположную переносному вращению.

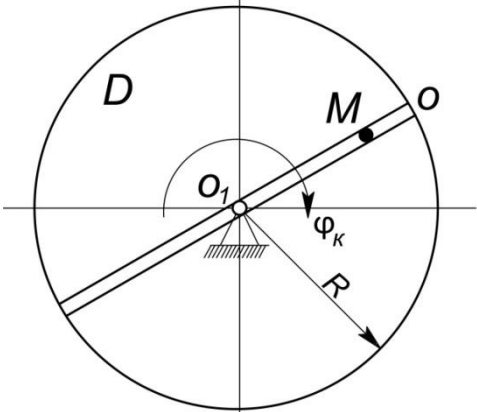
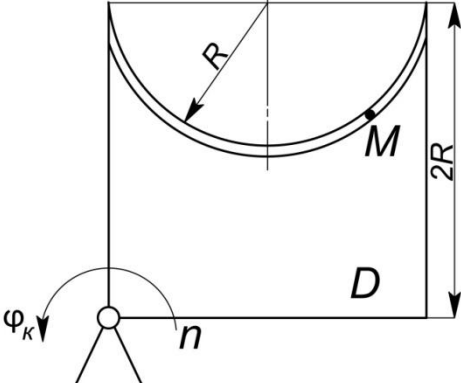
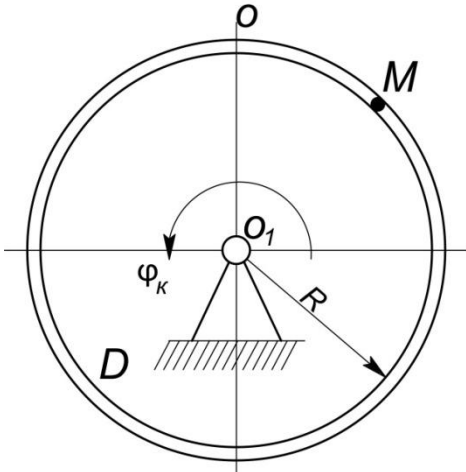
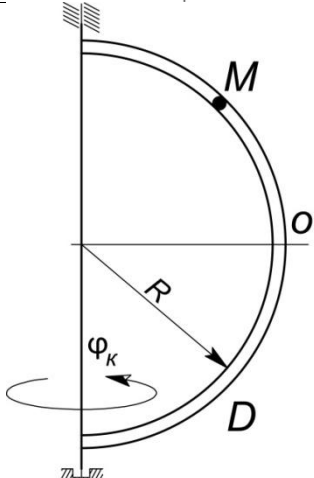
ГЛАВА IV. МНГОВАРИАНТНОЕ ЗАДАНИЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ, ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТОЧКИ.

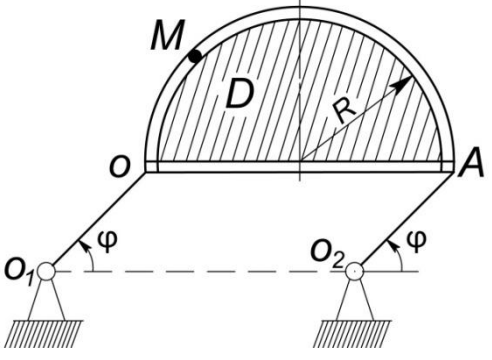
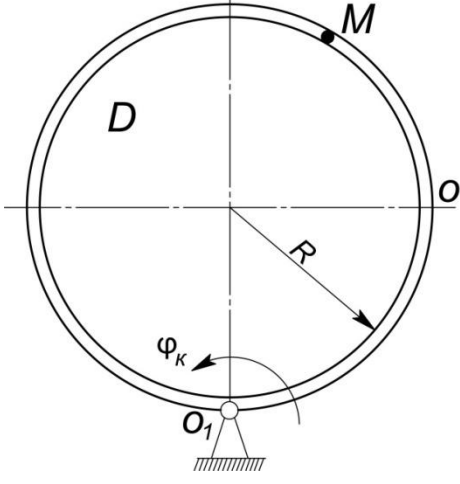
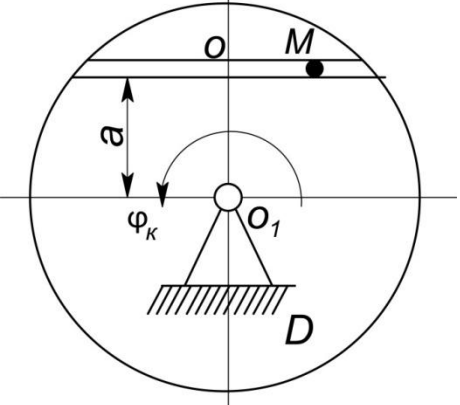
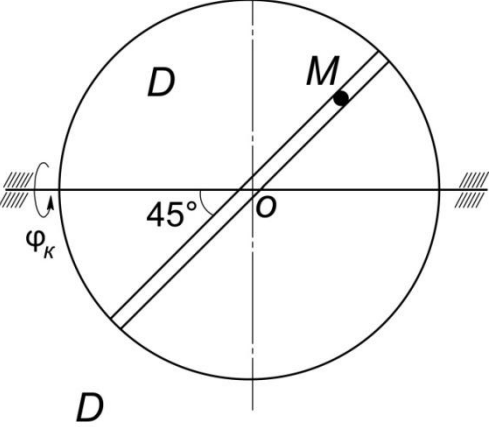
Точка M движется относительно тела D . По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D , определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

