

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

**«KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING
GEOMETRIK NAZARIYASI»**

FANIDAN

MA'RUZALAR MATNI

URGANCH - 2016 yil

TUZUVCHILAR :

f.-m.f.n. M.D. Vaisova

f.-m.f.n. A. A. Atamuratov

TAQRIZCHILAR:

PhD. N. A. Boboyarova

Z.SH. Ibragimov

MA'SUL MUHARRIR

ass. R. A. SHARIPOV

1-ma'ruza.

Kompleks tekislik topologiyasi. Kompleks differensiallanuvchanlikning geometrik interpretatsiyasi.

Reja

1. Kompleks tekislik topologiyasi.
2. Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi
3. Konform akslantirishlar. Kompleks differensiallanuvchanlikning geometrik interpretatsiyasi.

Kompleks tekislik topologiyasi

Kompleks sonlarni geometrik tasvirini 2 xil usulda tavsiflash uchun $\mathbb{C}$ to'plamda 2 xil metrika kiritamiz. Birinchisi- $\mathbb{C}$ dan olingan $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ nuqtalar orasidagi masofani beruvchi Yevklid metrikasi

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Ikkinchisi- sferik metrika- z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi masofa deganda ularning sferik tasvirlari orasidagi (ξ, η, ζ) tekislikdagi Yevklid metrikasini beruvchi metrika

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \quad (2).$$

Bu formulani $\overline{\mathbb{C}}$ to'plamda

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad (3)$$

deb olib qo'llash mumkin. Ravshanki, istalgan $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ uchun $\rho(z_1, z_2) \leq 1$. Bu metrikalar $\overline{\mathbb{C}}$ tekislikni metrik fazoga aylantirishini, ya'ni masofaning odatdagi aksiomalarini qanoatlantirishini osongina ko'rish mumkin (Buni talaba mustaqil bajarishi mumkin). Xususan, (1) metrika uchun uchburchak tengsizligi

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

tengsizlikka teng kuchli .Chegaralangan tayinlangan $\{|z| \leq R\}$, $R < \infty$ doiraga o'tuvchi $M \subset \mathbb{C}$ to'plamlarda Yevklid va sferik metrika ekvivalent.

Haqiqatan, agar $M \subset \{|z| \leq R\}$ bo'lsa, u holda (2) dan

$$\frac{|z_2 - z_1|}{1 + R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq |z_2 - z_1| \quad (4)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun sferik metrika odatda chegaralangan to'plamlarda qaraladi. Odatda $\mathbb{C}$ da yevklid metrikali **sferik metrika**, $\overline{\mathbb{C}}$ da sferik metrika **qaraladi**.

Endi bu metrikalarga mos topologiyalarni kiritamiz. Bu atroflar sistemasini ko'rsatish bilan amalga oshiriladi.

$\varepsilon > 0$ – ixtiyoriy son bo'lsin. $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqtaning $U_{z_0} = U(z_0, \varepsilon)$ ε – atrofi deb $|z - z_0| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $z \in \mathbb{C}$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtaning ε – atrofi deb $\rho(z, z_0) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $z \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtalar to'plamiga aytiladi. (3) ga ko'ra $\rho(z, \infty) < \varepsilon$ tengsizlik

$|z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$ tengsizlikka teng kuchli, binobarin, tekislikda cheksiz nuqtaning ε – atrofi markazi koordinatalar boshida bo'lgan doira tashqarisiga mos keladi.

Oldin topologik fazo tushunchasini eslatib o'tamiz:

X to'plam topologik fazo deyiladi, agar unda ochiq to'plamlar deb ataluvchi qism to'plamlar sistemasi ko'rsatilgan va shu bilan birga

1) Istalgan sondagi ochiq to'plamlarning birlashmasi va chekli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi yana ochiq to'plam bo'lsa

2) bo'sh to'plam va X to'plamning o'zi ham ochiq to'plamni ifodalasa.

Endi $\mathbb{C}(\text{yoki } \overline{\mathbb{C}})$ da ochiq to'plam tushunchasini kiritamiz.

$\mathbb{C}(\text{yoki } \overline{\mathbb{C}})$ dan olingan D to'plam ochiq deyiladi agar uning istalgan z_0 nuqtasining D to'plamda yotuvchi biror U_{z_0} atrofi topilsa.

Ochiq to'plamning bunday kiritilishi $\mathbb{C}$ va $\overline{\mathbb{C}}$ ni topologik fazoga aylantiradi. (talaba bu aksiomalarning bajarilishini mustaqil tushunishi mumkin).

$\mathbb{C}$ va $\overline{\mathbb{C}}$ da o'yilgan atrof deb mos ravishda $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, $0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi z nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rif. Agar $z_0 \in \mathbb{C}$ (mos ravishda $\overline{\mathbb{C}}$) nuqtaning istalgan o'yilgan atrofida $\mathbb{C}$ tekislik topologiyasi ($\overline{\mathbb{C}}$ tekislik topologiyasi) ma'nosida M to'plamning hech bo'lmaganda bitta nuqtasi topilsa, z_0 nuqta $M \subset \mathbb{C}$ ($M \subset \overline{\mathbb{C}}$) to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Agar M to'plam barcha limit nuqtalarini o'zida saqlasa, bu to'plamga yopiq to'plam deyiladi.

M to'plamga uning barcha limit nuqtalarini qo'shishdan hosil bo'lgan to'plamga M to'plamning yopilmasi deyiladi va $\overline{M}$ bilan belgilanadi.

Misol. 1) M to'plam $\mathbb{C}$ dagi barcha butun sonlar to'plami bo'lsin.

$M = \{0, \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$ Bu to'plam limit nuqtaga ega emas va binobarin yopiq, $\overline{\mathbb{C}}$ da esa bu to'plam M ga tegishli bo'lmagan $z = \infty$ limit nuqtaga ega, demak M to'plam $\overline{\mathbb{C}}$ da yopiq emas.

Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi

Biror G sohaning har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lgan, ya'ni shu sohada golomorf bo'lgan $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. G sohaga tegishli bitta qo'zg'almas z_0 nuqta olaylik. Berilgan funksiyaning shu nuqtadagi hosilasi noldan farqli bo'lsin, ya'ni $f'(z_0) \neq 0$.

Qo'yiladigan masala mana shu hosilaning geometrik ma'nosini tekshirishdan iboratdir. Shu maqsadda $w'_0 = f'(z_0)$ o'zgarmas kompleks sonni trigonometrik shaklda yozib olamiz:

$$f'(z_0) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

bunda

$$R = |f'(z_0)| \neq 0 \quad \varphi = \operatorname{Arg} f'(z_0) \quad (2)$$

Biz hozircha mana shu φ argumentni geometrik tomondan tekshirib chiqamiz.

Hosila ta'rifini esga olsak,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Bundan esa

$$R = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \quad (3)$$

$$\varphi = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z \quad (4)$$

Bu yerda $\arg f'(z_0)$ deb $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ ning qiymatlaridan bittasini oldik. (4) tenglikni yozishda, kasrning argumenti surat argumenti bilan maxraj argumenti ayirmasiga tengligidan foydalandik.

Endi, $w = f(z)$ funksiya yordami bilan (z) tekislikdagi z_0 nuqtani (w) tekislikka akslantirsak w_0 nuqta hosil bo'ladi. z_0 nuqtadan ixtiyoriy ravishda ikkita C_1 va C_2 chiziq o'tkazaylik. Ularga mos Γ_1 va Γ_2 chiziqlar w_0 nuqtadan o'tadi. C_1 chiziq ustida yana bitta ixtiyoriy $z_0 + \Delta z$ nuqta olsak, unga mos $w_0 + \Delta w$ nuqta Γ_1 ustida paydo bo'ladi. Kompleks sonlar nazariyasidan ma'lumki, har bir kompleks songa tekislikda bitta vektor mos keladi. Shuning uchun biz ushbu

$$\Delta z = (z_0 + \Delta z) - z_0, \quad \Delta w = (w_0 + \Delta w) - w_0$$

sonlarni vektorlar deb tushunamiz. Bulardan birinchisi Δz vektor bo'lib, z_0 nuqtadan $z_0 + \Delta z$ nuqtaga qaratilgan. Ikkinchisi Δw vektor esa w_0 dan $w_0 + \Delta w$ nuqtaga qaratilgandir. $|\Delta z|$ va $|\Delta w|$ lar esa o'sha vektorlarning uzunliklaridir. Shuningdek, $\arg \Delta z$ esa Δz vektor bilan Ox o'qining musbat tomoni orasidagi burchakdir. $\arg \Delta w$ ham Δw vektor bilan Ou o'qining musbat tomoni orasidagi burchakdan iboratdir.

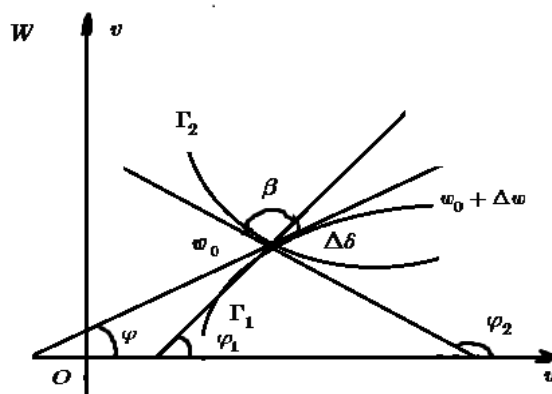
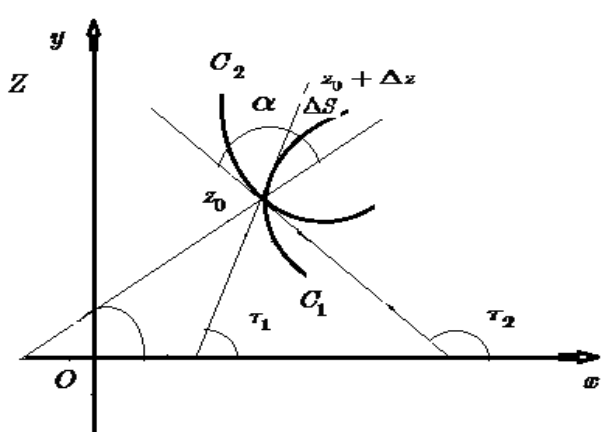
Agar biz $z_0 + \Delta z$ nuqtani C_1 chiziq bo'ylab z_0 ga yaqinlashtirsak, Δz vektor o'sha chiziqqa z_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaga intiladi.

Shuningdek , $\arg \Delta z$ burchak τ_1 burchakka intiladi. U holda $w_0 + \Delta w$ nuqta Γ_1 chiziq bo‘ylab w_0 ga, Δw vektor w_0 nuqtadagi Γ_1 ga o‘tkazilgan urinmaga intiladi.

Shuningdek $\arg \Delta w$ burchak ψ_1 burchakka intiladi. Mana shu sabablarga asosan, (4) dan

$$\varphi = \psi_1 - \tau_1 \quad (5)$$

kelib chiqadi (3-chizma).



3-chizma

Agar $z_0 + \Delta z$ nuqtani C_2 chiziq ustida olib, z_0 nuqtaga yaqinlashtirsak, Γ_2 chiziq ustidagi $w_0 + \Delta w$ nuqta w_0 ga intiladi. U holda yuqoridagi mulohazalarni aynan takrorlasak, ushbu

$$\varphi = \psi_2 - \tau_2 \quad (6)$$

tenglik hosil bo‘lar edi. Agar (6) ga e‘tibor qilsak, C_1 ni Γ_1 ga akslantirganda z_0 nuqtada C_1 ga o‘tkazilgan urinma φ burchakka burilib, w_0 nuqtadagi Γ_1 ga o‘tkazilgan urinma ustiga tushar ekan. Boshqacha aytganda, (w) tekislikda C_1 ning aksi sifatida Γ_1 hosil bo‘lib, u φ burchakka burilar ekan.

Xuddi shu fikrni (7) tenglik ustida yurgizsak, C_2 aksi Γ_2 ning ham φ burchakka burilganini ko‘ramiz. Demak, z_0 nuqtadan o‘tadigan hamma egri chiziqlarning aksi (w) tekislikka bir xil burchak ostida burilib tushar ekan.

Endi (6) va (7) ning chap tomonlari o'zaro teng bo'lgani uchun

$$\psi_2 - \tau_2 = \psi_1 - \tau_1$$

yoki

$$\psi_2 - \psi_1 = \tau_2 - \tau_1 \quad \text{ya'ni} \quad \beta = \alpha \quad (7)$$

Demak, z_0 nuqtadan o'tuvchi C_1 va C_2 chiziqlar orasidagi α burchak bilan ularga mos Γ_1 va Γ_2 chiziqlar orasidagi β burchak o'zaro teng ekan. Biz Ox o'q bilan Ou o'qning musbat yo'nalishlarini bir xil qilib olganimiz uchun α va β burchaklar miqdor tomondan ham va yo'nalish tomondan ham bir-biriga tengdir.

Shunday qilib, $w = f(z)$ golomorf funksiya yordami bilan G sohani G_1 ga akslantirsak, u holda biror z_0 nuqtadan o'tuvchi $C_1, C_2, \dots$ chiziqlarning hammasi bir xil $\varphi = \arg f'(z_0)$ burchakka burilar ekan. Shuning uchun ham $C_1, C_2, \dots$ chiziqlar orasidagi burchaklar o'zgarmay qoladi.

1-xossa. Demak, golomorf funksiya yordami bilan bajariladigan akslantirish, $f'(z)$ hosila nolga teng bo'lmagan hamma nuqtalarda burchaklarni saqlash xossasiga egadir.

Hosila modulining geometrik ma'nosi. Hosila modulini geometrik ma'noda tekshirish maqsadida (3) tenglikka murojaat qilamiz.

Dastlab ana shu nisbatning o'zini (limitsiz) tekshirib ko'raylik:

$$k = \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Bu nisbat $|\Delta w|$ vatarning $|\Delta z|$ vatarga qaraganda k marta uzunligini bildiradi, ya'ni C_1 chiziqni Γ_1 ga akslantirganda $|\Delta z|$ vatar k marta cho'zilib tushar ekan. Demak, agar $k > 1$ bo'lsa cho'zilib, $k < 1$ bo'lsa qisqarib va $k = 1$ bo'lsa o'zgarmay akslanadi. Yuqoridagi $|\Delta z|$ va $|\Delta w|$ vatarlarni cheksiz kichik miqdorlar deb faraz qilamiz. Shuning uchun ularning o'rniga mos ravishda o'zlariga yopishgan Δs va $\Delta \sigma$ yoychalarni olish mumkin, ya'ni:

$$k = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \approx \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \quad (8)$$

Bu esa, Δs ni akslantirganda k marta cho‘zilib (yoki qisqarib) $\Delta\sigma$ hosil bo‘lganligidan darak beradi. Agar biz C_1 o‘rniga C_2 chiziqni olsak ham xuddi shu hodisa takrorlanadi.

Agar (3) va (8) tengliklarga e‘tibor qilsak, ulardan quyidagi

$$R = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \quad (9)$$

hosil bo‘lib, buni z_0 nuqtadan o‘tuvchi har qanday C chiziqning cho‘zilish koeffitsienti deyiladi. Boshqacha aytganda $w = f(z)$ yordami bilan aks ettirish protsessida, z_0 nuqtadan o‘tuvchi istalgan kichik yoy $R = \left| f'(z_0) \right|$ marta o‘zgarishini ko‘ramiz.

Berilgan $w = f(z)$ funksiya G sohada golomorf bo‘lganligi sababli, $f'(z_0)$ hosilaning qiymati $z_0 + \Delta z$ nuqtaning z_0 ga qaysi yo‘l bilan intilishiga bog‘liq emas. Shuning uchun ham z_0 dan o‘tuvchi barcha chiziqlar uchun cho‘zilish koeffitsienti bir xil bo‘ladi, z_0 nuqtada masshtab o‘zgarmasdir.

2-xossa. Golomorf funksiya yordami bilan bajariladigan akslantirish, $f'(z)$ hosila nolga teng bo‘lmagan barcha nuqtalarda o‘zgarmas cho‘zilishga ega.

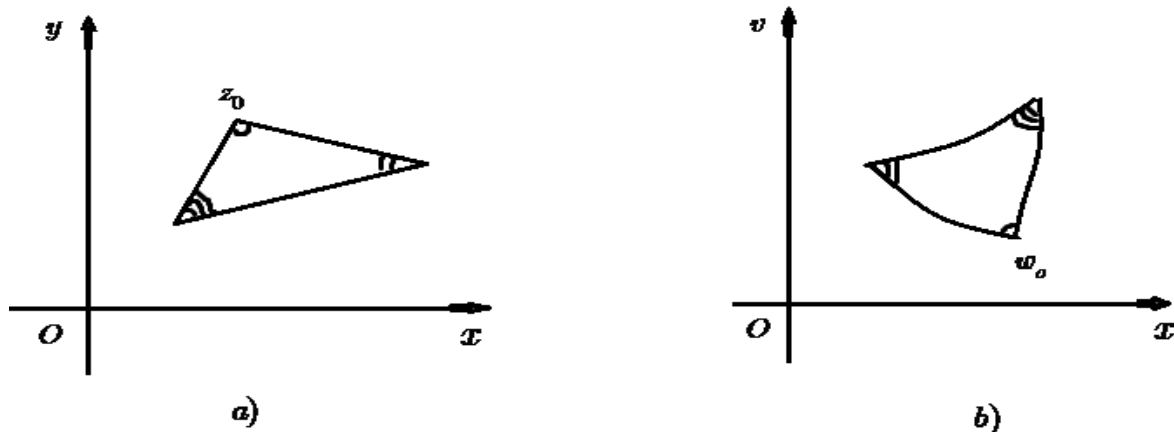
Konform akslantirishlar. Kompleks differensiallanuvchanlikning geometrik interpretatsiyasi.

Bundan oldingi bo‘limda aytilgan tasdiqlarni esga olsak, quyidagi natijaga erishganimizni ko‘ramiz: $w = f(z)$ golomorf funksiya vositasi bilan (z) tekislikdagi biror G sohani (w) tekislikka akslantirsak G_1 soha hosil bo‘lib, quyidagi ikki hol ro‘y beradi:

1) G ga tegishli ixtiyoriy z_0 nuqtadan ($f'(z_0) \neq 0$) o‘tuvchi har qanday ikkita chiziq orasidagi burchakning miqdori ham, yo‘nalishi (sanoq boshlanadigan nuqtadan yo‘nalishi) ham o‘zgarmay qoladi.

2) z_0 nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlarning z_0 ga juda yaqin turgan yo'ychalari bir xilda cho'ziladi.

Misol uchun bir uchi z_0 nuqtadan iborat istalgancha kichik uchburchakning $w = f(z)$ golomorf funksiya yordami bilan akslantirsak, bir uchi w_0 nuqtadan iborat egri chiziqli uchburchakka ega bo'lamiz. Lekin ikkala uchburchakdagi mos burchaklar o'zaro teng bo'ladi (4-chizma).



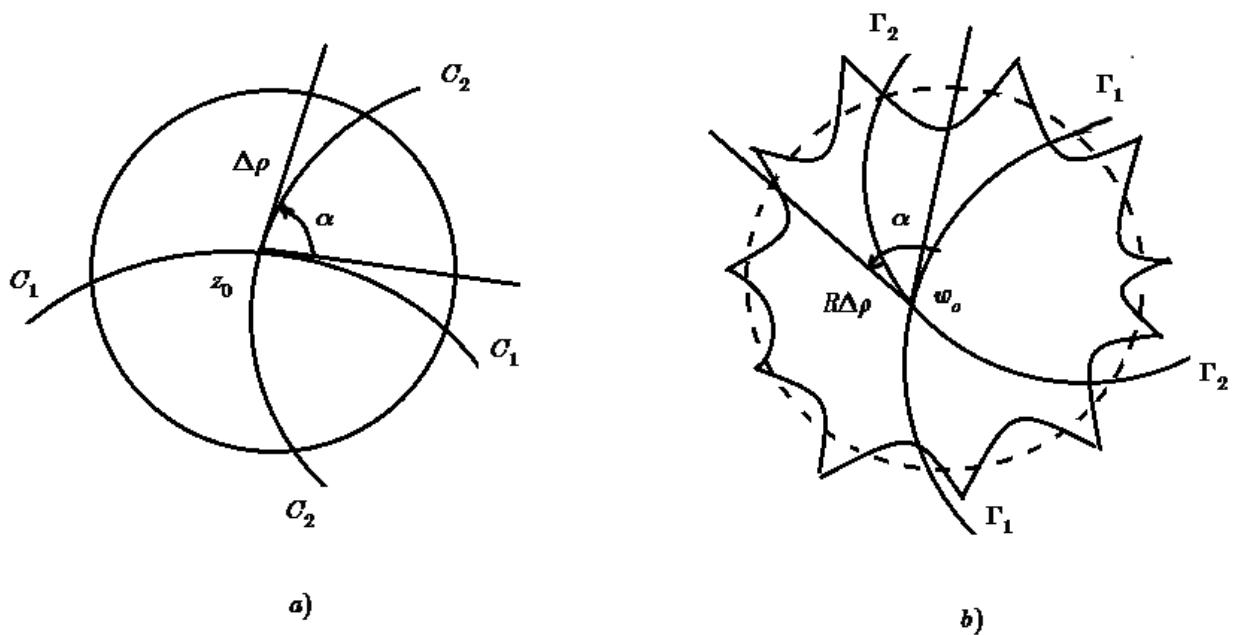
4-chizma

Ikkinchi misol sifatida biz markazi z_0 nuqtaga joylashgan kichik $\Delta\rho$ radiusli aylana olib, uni ham o'sha funksiya yordami bilan akslantirsak uning aksi w_0 markazli va $R\Delta\rho = |f'(z_0)|\Delta\rho$ radiusli aylanani o'rab olgan yopiq chiziqdan iborat bo'ladi.

Ravshanki, o'sha ikkala aylana bilan chegaralangan doiralarning yuzlari quyidagicha ifodalanadi:

$$s = \pi\Delta\rho^2 \text{ va } \sigma = \pi \cdot (R\Delta\rho)^2 = R^2 \cdot \pi\Delta\rho^2 \quad (1)$$

Ya'ni $\sigma = R^2 s = |f'(z_0)|^2 s$ ekanligini ko'ramiz. Buning ma'nosi shuki, z_0 atrofidagi cheksiz kichkina doirani akslantirganda u taxminan $R^2 = |f'(z_0)|^2$ marta kengayib akslanadi (5-chizma).



5-chizma

Shu sababli $w = f(z)$ golomorf funksiya yordami bilan akslantirishda $|f'(z_0)|^2$ sonni yuzlarini *cho'zish (kengaytirish) koeffitsienti* deyiladi. Mana shu ikkita misoldan ko'ramizki, z_0 atrofidagi istalgancha kichik figurani $w = f(z)$ golomorf funksiya yordami bilan akslantirsak, o'xshash shakl hosil bo'ladi.

1-ta'rif. Biror z_0 nuqtada 1) va 2) xossalarga ega bo'lgan $w = f(z)$ akslantirish shu nuqtada *konform (o'xshash) akslantirish* deyiladi. Odatda bunday akslantirish *I tur konform akslantirish* deyiladi.

Shunday qilib, so'nggi ikki bo'limdagi mulohazalarimiz natijasida quyidagi teoremani isbot qildik.

1-teorema. Agar sohada golomorf va undagi z_0 nuqtada $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $w = f(z)$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish z_0 nuqtada konform bo'lib, $\arg f'(z_0)$ *burilish burchagini*, $|f'(z_0)|$ esa z_0 nuqtadagi *chiziqli cho'zilish koeffitsientini* bildiradi.

Izoh. Konform –conformis lotincha so'z bo'lib, o'xshash demakdir. Bu teremada $w = f(z)$ akslantirishga qo'yilgan $f'(z_0) \neq 0$ shart muhim shartdir.

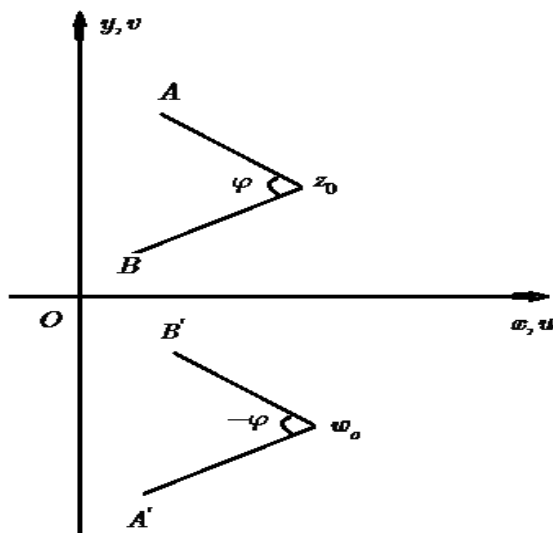
$w = z^2$ funksiyani tekshiramiz. Bu funksiya $z = 0$ nuqtadan tashqari hamma nuqtada konform akslantiradi. $z = 0$ esa $f'(0) = 0$ bo'lgani sababli aks ettirish konform emas.