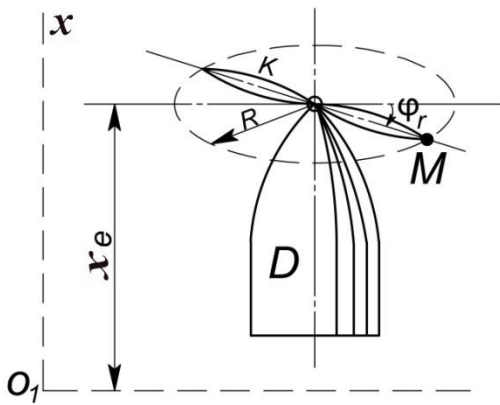
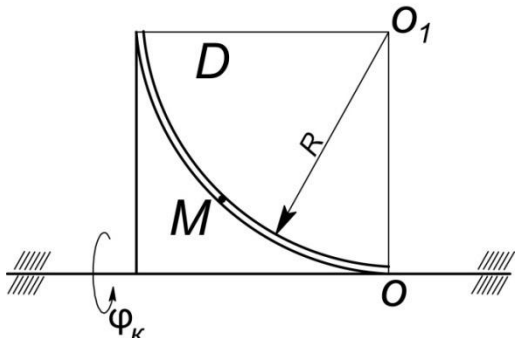
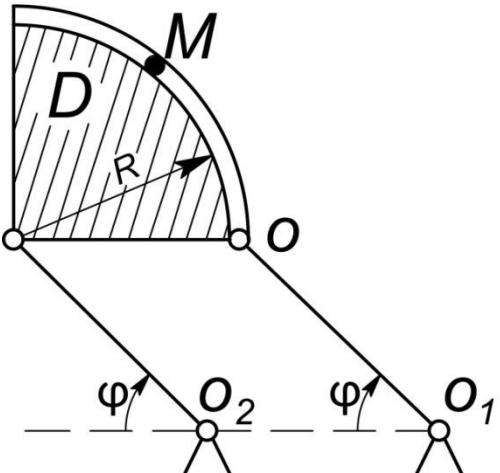
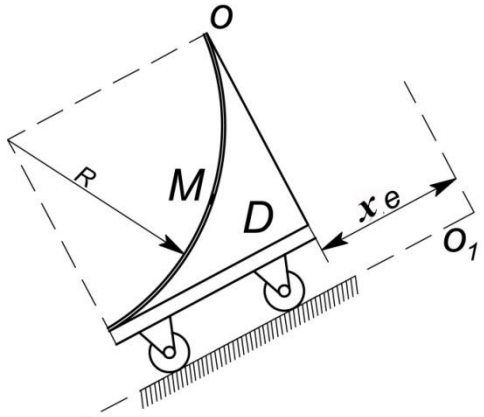
Схемы механизмов и необходимые для расчета данные приведены в таблице.