Ikkinchi tur konform akslantirish.

Ma'lumki, $\alpha = a + ib$ va

$\bar{\alpha} = a - ib$ lar o'zaro qo'shma kompleks sonlar bo'lib, ularga mos nuqtalar tekislikda Ox haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan. Fikrimizni osonroq bayon etish maqsadida xoy va uov koordinatalar sistemalarini bitta tekislikka

joylaylik. $w = z = x - iy$ funksiya vositasi bilan $z = x + iy$ nuqtalarni akslantirsak, o'sha tekislikda Ox (demak, Ou) o'qqa nisbatan simmetrik nuqtalar paydo bo'ladi. Shunga asosan, z_0 nuqtadan chiqqan ikki to'g'ri chiziq va ular orasidagi φ burchakni akslantirsak, xuddi ko'zguga tushirilgandek, Ox ga nisbatan simmetrik bo'lib tushadi. Shuning uchun φ burchakning aksi ($-\varphi$), ya'ni qarama – qarshi tomonga yo'nalgan bo'lib tushadi (6-chizma).



6-chizma

Agar funksiya yordami bilan akslantirish natijasida z nuqtadagi cho'zilish o'zgarmasa va burilish burchagining ham kattaligi (miqdori) o'zgarmay, faqat yo'nalishi qarama – qarshisiga o'zgarsa u *II tur konform akslantirish* deyiladi.

2-ma'ruza

Sodda konform akslantirishlar. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantiruvchi konform akslantirish. Birlik doirani birlik doiraga akslantiruvchi konform akslantirish. Yuqori yarim tekislikni yuqori yarim tekislikka akslantiruvchi konform akslantirish.

Reja

1. Kasr-chiziqli funksiya tuzish
2. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga konform akslantirish.
3. Birlik doirani birlik doiraga konform akslantirish
4. Yuqori yarim tekislikni o'z-o'ziga konform akslantirish

1. Kasr-chiziqli funksiya tuzish

(z) tekislikda ixtiyoriy uchta z_1, z_2, z_3 va (w) tekislikda ham uchta w_1, w_2, w_3 nuqtalar berilgan bo'lsin. Endi o'sha z_1, z_2 va z_3 nuqtalarni mos ravishda w_1, w_2 va w_3 nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyaning tuzish talab qilinadi. Kasr chiziqli funksiyaning umumiy ko'rinishi $w = \frac{az+b}{cz+d}$ (1) dan iborat bo'lib, uning aniqligi a, b, c, d parametrlarga bog'liqdir. Faraz qilaylik, $a \neq 0$ bo'lsin, u holda kasrning surat va maxrajini a ga bo'lib, bunday

$$\frac{a}{b} = b_1, \frac{c}{a} = c_1, \frac{d}{a} = d_1$$

belgilasak, yuqoridagi funksiya

$$w = \frac{z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad (2)$$

ko'rinishni oladi va b_1, c_1, d_1 parametrlarga bog'liq bo'lib qoladi.

Demak, (1) funksiya aslida uchta parametrga bog'liq ekan. Soddalik uchun (1) ni quyidagicha yozsak bo'ladi:

$$w = \frac{z + b}{cz + d} \quad (3)$$

Yuqorida qo'yilgan masalani hal qilish uchun (3) ga binoan quyidagilarni yoza olamiz:

$$w = \frac{z+b}{cz+d}, w_1 = \frac{z_1+b}{cz_1+d}, w_2 = \frac{z_2+b}{cz_2+d}, w_3 = \frac{z_3+b}{cz_3+d} \quad (4)$$

so'ngi uchta tenglamadan b, c, d larni topib birinchisiga qo'yilsa, izlanayotgan funksiya aniqlanadi. Lekin bu yo'l uzoq bo'lgani uchun boshqacha ish ko'ramiz.

$$w - w_1 = \frac{z+b}{cz+d} - \frac{z_1+b}{cz_1+d} = \frac{(z+b)(cz_1+d) - (z_1+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

yoki suratidagi qavslarni ochib ixchamlashtirilsa,

$$w - w_1 = \frac{(d-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

tenglik kelib chiqadi. Xuddi shu usul bilan (4) dan

$$w - w_2 = \frac{(d-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}, w_3 - w_1 = \frac{(d-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)},$$

$$w_3 - w_2 = \frac{(d-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}$$

ayirmalarni tuzish mumkin. Bu ayirmalardan osongina ushbu

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \quad (5)$$

kasr chiziqli funksiyaga ega bo'lamiz.

Yuqorida qo'yilgan masalani yechadigan (5) funksiya yagonadir, chunki (4) dagi so'nggi uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yechsak, birgina (b, c, d) yechimga ega bo'lamiz va uni (3) ga qo'ysak (5) bilan aniqlanadigan birgina funksiya hosil bo'ladi. Haqiqatdan ham, biz izlagan funksiya (5) dan iborat, chunki undagi z o'rniga z_1, z_2 va z_3 larni qo'ysak mos ravishda $w = w_1, w = w_2$ va $w = w_3$ bo'ladi.

Demak, quyidagi teorema isbot qilindi.

Teorema. (z) tekislikdagi ixtiyoriy uchta z_1, z_2, z_3 nuqtalarni mos ravishda (w)

tekislikdagi ixtiyoriy uchta w_1, w_2, w_3 nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiya yagonadir.

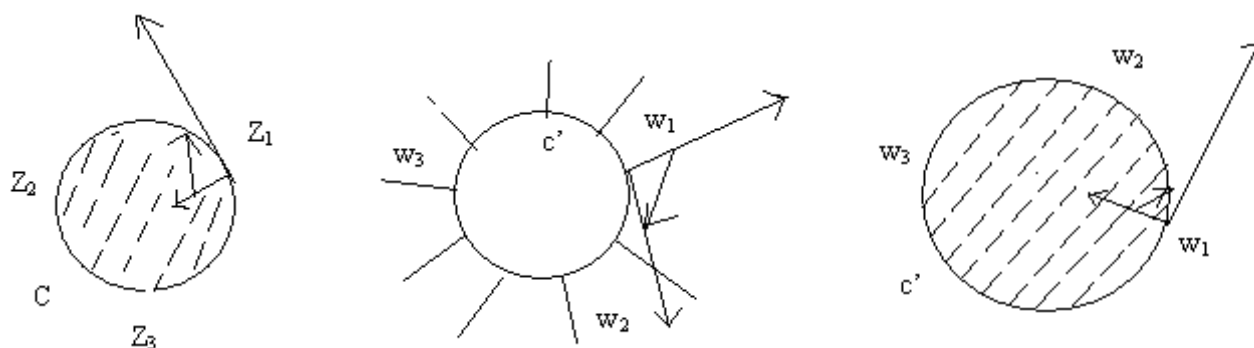
(5) tenglikning o'ng tomoni 4 ta z_1, z_2, z, z_3 nuqtaning 2 qaytali yoki angarmonik nisbati deyilib,

$$(z_1, z_2, z, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

ko'rinishda yoziladi. (5) ning chap tomoni ham xuddi mana shu tipdagi nisbatdir.

Demak, chiziqli akslantirish natijasida angarmonik nisbat o'zgarmay saqlanib qolar (invariant) ekan.

Faraz qilaylik, (z) tekislikda 3 ta har xil z_1, z_2, z_3 nuqta berilgan bo'lsin, u holda bu nuqtalardan birgina C aylana o'tkazish mumkin. Agar (w) tekislikda haligi nuqtalarning aksi w_1, w_2, w_3 bo'lsa, bulardan ham bittagina C' aylana o'tadi. Mana shu aylananing birinchisini ikkinchiga akslantiradigan kasr chiziqli funksiyaning yagona ekanini ko'rsatdik.



(1-chizma)

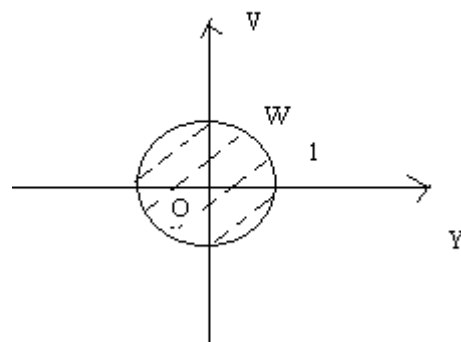
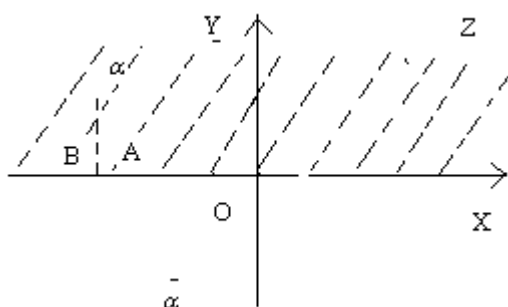
Endi C bilan o'ralgan doira C' ning ichiga yoki tashqarisiga akslanishi mumkin. Buni aniqlash uchun quyidagicha fikr yuritamiz.

C aylanaga ichki normal o'tkazamiz, buning aksi ham C' aylanaga normal bo'lib, ikki yo'nalishga egadir. Shulardan qaysi birini olish kerak degan savol tug'iladi. C bilan unga o'tkazilgan ichki normal orasidagi burchak qaysi yo'nalishda olinsa, C' bilan unga o'tkazilgan normal orasidagi burchak ham xuddi shu yo'nalishda olinmog'i kerak.

2. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga konform akslantirish

Haqiqiy OX o'q tekislikni ikki bo'lakka ajratib, ulardan biri o'sha o'qning yuqorisida ikkinchisi esa pastida turadi. Shulardan birinchisini yuqori yarim tekislik, ikkinchisini esa quyi yarim tekislik deyiladi.

Bu joyda qo'yiladigan masala quyidagidan iborat: (z) tekislikning bir qismi bo'lgan yuqori yarim tekislikni (w) tekislikdagi $|w| \leq 1$ birlik doira ichiga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiya topilsin. Eslatib o'tilgan yuqori yarim tekislikni biror $z = \alpha$ nuqtasining aksi $|w| \leq 1$ doiraning $w = 0$ markazidan iborat bo'lsin deylik, u holda OX o'qqa nisbatan α nuqta $\bar{\alpha}$ ga simmetrik bo'lib, $\bar{\alpha}$ aksi $w = \infty$ dan iborat bo'ladi, chunki $w = 0$ va $w = \infty$ nuqtalar $|w| = 1$ aylanaga nisbatan o'zaro simmetrikdir (1-chizma).



Shu sababli izlanayotgan funksiya

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Endi o'zgarmas kompleks k koefitsiyentni aniqlash lozim. Yuqori yarim tekislikni $|w| \leq 1$ doiraga akslantirish uchun tekislikning OX chegarasining $|w| = 1$ aylanaga akslantirishini talab qilamiz. OX o'qidagi nuqtalarda $z = x$ haqiqiydir. Shu sababli:

$$|z - \alpha| = |x - \alpha| = \left| x - \bar{\alpha} \right|$$

chunki, agar $\alpha = a + ib$ deb belgilasak,

$x - \alpha = (x - a) - ib$, $x - \bar{\alpha} = (x - a) + ib$ sonlar o'zaro qo'shma sonlar bo'lib, modullari bir-biriga teng. Demak,

$$1 = |w| = |k| \cdot \left| \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right| = |k| \cdot \left| \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = |k|,$$

ya'ni $|k| = 1$. Mana shuning uchun k ni quyidagicha yozish mumkin:

$k = e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi$, bunda ψ - o'zgarmas haqiqiy son. Shunday qilib, yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantiruvchi funksiya ushbu

$$w = e^{i\psi} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (1)$$

ko'rinishga egadir. Bundan ko'rinadiki, agar ψ va $\alpha = a + ib$ larga istalgan qiymatlar berilsa, (1) tipdagi cheksiz ko'p funksiyalarga ega bo'lamiz, ya'ni bu masala cheksiz ko'p yechimga egadir. Bizning masalamizda yuqori yarim tekislik haqida gap borayotganligi sababli shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga tegishli kompleks sonning mavhum qismi musbat sondan iboratdir, ya'ni

$$\text{Im}\alpha = \text{Im}(a + ib) = b > 0.$$

Agar biz quyi yarim tekislikni $|w| \leq 1$ doiraga akslantirmoqchi bo'lsak, α nuqtani pastdan olish kerak bo'lar edi, ya'ni $b < 0$ bo'lishi kerak.

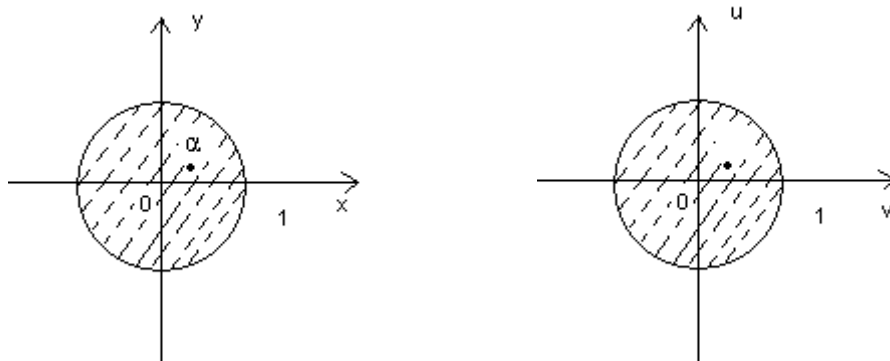
Biz (1) funksiyalar to'plamidan aynan birortasini hosil qilish maqsadida $\psi = 0, \alpha = i$ deb olaylik, u holda:

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Bundan $z = \alpha = i$ ning aksi $w = 0$ va $z = \bar{\alpha} = -i$ ning aksi esa $w = \infty$ nuqtalardan iborat ekanligini ko'ramiz.

3. Birlik doirani o'z - o'ziga akslantirish.

Endi (z) tekislikdagi $|z| \leq 1$ birlik doirani (w) tekislikdagi $|w| \leq 1$ birlik doiraga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani topamiz.



2-chizma

Aslida bu ikkala doira bir xil bo'lib, faqat joylari boshqadir. Shu sababli bu masalani doiraviy o'z-o'ziga aks ettirish deyiladi. Faraz qilaylik, $|z| \leq 1$ doira ichidagi biror α nuqtaning aksi $w=0$ bo'lsin (2-chizma). Ma'lumki, $|w|=1$ aylanaga nisbatan $w=0$ ga simmetrik bo'lgan nuqta $w=\infty$ dan iborat. Shuningdek $|z|=1$ aylanaga nisbatan $z=\alpha$ ga simmetrik nuqta $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$ dan iborat.

Shularga binoan izlanayotgan funksiya

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

ko'rinishga ega bo'lishi muqarrar. Endi k ni aniqlash uchun bunday

$$w = -k\alpha \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} = k' \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

yozib olaylik, bunda $k' = -k\bar{\alpha}$. Masalaning qo'yilishiga ko'ra $|z|=1$ aylana $|w|=1$ aylanaga aks ettirilishi kerak.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{dan:} \quad x^2 + y^2 = 1;$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = 1.$$

Shularga asosan:

$$\left| 1 - \bar{\alpha}z \right| = \left| 1 - \bar{\alpha}z \right| \cdot \left| z \right| = \left| \bar{z} - \bar{\alpha}z\bar{z} \right| = \left| \bar{z} - \bar{\alpha} \right| = \left| z - \alpha \right|,$$

ya'ni

$$|z - \alpha| = |1 - \bar{\alpha}z| \quad \text{yoki} \quad \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1,$$

u holda

$$1 = |w| = |k'| \cdot \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = |k'|,$$

ya'ni

$$k' = e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi$$

demakdir.

Shunday qilib, biz izlayotgan funksiya ushbu ko'rinishda bo'lishi kerak:

$$w = e^{i\psi} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Ravshanki, ψ -burilish burchagi bo'ladi. Lekin markaz atrofida $|z| \leq 1$ doirani har qancha bursak ham u doira o'z-o'ziga aks ettiriladi, ya'ni boshqa doira hosil bo'lmaydi. Shuningdek $|z| \leq 1$ doira ichidagi har qanday nuqtani α sifatida qabul qilib, uni $w = 0$ ga aks ettirish mumkin.

4. Yuqori yarim tekislikni o'z-o'ziga akslantirish.

(z) tekislikni yuqori yarimini (w) dagi yuqori yarim tekislikka akslantiradigan kasr chiziqli funksiya topilsin, ya'ni yarim tekislikni o'zini-o'ziga akslantiruvchi funksiya topilsin. Yuqori yarim tekislikka biz cheksiz katta radiusli doira degan nazar bilan qarab 1-banddagi metodni ishlatamiz. Uning uchun yuqori yarim tekislikning OX chegarasida ixtiyoriy uchta $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$, $z_3 = \gamma$ nuqtalar olib, ularni mos ravishda Ou o'qdagi uchta $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ nuqtalarga akslantiramiz. Mana shu nuqtalarni (5) tenglikka qo'ygandan so'ng

$$w = \frac{(z - \alpha)(\gamma - \beta)}{(z - \gamma)(\alpha - \beta)} \quad (6)$$

tenglik hosil bo`ladi. So`nggi tenglikdan ochiq ko`rinadiki,

$z = \alpha$ bo`lganda  $w = 0$  bo`ladi,

$z = \beta$ bo`lganda  $w = 1$  bo`ladi,

$z = \gamma$ bo`lganda  $w = \infty$  bo`ladi.

Yuqoridagi (6) tenglikning surat va maxrajidagi qavslarni ochib soddalashtirilsa, ushbu

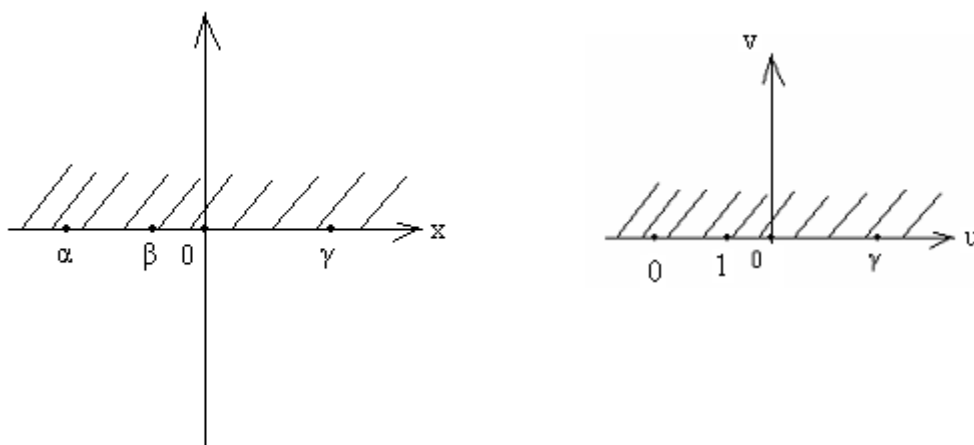
$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (7)$$

ko`rinishga keladi, bundagi  $A, B, C, D$  lar haqiqiy sonlar ekanini ko`rish qiyin emas. Endi bu xildagi akslantirishning burilish koeffitsiyentini topish maqsadida

(7) dan hosila olamiz: $\frac{dw}{dz} = \frac{AD - BC}{(Cz + D)^2}$.

Agar biz z ga haqiqiy qiymatlar bersak, bu yerda ikki holni ko`rish mumkin:

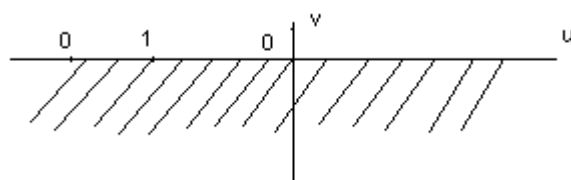
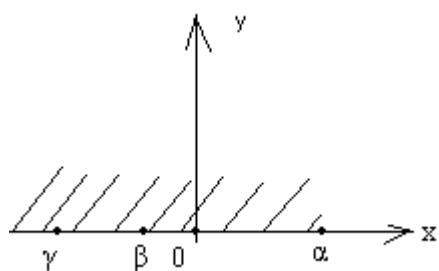
a) $AD - BC > 0$, ya'ni $\frac{dw}{dz} = f'(z) > 0$, demak, $\arg f'(z) = 0$



(3-chizma).

Boshqacha aytganda, hech qanday burilish yo`q demakdir. Shu sababli yuqori yarim tekislik o`z – o`ziga aks ettiriladi (3-chizma).

b) $AD - BC < 0$, ya'ni $\frac{dw}{dz} = f'(z) < 0$ bo`lsa,  $\arg f'(z) = -\pi$ , burilish burchagidan iborat bo`lib, yuqori yarim tekislik quyi yarim tekislikka aks ettiriladi (4-chizma).



(4-chizma).

3-ma'ruza

Elementar funksiyalar kombinatsiyalari yordamida amalga oshiriladigan konform akslantirishlar

Reja

1. Yo'lakni birlik doiraga akslantirish
2. Kesma chiqarib tashlangan yarim tekislikni yarim tekislikka akslantirish.

Elementar funksiyalar kombinatsiyalari yordamida amalga oshiriladigan bir nechta konform akslantirishlarni qaraymiz.

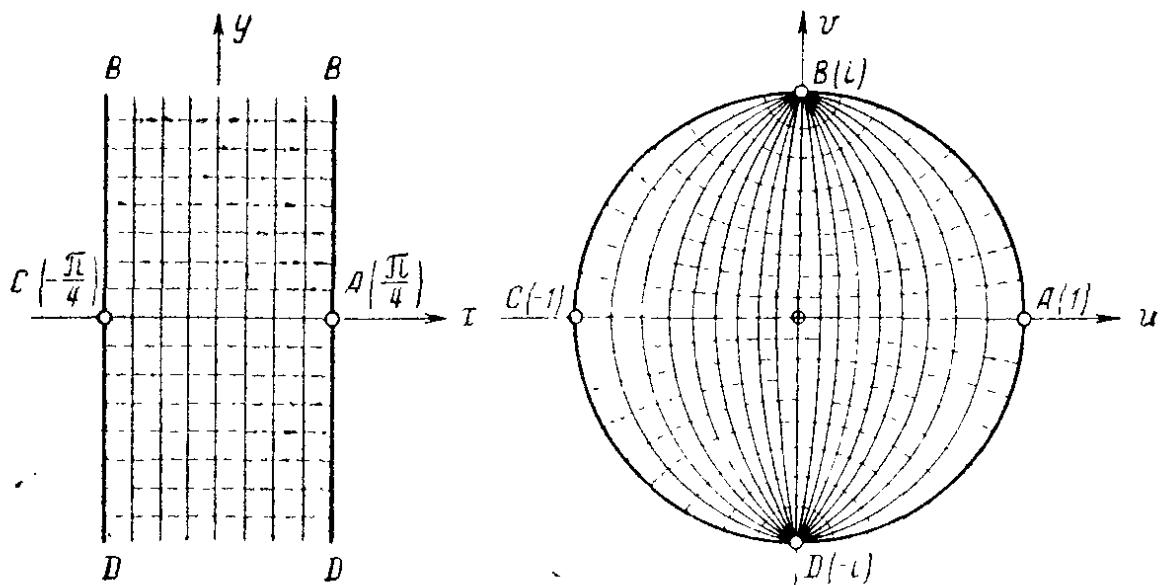
1. Yo'lakni birlik doiraga akslantirish

z tekislikda $D: \left\{ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$ yo'lak berilgan bo'lib, uni $|\omega| < 1$ doiraga

quyidagi uchta chegaraviy nuqtalar mosligida konform akslantirish talab qilinsin:

$f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$ (bu yerda $i\infty$ – yo'lakning yuqori cheksiz uzoqlashgan nuqtasini bildiradi)

1-rasm



1-rasm

Oldin berilgan sohani to'g'ri burchakka burib ikki marta kengaytiramiz:

$$z_1 = 2iz \quad (1)$$

Keyin $z_2 = e^{z_1}$ ko'rsatkichli funksiyadan foydalanib (1) akslantirishda hosil bo'lgan

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ yo'lakni $\operatorname{Re} z_2 > 0$ o'ng yarim tekislikka akslantirish olamiz. Bu

$z_2 = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$ tenglikdan $|z_2| = e^{x_1}$ ning noldan cheksizgacha o'zgarishi $\arg z_2 = y_1$

ning $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ ga o'zgarishidan kelib chiqadi. Endi bu yarim tekislikni birlik

doiraga shunday akslantirish kerakki $z = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, i\infty$ nuqtalarga mos $z = i, -i, 0$

nuqtalar $\omega = 1, -1, i$ nuqtalarga o'tsin. Bunday masala

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

akslantirish yordamida hal qilinadi. Demak biz

$$\frac{w-1}{w-i}(1+i) = \frac{z_2-i}{z_2} \quad (3) \text{ yoki}$$

$$w = \frac{1}{i} \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$$

akslantirishni hosil qilamiz. (2) va (1) ni (3) ga qo'yib masalaning oxirgi yechimini hosil qilamiz:

$$w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \operatorname{tg} z$$

Bu akslantirishda chiziqlar mosligini aniqlashtiramiz. (1) akslantirishda

$\operatorname{Re} z = \operatorname{const}$ vertikal chiziqlar gorizontal chiziqlar oilasiga o'tadi, (2)

akslantirishda bu chiziqlarni $\arg z_2 = \operatorname{const}$ nurlar oilasiga akslantiradi, ya'ni

$z_2 = 0$ va $z_2 = \infty$ nuqtalar orqali o'tuvchi "aylana"lar oilasiga o'tkazadi. (1-

chizma). (3) kasr-chiziqli akslantirish bu nuqtalarni $\omega = i$ va $\omega = -i$ nuqtalarga o'tkazadi binobarin, biz qarayotgan nurlar $\omega = \pm i$ nuqtalardan o'tuvchi aylanalar oilasiga o'tadi.

$\operatorname{Im} z = \operatorname{const}$ kesmalarning ortogonal oilasi $\omega = \pm i$ simmetrik nuqtalariga ega aylanalar oilasiga o'tadi. (1-chizma)

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \quad (4)$$

teskari funksiya doirani yo'lakka teskari akslantirishini amalga oshiradi. Bu yerda

iz ni z_1 bilan $\Delta\omega$ ni $\frac{\pi}{2H}\omega_1$ bilan almashtirib, $|z| < 1$ doirani kengligi H ga teng

$$-\frac{H}{2} < \operatorname{Im} w < \frac{H}{2}$$

yo'lakka o'tkazamiz. U

$$\omega = \frac{H}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{2H}{\pi} \operatorname{arth} z \quad (5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (5) akslantirish $z = \pm 1$ nuqtalarni $\omega = \pm\infty$ ga, $z = i$

nuqtani $\omega = i\frac{H}{2}$ nuqtaga o'tkazadi. Uning hosilasi

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{2H}{\pi} \frac{1}{1-z^2}$$

$z = \pm 1$ nuqtalarda cheksizga aylanadi.

2. Kesma chiqarib tashlangan yarim tekislikni yarim tekislikka akslantirish.

$\text{Im } z > 0$ yarimtekislikdan $(a, a + ih)$ kesma chiqarib tashlangan bo'lsin.

Izlanayotgan akslantirishni topish uchun biz oldin $\omega = z^2$ akslantirish koordinatalar boshida burchaklarni kattalashtirish va binobarin, maxsus kesma va x o'q orasidagi burchakni "to'g'irlashimiz" mumkinligidan foydalanamiz.

Bunga mos ravishda biz z yarimtekislikni a kesmaga chapga suramiz:

$z_1 = z - a$ va $z_2 = z_1^2$ akslantirishni qo'llab $-h^2 < \text{Re } z_2 < \infty$, $\text{Im } z_2 = 0$ nur chiqarib tashlangan tekislikka olamiz:

So'ngra biz yana z_2 tekislikni h_2 birlikka o'ngga suramiz: $z_3 = z_2 + h^2$.

$z_4 = \sqrt{z_3}$ akslantirish bajarish natijasida biz yuqori yarim tekislikni hosil qilamiz, bu yerda $\sqrt{z}$ birinchi tarmog'i olinadi.

Shunday qilib, izlanayotgan akslantirish

$$z_4 = \sqrt{(z - a)^2 + h^2} \quad (6)$$

Ko'rinishga ega bo'ladi.

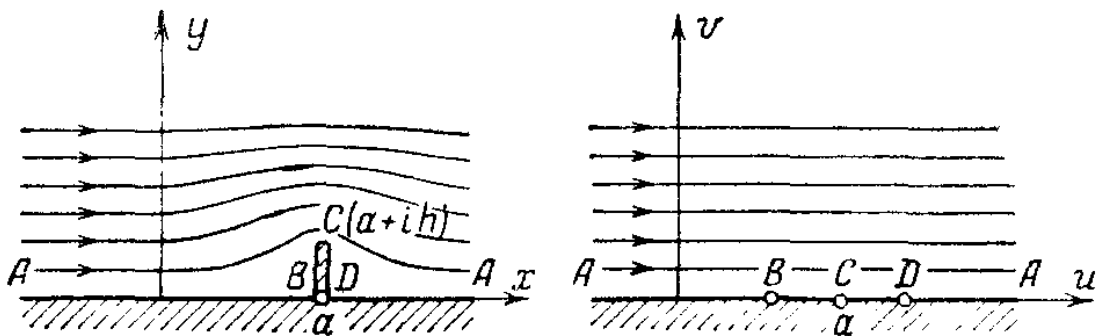
z_4 tekislikni a kesma o'ngga surib

$$\omega = \sqrt{(z - a)^2 + h^2} + a \quad (7)$$

ni olamiz. (7) akslantirishning hosilasi

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{z - a}{\sqrt{(z - a)^2 + h^2}} \quad (8)$$

B va D (bu yerda $z = a$) nolga va C nuqtada (bu yerda $z = a + ih$) ∞ ga aylanadi.



2-rasm

$v = v_0 = \text{const}$ to'g'ri chiziqlar $x = a$ chiziqqa nisbatan simmetrik, bu nuqtada

$$\text{ordinatalari maksimumga erishuvchi } y = v_0 \sqrt{1 + \frac{h}{(x - a)^2 + v_0^2}} \quad (9)$$

to'rtinchi tartibli chiziqqa mos keladi. Katta v_0 larda (9) chiziqlar to'g'ri chiziqdan kam farq qiladi. $h = 0$ da (7) akslantirish $w = z$ ayniy akslantirishga aylanadi. (7) akslantirishning kichik h lardagi bosh qismini topamiz. Buning uchun biz (7) formulani h ning ikkinchidan yuqori darajalariga e'tibor bermasdan shakl almashtiramiz: ildiz uchun taqribiy formulani ishlatib

$$w = (z - a) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(z - a)^2}} + a \approx z + \frac{h^2}{2(z - a)} \quad (10)$$

ni olamiz. (10) taqribiy formula a nuqtaga yaqin z nuqtalarda ham o'rinli, chunki ular uchun $\frac{h^2}{(z - a)}$ qiymat juda kichikdir.

4-ma'ruza.

Konform izomorfizm. Avtomorfizm. Sodda sohalarning avtomorfizmlari.

Reja

1. Konform izomorfizm tushunchasi. Avtomorfizm.
2. Kanonik sohalarning avtomorfizmlari.

1. Konform izomorfizm tushunchasi. Avtomorfizm.

D_1 sohani D_2 ga akslantiruvchi konform akslantirish konform izomorfizm deyiladi, bunday akslantirishni qanoatlantiruvchi sohalar izomorf deyiladi. Sohani o'z-o'ziga akslantiruvchi izomorfizm avtomorfizm deyiladi.

Konform izomorfizmlar golomorf izomorfizm yoki avtomorfizmlar deyiladi. D ixtiyoriy soha bo'lsin. $\varphi: D \rightarrow D$ avtomorfizmlar to'plami bu sohada avtomorfizmlar gruppasini tashkil qiladi va $\Lambda(D)$ bilan belgilanadi. Gruppaviy amal sifatida $\varphi_2 \circ \varphi_1$ (ya'ni $\varphi_2(\varphi_1(z))$) avtomorfizm qabul qilinadi, birlik element bo'lib, $e: z \rightarrow z$ ayniy akslantirish, φ elementga teskari akslantirish bo'lib, $w = \varphi(z)$ ga teskari $z = \varphi^{-1}(w)$ akslantirish xizmat qiladi.

1-teorema. Agar $f_0: D_1 \rightarrow D_2$ biror tayinlangan izomorfizm bo'lsa, D_1 ni D_2 ga akslantiruvchi barcha izomorfizmlar gruppasi $f = \varphi \circ f_0$ (1) formula bilan beriladi, bu yerda φ - D_2 sohaning ixtiyoriy avtomorfizmi.

Isbot. φ - avtomorfizm qanday bo'lmasin, $\varphi \circ f_0$ D_1 ni D_2 ga konform akslantirish bo'ladi. Boshqa tomondan $f: D_1 \rightarrow D_2$ - ixtiyoriy izomorfizm bo'lsin, u holda $\varphi = f \circ f_0^{-1}$ D_2 ni o'z-o'ziga o'tkazuvchi konform akslantirish, ya'ni D_2 dagi avtomorfizm bo'ladi, bundan (1) kelib chiqadi.

Izoh. D sohani D^* ga o'tkazuvchi istalgan f konform akslantirish bu sohada $F: \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D^*)$ avtomorfizmlar gruppasini izomorfizmini o'rnatadi. Bu

$$F: \varphi \rightarrow f \circ \varphi \circ f^{-1} \quad (2)$$

formula bilan beriladi. O'z navbatida istalgan $\varphi \in \Lambda(D)$ uchun $\varphi^* \rightarrow f \circ \varphi \circ f^{-1}$ akslantirish D^* ning avtomorfizmini ifodalaydi, ya'ni $\varphi^* \in \Lambda(D^*)$ bo'ladi. Boshqa tomondan istalgan $\varphi^* \in \Lambda(D^*)$ akslantirish uchun $f^{-1} \circ \varphi^* \circ f = \varphi \in \Lambda(D)$, ya'ni F akslantirish $\Lambda(D)$ ni $\Lambda(D^*)$ ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Bundan tashqari

$$\varphi_1^* \circ \varphi_2^* = (f \circ \varphi_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varphi_2 \circ f^{-1}) = f \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ f^{-1},$$

ya'ni

$$F: \varphi_1 \circ \varphi_2 \rightarrow \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$$

gruppaviy amalni saqlaydi va shunday qilib, qaralayotgan gruppaning izomorfizmini ifodalaydi.

2. Kanonik sohalarining avtomorfizmlari.

2-teorema. *Kanonik sohada har qanday avtomorfizm uning kasr chiziqli avtomorfizmini ifodolaydi.*

Isbot. φ - $\bar{C}$ dagi ixtiyoriy avtomorfizm bo'lsin. ∞ nuqtaga $z_0 \in \bar{C}$

yagona nuqta mavjud, shuning uchun $\varphi(z)$ funksiya $\bar{C}$ da qutb nuqtadan tashqari barcha joyda holomorf, $n \geq 2$ tartibli qutb atrofida funksiya bir yaproqli emas, binobarin, $\varphi(z)$ funksiya z_0 nuqtada 1-tartibli qutbga ega. Funksiyaning qutb nuqta atrofidagi Loran qatori yoyilmasida bosh qism faqat chekli sondagi noldan farqli hadlarga ega bo'lishi va Lyuvill teoremasiga ko'ra $z_0 \neq \infty$ da $\varphi(z)$,

$$\varphi(z) = \frac{A}{z - z_0} + B \quad \text{yoki} \quad z_0 = \infty \quad \text{da} \quad \varphi(z) = Az + B \quad \text{ko'rinishga ega, shunday qilib, } \varphi$$

kasr chiziqli funksiyaning ifodalaydi. C ochiq tekislik bo'lgan hol shunga o'xshash qaraladi. φ -ixtiyoriy U birlik doira avtomorfizmi bo'lsin. $\varphi(0) = w_0$ bilan belgilaymiz va U doiraning w_0 nuqtasini 0 nuqtaga o'tkazuvchi

$$\lambda: w \rightarrow \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$$

kasr chiziqli avtomorfizmni quramiz. $f = \lambda \circ \varphi$ ham U ning avtomorfizmini ifodalaydi, shu bilan birga $f(0) = 0$. Barcha $z \in U$ uchun $|f(z)| < 1$ ligidan $f(z)$ funksiyaga Shvars lemmasini qo'llab, barcha $z \in U$ uchun $|f(z)| \leq |z|$ ni olamiz. Lekin $z = f^{-1}(w)$ teskari akslantirish ham bu lemma shartlarini qanoatlantiradi. Binobarin $\forall w \in U$ uchun $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ bu yerdan $w = f(z)$ deb olib $\forall z \in U$ uchun $|z| \leq |f(z)|$ ni topamiz. Demak, $\forall z \in U$ uchun $|f(z)| = |z|$ va Shvars lemmasiga ko'ra $f(z) = e^{i\alpha} z$. Lekin bu holda

$$\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha} z)$$

kasr chiziqli akslantirishni ifodalaydi. Kanonik elementlarning barcha avtomorfizmlarini keltiramiz.

$$1. \bar{C} \text{ yopiq tekislik: } w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \quad (3)$$

$$2. C \text{ ochiq tekislik: } w = az + b, a \neq 0 \quad (4)$$

$$3. U \text{ birlik doira } w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, |a| < 1, \alpha \in R. \quad (5)$$

Doira avtomorfizm to'g'risida batafsil to'xtalamiz. (5) formuladan ko'rinadiki, u uchta haqiqiy parametrga bog'liq. Bu parametrlarni tanlab,

$$\lambda(a) = b, \arg \lambda'(a) = \alpha \quad (6)$$

normallovchi shartlarni qanoatlantiruvchi faqat bitta avtomorfizm topish mumkinligini ko'rsatamiz, bu yerda $a, b \in U$ ixtiyoriy berilgan nuqtalar va $\alpha \in R$ ixtiyoriy son. O'z navbatida,

$$\mu: z \rightarrow e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \text{ va } z \rightarrow v: z \rightarrow \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

avtomorfizmlarni quramiz. U holda $\nu(w) = \mu(z)$ tenglikdan aniqlanuvchi $\lambda = \nu^{-1} \circ \mu$ avtomorfizm

$$\frac{w-b}{1-\bar{b}w} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (7)$$

ni qanoatlantiradi. $\lambda_1 \in \Omega(U)$ - shu shartni qanoatlantiruvchi yana biror bir avtomorfizm bo'lsin. U holda $f = \nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1}$ avtomorfizm $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = 0$ ni qanoatlantiradi, Shvars lemmasiga ko'ra $f(w) = w$, ya'ni $f = e$ - ayniy akslantirish bo'ladi. Shunday qilib, $\nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1} = e$, bu yerdan $\lambda_1 = \nu^{-1} \circ \mu = \lambda$.

3- teorema. Agar D_1 va D_2 sohalar birlik doiraga izomorf bo'lsalar, D_1 ni D_2 ga konform akslantirishlar to'plami uchta haqiqiy parametrga bog'liq. Xususan, $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = 0$ (8) normallangan shartlarni qanoatlantiruvchi faqat va faqat bitta $f: D_1 \rightarrow D_2$ akslantirish mavjud, bunda $z_0 \in D_1$ va $w_0 \in D_2$ ixtiyoriy berilgan nuqta va $\theta \in R$ - ixtiyoriy son.

Isbot. $f_1: D_1 \rightarrow U$ va $f_2: D_2 \rightarrow U$ berilgan sohalarni birlik doiraga akslantiruvchi konform akslantirish bo'lsin. U holda

$$f_0 = f_2^{-1} \circ f_1$$

D_1 ni D_2 konform akslantirishlarga 1- teorema ko'ra bunday akslantirishlar to'plami $f = \varphi \circ f_0$ formula bilan beriladi, bu yerda φ - D_2 sohaning ixtiyoriy avtomorfizmi, shu bilan birga $\Lambda(D_2)$ uchta haqiqiy parametrga bog'liq.

$$f_1(z_0) = a, \arg f_1'(z_0) = \theta_1 \text{ va } f_2(w_0) = b, \arg f_2'(w_0) = \theta_2$$

bo'lsin. (7)-formula bo'yicha

$$\lambda(a) = b, \arg \lambda'(a) = \alpha = \theta + \theta_2 - \theta_1$$

normallangan shartli λ birlik doira avtomorfizmini quramiz. U holda $f = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$ D_1 ni D_2 ga akslantiruvchi akslantirish izomorfizm bo'ladi va (8) shartni qanoatlantiradi. O'z navbatida, $f(z_0) = f_2^{-1} \circ \lambda(a) = f_2^{-1}(b) = w_0$

$$\arg f'(z_0) = -\arg f_2'(w_0) + \arg \lambda(a) + \arg f_1'(z_0) = -\theta_2 + \alpha + \theta_1 = \theta.$$

Normalangan izomorfizmning mavjudligi isbotlandi. Xuddi shunday shartli $g: D_1 \rightarrow D_2$ izomorfizm mavjud bo'lsin. U holda $\varphi(w_0) = w_0$, $\arg \varphi'(w_0) = 0$ shartli, $\varphi = f \circ g^{-1}$ D_1 da avtomorfizm bo'ladi, U da $\lambda = f_2 \circ \varphi \circ f_2^{-1}$, $\lambda(b) = b$, $\arg \lambda'(b) = 0$ normalangan shartli avtomorfizm bo'ladi. Yuqoroda isbotlangani kabi $\lambda = e$, binobarin $\varphi = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_2 = e$ shunday qilib,

$$f \circ g^{-1} = e \text{ va } f = g.$$

5-Ma'ruza.
Argument prinsipi. Rushe teoremasi
Reja

- 1. Logarifmik hosila va logarifmik qoldiq.**
- 2. Argument prinsipi.**

1. Logarifmik hosila va logarifmik qoldiq.

Ko'p hollarda biror sohada golomorf bo'lgan funksiyaning nollari, qutb nuqtalari sonini aniqlash kerak bo'ladi. Bu masalani hal qilishda chegirmalar haqidagi teoremlardan foydalaniladi.

Aytaylik. $f(z)$ funksiya

$$D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < r\}$$

sohada golomorf bo'lsin.

Ushbu

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z) \quad (1)$$

munosabatni qaraylik. Odatda, bu munosabatdagi $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nisbat $f(z)$ funksiyaning

logarifmik hosilasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n tartibli (karrali) noli bo'lsin. Unda $f(z) = (z - a)^n \cdot \varphi(z)$ bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf va $\varphi(a) \neq 0$ bo'ladi. Natijada (1) tenglikning chap tomoni ushbu ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{[(z - a)^n \cdot \varphi(z)]'}{(z - a)^n \cdot \varphi(z)} = \frac{n(z - a)^{n-1} \cdot \varphi(z) + (z - a)^n \cdot \varphi'(z)}{(z - a)^n \cdot \varphi(z)} = \\ &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} \end{aligned}$$

Bu tenglikdagi

$$\frac{n \cdot \varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

funksiya a nuqtada golomorf va $z = a$ da uning qiymati n ga teng bo'ladi. SHuning uchun bu funksiya a nuqtaning biror atrofi U_a da Teylor qatoriga yoyiladi (bunda ozod had $c_0 = n$ bo'ladi):

$$\frac{n \cdot \varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = n + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

SHunday qilib,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + \dots$$

bo`ladi.

Demak, $f(z)$ funksiyaning n tartibli noli bo`lgan  $z=a$  nuqta, uning logarifmik hosilasi  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  ning birinchi tartibli qutb nuqtasi bo`lar ekan.

Demak,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n \quad (2)$$

Odatda, $\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}$ ni $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtadagi **logarifmik chegirmasi** deyiladi.

SHunday qilib, $f(z)$ funksiyaning n tartibli noli bo`lgan  $z=a$  nuqtada logarifmik chegirma  $n$  ga teng teng bo`lar ekan.

Aytaylik, $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning p - tartibli qutb nuqtasi bo`lsin. Unda

$$f(z) = (z-a)^{-p} \cdot \varphi(z)$$

bo`lib,  $\varphi(z)$  funksiya  $z=a$  nuqtada golomorf va  $\varphi(a) \neq 0$  bo`ladi. Bu holda

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

bo`lib,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p \quad (3)$$

bo`ladi.

Demak, $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning p tartibli qutb nuqtasi bo`lsa, u holda  $f(z)$  funksiyaning  $z=a$  qutb nuqtasidagi logarifmik chegirmasi, qutb tartibining teskari ishora bilan olingan qiymatiga teng bo`ladi.

Eslatma. Funksiyaning nollari hamda qutb nuqtalari sonini hisoblashda har bir nol va qutb nuqta nechanchi tartibli bo`lsa, shuncha marta hisoblanadi.

2. Argument prinsipi.

Faraz qilaylik, D ($D \subset \mathbb{C}$) soha berilgan bo`lib, G soha esa D da kompakt

joylashgan bo`lsin: $G \subseteq D$.

1-teorema. $f(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $f(z)$ funksiyaning D sohada qutb nuqtalaridan boshqa maxsus nuqtalari bo`lmasin;
- 2) G -bir bog`lamli soha;
- 3) G sohaning chegarasi ∂G da $f(z)$ funksiyaning nollari hamda qutb

nuqtalar bo'lmasin.

U holda

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (4)$$

bo'ladi, bunda N soni $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni, P esa G dagi barcha qutb nuqtalarining soni; ∂G -orientirlangan chegara.

Isbot. $f(z)$ funksiya G sohada chekli sondagi $a_1, a_2, \dots, a_n$ nollarga ega bo'ladi. Aks holda, ya'ni funksiyaning nollari cheksiz ko'p bo'lsa, unda ular limit nuqta a_0 ga ($a_0 \in G$) ega bo'lib, $f(a_0) = 0$ bo'ladi va yagonalik teoremasiga ko'ra G sohada $f(z) \equiv 0$ bo'lib qoladi.

SHuninidek, $f(z)$ funksiya G sohada chekli sondagi $b_1, b_2, \dots, b_m$ qutb nuqtalarga ega bo'ladi. Aks holda, ya'ni funksiyaning G sohadagi qutb nuqtalarining soni cheksiz bo'lsa, unda ular ham limit nuqta b_0 ga ($b_0 \in G$) ega bo'lib, bu nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'lmaydi.

(4) integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalari $f(z)$ funksiyaning G sohadagi nollari hamda qutb nuqtalaridan iborat. Bu nuqtalar teoremaning shartiga ko'ra ∂G ga tegishli emas. CHegirmalar haqida Koshi teoremasiga binoan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

bo'ladi.

(2) va (3) munosabatlardan foydalanib

$$\operatorname{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = n_k, \quad \operatorname{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p_k,$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n_k - \sum_{k=1}^m p_k = N - P$$

(4) munosabatdagi integralni quyidagicha yozib olamiz;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} [Ln f(z)] dz \quad (5).$$

∂G egri chiziqda ixtiyoriy z_0 nuqtani olib, uni integrallash egri chizig'idagi boshlang'ich va oxirgi nuqta deb qaraymiz. z_0 nuqtadan boshlab, musbat yo'nalish bo'yicha harakatlanib z_0 nuqtaga qaytib kelganda $Ln f(z)$ funksiyaning qiymati uzluksiz o'zgara borib, uning z_0 nuqtadagi dastlabki qiymati va shu nuqtadagi keyingi qiymati, umuman aytganda, turlicha bo'ladi. Bu holda $f(z_0)$ bir xil bo'lganda ham $Arg f(z_0)$ ning qiymatlari har xil bo'ladi.

Aytaylik, $Arg f(z_0)$ ning z_0 nuqtadagi dastlabki qiymati φ_0 keyingi qiymati φ_1 bo'lsin.

YUqoridagi (5) tenglikni hamda $Ln f(z) = \ln|f(z)| + i Arg f(z)$ ekanini e'tiborga olib, topamiz;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[\ln|f(z_0)| + i\varphi_1 \right] - \left[\ln|f(z_0)| + i\varphi_0 \right] \right\} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi} \quad (6)$$

Odatda, $\varphi_1 - \varphi_0$ ayirma argument orttirmasi deyilib, uni $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ kabi belgilanadi;

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta_{\partial G} \arg f(z) \quad (7)$$

(4), (6) va (7) munosabatlardan

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z) \quad (8)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa quyidagini bildiradi;

$f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni N dan, barcha qutb nuqtalari soni P ning ayirmasi orientirlangan ∂G chegarani aylanib chiqishdagi argument orttirmasining 2π ga bo'linganiga teng.

Bu tasdiq **argument printsipli** deyiladi.

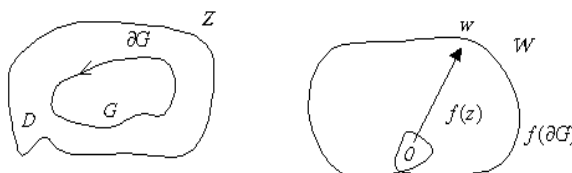
Ravshanki, $f(z)$ funksiya G sohada qutb nuqtalariga ega bo'lmasa, unda (8) formula ushbu

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z) \quad (9)$$

ko'rinishga keladi.

(8) tenglikdagi $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ miqdor oddiy geometrik ma'noga ega.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya C_z tekislikdagi ∂G ni $f(\partial G)$ chiziqqa akslantirsin (28-chizma).