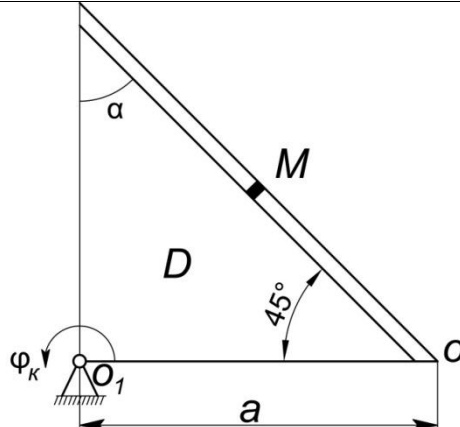
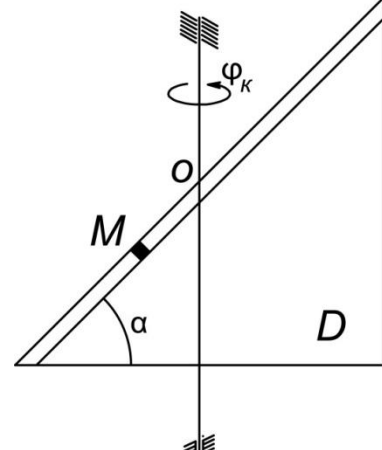
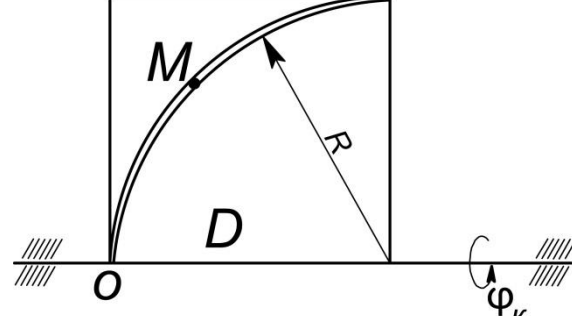
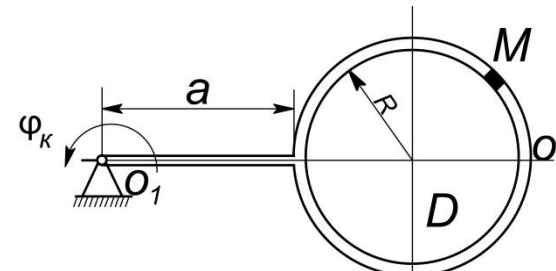
Таблица

№	1Схема механизмов	Необходимые для расчета данные
1.		$OM = S_{от} = 15 \sin \frac{\pi t}{3}, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 10t - 0,1t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 5 \text{ с.}$
2.		$OM = S_{от} = 8t^3 + 2t, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 0,5t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 1 \text{ с.}$ $a = 4\sqrt{5} \text{ см.}$
3.		$OM = S_{от} = 10t + t^3, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 8t - t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}$ $\alpha = 60^\circ.$

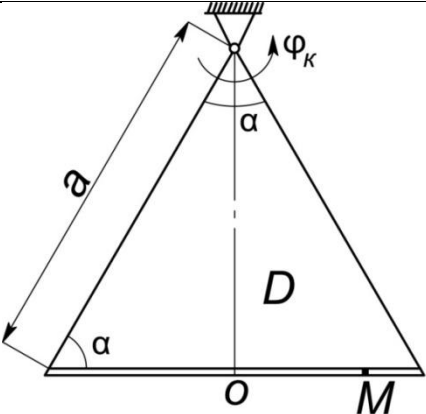
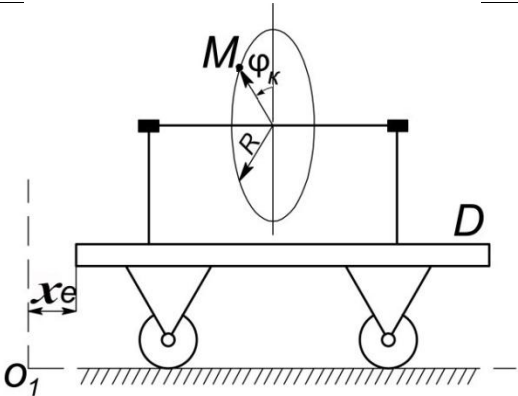
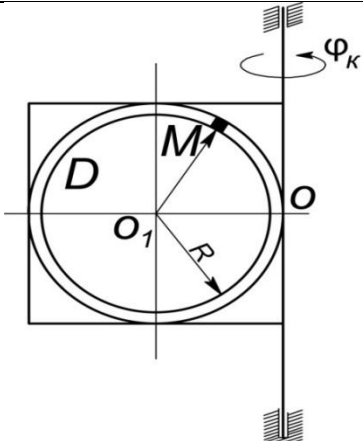
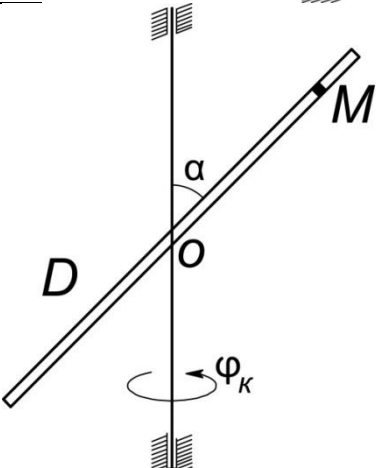
4.		$OM = S_{от} = 6t + 4t^3, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = t - 3t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}$ $R = 40 \text{ см.}$
5.		$OM = S_{от} = 30\pi \cos \frac{\pi t}{6}, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 6t + t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 3 \text{ с.}$ $R = 60 \text{ см.}$
6.		$OM = S_{от} = 25\pi t + t^2, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 2t - 4t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 0,5 \text{ с.}$ $R = 25 \text{ см.}$
7.		$OM = S_{от} = 10\pi \sin \frac{\pi t}{4}, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 4t - 0,2t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2/3 \text{ с.}$ $R = 30 \text{ см.}$