28-чизма

z nuqta ∂G bo'ylab, uni to'liq aylanib chiqsa, boshi $w=0$ nuqtada, oxiri $w=f(z)$ da bo'lgan vektorning uchi $f(\partial G)$ bo'ylab o'zgarib boradi. Unda $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ orttirma $f(z)$ funksiya argumentining o'zgarishi w vektorining $w=0$ nuqta atrofida $f(\partial G)$ bo'ylab uni to'liq aylanib chiqishlar sonini aniqlaydi (agar vektor w $f(\partial G)$ ni $w=0$ nuqta atrofida biror marta to'liq aylanib chiqmasa, unda $\Delta_{\partial G} \arg f(z)=0$ bo'ladi).

Argument printsiplin quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollar soni N dan barcha qutb nuqtalari soni P ning ayirmasi z nuqta ∂G ni musbat yo'nalish bo'yicha bir marta to'liq aylanib chiqqanda $f(z)$ vektorning $w=0$ nuqta atrofida to'liq aylanib chiqishlar soniga teng. Argument printsiptan foydalanib quyidagi teorema isbotlanadi.

6-ma'ruza

Mavzu: Rushe teoremasi. Algebraning asosiy teoremasi.

Reja

1. Rushe teoremasi.
2. Algebraning asosiy teoremasi.
3. Gurvis teoremasi.
4. Rushe teoremasi tadbqiqiga misollar.

1. Rushe teoremasi.

Bu ma'ruzada argument prinsipining ba'zi tadbqiqatlari bilan tanishamiz.

1-teorema. (Rushe teoremasi). Faraz qilaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari chegaralangan bir bog'lamli G sohaning yopig'i $\bar{G}$ da holomorfl bo'lsin. Agar

$$\forall z \in \partial G \text{ da } |f(z)| > |g(z)| \quad (1)$$

bo'lsa, u holda G sohada $f(z)$ va $f(z)+g(z)$ funksiyalarning nollari soni bir-biriga teng bo'ladi.

Isbot. $f(z)$ va $f(z)+g(z)$ funksiyalar G sohaning chegarasi ∂G da nollarga ega bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, (1) munosabatga ko'ra, $\forall z \in \partial G$ da

$$\begin{aligned} |f(z)| &> |g(z)| \geq 0 \\ |f(z)| + |g(z)| &\geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \end{aligned}$$

bo'lib, ulardan

$$f(z) \neq 0, \quad f(z)+g(z) \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $f(z)$ va $f(z)+g(z)$ funksiyalarning G sohadagi nollarining soni mos ravishda N_f va N_{f+g} bo'lsin. Argument prinsipiga ko'ra

$$\begin{aligned} N_f &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z) \\ N_{f+g} &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg[f(z)+g(z)] \end{aligned} \quad (2)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $z \in \partial G$ da $f(z)+g(z) = f(z) \cdot \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]$ bo'lib, undan

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial G} \arg[f(z)+g(z)] &= \Delta_{\partial G} \arg f(z) + \\ &+ \Delta_{\partial G} \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right] \end{aligned} \quad (3)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu

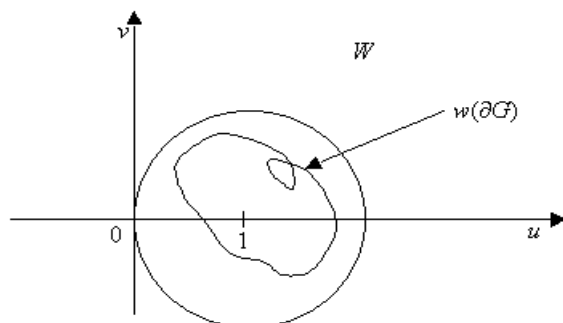
$$w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

funksiyani qaraylik. (1) munosabatdan foydalanib, $z \in \partial G$ da

$$|w-1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

bo'lishini topamiz.

z nuqta yopiq kontur ∂G bo'ylab aylanib chiqqanda w vektorning uchi $|w-1| < 1$ doirada joylashgan yopiq kontur $w(\partial G)$ buyicha harakatlanib, $w=0$ nuqtaning atrofini biror marta ham aylana olmaydi (29-chizma).



29-чизма

SHuning uchun

$$\Delta_{\partial G} \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0$$

bo'ladi.

(2) va (3) munosabatlardan

$$N_{f+g} = N_f$$

bo'lishi kelib chiqadi

2. Algebraning asosiy teoremasi.

Rushe teoremasi yordamida algebraning asosiy teoremasi sodda isbotlanadi.

2-teorema. Har qanday n – darajali

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

ko'phad ($a_k \in \mathbb{C}, k=1,2,\dots,n$) kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da n ta nolga ega bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, $z=0$ ushbu $f(z)=z^n$ funksiyaning kompleks tekislikda n tartibli noli. Binobarin, $f(z)=z^n$ funksiyaning nollarining soni n ga teng bo'ladi.

Endi

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = f(z) + g(z)$$

deb olamiz, bunda

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Agar G soha sifatida $|z| < r, (r=1+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|)$ doira olinsa, unda $\forall z \in \partial G$ da $|f(z)| > |g(z)|$ bo'ladi. Rushe teoremasiga ko'ra $|z| < r$ doirada $f(z)$ va $P_n(z)$ funksiya-lar nollarining soni bir xil bo'ladi. Yana $|f(z)| > |g(z)|$ tengsizlikdan

foydalanib, $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ da $P_n(z) \neq 0$ bo'lishini topamiz. Demak, $P_n(z)$ ko'pxad

n ta nolga ega

3. Gurvis teoremasi.

Энди Руше теоремасидан фойдаланиб, шуйидаги теоремани исботлаймиз.

3-теорема(Гурвиц теоремаси). $D \subset \mathbb{C}$ соқада голоморф бѐлган

$\{F_n(z)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бѐлиб, бу кетма-кетлик шу соқада $F(z)$ функцияга текис яшинлашсин. Айтайлик, Γ чизиш ѐзи чегаралаган соқа билан бирга D соқада ѐтувчи ѐпиш тѐђриланувчи Жордан чизиђи бѐлиб, $\forall z \in \Gamma$ учун $F(z) \neq 0$ шарт бажарилсин. У ќолда шундай натурал $n_0 = n_0(\Gamma)$ сон топиладики, $\forall n \geq n_0$ учун барча $F_n(z)$ ва $F(z)$ функциялар Γ билан чегараланган соқа ичида бир хил сондаги нолларга эга бѐлади.

Isbot. $F(z)$ функция Γ да узлуксиз ва $\forall z \in \Gamma$ учун $F(z) \neq 0$ шарт бажарилгани учун

$$\inf_{\Gamma} |F(z)| = m > 0$$

бѐлади. Γ да $F(z) \rightrightarrows F(z)$ бѐлганлиги сабабли шундай $n_0 = n_0(\Gamma)$ топиладики, $\forall n \geq n_0$ ва $z \in \Gamma$ лар учун

$$|F_n(z) - F(z)| < \frac{m}{2}$$

тенгсизлик бажарилади. Агар

$$F_n(z) = F(z) + [F_n(z) - F(z)]$$

деб ѐзиб олиб,

$$f(z) = F(z) \text{ ва } g(z) = F_n(z) - F(z)$$

деб белгиласак, бу функциялар Γ чизиш билан чегараланган соќанинг ѐпиђида голоморф бѐлиб, $\forall z \in \Gamma$ ва барча $n \geq n_0$ лар учун $|f(z)| \geq m > \frac{m}{2} > |g(z)|$ бѐлади.

У ќолда $n \geq n_0$ лар учун Руше теоремасини шѐллаб, Γ чизиш билан чегараланган соќанинг ичида $F(z)$ ва $F_n(z) = g(z) + F(z)$ функцияларнинг ноллари сони тенглигини топамиз. ►

Натижа. Агар D соқада голоморф ва бир япрошли функциялар кетма-кетлиги $f_n(z)$ ќар бир $K \subseteq D$ тѐпламда текис яшинлашувчи бѐлса, у ќолда бу кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(z)$ ѐки бир япрошли, ѐки сѐзгармас бѐлади.

◀Тескарисини фараз ўиламиз, яъни бирор $z_1 \neq z_2$ ($z_1, z_2 \in D$) да $f(z_1) = f(z_2)$ ва $f \neq \text{const}$ бўлсин. $\{z - z_1| < r\}$ доирада $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ функциялар кетма-кетлигини оламиз, бу ерда $r \leq |z_1 - z_2|$. Унда $g(z) = f(z) - f(z_2)$ лимит функция z_1 нуқтада нолга айланади. Гурвиц теоремасига кўра барча $g_n(z)$ функциялар кам $\{z - z_1| < r\}$ доирада бирор номердан бошлаб нолга эга бўлади. Бу эса $f_n(z)$ нинг бир япроўлилигига зиддир. Зиддият фаразнинг нотўғри, тасдиғнинг туғрилигини исботлайди. ▶

1-мисол. Агар $r < \frac{\pi}{2}$ бўлса, етарлича катта бўлган барча n лар учун

$$F_n(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

кўпқадлар ёпиш $\{z| \leq r\}$ доирада нолга эга бўлмаслиги исботлансин.

Yechish. Ushbu

$$F(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

функцияни оламиз. Маълумки, бу ўатор $\mathbb{C}$ да яўинлашиб, ундаги ихтиёрий

ёпиш доирада, хусусан, $\{z| \leq r\}$ $\left(r < \frac{\pi}{2}\right)$ доирада текис яўинлашади:

$$\{z| \leq r\} \text{ да } F_n(z) \rightarrow F(z).$$

$\{z| \leq r\}$ да $F(z) = \cos z \neq 0$ бўлгани учун, Гурвиц теоремасига кўра шундай $n_0 > n_0(r)$ топиладики, $\forall n \geq n_0$ ва $|z| \leq r < \frac{\pi}{2}$ лар учун $F_n(z) \neq 0$ бўлади. ▶

4. Rushe teoremasi tadbiqiga misollar.

1-misol. $z^7 - 5z^5 + 2z^3 - 1 = 0$ tenglamaning $|z| < 1$ doirada nechta ildizi borligi (Rushe teoremasidan foydalanib) aniqlansin.

Tenglamaning chap tomonini $f(z) + g(z)$ ko`rinishda ifodalaymiz. Bu erda $f(z) = -5z^5$, $g(z) = z^7 + 2z^3 - 1$. Endi $|z| = 1$ aylanada

$$|g(z)| = |z^7 + 2z^3 - 1| \leq |z|^7 + 2|z|^3 + 1 = 4$$

va

$$|f(z)| = |-5z^5| = 5|z|^5 = 5$$

bo`lishidan

$$|f(z)| > |g(z)|$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, Rushe teoremasining barcha shartlari bajariladi. SHuning uchun

$$f(z) + g(z) = z^7 - 5z^5 + 2z^3 - 1$$

funksiyaning $|z| < 1$ doiradagi nollari soni $f(z) = -5z^5$ funksiyaning $|z| < 1$ dagi nollari soniga teng bo'ladi.

Ravshanki, $f(z) = -5z^5$ funksiya $z = 0$ da 5 tartibli nolga ega. SHuning uchun $z^7 - 5z^5 + 2z^3 - 1 = 0$ tenglama $|z| < 1$ doirada 5 ta ildizga ega.

2-misol. Ushbu

$$z + \lambda - e^z = 0 \quad (\lambda > 1) \quad (13)$$

tenglamaning $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ yarim tekislikda yagona ildizga (haqiqiy ildizga) ega

bo'lishi isbotlansin.

Avvalo quyidagi belgilashlarni qilamiz:

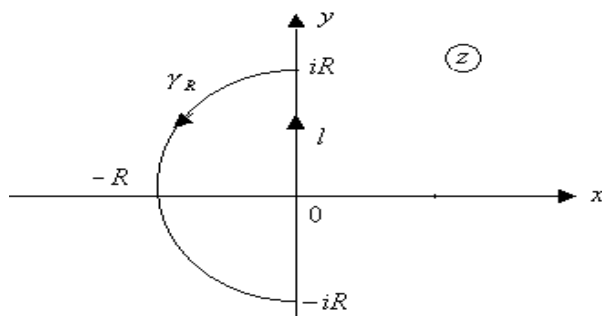
$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Re} z \leq 0\},$$

$$\ell = \{z = iy : -R \leq y \leq R\}.$$

co'ng ushbu

$$\Gamma_R = \gamma_R \cup \ell$$

yopiq chiziqni olamiz.



Agar $f(z) = z + \lambda$, $g(z) = -e^z$ deyilsa, unda berilgan tenglama ushbu $f(z) + g(z) = 0$

ko'rinishni oladi.

Ravshanki, $\forall z \in \ell$ uchun

$$|f(z)| = |\lambda + iy| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geq \lambda > 1,$$

$$|g(z)| = |-e^{iy}| = 1;$$

$\forall z \in \gamma_R$ uchun esa, $R > \lambda + 1$ bo'lganda

$$|f(z)| = |z + \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1,$$

$$|g(z)| = |e^{x+iy}| = e^x \leq 1$$

bo'ladi. Unda Rushe teoremasi ko'ra Γ_R yopiq chiziq bilan chegaralangan sohada (yarim doiraning ichida)

$$f(z) = z + \lambda = 0 \text{ va } f(z) + g(z) = z + \lambda - e^z = 0$$

tenglamalarning ildizlari soni teng bo'ladi. Demak, berilgan tenglama qaralayotgan sohada yagona ildizga ega. Agar R ni cheksizga intiltirsak, (13)-

tenglamaning $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ yarimtekislikda yagona ildizga ega ekanligini hosil

qilamiz. Endi bu ildizning haqiqiy ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$x + \lambda - e^x = 0$$

tenglama $(-\infty, 0)$ oraliqda ildizga egaligini ko'rsatish kifoya. $\varphi(x) = x + \lambda - e^x$ deb belgilasak, bu funksiya $(-\infty, 0)$ oraliqda uzluksiz va chetki nuqtalarda turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi:

$$\varphi(0) = \lambda - 1 > 0 \text{ va } \varphi(-\infty) = -\infty$$

Unda Boltsano-Koshining 1-teoremasiga ko'ra $\varphi(x) = 0$ tenglama $(-\infty, 0)$ oraliqda ildizga ega.

7-Ma'ruza.

Sohaning saqlanish prinsipi.

Reja

1. Sohaning saqlanish prinsipi
2. Sohaning saqlanish prinsipi yordamida amalga oshiriladigan ba'zi conform akslantirishlarga misollar

1. Sohaning saqlanish prinsipi

Endi ixtiyoriy golomorf funksiya yordamida bajariladigan akslantirishni qaraymiz. Bunda sohaning aksi yana soha bo'lishini tasdiqlovchi quyidagi teorema muhimdir:

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lsin.

Teorema. Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa u holda D sohaning aksi D^* ($D^* = f(D)$) ham soha bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}_z$) sohada golomorf bo'lib, u D

sohani D^* to'plamga ($D^* \subset \mathbb{C}_w$) akslantirsin: $D^* = f(D)$.

1) D^* ochiq to'plam bo'lishini isbotlaymiz. Aytaylik, w_0 nuqta D^* to'plamning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, z_0 nuqta ($z_0 \in D$) esa uning asllaridan (proobrazlaridan) biri bo'lsin: $f(z_0) = w_0$.

D soha bo'lgani uchun nuqtaning shunday

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z - z_0 | < \varepsilon\}$$

atrofi topiladiki, u D sohaning ichida joylashgan bo'ladi va $U_\varepsilon(z_0)$ da w_0 ($w_0 \in D^*$) nuqtaning z_0 dan boshqa asli bo'lmaydi. Chunki, z_0 nuqtaning biror atrofida, aksi w_0 bo'lgan boshqa nuqtalar cheksiz ko'p bo'lsa, bu nuqtalarda $f(z)$ funksiyaning qiymatlari w_0 ga teng bo'lib, yagonalik teoremasiga ko'ra, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lishiga zid bo'lib qoladi.

O'piq doira $\overline{U_\varepsilon(z_0)}$ ning chegarasi $\gamma = \{z - z_0 | = r\}$ da $f(z) - w_0$ funksiya uzluksiz bo'ladi. Binobarin, γ da bu funksiyaning moduli $|f(z) - w_0|$ o'zining minimum qiymatiga erishadi. Uni μ bilan belgilaylik:

$$\mu = \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0| \quad (1)$$

Bunda μ musbat son bo'ladi: $\mu > 0$. Chunki, $\mu = 0$ bo'lsa, u holda γ da shunday z^* nuqta topilib qoladiki, $f(z^*) = w_0$ bo'ladi. Bu esa $U_\varepsilon(z_0)$ da nuqtaning z_0 dan boshqa asli bo'lmasligiga ziddir.

μ miqdordan foydalanib, ushbu $K = \{w - w_0 | < \mu\}$ doirani olamiz.

Endi $K \subset D^*$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Ravshanki,

$$f(z) - w_0 = 0 \quad (2)$$

tenglama $U_\varepsilon(z_0) = \{z - z_0 | < r\}$ doirada kamida bitta ildizga ega. Albatta, $z = z_0$ (2)

tenglamaning ildizi bo'ladi. (Ma'lumki, z_0 nuqta (2) tenglamaning n tartibli ildizi bo'lsa, unda (2) tenglamaning ildizlari soni n ta hisoblanadi).

Ixtiyoriy $w_1 \in K, (w_1 \neq w_0)$ nuqtani olib, ushbu

$$f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = 0$$

tenglamani qaraymiz. (1) munosabatga ko'ra $\gamma = \{z - z_0 = r\}$ aylanada $|f(z) - w_0| \geq \mu$ va $|w_0 - w_1| < \mu$ bo'lishini e'tiborga olib, Rushe teoremasidan foydalanib quyidagi xulosaga kelamiz:

Ushbu $f(z) - w_0 = 0$ tenglamaning $\gamma = \{z - z_0 = r\}$ aylana ichida qancha ildizlari bo'lsa, $f(z) - w_1 = 0$ tenglamaning ham shu aylana ichida shuncha ildizlari bo'ladi.

Binobarin $f(z) - w_1 = 0$ tenglama hech bo'lmaganda bitta ildizga ega. Uni z_1 deylik. Demak, $f(z_1) = w_1$. Bundan esa, $K = \{w - w_0 < \mu\}$ doiraning har bir nuqtasi $f(z)$ funksiyaning $U_\varepsilon(z_0) = \{z - z_0 < r\}$ ning biror nuqtasidagi qiymatidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

SHunday qilib, D^* to'plamdagi har bir nuqta o'zining biror atrofi bilan shu D^* ga tegishli bo'lishini topdik: $K \subset D^*$. Bu esa D^* ning ochiq to'plam ekanini bildiradi.

2) D^* bog'lamli to'plam bo'lishini isbotlaymiz. D^* to'plamga tegishli w_1 va w_2 ixtiyoriy nuqtalarni olaylik. Bu nuqtalarning D sohadagi asllaridan biri mos ravishda z_1 va z_2 bo'lsin:

$$\begin{aligned} z_1 \in D, \quad z_2 \in D, \\ w_1 = f(z_1) \in D^*, \quad w_2 = f(z_2) \in D^* \end{aligned}$$

SHartga ko'ra D sohadan iborat. Demak, z_1 va z_2 nuqtalarni birlashtiruvchi va D ga tegishli bo'lgan uzluksiz $z = z(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ egri chiziq mavjud bo'ladi.

$w = f(z)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi sababli, uning yordamida bajariladigan akslantirish $z = z(t)$ funksiya egri chiziqni w_1 va w_2 nuqtalarni birlash-tiruvchi va D^* ga tegishli bo'lgan $w = f(z(t))$ uzluksiz egri chiziqqa o'tkazadi. Bu esa D^* ning bog'lamli to'plam bo'lishini bildiradi.

SHunday qilib, D^* ning ochiq hamda bog'lamli to'plam ekanligi ko'rsatildi. Demak, D^* -soha.

Bu teorema **sohaning saqlanish printsipi** deb yuritiladi.

2. Sohaning saqlanish prinsipi yordamida amalga oshiriladigan ba'zi conform akslantirishlarga misollar

1-misol. Berilgan $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ sohaning $w = \frac{z-1}{z}$ akslantirish yordamidagi aksini toping.

◁ Bu misolni yechish uchun sohaning saqlanish printsipi va kasr-chiziqli akslantirishning doiraviylik prinsipidan foydalanamiz. $G = w(D)$ desak, $\partial D = w(\partial D)$ bo'ladi.

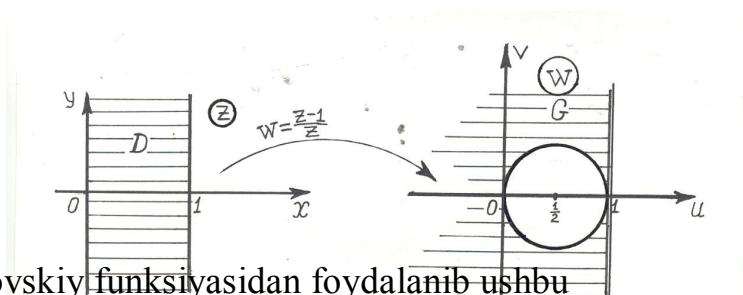
$\partial D = \{\operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = 1\}$. $z \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ va $w(0) = \infty$ bo'lgani uchun $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ to'g'ri chiziqlarning aksi to'g'ri chiziq bo'ladi. Uni topish uchun $z_1 = i$ va $z_2 = -i \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ nuqtalarni olib, ularning akslarini topamiz: $w(i) = \frac{i-1}{i} = 1+i$, $w(-i) = \frac{-i-1}{-i} = 1-i$. $\Rightarrow$ Bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq $\operatorname{Re} w = 1$. $\operatorname{Re} z = 1$ to'g'ri chiziqlarning aksi esa aylana bo'ladi, chunki bu chiziqlarning ustida $w = \frac{z-1}{z}$ funksiyani ∞ ga aylantiradigan nuqta yo'q. Uni topish uchun $w = \frac{z-1}{z}$ tenglamadan z ni topamiz:

$$z = \frac{-1}{w-1} = \frac{-1}{u+iv-1} = \frac{-1}{u-1+iv} = \frac{-(u-1-iv)}{(u-1)^2+v^2} = \frac{1-u}{(u-1)^2+v^2} + i \frac{v}{(u-1)^2+v^2}$$

Bu erdan va $\operatorname{Re} z = 1$ dan

$$\Rightarrow \frac{1-u}{(u-1)^2+v^2} = 1 \Rightarrow (u-1)^2+v^2 = 1-u \Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

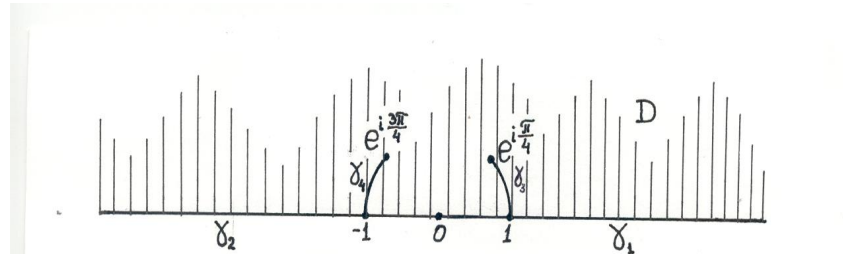
$$\text{Demak, } \partial G = \{\operatorname{Re} w = 1\} \cup \left\{\left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow G = \{\operatorname{Re} w < 1, \left|w-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\}$$



2-Misol. Jukovski funktsiyasidan foydalanib ushbu

$D = \{\operatorname{Im} z > 0, z \notin \{|z|=1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \pi\}\}$ to'plamning aksini toping.

◁ Bu masalani echish uchun birinchi navbatda D sohaning chizmasini chizib olamiz (39-chizma) va (11)-formulalardan foydalanamiz.



$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad (11)$$

Ma'lumki sohaning saqlanish printsipligiga ko'ra $w(\partial D) = \partial G$ bo'ladi. Agar

$\gamma_1 = [0, +\infty)$, $\gamma_2 = (-\infty, 0]$, $\gamma_3 = \{r = 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ va $\gamma_4 = \{r = 1, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi\}$ desak, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ bo'ladi va (11)-formulalardan foydalansak, $w(\gamma_1) = [1, +\infty)$, $w(\gamma_2) = (-\infty, -1]$, $w(\gamma_3) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ va $w(\gamma_4) = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1]$ ekanligini topamiz.

$$\Rightarrow \partial G = w(\gamma_1) \cup w(\gamma_2) \cup w(\gamma_3) \cup w(\gamma_4) = (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty).$$

Demak, $G = w(D) = \{w \notin (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}], w \notin [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)\} \triangleright$

8-Ma'ruza.

Modulning maksimumi prinsipi. Shvars lemmasi.