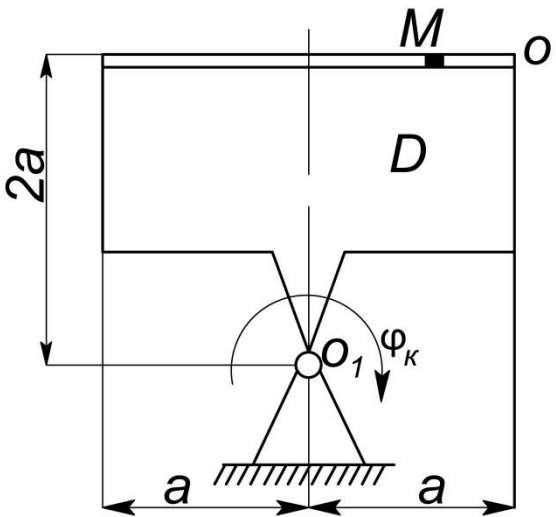
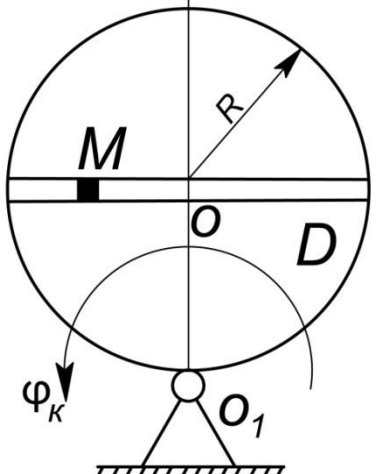
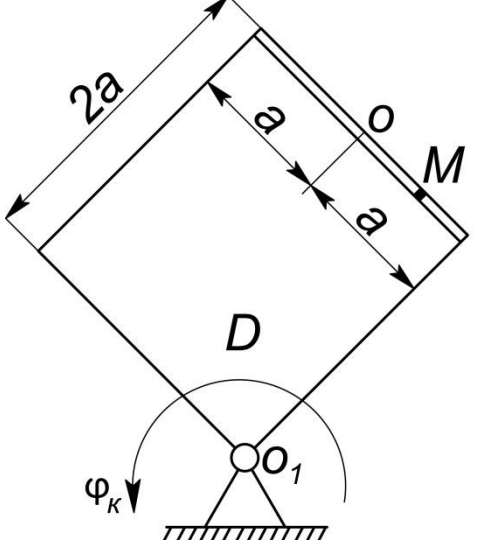
8.		$OM = S_{OT} = 6\pi t^2$ $O_1O = O_2A = 20 \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi = \frac{\pi t^3}{6} \text{ рад}$ $t_1 = 1 \text{ с}, \quad R = 18 \text{ см.}$
9.		$OM = S_{OT} = 75\pi \cdot 0,1t + 0,3t^3, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_k = 2t - 0,3t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 1 \text{ с.}$ $R = 30 \text{ см.}$
10.		$OM = S_{OT} = 20 \sin \pi t, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_k = t - 0,5t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 1/3 \text{ с.}$ $a = 20 \text{ см.}$
11.		$OM = S_{OT} = 8 \cos \frac{\pi t}{2}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_k = -2\pi t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 3/2 \text{ с.}$ $\alpha = 45^\circ.$

12.		$x_{\text{пер}} = x_e = 50t^2, \text{ см}$ $\varphi_{\text{от}} = \varphi_r = \frac{5\pi t^3}{48}, \text{ рад}$ $t_1 = 2c$ $R = 75 \text{ см.}$
13.		$OM = S_{\text{от}} = 2,5 \pi t^2, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 2t^3 - 5, \text{ рад}$ $t_1 = 2c.$ $R = 40 \text{ см.}$
14.		$OM = S_{\text{от}} = \frac{5\pi t^3}{4}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = \frac{\pi t^3}{8}, \text{ рад}$ $O_1 O = O_2 A = 40 \text{ см.}$ $t_1 = 2c. \quad R = 30 \text{ см.}$
15.		$OM = S_{\text{от}} = 4\pi t^2, \text{ см}$ $x_{\text{пер}} = x_e = t^3 + 4t, \text{ см}$ $t_1 = 2c.$ $R = 48 \text{ см.}$