Reja

1. Modulning maksimum prinsipi.
2. Shvars lemmasi.
3. Shvars lemmasining umumlashmasi.

1. Modulning maksimum prinsipi.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada berilgan bo'lsin.

1-teorema. Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, uning moduli $|f(z)|$ biror z_0 ($z_0 \in D$) nuqtada maksimumga (lokal maksimumga) erishsa, u holda $f(z)$ funksiya D da o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, D sohada $f(z) \neq \text{const}$ bo'lib, u D sohani D^* ($D^* \subset \mathbb{C}_w$)

ga akslantirsin: $D^* = f(D)$. Sohaning saqlanish prinsipiga ko'ra D^* soha bo'ladi. Unda $z_0 \in D$ nuqtaning aksi $w_0 = f(z_0)$ nuqta o'zining biror atrofi $K = \{w - w_0 < \varepsilon\}$ bilan D^* sohaga tegishli bo'ladi. Bu K atrofda shunday w_1 nuqta olamizki, $|w_1| > |w_0|$ bo'lsin. w_1 nuqtaning asli z_1 nuqta ($f(z_1) = w_1$), biror $U = \{z - z_0 < r\}$ yopiq doira ichida joylashgan bo'lib, $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $f(z)$

funksiya moduli $|f(z)|$ ning z_0 nuqtada maksimumga erishishiga ziddir. Demak, D sohada $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

Bu teorema **modulning maksimumi printsipli** deyiladi. Uni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset \mathbb{C}_z$) golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $|f(z)|$ funksiya o'zining maksimum qiymatiga D sohaning chegarasi ∂D da erishadi.

Isbot. Ravshanki, $|f(z)|$ funksiya yopiq $\bar{D}$ to'plamda uzluksiz. Binobarin, u $\bar{D}$ da o'zining maksimum qiymatiga erishadi.

Agar $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa, unda $|f(z)|$ funksiya 1-teoremaga asosan D sohada maksimumga erisha olmaydi. SHuning uchun $|f(z)|$ o'zining maksimum qiymatiga ∂D da erishadi.

Agar $f(z) = \text{const}$ bo'lsa, unda $|f(z)|$ funksiya $\bar{D}$ to'plamning har bir nuqtasida maksimumga, jumladan ∂D da ham maksimumga erishadi.

Xuddi yuqoridagidek tasdiq $|f|$ ning minimumi uchun, umuman olganda, to'g'ri emas. Masalan, $f(z) = z$ funksiya $\{|z| < 1\}$ doirada golomorf va $\neq \text{const}$, lekin $|f|$ doiraning ichki $z = 0$ nuqtasida minimumga erishadi. Ammo, bu hol uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $D (D \subset \mathbb{C})$ sohada golomorf bo'lib, $\forall z \in D$

uchun $f(z) \neq 0$ bo'lsa va $|f|$ biror z_0 ($z_0 \in D$) nuqtada minimumga erishsa, u holda $f(z)$ funksiya D da o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Agar $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ deb belgilasak, unda $g(z)$ funksiya D sohada golomorf bo`lib,  $|g|$   $z_0$  nuqtada maksimumga erishadi. Unda 1-teoremaga ko`ra $g(z) \equiv \text{const} \Rightarrow f(z) \equiv \text{const}$

2. Shvars lemmasi.

Modulning maksimum printsiptan foydalanib quyidagi muhim lemma isbotlanadi.

SHvars lemmasi. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $U = \{z \mid |z| < 1\}$ doirada golomorf bo`lib,  $f(0) = 0$  va  $\forall z \in U$  da  $|f(z)| \leq 1$  bo`lsin.

U holda $\forall z \in U$ da ushbu

$$|f(z)| \leq |z|$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi. Agar U doiraning biror $z \neq 0$ nuqtasida $|f(z)| = |z|$ tenglik o`rinli bo`lsa, funksiya quyidagi $f(z) = e^{i\alpha} z$, ($\alpha \in R$) ko`rinishga ega bo`ladi.

Isbot. Berilgan $f(z)$ funksiya yordamida ushbu

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

funksiyani hosil qilamiz. SHartga ko`ra  $f(0) = 0$  ekanligidan  $g(z)$  funksiya  $U = \{z \mid |z| < 1\}$  da golomorf bo`ladi.

Endi ixtiyoriy $U_r = \{z \mid |z| < r\}$, $r < 1$ doirani qaraymiz. Ravshanki, $U_r \subset U$ YUqorida isbot etilgan 2-teoremaga ko`ra  $g(z)$  funksiyaning moduli  $|g(z)|$  bu  $U_r$  doira chegarasi  $\partial U_r = \{z \mid |z| = r\}$ , ( $r < 1$ ) da o`zining maksimum qiymatiga erishadi.

Ayni paytda ∂U_r da

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

bo`ladi.

Demak, $\forall z \in U_r$ da

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikda, z ni tayinlab, $r \rightarrow 1$ da limitga o'tib topamiz.

$$|g(z)| \leq 1$$

Bundan esa $\forall z \in U_r$ uchun $|f(z)| \leq |z|$ bo'lishi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $z \in U$ uchun uni o'z ichiga oluvchi U_r , $r < 1$, doira har doim mavjud bo'lganligi sababli $|f(z)| \leq |z|$ tengsizlik barcha $z \in U$ lar uchun bajariladi.

Agar biror $z_0 \in U$ nuqtada $|f(z_0)| = |z_0|$ bo'lsa, u holda $|g(z)|$ funksiya shu nuqtada maksimum qiymati

$$|g(z_0)| = 1$$

ga erishib, $g(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi. Bundan esa, $g(z) = e^{ia}$, ($a \in \mathbb{R}$), ya'ni $f(z) = e^{ia}z$, ($a \in \mathbb{R}$), bo'lishi kelib chiqadi.

3. Shvars lemmasining umumlashmasi.

Konform akslantirishlardan foydalanib, SHvars lemmasining quyidagi umumlashmasini hosil qilamiz.

3-teorema (Shvars lemmasining umumlashmasi).

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $U_r = \{z \mid |z| < r\}$ doirada holomorfl bo'lib, biror $z_0 \in U_r$ nuqtada $f(z_0) = 0$ bo'lsin. Agar $\forall z \in U_r$ da $|f(z)| \leq M$ bo'lsa, unda $\forall z \in U_r$ da ushbu

$$|f(z)| \leq Mr \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \overline{z_0}z|}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(Agar bu teoremda $r = M = 1$ va $z_0 = 0$ bo'lsa SHvarts lemmasi kelib chiqadi.)

Isbot. U_r doirani birlik U doiraga konform akslantiruvchi kasr chiziqli akslantirishni topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{z}{r}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_1^0}{1 - \overline{\lambda_1^0} \cdot \lambda_1} = \frac{\frac{z}{r} - \frac{z_0}{r}}{1 - \frac{\overline{z_0}}{r} \cdot \frac{z}{r}} = r \cdot \frac{z - z_0}{r^2 - \overline{z_0}z}.$$

Demak,

$$\lambda = r \cdot \frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z} : U_r \rightarrow U$$

Bu akslashtirishga teskari bo'lgan

$$\lambda^{-1} : U \rightarrow U_r$$

akslantirishni olamiz va

$$\varphi = \frac{1}{M} f \circ \lambda^{-1}$$

deb belgilaymiz. Bu funksiya birlik doira U da oddiy SHvarts lemmasining shartlarini qanoatlantiradi. $\forall z \in U$ da

$$|\varphi(z)| \leq |z|$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikda z ni $\lambda(z)$ bilan almashtiramiz.

$$|\varphi(\lambda(z))| \leq |\lambda(z)| \Rightarrow \frac{1}{M} |f(z)| \leq |\lambda(z)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq M \cdot |\lambda(z)| \Rightarrow |f(z)| \leq M \cdot r \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|}.$$

9-ma'ruza.

Kompaktlik prinsipi

Reja.

1. Tekis chegaralangan funksiyalar sistemasi.
2. Tekis darajada uzluksiz funksiyalar sistemasi
3. Kompakt sistemalar. Kompaktlik prinsipi.

1. Tekis chegaralangan funksiyalar sistemasi.

$D \subset \mathbb{C}$ sohada aniqlangan funksiyalardan iborat $\{f(z)\}$ funksiyalar sistemasi

berilgan bo'lib, K to'plam D sohada joylashgan chegaralangan yopiq (kompakt) to'plam bo'lsin: $K \subseteq D$

1-ta'rif. Agar $\forall K \subseteq D$ uchun shunday o'zgarmas son $M = M(K)$ topilsaki, $\{f(z)\}$ sistemaning har bir $f(z)$ funksiyasi uchun ixtiyoriy $z \in K$ da

$$|f(z)| \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, unda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis chegaralangan deyiladi.

1-teorema. Agar D sohada golomorf funtsiyalardan iborat $\{f(z)\}$ sistema D da tekis chegaralangan bo'lsa, u holda funksiya hosilalaridan iborat $\{f'(z)\}$ sistema ham D sohada tekis chegaralangan bo'ladi.

Isbot. D sohada kompakt joylashgan ixtiyoriy

$$U = \{z - z_0 < r\} \quad (U \subseteq D)$$

doirani olib, radiusi $r', r' > r$ bo'lgan va ayni paytda D sohada kompakt joylashgan ushbu

$$V = \{z - z_0 < r'\} \quad (V \subseteq D)$$

doirani qaraymiz.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\{f(z)\}$ sistemaning ixtiyoriy funksiyasi bo'lsin. $\forall z \in V$ da funksiyaning hosilasi $f'(z)$ Koshi formulasiga ko'ra

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \quad (1)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $z \in U$ bo'lsa, unda $\forall t \in \partial V$ uchun $|t-z| \geq r'-r$ tengsizlik bajariladi.

Endi $\{f(z)\}$ sistemaning tekis chegaralanganligini e'tiborga olib $\forall z \in U$ uchun (1) munosabatdan topamiz:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leq \frac{r'}{(r'-r)^2} M(V) = M_1(U).$$

Bu esa $\{f'(z)\}$ sistemaning U doiralarda tekis chegaralanganligini bildiradi.

Ma'lumki, D sohadagi kompakt K to'plamni ($K \subset D$) shu sohada kompakt joylashgan doiralarda sistemasi $\{U\}$ bilan qoplash mumkin. Geyne-Borel teoremasiga binoan bu $\{U\}$ sistemadan K to'plamni qoplovchi chekli sondagi $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k$ doiralarni ajratish mumkin.

Agar

$$M_1(K) = \max_i M_1(U_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

deyilsa, unda $\forall z \in K$ va $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f'(z)| \leq M_1(K)$ bo'ladi.

2. Tekis darajada uzluksiz funksiyalar sistemasi

2-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son va $\forall K (K \subset D)$ to'plam uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ topilsaki, $|z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $z', z'' \in K$ va $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajada uzluksiz deyiladi.

2-teorema. Agar D sohada golomorf $\{f(z)\}$ sistema D da tekis chegaralangan bo'lsa, u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajali uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, ixtiyoriy kompakt $K \subseteq D$ bo'lsin. Teoremaning shartiga binoan, $\forall z \in K, \forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f(z)| < M(K)$ bo'ladi.

Endi K va ∂D to'plamlar orasidagi masofa ρ bo'lsin;

$$\inf |t - z| = \rho, \quad (\forall z \in K, \forall t \in \partial D).$$

SHuningdek, markazi $z \in K$ nuqtalarda bo'lgan $\left\{|\xi - z| < \frac{\rho}{2}\right\}$ doiralarning birlashmasini quyidagicha belgilaymiz:

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z \in K} \left\{|\xi - z| < \frac{\rho}{2}\right\}$$

Ravshanki, bu to'plam D sohada kompakt joylashgan bo'ladi: $K^{(\rho)} \subseteq D$. Unda 1-teoremaga muvofiq shunday o'zgarmas M topiladiki, $\forall z \in K^{(\rho)}$ va $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f'(z)| \leq M$ bo'ladi.

Endi $|z' - z''| < \frac{\rho}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va K to'plamga tegishli ixtiyoriy z' va z'' nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi $[z', z''] \subset K^{(\rho)}$ to'plamga tegishli bo'lib, $\forall z \in [z', z'']$ hamda $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f'(z)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$|f(z') - f(z'')| = \left| \int_{[z', z'']} f'(z) dz \right| \leq \int_{[z', z'']} |f'(z)| |dz| \leq M \cdot |z' - z''|$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta = \min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ deyilsa, unda $|z' - z''| < \delta$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $z', z'' \in K$ va ixtiyoriy $f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\{f(z)\}$ sistemaning D sohada tekis darajada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

3. Kompakt sistemalar. Kompaktlik prinsipi.

3-ta`rif. Agar $\{f(z)\}$ sistemadagi har bir $f_n(z)$ funksiyalar ketma-ketligidan D sohadagi kompakt K to'plamda tekis yaqinlashuvchi qismaniy $f_{n_k}(z)$ ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada kompakt sistema deyiladi.

3-teorema(Montel). Agar D sohada golomorf bo'lgan $\{f(z)\}$ funksiyalar sistemasi D sohada tekis chegaralangan bo'lsa, unda u D da kompakt sistema bo'ladi.

Isbot. E to'plam D ga qism bo'lib ($E \subset D$), u hamma erda zich to'plam bo'lsin, ya'ni $\bar{E} \supset D$.

Aytaylik, $f_n(z) \in \{f(z)\}$ ketma-ketlik $\forall z \in E$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda bu $f_n(z)$ ketma-ketlik D sohadagi ixtiyoriy kompakt K to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. SHuni isbotlaymiz.

$\varepsilon > 0$ son va K ($K \subset \subset D$) to'plamni tayinlaymiz. SHartga ko'ra $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis chegaralangan. Binobarin, u 2-teoremaga ko'ra D sohada tekis darajada uzluksiz bo'ladi.

D sohani tomonlari koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvi $\{(d_i)\}$ kvadratlarga ajratamiz. $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajada uzluksiz bo'lgani uchun D sohaning bu bo'laklanishini shunday kichik qilib olish mumkinki, K to'plamga tegishli bo'lgan har qanday z', z'' nuqtalar ($z', z'' \in K$) bitta (d_i) kvadratga tegishli bo'lganda, $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

bo'ladi.

Ayni paytda bunday kvadratlarning chekli $(d_1), (d_2), \dots, (d_p)$ sondagisi K to'plamni qoplaydi.

E to'plam D ning hamma erida zich. Binobarin, har bir (d_i) ($i = 1, 2, \dots, p$) kvadratda $z_i \in E$ bo'lgan nuqta topiladi. $f_n(z)$ ketma-ketlik E to'plamda

yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, $\frac{\varepsilon}{3}$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ va $z_i (i=1,2,\dots,p)$ da

$$|f_m(z_i) - f_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

tengsizlik bajariladi.

Aytaylik, z nuqta K to'plamga tegishli bo'lgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqta albatta yuqorida aytilgan kvadratlarning biri (d_i) ga tegishli bo'ladi. Ayni paytda shu (d_i) kvadratga tegishli bo'lgan $z_i \in E$ nuqta mavjud bo'ladi. Shularni hamda (2) v (3) munosabatlarni e'tiborga olib, $n > n_0$, $m > n_0$ bo'lganda

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_n(z_i)| + |f_m(z_i) - f_n(z_i)| + \\ &+ |f_n(z_i) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'lishni topamiz. Bu esa $f_n(z)$ ketma-ketlikning K to'plamda tekis yaqinlashishini bildiradi.

Endi ixtiyoriy $f_n(z) \subset \{f(z)\}$ ketma-ketlikdan D sohaga tegishli va uning hamma erida zich bo'lgan E to'plam ($E \subset D$) nuqtalarida yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatamiz.

E to'plam sifatida D sohaning x va y koordinatalari ratsional sonlar bo'lgan $z = x + iy$ nuqtalari to'plamini olamiz.

$$E = \{z = x + iy \in D : x \in Q, y \in Q\}$$

Ravshanki, bu E to'plam sanoqli va D ning hamma erida zich bo'ladi. Demak,

$$E = (z_1, z_2, z_3, \dots)$$

$f_n(z_1)$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi. Binobarin, undan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Uni

$$f_{k1} = f_{n_k}, (k=1,2,3,\dots)$$

deylik. $f_{n1}(z_2)$ ketma-ketlik chegaralangan. Undan ham yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Uni

$$f_{k2} = f_{n_{k1}}, (k=1,2,3,\dots)$$

deylik.

Bunda $f_{n2}(z)$ funktsional ketma-ketlik hech bo'lmaganda z_1 va z_2 nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi.

$f_{n2}(z_3)$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, undan yaqinlashuvchi

$$f_{k3} = f_{n_{k2}}, (k=1,2,3,\dots)$$

ketma-ketlikni ajratish mumkin bo'ladi. Bunda $f_{n3}(z)$ funktsional ketma-ketlik hech bo'lmaganda z_1 , z_2 va z_3 nuqtalarda yaqinlashuvchi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$\begin{aligned} &f_{11}(z), f_{21}(z), f_{31}(z), \dots, f_{n1}(z), \dots \\ &f_{12}(z), f_{22}(z), f_{32}(z), \dots, f_{n2}(z), \dots \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ f_{1n}(z), f_{2n}(z), f_{3n}(z), \dots, f_{nn}(z), \dots \\ \dots\dots\dots \end{matrix}$$

funksional ketma-ketliklar hosil bo'ladi. Uning diogonallarida turganlaridan tuzilgan

$$f_{11}(z), f_{22}(z), f_{33}(z), \dots, f_{nn}(z), \dots$$

funksional ketma-ketlik ixtiyoriy $z_i \in E$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

SHunday qilib $f_n(z) \subset \{f(z)\}$ ketma-ketlikdan $K \subseteq D$ da tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratilishi ko'rsatildi. Demak, $\{f(z)\}$ sistema D sohada kompakt bo'ladi. ►

Odatda bu teorema kompaktlik printsipli deyiladi. Endi kelgusida kerak bo'ladigan ba'zi tushunchalarni keltiramiz, tasdiqlarni esa bayon etamiz.

Aytaylik D sohada $\{f(z)\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar har bir $f(z) \subset \{f(z)\}$ ga biror qonunga ko'ra bitta kompleks

son $I(f)$ mos qo'yilgan, ya'ni $I: \{f(z)\} \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lsa, u holda $\{f(z)\}$ da funksional berilgan deyiladi.

Agar ixtiyoriy $K \subseteq D$ da $f_0(z) \in \{f(z)\}$ ga tekis yaqinlashadigan $\forall f_n(z) \in \{f(z)\}$ olinganda ham,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = I(f_0)$$

bo'lsa, u holda I funksional $\{f(z)\}$ da uzluksiz deyiladi.

Misol. D sohada golomorf bo'lgan barcha funksiyalardan iborat $\{f(z)\}$ sistemani va ixtiyoriy $a \in D$ nuqtani olaylik. Ma'lumki, $f(z) \in \{f(z)\}$ funksiyaning a nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasining n -koeffitsienti

$$c_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

bo'ladi. Bu $\{f(z)\}$ da aniqlangan funksional bo'ladi. Bu $I = s_n(f)$ funksional $\{f(z)\}$ da uzluksiz bo'ladi.

5-ta'rif. Agar har bir $K \subseteq D$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi $f_n(z) \in \{f(z)\}$ ketma-ketlikning limiti $\{f(z)\}$ sistemaga tegishli bo'lsa unda $\{f(z)\}$ sistema o'zida kompakt sistema deyiladi.

4-teorema. O'zida kompakt sistema $\{f(z)\}$ da berilgan har qanday uzluksiz funksional I chegaralangan va o'zining aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya'ni shunday $f_0 \in \{f(z)\}$ funksiya topiladiki, ixtiyoriy $f(z) \in \{f(z)\}$ da

$$|I(f_0)| \geq |I(f)|$$

bo'ladi.

10-ma'ruza.
Riman teoremasi.
Reja.

1. Riman teoremasi.

Ma'lumki, konform akslantirishlar nazariyasi-ning muhim masalalaridan biri

$\mathbb{C}_z$ kompleks tekislikdagi sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi sohaga o'tkazuvchi konform

akslantirishning mavjudligini ko'rsatishdan iborat.

Konform akslantirishlar nazariyasining asosini quyidagi teorema tashkil qiladi.

Teorema (Riman). Kengaytirilgan kompleks tekislikdagi D soha quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1) D bir bo'lamli soha bo'lsin;
- 2) D sohaning chegarasi ikkita nuqtadan kam bo'lmasin.

U holda D sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi birlik doiraga o'tkazuvchi konform akslantirish

mavjud.

Isbot. Bu teoremani bosqichma-bosqich isbotlaymiz.

1. D sohada moduli birdan kichik bo'lgan golomorf va bir varaqli funksiya mavjudligini isbotlaymiz.

Agar D chegaralangan soha bo'lsa, ravshanki bunday funksiya mavjud bo'ladi.

Masalan, $f(z) = z/R$, bu erda R soni D sohani o'zida saqlovchi doiraning radiusi $D \subset \{ |z| < R \}$

Agar D chegaralanmagan soha bo'lib, uning tashqarisida z_0 nuqta va $\{ |z - z_0| < \rho \}$ doira mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

funksiya D sohada moduli bo'yicha chegaralangan

$$\left(|f(z)| < \frac{1}{\rho}, \quad z \in D \right)$$

golomorf va bir varaqli funksiya bo'ladi.

Aytaylik, D chegaralanmagan soha bo'lib, u tashqi nuqtaga ega bo'lmasin. Teoremaning shartiga ko'ra D sohaning hech bo'lmaganda ikkita turli α va β chegaraviy nuqtalari mavjud:

$$\alpha \in dD, \quad \beta \in dD.$$

Ushbu

$$F(z) = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$$

funksiyani qaraylik. Bu $F(z)$ funksiya D sohadagi ixtiyoriy yo'l bo'yicha analitik davom ettiriladi. D bir bo'klamli soha bo'lganligidan monodromiya haqidagi teoremaga binoan bu funksiyaning ikkita $F_1(z)$ va $F_2(z)$ bir qiymatli tarmoqlari bo'lib, ular D sohada bir-birlaridan ishorasi bilan farq qiladi: $F_1(z) = -F_2(z)$. Ayni paytda, $F_1(z)$ va $F_2(z)$ bir varaqli funksiyalar bo'ladi. Haqiqatdan ham $F_1(z_1) = F_1(z_2)$, $F_2(z_1) = F_2(z_2)$ tengliklardan

$$\sqrt{\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta}} = \sqrt{\frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}},$$

ya'ni

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$$

bo'lib, undan kasr-chiziqli funksiyaning bir varaqli ekanligiga asosan $z_1 = z_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

$F(z)$ funksiyaning $F_1(z)$ va $F_2(z)$ tarmoqlari D sohani mos ravishda

$$D_1 = F_1(D), \quad D_2 = F_2(D)$$

sohalarga konform akslantiradi. Bu D_1 va D_2 sohalar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi, chunki agar $z_1, z_2 \in D$ nuqtalarda $F_1(z_1) = F_2(z_2)$ bo'lib qoladigan bo'lsa, unda yuqorida aytilganlarga ko'ra $z_1 = z_2 = z$ bo'lib, $F_1(z_1) = -F_2(z_2)$ bo'ladi. Bu esa $F_1(z) \neq 0$, $F_2(z) \neq 0$ bo'lishiga ziddir.

Demak, D_2 sohaning har bir w_0 nuqtasi D_1 soha uchun tashqi nuqta bo'lib, shunday $\{|w - w_0| < \rho\}$ doira topiladiki, D sohada $F_1(z)$ funksiyaning qiymatlari bu doiraga tegishli bo'lmaydi. Unda

$$f_1(z) = \frac{\rho}{F_1(z) - w_0}$$

funksiya D sohada golomorf hamda bir varaqli bo'lib, $\forall z \in D$ da $|f_1(z)| < 1$ bo'ladi.

SHunday qilib, barcha hollarda D sohada moduli birdan kichik bo'lgan golomorf va bir varaqli funksiyaning mavjudligini ko'rsatdik.

2) D sohada, modul bo'yicha birdan kichik bo'lgan golomorf hamda bir varaqli funksiyalar sistemasini (to'plamini) S deylik: $S = \{f(z)\}$.

Ravshanki, $S \neq \emptyset$, chunki, $f_1(z) \in S$. Montel teoremasiga ko'ra S sistema D sohada kompakt bo'ladi. $f_1(z)$ funksiya D sohada bir varaqli bo'lgani uchun tayinlangan $a \in D$ nuqtada $f_1'(a) \neq 0$ bo'ladi.

Endi S funksiyalar sistemasidan

$$|f'(a)| \geq |f_1'(a)| > 0 \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalarni olib, ulardan iborat to'plamni S_1 deylik. Ravshanki, $S_1 \subset S$. Bu S_1 funksiyalar sistemasi o'zida kompakt bo'ladi. Haqiqatdan ham, D sohada kompakt joylashgan ixtiyoriy K to'plamda yaqinlashuvchi

$\{f_n(z)\} \subset S_1$ funktsional ketma-ketlikning limiti, bir varaqli funksiya bo'ladi. Binobarin, u S_1 sistemaga tegishli ($\{f_n(z)\}$ ketma-ketlik limitining o'zgarmas bo'lolmasligi (1) munosabatdan ko'rinadi).

Endi S_1 da ushbu

$$I(f) = |f'(a)|$$

funktsionalni qaraymiz. Bu funktsional 9-ma'ruzadagi 4-teoremaning shartlarini qanoatlantiradi. Unda shu teoreмага binoan, shunday $f_0(z) \in S_1$ funksiya topiladiki, barcha $f(z) \in S_1$ uchun

$$|f'(a)| \leq |f_0'(a)| \quad (2)$$

bo'ladi.

SHunday qilib, S sistemadagi ajratilgan o'zida kompakt S_1 funksiyalar sistemasida aniqlangan funktsional yordamada a nuqtada "cho'zilishi" eng katta bo'lgan $f_0(z)$ funksiyaning mavjud bo'lishi ko'rsatildi.

3). YUqorida topilgan $w = f_0(z)$ funksiya D sohani birlik doira U ga konform akslantiradi, chunki $f_0(z) \in S_1$. Bu funksiyaning a nuqtadagi qiymati 0 ga teng bo'ladi: $f_0(a) = 0$. Haqiqatdan ham, agar $f_0(a) \neq 0$ bo'lsa, unda S_1 sistemasidagi ushbu

$$g(z) = \frac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)} \cdot f_0(z)}$$

funksiya uchun

$$\begin{aligned} |g'(a)| &= \\ &= \left| \frac{f_0'(z)[1 - \overline{f_0(a)} \cdot f_0(z)] + [f_0(z) - f_0(a)] \cdot \overline{f_0(a)} \cdot f_0'(z)}{(1 - \overline{f_0(a)} \cdot f_0(z))^2} \right|_{z=a} = \\ &= \frac{1}{1 - |f_0(a)|^2} \cdot |f_0'(a)| > |f_0'(a)| \end{aligned}$$

bo'lib, (2) munosabatga zid natijaga ega bo'lamiz.

Demak, $f_0(a) = 0$, ya'ni $w = f_0(z)$ akslantirish $a \in D$ nuqtani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi

$w = 0$ nuqtaga akslantiradi.

Endi bu $w = f_0(z)$ funksiyaning D sohani birlik doira U ga to'la akslantirishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $w = f_0(z)$ funksiya D sohada birlik doira U dagi birorta b qiymatni qabul qilmasin. $f_0(a) = 0$, bo'lgani uchun $b \neq 0$ bo'ladi. Ayni paytda $f_0(z)$ funksiya D sohada $b^* = \frac{1}{b}$ qiymatni ham qabul qila olmaydi, chunki $|b^*| > 1$.

Ushbu

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}$$

funksiyani qaraylik. Monodromiya haqidagi teoremdan foydalanib $\psi(z)$ funksiyani S ga tegishli bo'lgan bir qiymatli tarmoqini ajratish mumkin. Bu funksiyani bir varaqli bo'lishi 1)-dagidek ko'rsatiladi. Ravshanki, $|\psi(z)| \leq 1$ bo'ladi.

Ayni paytda quyidagi

$$h(z) = \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)} \cdot \psi(z)}$$

funktsiya ham S sistemaga tegishli bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$|h'(a)| = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} |f_0'(a)|.$$

$|b| < 1$ bo'lganligidan $1 + |b| > 2\sqrt{|b|}$ bo'lib,

$$|h'(a)| > |f_0'(a)|$$

bo'ladi. Bu esa (2) munosabatga ziddir. Demak, $w = f_0(z)$ funksiya $D \subset \bar{C}_z$ sohani

$\mathbb{C}_w$ tekislikdagi birlik doira U ga konform akslantiradi. ►

Natija: Chegarasi 2 ta nuqtadan kam bo'lmagan $\forall D_1$ va D_2 bir bo'lamli sohalar konform ekvivalent bo'ladi.

Isbot. $U = \{z \mid |z| < 1\}$ birlik doira bo'lsin. Riman teoremasiga ko'ra $f_1 : D_1 \rightarrow U$ va $f_2 : D_2 \rightarrow U$ konform akslantirishlar mavjud. $\Rightarrow \varphi_1 = f_2^{-1} \circ f_1 : D_1 \rightarrow D_2$ va $\varphi_2 = f_1^{-1} \circ f_2 : D_2 \rightarrow D_1$ akslantirishlar ham konform. $\Rightarrow D_1$ va D_2 sohalar konform ekvivalent.

Eslatma. Riman teoremasining sharti muhimdir. U bajarilmaganda teoremaning xulosasi o'rinli bo'lmasdan qolishi mumkin.

Aytaylik, D sohaning chegarasi bitta ζ nuqtadan iborat bo'lsin. Agar $\zeta \neq \infty$ bo'lsa, uni ushbu

$$t = \frac{1}{z - \zeta}$$

konform akslantirish bilan ∞ ga o'tkazish mumkin. Bunda D soha ochiq tekislikka aylanadi. Uni birlik doiraga konform akslantiruvchi $w = f(z)$ funksiya ochiq tekislikda golomorf bulishi lozim. Bu holda $f(z)$ butun funksiya bo'lib, $|f(z)| < 1$ bo'ladi. Liuvill teoremasiga ko'ra,

$f(z) \equiv \text{const}$ bo'lib, funksiya ochiq tekislikni bitta nuqtaga akslantiradigan bo'lib qoladi. Demak, chegarasi bitta nuqtadan iborat bo'lgan D sohani birlik doiraga konform akslantirib bo'lmaydi

11-ma'ruza

Modul maksimumini minimallashtirish

Reja

1. Sohaning konformlik radiusi. Modulning maksimumini minimallashtirish

2. Lindelef prinsipi

3. Yuzalarni minimallashtirish.

Riman teoremasidan quyidagi izohlarni keltirishimiz mumkin:

Birinchidan chegarasi ikki nuqtadan kam bo'lmagan bir bog'lamli B sohada golomorf, chekli $z_0 \in B$ nuqtada $F(z_0)=0$, $F'(z_0)=1$ shartlar bilan normallangan va B sohani markazi $\xi=0$ nuqtada bo'lgan doiraga bir yaproqli akslantiruvchi yagona $\xi=F(z)$ funksiya mavjud (Riman teoremasini boshqacha varianti)

Haqiqatdan bu $F(z)=\frac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$ funksiya bo'ladi, bunda $f_0(z)$ funksiya

$f_0(z_0)=0$, $f'_0(z_0)>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya Riman teoremasida ko'rsatilgan funksiya bo'lib, shu bilan birga $\xi=F(z)$ funksiya B sohani

akslantiruvchi doira radiusi $R=\frac{1}{f'_0(z_0)}$ ga teng bo'ladi.

Agar yana bitta $\xi=F_1(z)$, $F_1(z_0)=0$, $F'_1(z_0)=1$ B sohani $|\xi|<R_1$ ga akslantiruvchi funksiya mavjud bo'lsa, u holda Riman teoremasiga ko'ra

$\frac{F_1(z)}{R_1}=f_0(z)$ ga ega bo'lar edik, va binobarin $\frac{1}{R_1}=f'_0(z_0)$, ya'ni

$F_1(z)=\frac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}=F(z)$ bu esa $\xi=F(z)$ funksiyaning yagonaligini isbotlaydi.

Ikkinchidan Riman teoremasi isboti asosida B sohani doiraga bir yaproqli akslantiruvchi funksiylarning ko'plab ekstremal xossalaridan bittasi yotadi. Bunday funksiylarning ekstremal xossalari qatori faqat bir yaproqli funksiylar sinfiga emas, balki yuqorida ko'rilgandek tegishlicha normallangan barcha

golomorf funksiyalar sinfida ham o'rinli ekan. Bu yerda shu tipdagi 2 ta ekstremal xossani keltiramiz.

Sohaning konformlik radiusi. Modulning maksimumini minimallashtirish

D sohaning konformlik radiusi deb

$$R = \frac{1}{f'_0(z_0)}$$

ga aytiladi, bu yerda $f_0(z) - D$ sohada golomorf va $f_0(z_0) = 0$, $f'_0(z_0) > 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya.

Teorema: $z = 0$ nuqtani o'z ichida saqlovchi bittadan ortiq chegaraviy nuqtaga ega bir bog'lamli D sohada golomorf va $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar oilasida

$$M(F) = \sup_{z \in D} |F(z)|$$

qiymatning minimumi D sohani $\{|z| < R\}$ to'la doiraga bir varaqli akslantiruvchi yagona funksiyaning beradi, shu bilan birga bu minimum D sohaning $z = 0$ nuqtadagi R konformlik radiusiga teng bo'ladi.

Teorema isboti: Haqiqatan, $\xi = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ funksiya D sohani $\{|\xi| < 1\}$ doiraga bir varaqli akslantiruvchi funksiya, $z = \varphi(\xi)$ uning teskari funksiyasi bo'lsin. $M(F)$ qiymatning minimumini topishda chekli $M(F)$ qiymatga ega bo'lgan $F(z)$ funksiyalar oilasini qarash yetarli.

Quyidagi mos funksiyalarni qaraymiz:

$$\psi(\xi) = \frac{F(\varphi(\xi))}{M(F)}$$

Bu funksiyalar $\{|\xi| < 1\}$ doirada golomorf va $\psi(0) = 0$ va $|\psi(\xi)| < 1$, $|\xi| < 1$ shartlarni qanoatlantiradi. Shvarts lemmasiga ko'ra

$$|\psi'(0)| \leq 1$$

ga ega bo'lamiz, ya'ni

$$M(F) \geq \frac{1}{f'(0)} = R$$

Shu bilan birga tenglik belgisi faqat $\psi(\xi) \equiv \xi$, ya'ni $F(z) = c \cdot f(z)$, $c = \frac{1}{f'(0)}$

funksiyalar uchun o'rinli. Bu teoremani isbotlaydi.

Yuqorida isbotlangan akslantiruvchi funksionalning ekstremal xossasidan D sohaning R konformlik radiusining bir nechta xossalari kelib chiqadi.

Birinchidan, D sohani kengaytirish bilan uning konformlik radiusi kamaymaydi, chunki $\{F(z)\}$ funksiyalar oilasi bunda kichrayadi.

Ikkinchidan, $M(z)$ $z=0$ nuqtadan D sohaning chegaraviy nuqtasigacha bo'lgan masofalarning maksimumiga tengligidan D sohaning konformlik radiusi bu maksimumdan oshib ketmaydi. Boshqa tomondan agar R - bunday masofalarning minimumidan kichik bo'lsa, u holda $F(z)$ funksiya biror $\varepsilon > 0$ sonli

$$|z| < R + \varepsilon$$

doirada golomorf, $F(0) = 0$ va $|z| < R + \varepsilon$ da $F(z) < R$ qanoatlantirgan bo'lar edi.

Shvarts lemmasiga ko'ra

$$|F'(0)| \leq \frac{R}{R + \varepsilon} < 1$$

ga ega bo'lar edik. Bu esa $F'(0) = 1$ ga zid. Bu yuqorida ko'rib o'tilgan bilan shuni ko'rsatdikki, $|z| = R$ aylana ustida hamisha D sohaning chegaraviy nuqtalari bor.

Lindelef prinsipi

Agar $\varphi_1(\xi)$ va $\varphi_2(\xi)$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ funksiyalar $\{|\xi| < 1\}$ doirada golomorf, $\varphi_1(\xi)$ va $\varphi_2(\xi)$ funksiyalar birlik doirani mos ravishda D_1 va D_2 sohalarga akslantirsa, shu bilan birga D_1 soha D_2 sohada yotsa, u holda

$$|\varphi_1'(0)| \leq |\varphi_2'(0)|$$

tengsizlik o'rinli vaa faqat va faqat $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\varepsilon\xi)$, $|\varepsilon| = 1$ da bajariladi.

Isboti: Haqiqatan, agar $\zeta = f_2(z)$ funksiya $z = \varphi_2(\xi)$ funksiyaga teskari funksiya bo'lsa, u holda $z = f_2(\varphi_1(\xi))$ funksiya $|\xi| < 1$ doirani $|z| < 1$ doira ichida yotuvchi sohaga akslantiradi va shu bilan birga $\xi = 0$ nuqta $z = 0$ ga o'tadi. Binobarin, Shvarts lemmasiga ko'ra,

$$\left| \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} \right| \leq 1$$

va tenglik faqat va faqat $f_2(\varphi_1(\xi)) = \varepsilon \xi, |\varepsilon| = 1$ ya'ni $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\varepsilon \xi)$ bo'lgan holdagina bajariladi. Isbotlandi.

Lindelef prinsipidan xususan soha kengayishi bilan uning konformlik radiusining o'sishi kelib chiqadi.

Yuzalarni minimallashtirish

Teorema. $z = 0$ nuqtani o'zida saqllovchi va bittadan ortiq chegaraviy nuqtaga ega bir bog'lamli B sohada golomorf va $F(0) = 0, F'(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $F(z)$ funksiyalar oilasida

$$U(F) = \iint_B |F'(z)|^2 d\sigma \quad (1)$$

qiymatning U minimumi D sohani $|z| < R$ to'liq doiraga bir yaproqli akslantiruvchi funksiyani beradi va u yagona bo'ladi, bu yerda $d\sigma$ – yuza elementi [Bu minimum B sohaning $z = 0$ nuqtadagi konformlik radiusiga teng]

Isboti. Bu yerda B sohadan olingan (1) integral B sohani qoplovchi, ya'ni $\overline{B_n} \subset B, B_n \subset B_{n+1}$ va biror n nomerdan boshlab istalgan yopiq $E \subset B$ to'plam B_n da yotish shartini qanoatlantiradigan barcha $B_n, n = 1, 2, \dots$ sohalar bo'yicha olingan integrallarning limiti sifatida qaraladi.

(1) integralning qiymati B ni qoplovchi B_n sohalarni tanlab olishiga bog'liq emas.

B_n sifatida B sohani birlik doiraga akslantiruvchi $z=0$ nuqtani $\xi=0$ nuqtaga o'tkazadigan bir yaproqli akslantirishda $|\xi|<r_n$, $r_n<1$ doiralarning aslini olish mumkin.

$F(z)$ bir yaproqli funksiya bo'lgan holda (1) integral $\xi=F(z)$ akslantirishda B soha aksining yuzini beradi.

$F(z)$ funksiya B da bo'lmagan holda (1) integral B sohani $\xi=F(z)$ yordamida bir qiymatli akslantirilgan Riman sirtining yuzini beradi.

(1) integral minimumini izlashda chekli $U(F)$ ga ega $F(\xi)=R$ funksiyalarni qarash yetarli. Shunday $\xi=F(z)$ va $z=\varphi(\xi)$ larni olib (modulning minimum shartidagi kabi) (1) integralda $\xi=re^{i\varphi}$ o'zgaruvchi almashtiramiz.

$$U(F) = \iint_{|\xi|<1} |F'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)|^2 r dr d\varphi =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \iint_{|\xi|<\rho} |F'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)|^2 r dr d\varphi.$$

$$F'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n, \quad a_0 = \varphi'(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

deb olib

$$U(F) = \pi \lim_{\rho \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2 \rho^{2n+2}}{n+1} \geq \pi |a_0|^2$$

ga ega bo'lamiz, ya'ni $U(F) \geq \pi |a_0|^2$, shu bilan birga tenglik belgisi faqat

$a_1 = a_2 = \dots = 0$ da o'rinli, ya'ni $F(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$ funksiya uchun o'rinli. Bu esa

tasdiqni isbotlaydi.

12-ma'ruza

Konform akslantirishda chegaralar mosligi prinsipi

Sohalarni konform akslantirishi haqida gapirilganda, hamisha bu sohalarni ichki nuqtalari o'rtasidagi o'zaro bir qiymatli moslikka ega bo'linadi. Ko'pgina savollarda esa akslantiruvchi funksiyalarni soha chegarasi yaqinidagi xossalarini bilish zarur bo'ladi.

Konform akslantirishlar nazariyasida quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema. Agar $w = f(z)$ funksiya G sohani D sohaga konform akslantirsa, u holda z nuqta G soha chegarasiga intilganda $w = f(z)$ D soha chegarasiga intiladi.

Bu teoremada z nuqtaning G soha chegarasining tayin nuqtasiga intilganda $f(z)$ ning ham D soha chegarasidagi oldindan aniqlangan nuqtasiga intilishi haqida ma'lumotga ega bo'lamiz. Bundan tashqari bundan kuchliroq tasdiq G va D soha chegaralari harakteriga yetarlicha tabiiy chegaralanishlar qo'yilgan holda o'rinli.

Chegaralar mosligi prinsipi K. Karateodori tomonidan isbotlangan bo'lib, u sohaning ekvivalent kesishmalar ma'nosidagi sinf sifatida sohaning chegaraviy elementlari tushunchasini kiritgan. Sohaga uning chegaraviy elementlarini qo'shish Karateodori bo'yicha kompaktifikasiya deyiladi. U sohalarning konform akslantirishi sohalarni bir qiymatli va ma'lum ma'noda bu sohalarning chegaraviy elementlarining uzluksiz mosligini o'rnatishini isbotlagan.

2-teorema (Karateodori). D va D^* sohalar ∂D va ∂D^* jordan chiziqlari bilan chegaralangan sohalar bo'lsin. U holda D sohani D^* sohaga akslantiruvchi konform akslantirishni D ning chegarasiga $\widehat{A}$ va $\overline{D}^*$ yopiq sohalarning gomeomorfizmigacha davom qildirish mumkin.

Agar Karateodori kompaktifikasiyasi o'rniga odatdagi yopilma ishlatilganda bu teorema jordan sohasi bo'lmagan sohalar uchun ham o'rinli bo'ladi.

3-teorema: G va D - har biri oddiy yopiq bo'lakli-silliqlik chiziqlar bilan chegaralangan bir bog'lamli sohalar bo'lsin (bu chiziqlarni mos ravishda S va

$\sum$ bilan belgilaymiz). U holda G sohani D sohaga konform akslantiruvchi $w = f(z)$ funksiyani G soha yopilmasiga uzluksiz davom qildirish mumkin va davom qildirilgan funksiya $w = f(z)$ $\bar{G}$ va $\bar{D}$ yopiq sohalar o'rtasida o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz moslik o'rnatadi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun istalgan $\rho_0 \in S$ nuqta uchun G sohaning z nuqtasi ρ_0 nuqtaga intilganda $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud ekanini isbotlash yetarli (albatta, bu limit D soha chegarasining nuqtasi bo'lishi shart). Haqiqatan bu holda $f(z)$ funksiyani G soha chegaraviy nuqtalarida uning limitik qiymatlari bilan almashtirishimiz mumkin va bu aniqlangan funksiya $\bar{G}$ yopiq sohada uzluksiz bo'lishi zarur.

G va D sohalarni o'rinlarini almashtirsak, $f(z)$ funksiyaga teskari funksiya D soha yopig'ida uzluksiz bo'ladi. Bu esa $\bar{G}$ yopiq sohani $\bar{D}$ yopiq sohaga $f(z)$ funksiya yordamida o'rnatilgan akslantirish o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Demak, har bir $\rho_0 \in S$ nuqtada $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lishini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz. U holda shunday ikkita

$$\{z'_n\}, \{z''_n\}, \quad z'_n \in G, z''_n \in G, n = 1, 2, 3, \dots$$

nuqtalar ketma-ketligi mavjudki, $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = \rho_0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = Q'$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = Q''$ ($Q' \neq Q''$). Kelgusida biz

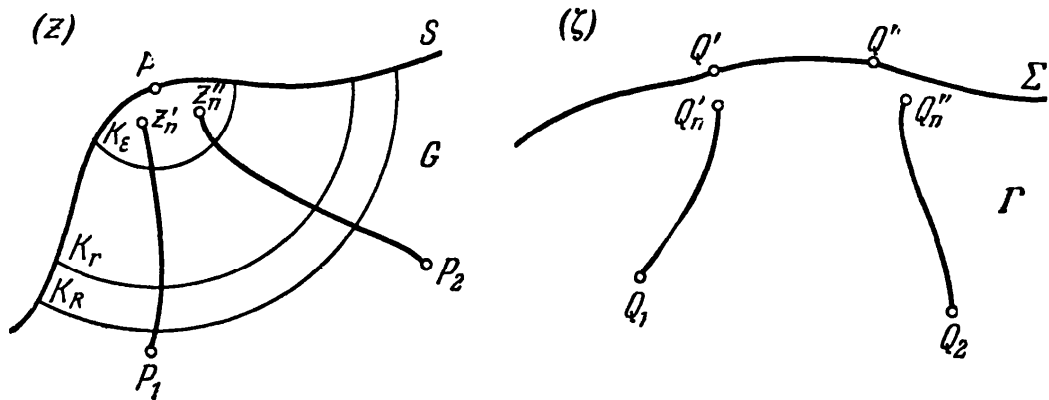
$f(z'_n) = Q'_n$, $f(z''_n) = Q''_n$ deb belgilaymiz. Umumiylikka zid ish qilmagan holda

$|Q'_n - Q''_n| \geq \alpha > 0$, $n = 1, 2, \dots$ deb hisoblashimiz mumkin. Bundan tashqari

$Q'_1, Q'_2, \dots$ nuqtalar orqali L' chiziqni, $Q''_1, Q''_2, \dots$ nuqtalar orqali L'' chiziqni

shunday o'tkazishimiz mumkinki, bu chiziqlar orasidagi masofa biror musbat β dan kam bo'lmasin (bu ikkala chiziqlar D sohada yotadi). R orqali $|z'_1 - \rho_0|$ va $|z''_1 - \rho_0|$ masofalar ichida eng kichigini belgilaymiz. Ularning obrazlari L' va L'' chiziqlar bu nuqtalarning obrazlaridan o'tgani uchun γ' va γ'' chiziqlar mos ravishda z'_n va z''_n nuqtalardan o'tadi.

Binobarin, γ' va γ'' chiziqlar istalgan $r < R$ da barcha $|z - \rho_0| = r$ aylanalarni kesadi. γ' chiziqning $|z - \rho_0| = r$ aylana bilan birinchi kesishish nuqtasini (z_1 nuqtadan harakatlangandagi) ρ_r^* bilan, γ'' chiziqning $|z - \rho_0| = r$ aylana bilan birinchi kesishish nuqtasini ρ_r^{**} bilan belgilaymiz. ρ_r^* va ρ_r^{**} nuqtalarning akslarini Q_r^* va Q_r^{**} bilan belgilaymiz.



Q_r^* va Q_r^{**} nuqtalar mos ravishda L' va L'' chiziqlarda yotgani uchun

$$\beta \leq |Q_r^* - Q_r^{**}| = \left| \int_{\rho_r^*}^{\rho_r^{**}} f'(z) dz \right| \leq \int_{K_r} |f'(z)| dz$$

tengsizlik o'rinli, bu yerda oxirgi integral G sohada yotuvchi $|z - \rho_0| = r$ aylana yoyi bo'yicha olingan. Uni baholash uchun bu tengsizlikda $h = |f'(z)|$, $g = 1$ deb olib, quyidagi Shvarts tengsizligidan foydalanamiz:

$$\left(\int h g ds \right)^2 \leq \int h^2 ds \cdot \int g^2 ds$$

$\int_{K_r} |dz|$ integral K_r yoy uzunligiga teng bo'lgani va shuning uchun $2\pi r$ dan oshmaganligi uchun

$$\beta^2 \leq 2\pi r \int_{K_r} |f'(z)|^2 |dz|$$

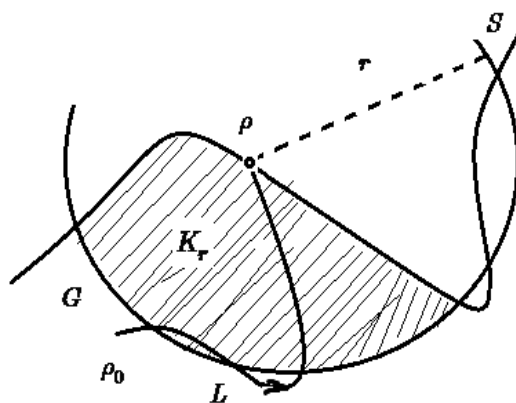
tengsizlikka kelamiz.

Bu tengsizlikni ikkala tarafini $2\pi r$ ga bo'lib va r bo'yicha biror $\varepsilon > 0$ dan R gacha integrallab,

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq \int_{\varepsilon}^R \int_{K_r} |f'(z)|^2 |dz| dr \leq \iint_{D_R} |f'(\rho_0 + re^{i\theta})|^2 r dr d\theta$$

ni olamiz.