16.		$OM = S_{OT} = 5 \sqrt{2} (t^2 + t), \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 0,2t^3 + t, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}, a = 60 \text{ см.}$ $\alpha = 45^\circ.$
17.		$OM = S_{OT} = 3 + 14 \sin(\pi t), \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 4t^3 - 2t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2/3 \text{ с.},$ $\alpha = 30^\circ.$
18.		$OM = S_{OT} = 120\pi t^2, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 8t^3 - 3t, \text{ рад}$ $t_1 = 1/2 \text{ с.}$ $R = 40 \text{ см.}$
19.		$OM = S_{OT} = \frac{15\pi t^3}{8}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 5t - 4t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}, \quad R = 30 \text{ см.}$ $\alpha = 30^\circ$ $\alpha = 20 \text{ см.}$

20.		$OM = S_{OT} = 25 \sin \frac{\pi t}{3}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 2t^2 - 0,5t, \text{ рад}$ $t_1 = 4 \text{ с.}$ $\alpha = 20 \text{ см.}$
21.		$OM = S_{OT} = 20\pi \cos \frac{\pi t}{4}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 1,2t - t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 4/3 \text{ с.}$ $R = 20 \text{ см.,}$ $a = 20 \text{ см.}$
22.		$OM = S_{OT} = 10 (1 + \sin 2\pi t), \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 4t + 1,6t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 1/8 \text{ с.}$
23.		$OM = S_{OT} = 6t + 0,5t^2, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = t^3 - 5t, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с}$ $\alpha = 45^\circ$

24.		$OM = S_{от} = 20 \cos 2\pi t, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 1,5t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 3/8 \text{ с. } a = 50 \text{ см}$ $\alpha = 60^\circ$
25.		$x_{пер} = x_e = 6t + 0,27t^3, \text{ см}$ $\varphi_{от} = \varphi_K = 0,15\pi t^3, \text{ рад}$ $t_1 = 10/3 \text{ с}$ $R = 15 \text{ см.}$
26.		$OM = S_{от} = 40\pi \cos \frac{\pi t}{6}, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 3t - 0,5t^3, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}$ $\alpha = 30 \text{ см.}$
27.		$OM = S_{от} = 10 \sin \frac{\pi t}{6}, \text{ см}$ $\varphi_{пер} = \varphi_K = 0,6t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 1 \text{ с.}$ $R = 45^\circ.$

28.		$OM = S_{OT} = 6t^3, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 2t^3 + 0,5t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2 \text{ с.}$ $a = 30 \text{ см.}$
29.		$OM = S_{OT} = 20 \cos \pi t, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 0,4t^2 + t, \text{ рад}$ $t_1 = 5/3 \text{ с.}$ $R = 20 \text{ см.}$
30.		$OM = S_{OT} = 18 \sin \frac{\pi t}{4}, \text{ см}$ $\varphi_{\text{пер}} = \varphi_K = 2t^3 - t^2, \text{ рад}$ $t_1 = 2/3 \text{ с,}$ $a = 25 \text{ см.}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Applied mechanics for engineering technology. K. Walker 2013.
2. Engineering mechanics statics. J.L. Meriam, L.G. Kraige 2007
3. Statics and Dynamics. R.C. Hibbeler 2013
4. Theoretical mechanics. Vasile Szolga 2010
5. Engineering mechanics. R.S. Khurmi 2011
6. Shoobidov Sh.M., Xabibullayeva X.N., Fayzullayeva F.D. Nazariy mexanika (statika, kinematika.) o'quv qo'llanma T. "Yangi asr avlodi" 2008
7. M.M. Mirsaidov, A. U. Voymurodova, N.T. Ilyosova «Nazariy mexanika», T.: "Cho'lpon" 2009 y.
8. Fayzullayev B.A. «Nazariy mexanika 1-jild», T.: "Cho'lpon" 2011 y.
9. A.A. Yablonskiy. « Nazariy mexanika fanidan kurs ishlari uchun topshiriqlar to'plami ». T.: « O'qituvchi », 2002.
10. Kepe O.Ye., Viba Ya.A., Grapis O.P. Nazariy mexanika fanidan qisqa masalalar to'plami. (lotin alifbosida chiqarilgan)T. "Yangi asr avlodi" 2008
11. I.V.Meshcherskiy «Nazariy mexanikadan masalalar to'plami», T.: «O'qituvchi», 1989.