Bu formuladagi oxirgi integral $|z - \rho_0| < R$ doirani G soha bilan kesishmasidan tuzilgan D_R sohadan olingan. Bu integralning qiymati $\zeta = f(z)$ konform akslantirishdagi D_R soha obrazi yuzasiga teng. Bu yuza $\varepsilon > 0$ songa bog'liq emas va G soha yuzasidan oshib ketmaydi.



9-chizma

Shunday qilib, istalgan $\varepsilon > 0$ da $\frac{\beta^2}{2\pi} \ln \frac{R}{\varepsilon}$ qiymat biror chekli qiymat - D soha yuzasidan oshib ketmas ekan. $\beta > 0$ da bu hol mumkin emas. Olingan ziddiyat bizning tasdiqni isbotlaydi va shu bilan birga teoremani ham isbotlaydi.

13-ma'ruza

Konform akslantirishlarda chegaralar mosligi prinsipi (davomi)

Biz G va D sohalar sodda yopiq bo'lakli-silliq chiziqlar bilan chegaralangan va shu bilan birga bir bog'lamli bo'lgan holda konform akslantirishda chegaralar mosligi haqidagi teoremani isbotladik.

Isbot g'oyasi umumiyroq holdagi sohalar uchun ham o'rinli bo'ladi.

Isbotlangan teoremaning sodda umumlashmasiga taaluqli bo'lgan izohlarni beramiz.

1-izoh. Teorema tasdig'i chekli sondagi sodda yopiq bo'lakli-silliq chiziqlar bilan chegaralangan chekli bog'lamli sohalar uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

2-izoh. G va D sohalar mos ravishda bo'lakli silliq S va Σ yoylardan iborat chegaralarga ega bo'lsin va $w = f(z)$ konform akslantirishda G soha D sohaga, S yoy esa Σ yoyga o'tsin, ya'ni $w = f(z)$ funksiya nuqtasi z nuqta S yoyga intilganda Σ yoyga intilsin. U holda S ning istalgan berilgan ρ nuqtasida $f(z)$ funksiya limitga ega bo'ladi.

Bu izohning isboti uchun G sohadan S yoyni o'z ichiga olgan qismini chiqarib tashlash va 1 teoremani qo'llash kerak

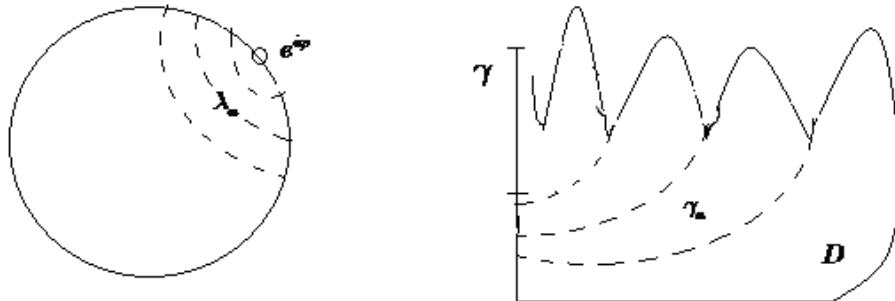
Bu teorema istalgan gomeomorfizm uchun o'rinli emas. Masalan birlik doirani o'z-o'ziga o'tkazuvchi $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ qutb koordindtalar sistemasida

$$\rho = r, \psi = \varphi + \frac{r}{1-r} \text{ tenglamalar bilan berilgan akslantirish gomeomorf,}$$

lekin chegaraviy aylanaga uzluksiz davom qilmaydi.

Bundan tashqari chegaralari Jordan chizig'i (uzluksiz va o'z-o'zini kesmaydigan) bo'lmagan sohalarga konform akslantirishlar uchun ham teorema o'rinli bo'lmasdan qoladi. Masalan birlik doira U ni quyida rasmda ko'rsatilgan

chegarasi $\gamma = \{w : u = 0, -1 \leq v \leq 1\}$ chegaraviy segmentli $v = \sin \frac{1}{u}$ chiziqli qismidan iborat sohaga konform akslantirishni qaraymiz.



10-chizma

Bu akslantirishda D sohadan yopiqklarining kesishmasi γ bilan ustma-ust tushuvchi D_n , $n = 1, 2, \dots$ sohalarni ajratuvchi γ_n yoylarga z tekislikda U dan U_n sohalarni kesuvchi λ_n yoylar mos keladi, shu bilan birga $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n$ kesishmasi biror chegaraviy $e^{i\varphi}$ nuqta bilan ustma-ust tushadi. Bu ma'noda f akslantirishda $e^{i\varphi}$ nuqtaga γ kesma mos keladi, demak f akslantirishni yopiq $\bar{U}$ doiraga uzluksiz davom qildirish mumkin emas.

Endi chegaralar mosligi prinsipiga **teskari prinsipni** keltiramiz.

4-teorema. G va D bir bog'lamli sohalar C va Γ egri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lib, $w = f(z)$ funksiya G da holomorf va $\bar{G}$ da uzluksiz bo'lsin hamda C va Γ o'rtasida aylanish yo'nalishi saqlangan holda o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilsin. U holda $w = f(z)$ funksiya G sohani D sohaga o'zaro bir qiymatli konform akslantiradi.

Bu prinsipni isbotlash uchun argument prinsipi deb ataluvchi prinsipdan foydalanamiz:

G sohaning C chegarasida $f(z)$ qabul qilmaydigan ixtiyoriy w_0 kompleks qiymat uchun (ya'ni D ning w_0 nuqtasi uchun) G ning ichidagi $f(z)$ funksiya w_0 -nuqtalarining soni

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$$

ga teng, bunda $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$ miqdor z nuqta C konturni aylanganda $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$ ning to'la o'zgarishidir.

C va Γ konturlar nuqtalarining o'rtasidagi o'zaro bir qiymatli moslikka asosan:

$$\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\} = \Delta_\Gamma \arg (w - w_0)$$

Ammo, ravshanki, $\Delta_\Gamma \arg (w - w_0)$ miqdor Γ ning ichida yotuvchi barcha w_0 nuqtalar uchun 2π ga teng, Γ dan tashqarida yotuvchi barcha nuqtalar uchun esa 0 ga teng. Demak, Γ ning ichida yotuvchi barcha w_0 nuqtalar uchun $N(w_0)=1$, lekin Γ dan tashqaridagi hamma nuqtalar uchun $N(w_0)=0$. Shunday qilib, $w=f(z)$ funksiya D dan olingan har qanday qiymatni G da faqat bir marta qabul qiladi va boshqa hech qanday qiymatni qabul qilmaydi, ya'ni G ni D ga bir qiymatli (bir varaqli) konform akslantiradi. Shu bilan teorema isbotlandi.

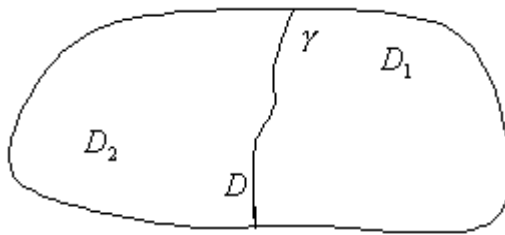
14-ma'tuza.
Simmetriya printsiipi
Reja

1. Uzlüksiz davom qildirish prinsipi.
2. Simmetriya prinsipi
3. Simmetriya prinsipi yordamida amalga oshiriladigan akslantirishlar

1. Uzlüksiz davom qildirish prinsipi.

Golomorf funksiyalarning aniqlanish sohalarini mumkin qadar kengaytirish va bu kengaytirilgan sohalarda funksiyalarni analitik davom ettirishning turlicha usullari mavjud. Sohalarning simmetrikligidan ham foydalanib funksiyalarni analitik davom ettirish mumkin. Bu usul analitik davom ettirish masalasini hal etishni birmuncha engillashtiradi.

Faraz qilaylik, kompleks tekislikdagi chegaralangan D soha γ egri chiziq yordamida D_1 va D_2 sohalarga ajralgan bo'lsin:



Lemma. Agar $f(z)$ funksiya D_1 va D_2 sohalarning har birida golomorf bo'lib $\overline{D_1}$ va $\overline{D_2}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Quyidagi

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1)$$

Koshi tipidagi integralni qaraylik. Ravshanki, $F(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

bo'ladi. Demak,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2)$$

Agar $\forall z \in D$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'lsa, unda lemma isbotlanadi, Aytaylik, $z \in D_1$ bo'lsin. U holda Koshining integral formulasiga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \quad \text{va} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

bo'lib, $\forall z \in D_1$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'ladi.

SHunga o'xshash, $\forall z \in D_2$ bo'lganda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad \text{va} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$$

bo'lib, $F(z) = f(z)$ bo'ladi.

Natijada, $f(z)$ funksiyaning D sohada uzluksizligini e'tiborga olsak, $\forall z \in D$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f(z)$ funksiya D sohada golomorf

Faraz qilaylik, D_1 va D_2 sohalar umumiy nuqtaga ega bo'lmay, ular uchun γ egri chiziq umumiy chegara bo'lsin (1-chizma). U holda isbotlangan lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. Aytaylik, $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiya mos ravishda D_1 va D_2 da golomorf bo'lib, $\overline{D_1}$ va $\overline{D_2}$ da esa uzluksiz bo'lsin.

Agar $z \in \gamma$ da $f_1(z) = f_2(z)$ bo'lsa, u holda

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

funksiya $f_1(z)$ funksiyaning D_1 sohadan $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ sohaga analitik davomi bo'ladi.

Bunday holda, $f_2(z)$ funksiya γ egri chiziq orqali $f_1(z)$ funksiyaning D_1 sohadan D_2 sohaga analitik davomi deyiladi.

2. Simmetriya prinsipi.

Faraz qilaylik, D ($D \subset \mathbb{C}$) soha chegarasining biror qismi haqiqiy o'qdagi γ

interval dan iborat bo'lsin. D^* esa D sohaning haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan sohasini ifodalasin (2-chizma).

Teorema.(Riman-SHvarts). Aytaylik, $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $\overline{D}$ da uzluksiz bo'lsin. Agar $f(z)$ funksiya γ intervalda haqiqiy qiymatlarni qabul qilsa, unda uni $D \cup \gamma \cup D^*$ sohaga analitik davom ettirish mumkin.

$$\text{Analitik davom ushbu } F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^* \end{cases} \quad (3)$$

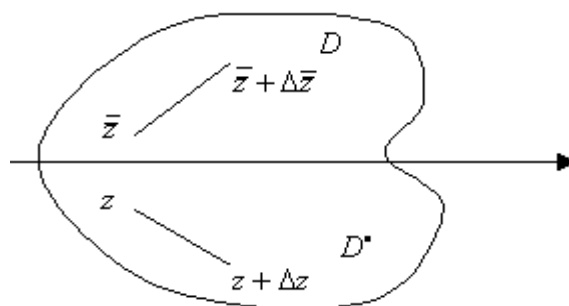
funksiya yordamida bajariladi.

Isbot. D sohada golomorf bo'lgan $f(z)$ funksiya ko'ra tuzilgan ushbu

$$f_1(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad (z \in D^*) \quad (4)$$

funksiya D^* sohaning har bir z nuqtasida $f_1'(z)$ hosilaga ega bo'ladi. SHuni ko'rsatamiz:

Ma'lumki, $z \in D^*$ va $z + \Delta z \in D^*$ bo'lganda $\overline{z} \in D, \overline{z} + \overline{\Delta z} \in D$ bo'ladi. (Δz ni yetarlicha kichik qilib olish mumkin) (2-chizma).



2-chizma

Ravshanki,

$$\frac{f_1(z + \Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z} + \Delta \bar{z})} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z} = \left[\frac{\overline{f(\bar{z} + \Delta \bar{z}) - f(\bar{z})}}{\Delta \bar{z}} \right]$$

Bu tenglikda $\Delta z \rightarrow 0$ da limitga o'tib, $f_1'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ bo'lishini topamiz.

Demak, $f_1(z)$ funksiya D^* sohada golomorf bo'ladi. (3) tenglik bilan aniqlangan $F(z)$ funksiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada uzluksiz bo'ladi. $x \in \gamma$ uchun

$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x)$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow x} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)}$ bo'ladi.

Agar $f(x) = \overline{f(x)}$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$f_1(z) \Big|_{z \in \gamma} = f(z) \Big|_{z \in \gamma}$$

ekanligini topamiz.

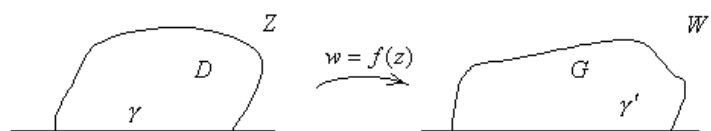
Demak, $F(z)$ funksiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada golomorf bo'lib yuqorida keltirilgan lemmaga binoan, u $f(z)$ funksiyaning analitik davomi bo'ladi.

Xulosa. Yuqoridagi teoremaning shartlari bajarilganda, (3) tenglik bilan aniqlangan $f_1(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning D sohadan D^* sohaga γ orqali analitik davomi bo'ladi.

Aytaylik, D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan $f(z)$ funksiya isbot etilgan

teoremaning shartlarini qanoatlantirishi bilan birga quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $w = f(z)$ funksiya D sohani yuqori yarim tekislik $\text{Im } w > 0$ dagi G sohaga konform akslantirsin.
- 2) $w = f(z)$ funksiya haqiqiy o'qdagi γ intervalni $\text{Im } w = 0$ haqiqiy o'qdagi G soha chegarasining bir qismi bo'lgan γ' intervalga akslantirsin. (3-chizma).



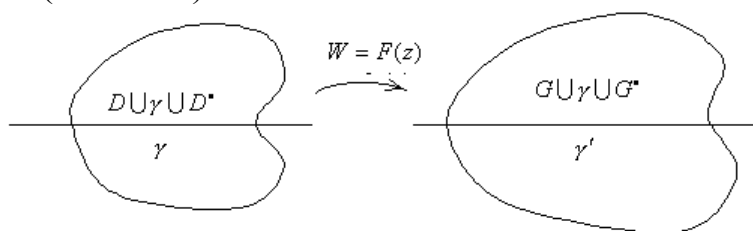
33-чизма

U holda isbotlangan teoremadan ushbu natija kelib chiqadi.

2-natija. (3) ifoda bilan aniqlangan $w = F(z)$ funksiya $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi

$D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi $G_0 = G \cup \gamma \cup G^*$ sohaga konform akslantiradi.

Bunda G^* soha G sohaning $\text{Im } w = 0$ haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan sohasini ifodalydi (4-chizma).



34-чизма

Odatda keyingi natija simmetriya printsipi deyiladi.

Izoh. YUqorida isbotlangan Riman-SHvarts teoremasi va 2-natija γ va γ' lar aylana yoylaridan iborat bo'lgan holda ham o'rinli bo'ladi, ya'ni quyidagi tasdiq to'g'ri:

Faraz qilaylik, $f_1(z)$ funksiya D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan hamda shu sohada

konform bo'lsin. Bunda D sohaning chegarasi ∂D ning bir qismi γ ($\gamma \subset \partial D$) aylana yoyi yoki to'g'ri chiziq kesmasidan iborat. Bu $f_1(z)$ akslantirish D sohani G sohaga, γ chiziqni G chiziqqa (G -aylana yoyi yoki to'g'ri chiziq kesmasi) akslantirsin:

$$G = f_1(D),$$

$$\Gamma = f_1(\gamma).$$

D sohaning γ yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan sohasi D^* , G sohaning G yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan sohasi esa G^* bo'lsin. $f_2(z)$ funksiyani D^* sohada shunday aniqlaymizki, uning qiymatlari $f_1(z)$ funksiyaning G dagi qiymatlariga G yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan qiymatlarni qabul qilsin. (Agar γ va G lar haqiqiy o'qdagi kesmalar bo'lsa, u holda $f_2(z)$ funksiya ushbu

$f_2(z) = \overline{f_1(z)}$ tenglik yordamida aniqlanadi). U holda $f_2(z)$ funksiya D^* ni G^* ga, ushbu

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{agar } z \in D \text{ булса,} \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{agar } z \in \gamma \text{ булса,} \\ f_2(z), & \text{agar } z \in D^* \end{cases}$$

funksiya esa $D \cup \gamma \cup D^*$ sohani $G \cup \Gamma \cup G^*$ sohaga konform akslantiradi (4-chizma).

Bu tasdiqni isbotlash uchun avval γ va Γ aylana yo'ylarini kasr-chiziqli akslantirish yordamida haqiqiy o'qdagi intervallarga akslantirib olish va keyin kasr-chiziqli akslantirish uchun simmetriyaning saqlanish xossasi hamda yuqorida keltirilgan Riman-SHvarts teoremasidan foydalanish etarli.

3. Simmetriya prinsipi yordamida amalga oshiriladigan akslantirishlar

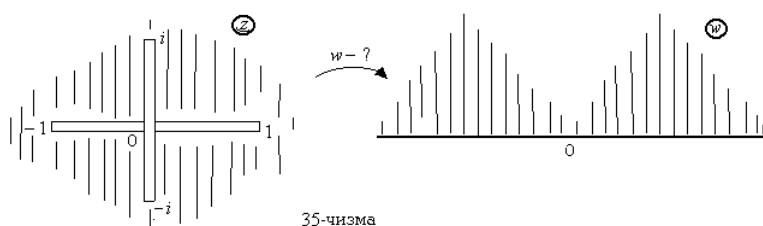
1-misol. Ushbu

$$\{z \in \mathbb{C}: z \in [-1, 1]; z \in [-i, i]\}$$

sohani yuqori yarim tekislik

$$\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} w > 0\}$$

ka konform akslantiruvchi $w = w(z)$ funksiyaning toping (5-chizma).



Quyidagi

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0, z \in [0, i]\}$$

sohada

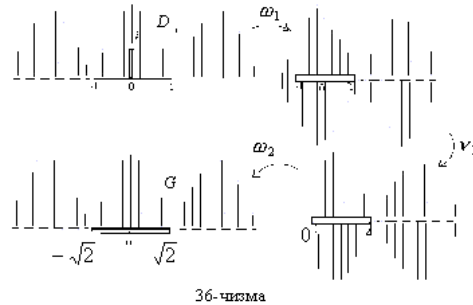
$$w_1 = z^2$$

funksiyaning qaraymiz. Ravshanki, bu akslantirish D_1 sohada konform bo'ladi.

Endi D_1 sohani yuqori yarim tekislikka akslantiramiz. Bu quyidagi

$$\begin{aligned}
 w_1 &= z^2, \\
 w_2 &= w_1 + 1, \\
 w_3 &= \sqrt{w_2}, \sqrt{-1} = i
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

akslantirishlarni ketma-ket bajarish natijasida sodir bo'ladi.
(6-akslantirishlarning bajarilish jarayoni 6-chizmada tasvirlangan).



SHunday qilib, D soha ushbu

$$w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{z^2 + 1}, \quad \sqrt{-1} = i$$

funksiya yordamida

$$G = \{w_3 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

yuqori yarim tekislikka konform akslanar ekan.

Endi simmetriya printsipidan foydalansak, berilgan

$$\{z \in \mathbb{C} : z \in [-1; 1], z \in [-i; i]\}$$

soha ushbu

$$w_3 = \sqrt{z^2 + 1}, \sqrt{-1} = i$$

funksiya yordamida

$$\{w_3 \in \mathbb{C} : w_3 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

sohaga konform akslanishini topamiz. Bu sohani yuqori yarim tekislik

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ka konform akslashtirish qo'yidagi

$$w_4 = \frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3},$$

$$w = \sqrt{w_4}, \sqrt{-1} = i$$

akslantirishlarni ketma-ket bajarilishi istijasida bo'ladi.

Demak, $\{z \in \mathbb{C} : z \in [-1; 1], z \in [-i; i]\}$ sohani yuqori yarim tekislikka $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0$

konform akslantiruvchi funksiya

$$W = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{z^2 + 1}}}$$

bo'ladi. Bu erda ildizning $\sqrt{-1} = i$ shartni qanoatlashtiruvchi tarmoqi olingan .

15-ma'ruza

Simmetriya prinsipining konform akslantirishlar nazariyasiga tadbiqu

Reja

1. Chegaraviy uchta nuqtani chegaraviy uchta nuqtaga konform akslantirishning yagonaligi
2. Ko'p bog'lamli sohalarni konform akslantirishning mavjudligi

1. Chegaraviy uchta nuqtani chegaraviy uchta nuqtaga konform akslantirishning yagonaligi

Simmetriya prinsipining tadbiqu sifatida sohalarning chegaralarida mos uchta nuqtalar berilganda konform akslantirishning yagonaligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

1- teorema: D sohaning uchta chegaraviy z_k nuqtalarini D^* sohaning uchta chegaraviy w_k nuqtalariga o'tkazuvchi D sohani D^* sohaga akslantiruvchi faqat va faqat bitta $w = f(z)$ konform akslantirish mavjud. z_k va w_k nuqtalar soha chegaralarini aylanib chiqishda o'tish tartibiga amal qilgan holda ixtiyoriy beriladi.

Isbot: Oldin D va D^* lar birlik doirani ifodalagan holni qaraymiz. Kasr-chiziqli funksiyaning xossasiga ko'ra $\{|z| < 1\}$ doirani $\{|w| < 1\}$ doiraga berilgan $f(z_k) = w_k$ shart bilan akslantiruvchi kasr-chiziqli akslantirish qurish mumkin. Bu akslantirishning yagonaligini ko'rsatamiz.

$w = g(z)$, $g(z_k) = w_k$ akslantirish $\{|z| < 1\}$ doirani $\{|w| < 1\}$ doiraga akslantiruvchi boshqa biror kasr-chiziqli akslantirish bo'lsin. $g(z)$ funksiya simmetriya prinsipi shartlarini qanoatlantiradi, binobarin $\{|z| < 1\}$ doira bilan $\{|z| = 1\}$ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan sohaga analitik davom qiladi, ya'ni $\{|z| > 1\}$ doira tashqarisiga davom qiladi. O'zining analitik davomi bilan $w = g(z)$ funksiya z tekisligini bir qiymatli akslantirishini amalga oshiradi va kasr-chiziqli

funksiyani ifodalaydi va bundan $g(z) \equiv f(z)$ ligini ko'rish mumkin, chunki kasr-chiziqli akslantirish uchta mos chegaraviy qiymatlar berilgan holga oddiy ravishda keltiriladi. O'z navbatida $\xi = \varphi(z)$, $\xi_k = \varphi(z_k)$ va $w = \psi(z)$, $w_k = \psi(z_k)$ lar mos ravishda D va D^* sohalarni $\{|\xi| < 1\}$ va $\{|w| < 1\}$ birlik doiralarga akslantiruvchi biror konform akslantirishlar hamda $w = F(z)$, $F(\xi_k) = w_k$ esa $\{|\xi| < 1\}$ doirani $\{|w| < 1\}$ doiraga akslantiruvchi biror akslantirish bo'lsin. Kasr-chiziqli funksiyalarni xossalriga asosan bunday biror akslantirish bo'lsin. Kasr-chiziqli funksiyalarning normallovchi shart bilan akslantiruvchi akslantirish bo'lib

$$w = \psi^{-1} F(\varphi(z)) = f(z)$$

funksiya xizmat qiladi, bu yerda $\psi^{-1} - \psi$ ga teskari akslantirish. D ni D^* ga shunday normallovchi shartli akslantiruvchi ikkinchi akslantirish $w = g(z)$ ning mavjudligini $\{|\xi| < 1\}$ ni $\{|w| < 1\}$ ga $G(\xi_k) = w_k$ shart bilan akslantiruvchi

$$w = \psi g \varphi^{-1}(\xi) = G(\xi)$$

ikkinchi akslantirish mavjudligiga olib keladi. Bu esa yuqorida ko'rilgan holga zid. Teorema isbotlandi.

2. Ko'p bog'lamli sohalarni konform akslantirishning mavjudligi

Simmetriya prinsining yana bir tadbiqui sifatida ko'p bog'lamli sohalarni konform akslantirishning mavjudligi haqidagi savolga tadbiquini ko'rib chiqamiz. Riman teoremasiga ko'ra istalgan 2ta bir bog'lamli sohani bir-biriga bir qiymatli va konform akslantirish mumkin. Boshqa tomondan bir bog'lamli sohani ko'p bog'lamli sohaga akslantirish mumkin emas. Ko'p bog'lamli sohalar bir xil bog'lamlilik tartibiga ega bo'lgan holda sohalarni bir-biriga akslantirish mavjudmi degan savol tug'iladi. Bu savol umuman aytganda ijobiy yechilmagan. O'z navbatida hali konsentrik xalqalar berilgan oddiy holda ham quyidagi teorema o'rinli:

2-teorema. $r_1 < |z| < r_2$ halqani $\rho_1 < |w| < \rho_2$ halqaga konform akslantiruvchi $w = f(z)$ akslantirish mavjud bo'lishi uchun bu xalqalarning o'xshashligi zarur va yetarli:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

Isbot: (1) shartning zaruriyligini isbotlash uchun $f(z)$ funksiya simmetriya prinsipi shartlarini qanoatlantirishini ta'kidlaymiz va bu prinspga asosan $f(z)$ funksiya $r_1 < |z| < r_2$ halqa bilan mos ravishda $|z| = r_1$ va $|z| = r_2$ aylanalariga nisbatan simmetrik $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1$ va $r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ sohalarga analitik davom qiladi.

Kengaytirilgan $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ halqani $f(z)$ funksiya (uni davomi bilan birga)

$\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |z| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ halqaga akslantiradi. Shuning uchun $f(z)$ funksiya yana bir

marta simmetriya prinsipini qo'llab uni $r_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < |z| < r_2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ halqaga davom

qildirish mumkin. Bunday davom qildirishni chegaralanmagan holda o'tkazib, $f(z)$ funksiya $0 < |z| < \infty$ sohani $0 < |w| < \infty$ sohaga bir qiymatli akslantirishini olamiz, shu bilan birga yoki $|z| = r_1$ aylanani $|w| = \rho_1$ aylanaga yoki $|w| = \rho_2$ aylanaga mos kelishiga bog'liq holda $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ yoki

$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $f(z)$ quyidagi 2ta ko'rinishdan biriga ega bo'lgan kasr-chiziqli funksiya ekani kelib chiqadi

$f(z) = az$, $f(z) = \frac{a}{z}$ a-kompleks o'zgarmas son. Ikki holatda ham (1)

shartdagi tenglik bajariladi. (5) ning yetarliligi u bajarilganda halqalarning o'xshashligi va ularni bir-biriga sodda cho'zish yoki siqish bilan akslantirish mumkinligidan kelib chiqadi.

Isbotlangan teoremaga qo'shimcha qilib, istalgan ikki bog'lamli soha biror $\rho_1 < |z| < \rho_2$ halqaga akslanishi mumkinligi ko'rsatiladi, shu bilan birga ρ_1 radius berilganda ρ_2 radius berilgan soha uchun bir qiymatli aniqlanadi. Xuddi shunday ixtiyoriy n-bog'lamli sohani tekislikdan n ta doirani chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan sohaga akslantirish mumkinligi M. B. Келдыш va P. Курант ishlarida ko'rsatilgan.

16-ma'ruza

Analitik davom qildirish prinsipi

Reja

1. Analitik yoy tushunchasi. Simmetriya prinsipining umumlashmasi.
2. Simmetriya prinsipining tadbqiqiga doir misollar.

1. Analitik yoy tushunchasi. Simmetriya prinsipining umumlashmasi.

Endi akslanayotgan sohalar chegarasi analitik yoydan iborat bo'lgan holda simmetriya prinsipining umumlashmasini keltiramiz.

1-ta'rif. $\mathbb{C}$ yoy analitik deyiladi, agar u $z(t) = x(t) + iy(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, $x(t)$ va $y(t)$ lar (α, β) oraliqda t haqiqiy o'zgaruvchining analitik funksiyalarini ifodalasa, ya'ni (α, β) oraliqning har bir t_0 nuqtasi atrofida $(t - t_0)$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsa. Bunda intervalning hech bir nuqtasida $x'(t)$ va $y'(t)$ xosilalar bir vaqtda nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz (ya'ni $\mathbb{C}$ chiziq ustida maxsus nuqtalar yo'q). $\mathbb{C}$ chiziq agar $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ bo'lgan holda yopiq bo'lishi ham mumkin.

$\mathbb{C}$ tekislikda analitik davom prinsipi deb ataluvchi teorema ham o'rinli.

1-teorema (Shvarts). $w = f(z)$ funksiya chegarasi C analitik yoyni o'z ichiga oluvchi D sohani biror D^* sohaga konform akslantirishni amalga oshirsin, shu bilan birga C yoyga D^* soha chegarasidagi C^* analitik yoy mos kelsin. Bu shartda $w = f(z)$ funksiyani C yoy bo'yicha analitik davom qildirish mumkin.

Isbot: O'z navbatida $z_0 - C$ yoyning ixtiyoriy nuqtasi, $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ –bu chiziq tenglamasi va $z_0 = z(t_0)$ bo'lsin. Shartga ko'ra C –analitik yoy ekanligidan, biror $|t - t_0| < \delta$ atrofda $z = z(t)$ funksiyani $(t - t_0)$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin. Abel teoremasiga ko'ra qator t

ning kompleks qiymatlarida ham yaqinlashadi, ya'ni uni ξ bilan belgilasak $|\xi - t_0| < \delta$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi. Binobarin, bu doirada $z = z(\xi)$ analitik funksiya aniqlanadi. $z'(t_0) \neq 0$ ekanligidan δ ni yetarlicha kichik qilib tanlanganda $z = z(\xi)$ ni konform deb hisoblash mumkin.

Qurilishiga ko'ra $z = z(\xi)$ $|\xi - t_0| < \delta$ doira diametrini C chiziqning z_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi biror kesmasiga akslantiradi. Bunda yuqori yarim doira D soha ichiga, quyisi esa uning tashqarisiga akslanadi.

Xuddi shunday qilib, agar $w = w(\tau) - C^*$ chiziqning tenglamasi bo'lsa, markazi haqiqiy o'qda bo'lgan biror $|\omega - \tau_0| < \delta_1$ doirani $w_0 = w(t_0) = f(z_0)$ nuqta atrofiga akslantiruvchi $w = w(\omega)$ konform akslantirish qurish mumkinki, bu doira diametrini C^* chiziq kesmasiga o'tkazadi. Bunda yuqori yarim doira D^* ning ichiga, quyi doira uning tashqarisiga akslanadi deb faraz qilamiz.

$w = f(z)$ funksiya $|\xi - t_0| < \delta$ yuqori yarim doirani $\{|\omega - \tau_0| < \delta_1\}$ yuqori yarim doiraning biror qismiga akslantiruvchi

$$\omega = \omega\{f(z(\xi))\} = \varphi(\xi)$$

konform akslantirishni hosil qiladi ($\omega = \omega(w)$ -funksiya $w = w(\omega)$ funksiyaga teskari funksiya) shu bilan birga birinchi yarim doira diametri ikkinchisining diametrining qismiga o'tadi. Simmetriya prinsipiga ko'ra $\varphi(\xi)$ funksiya $|\xi - t_0| < \delta$ doirani $|\omega - \tau_0| < \delta_1$ doiraning qismini o'z ichiga oluvchi biror qismiga konform akslantirishda analitik davomni amalga oshiradi.

Qurilgan $\omega = \varphi(\xi)$ davom $f(z)$ funksiyaning C chiziq kesmasi bo'yicha analitik davomni hosil qiladi. O'z navbatida, $|\xi - t_0| < \delta$ quyi yarim doiraga mos keluvchi D soha tashqarisining qismida $w = w(\varphi(\xi(z)))$ ($\xi(z) - z(\xi)$ ga teskari funksiya) analitik funksiya topilib, C yoy kesmasidagi chegaraviy qiymatlari $f(z)$ ning chegaraviy qiymatlari bilan ustma-ust tushadi. Uzluksiz davom prinsipiga ko'ra bu funksiya $f(z)$ funksiyaning analitik davomini ifodalaydi.

$z_0 - C$ chiziqlar bo'yicha analitik davom qiladi. Teorema isbotlandi.

Xususan, agar C va C^* -berilgan sohalarning to'la chegaralari analitik chiziqlar bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohaning barcha chegarasi orqali analitik davom qiladi.

2. Simmetriya prinsipining tadbqiqiga doir misollar.

Simmetriya prinsipidan foydalanib, ushbu

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

sohaning (birlik doiraning)

$$w = \frac{z}{\sqrt[n]{(z^n + 1)^2}}$$

funksiya yordamida tasvirini (obrazini)toping.

D birlik doirani uchlar $z = 0$ nuqtada va kengligi $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo'lgan

$D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ n ta sektorga ajratamiz:

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : -\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}k < \arg z < \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, |z| < 1 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

So'ng berilgan w funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$w = \frac{z}{\sqrt[n]{(z^n + 1)^2}} = \sqrt[n]{\frac{z^n}{z^{2n} + 2z^n + 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z^n + 2 + \frac{1}{z^n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2\left[\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + 1\right]}} \quad \text{Agar}$$

$$w_1 = z^n,$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right),$$

$$w_3 = w_2 + 1,$$

$$w_4 = \frac{1}{2w_3}$$

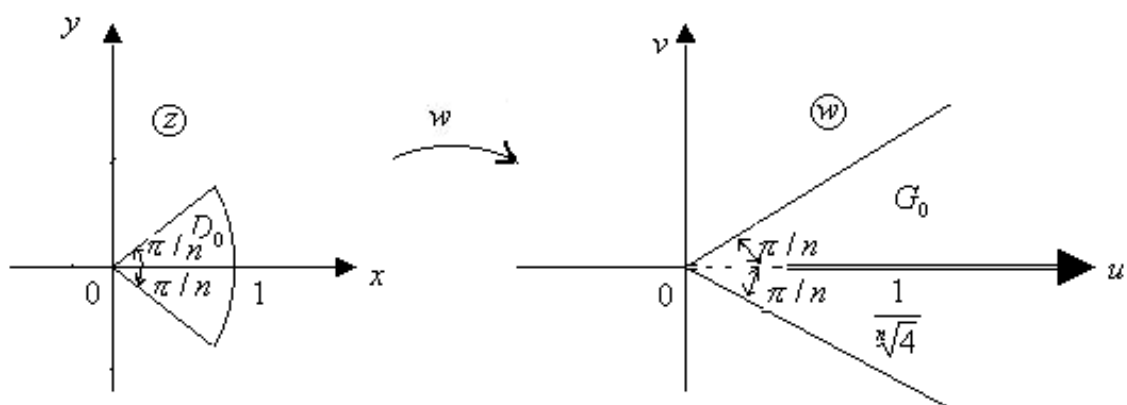
deyilsa, unda w funksiya ushbu

$$w = (\sqrt[n]{w_4})_0$$

ko'rinishga keladi. Bu akslantirishdan foydalanib, D_0 ning tasviri (obrazi)

$$G_0 = \left\{ w \in \mathbb{C}^n : -\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}, w \in \left[\frac{1}{\sqrt[n]{4}}, +\infty \right) \right\}$$

bo'lishini topamiz (1-chizma).



1-chizma

Shu mulohaza asosida, simmetriya printsipini n marta qo'llash natijasida

$$w = \frac{1}{\sqrt[n]{(z^n + 1)^2}}$$

funksiya birlik doira $D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ ni n ta $\left\{ \arg w = \frac{2\pi k}{n}, |w| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \right\}$,

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ nur bo'yicha qirrilgan (w) tekisligiga akslantirishini topamiz

18-ma'ruza.

Butun va meromorf funksiyalar.

Ta'rif 1. *Kompleks tekislikda golomorf bo'lgan funksiyalarga butun funksiya deyiladi.*

Demak butun funksiya bu butun kompleks tekislikdagi bir qiymatli golomorf funksiya. U hamma joyda yaqinlashuvchi darajali qator ko'rinishida tasvirlanadi :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (1)$$

bu yerda Koshi-Adamar formulasiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad (2)$$

Cheksiz uzoqlashgan nuqtada butun funksiya to'g'ri bo'lishi mumkin, $f(z)$ o'zgarmas funksiya aylanadi yoki biror $k \geq 1$ tartibli qutbga ega bo'ladi - bu holda $f(z)$ k -darajali ko'phadga aylanadi va nihoyat muhim maxsus nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Ohirgi holatda u butun transendent funksiyaning ifodalaydi. Butun transendent funksiyalarga e^z -ko'rsatkichli funksiya, $\sin z, \cos z$ - trigonometrik funksiyalar misol bo'ladi.

Butun funksiyalarning muhim xarakteristikasi bo'lib mo'dulning maksimumi

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

xizmat qiladi. Bu r ning o'suvchi funksiyasi bo'lib, Liuvill teoremasiga ko'ra

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty \quad (3)$$

shartni qanoatlantiradi.

Oson ko'rish mumkinki r ning istalgan tayinlangan darajasiga qaraganda $M(r)$ (butun transendent funksiyalar uchun) tezroq o'sadi.

Bundan tashqari

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty \quad (4)$$

munosabat o'rinli.

O'z navbatida qo'shimcha qilish mumkin-ki

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \mu < \infty \quad \text{bo'ladi, bu holda istalgan chekli}$$

$\mu' > \mu$ uchun cheksizlikka intiluvchi shunday $\{r_n\}$ ketma-ketlik topiladiki, har bir r_n uchun

$$\ln M(r) < \mu' \ln r_n \quad \text{yoki} \quad M(r_n) < r_n^{\mu'}$$

tengsizlik bajariladi.

Shuning uchun (1) qator koeffitsiyentlari uchun Koshi tengsizligiga ko'ra

$$|a_K| \leq \frac{M(r_n)}{r_n^K} < r_n^{\mu' - K}$$

ni olamiz .

r_n ni yetarlicha katta qilib tanlash mumkinligidan, $K > \mu' > \mu$ shartni qanoatlantiruvchi Teylor qatori koeffitsiyentlari nolga teng va binobarin $f(z)$ darajasi $[\mu]$ ($[\mu] - \mu$ sonning butun qismi) dan oshmaydigan ko'phad.

Yuqoridan ko'rinadiki, r^μ darajali funksiya butun transendent funksiyalarning o'sishini baholash uchun yaramaydi. Shuning oddiyroq tez o'suvchi funksiyalar, aynan ko'rsatkichli funksiyalarni qarashga to'ri keladi.

1-ta'rif. Agar shunday μ o'zgarmas son mavjud bo'lsaki, barcha yetarlicha katta r lar uchun

$$M(r) < e^{r^\mu} \quad (5)$$

tengsizlik bajarilsa, $g(z)$ butun funksiya chekli tartibga ega deyiladi.

Aks holda, agar istalgan $\mu > 0$ uchun r ning shunday yetarlicha katta qiymati mavjud bo'lib $M(r)$ ning qiymati e^{r^μ} dan katta bo'lsa u holda butun funksiya cheksiz tartibga ega deyiladi.

Chekli tartibga ega funksiyaga e^z , cheksiz tartibga ega funksiyaga

e^{e^z} funksiya misol bo'ladi.

Chekli tartibli funksiyalarni qaraymiz.

(5) tengsizlik yetarlicha katta $r > r(\mu)$ dan boshlab quyi chegarasini qaraymiz.

Bu quyi chegara butun funksiyaning tartibi deyiladi va ρ orqali belgilanadi:

$$\rho = \inf \mu \geq 0$$

Cheksiz tartibli funksiyalar uchun $\rho = \infty$ bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra istalgan $\varepsilon > 0$ uchun

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad (6)$$

tengsizlik $r > R(\varepsilon)$ da bajarilishi kerak. Boshqa tomondan, r ning yetarlicha katta $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ qiymatlari topilib

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \quad (7)$$

tengsizlik bajariladi.

(6) va (7) tengsizliklardan $r > R(\varepsilon)$ da

$$\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon$$

va yetarlicha katta r_n larda

$$\frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} > \rho - \varepsilon$$

Tengsizliklar kelib chiqadi.

Shuning uchun

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (8)$$

Bu formula butun funksiyaning tartibini aniqlash uchun xizmat qiladi.

Agar $f(z)$ funksiya chekli ρ tartibga ega va shunday musbat K son mavjud bo'lib

$$M(r) < e^{Kr^\rho} \quad (9)$$

o'rinli bo'lsa, u holda $f(z)$ chekli tipga ega funksiya deyiladi.

Aks holda, istalgan $k > 0$ uchun r ning yetarlicha katta qiymati mavjud bo'lib, $M(r)$ ning qiymati e^{kr^ρ} dan katta bo'lsa, ρ tartibli butun funksiya cheksiz (maksimal) tipdagi funksiya deyiladi.

Chekli tipdagi funksiyalarni qaraymiz. Yetarlicha katta r lar uchun (9) tengsizlik bajarilsadigan k qiymatlarning aniq quyi chegarasi butun funksiyaning tipi deyiladi va σ bilan belgilanadi. Demak

$$\sigma = \inf k \geq 0$$

Chekli tipga ega funksiyalar orasida normal tipdagi ($\sigma > 0$) va minimal tipdagi ($\sigma = 0$) funksiyalar farqlanadi.

Maksimal tipdagi funksiyalar uchun $\sigma = \infty$ bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham

$$M(r) < e^{(\sigma + \varepsilon)r^\rho} \quad (10)$$

Tengsizlik $r > R(\varepsilon)$ da bajarilishi shart; ikkinchi tomondan r ning yetarlicha katta $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ qiymatlari topilib ular

$$M(r_n) > e^{(\sigma - \varepsilon)r_n^\rho} \quad (11)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

(10) va (11) tengsizliklardan $r > R(\varepsilon)$ da

$$\frac{\ln M(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon$$

va yetarlicha katta r_n uchun

$$\frac{\ln M(r_n)}{r_n^\rho} > \sigma - \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Shuning uchun

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}$$

Bu formula butun funksiyaning tipini aniqlash uchun xizmat qiladi..

1-misol 1. e^z - tartibi $\rho=1$ va tipi $\sigma=1$ bo'lgan butun funksiya

2. $\sin z$ ning tipi va tartibini aniqlaymiz.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{uchun}$$

$$|shy| \leq |\sin z| \leq \sqrt{sh^2 y + \sin^2 x} \leq chy$$

ga ega bo'lamiz.

Shuning uchun

$$\frac{e^r - 1}{2} < shr \leq M(r) = \max_{|z|=r} |\sin z| \leq chr = \frac{e^r + e^{-r}}{2} < \frac{e^r + 1}{2}$$

$\cos z$ ning tipi va tartibini aniqlaymiz.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{uchun}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^y}{2} = \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} + (\cos x - i \sin x)e^y}{2} = \\ &= \frac{\cos x e^{-y} + \cos x e^y}{2} + i \frac{\sin x e^{-y} - \sin x e^y}{2} = \cos x \cdot chy - i \sin x shy \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x ch^2 y + \sin^2 x sh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x ch^2 x + (1 - \cos^2 x) sh^2 y} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y} \text{ ga tengligidan} \end{aligned}$$

$$|shy| \leq |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y} \leq \sqrt{1 + sh^2 y} = chy \quad \text{ni hosil qilamiz.}$$

Bundan

$$\frac{e^r - 1}{2} < shr \leq M(r) = \max_{|z|=r} |\cos z| \leq chr = \frac{e^r + e^{-r}}{2} < \frac{e^r + 1}{2} \quad \text{va oxirgi tengsizlikdan}$$

$\sigma=1, \rho=1$ ni hosil qilamiz.

Kompleks tekislikda meromorf funksiyalar.

Ma'lumki, $z = \infty$ cheksiz uzoqlashgan nuqtani o'z ichiga olmaydigan tekislik chekli tekislik deyiladi. Boshqacha aytganda, markazi nol nuqtada joylashgan har qanday chekli R katta radiusli doiraning ichki nuqtalari to'plamidir. Bunday tekislikning aksini sferaga tushirilganda shimoliy qutb hisobga kirmay qoladi, ya'ni to'plamga kirmaydi. Agarda $z = \infty$ nuqta ham tekislikka kiritilsa, u kengaytirilgan tekislik deyilib, uning aksi sferaning barcha nuqtalaridan iborat bo'ladi.

Ta'rif 1.4.1. *Chekli tekislikda qutblardan boshqa maxsus nuqtalarga ega bo'lmagan analitik funksiyani meromorf (yoki kasr) funksiya deyiladi.*

Shu narsaga e'tiborni jalb qilib o'tamizki, har qanday chegaralangan sohada meromorf funksiya faqat chekli sondagi qutblarga ega bo'ladi.

Haqiqatan, agar bunday sohada funksiyaning cheksiz ko'p qutblari mavjud bo'lganda edi, ularning biror a nuqtaga intiluvchi ketma-ketligi ham mavjud bo'lar edi. Bu a nuqta meromorf funksiya uchun, qutbdan farqli bo'lgan, yakkalanmagan maxsus nuqta bo'ladi, chunki qutbning ta'rifiga ko'ra u ajralgan maxsus nuqta bo'lishi kerak. Meromorf funksiyaning ta'rifiga asosan bunday bo'lishi mumkin emas. Har bir ratsional funksiya meromorf funksiya misol bo'la oladi. Haqiqatan,

$$\frac{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n}{q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m}$$

ratsional funksiyaning barcha kengaytirilgan tekislikdagi maxsus nuqtalari qutblardan iborat ($n > m$ bo'lsa, cheksiz uzoqlashgan nuqtaga $n - m$ -tartibli qutb, $n \leq m$ bo'lsa, cheksiz uzoqlashgan nuqta-qutulib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi, bu nuqtada funksiyaning kerakli ravishda aniqlab olib, nuqtani to'g'ri nuqta hisoblashimiz mumkin).

Teorema.1.4.1. *Agar golomorf $f(z)$ funksiya butun kengaytirilgan tekislikda qutblardan boshqa maxsus nuqtalarga ega bo'lmasa, u holda $f(z)$ ratsional funksiyadir.*

Isbot. Berilgan $f(z)$ funksiya uchun cheksiz uzoqlashgan nuqta teoremaning shartiga ko'ra faqat qutb bo'lishi mumkin, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtaning biror $|z| > |R|$ atrofida $f(z)$ analitik funksiyadir. $|z| \leq |R|$ doirada meromorf funksiya ta'rifidan chiqarilgan xulosaga asosan chekli sondagina qutblar mavjud bo'lishi mumkin; bu qutblarni $z_1, z_2, \dots, z_n$ orqali belgilaymiz; bo'larning tartibi mos ravishda $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ bo'lsin. Har bir qutbning atrofida $f(z)$ funksiyani Loran qatoriga yoyamiz. z_j atrofidagi yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + c_0^{(j)} + c_1^{(j)}(z-z_j) + \dots$$

Bu yoyilmaning bosh qismini $g(z)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$g(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}.$$

Ravshanki, $g_j(z)$ — ratsional funksiyadir.

Endi $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqta atrofidagi Loran yoyilmasining bosh qismini $g(z)$ orqali belgilaymiz:

$$g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p$$

(agar $f(z)$ uchun $z = \infty$ to'g'ri nuqta bo'lsa, $g(z)$ funksiya tekshirilmaydi, chunki bu holda bosh qism bo'lmaydi). Ushbu

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z)$$

funksiyani tekshiramiz. Bu funksiya barcha chekli $z \neq z_j (j = 1, n)$ nuqtalarda chekli sondagi analitik funksiyalarning yig'indisi bo'lgani uchun analitikdir. Bu funksiyaning tuzilishidan ravshanki, har bir z_j va $z = \infty$ nuqta $\varphi(z)$ uchun qutulib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi, chunki uning Loran yoyilmasidan bosh qism chiqarib tashlanyapti.

$\varphi(z)$ funksiyani z_j va $z = \infty$ nuqtalarda kerakli ravishda aniqlab olib, kengaytirilgan tekislikda analitik funksiya deb qarashimiz mumkin. Liuvill teoremasiga asosan:

$$\phi(z) = constt.$$

Bunga asosan;

$$f(z) = const + g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z).$$

Demak, $f(z)$ -ratsional funksiya ekan. Shu bilan birga bu teorema har qanday ratsional funksiyani oddiy kasrlarga yoyish mumkinligini ham ko'rsatadi;

Endi meromorf $f(z)$ funksiya qutblarining to'plami cheksiz bo'lgan holni ko'ramiz. Har qanday chegaralangan sohada meromorf funksiya qutblarining soni chekli ekanligini e'tiborga olib, $f(z)$ meromorf funksiyaning barcha qutblarini ma'lum tartibda nomerlab chiqishimiz mumkin.

Masalan, $f(z)$ ning qutblarini z_j lar orqali belgilasak, bo'larni modullari kamaymaydigan tartibda nomerlashimiz mumkin:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_j| \leq \dots$$

$f(z)$ funksiyaning z_j qutbi atrofidagi Loran yoyilmasining bosh qismini, xuddi yuqoridagidek, $g_j(z)$ bilan belgilaymiz.

Tekshirilayotgan holda ham meromorf funksiya yoyilmasini hosil qilish uchun avvalgiday, ya'ni qutblar soni chekli bo'lgan holdagidek, $f(z)$ funksiya barcha $g_j(z)$ bosh qismlar yig'indisini ayirib, natijada, ayirmada butun

funksiya hosil qilishga urinib ko'rish mumkin. Lekin bu holda bosh qismlar to'plami cheksiz bo'lgani uchun $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)$ qatorning yaqinlashishi to'g'risida, umuman, hech narsa aytib bo'lmaydi. Lekin hamma vaqt shunday $h_j(z)$ ko'phadlarni tanlab olish mumkinki, natijada

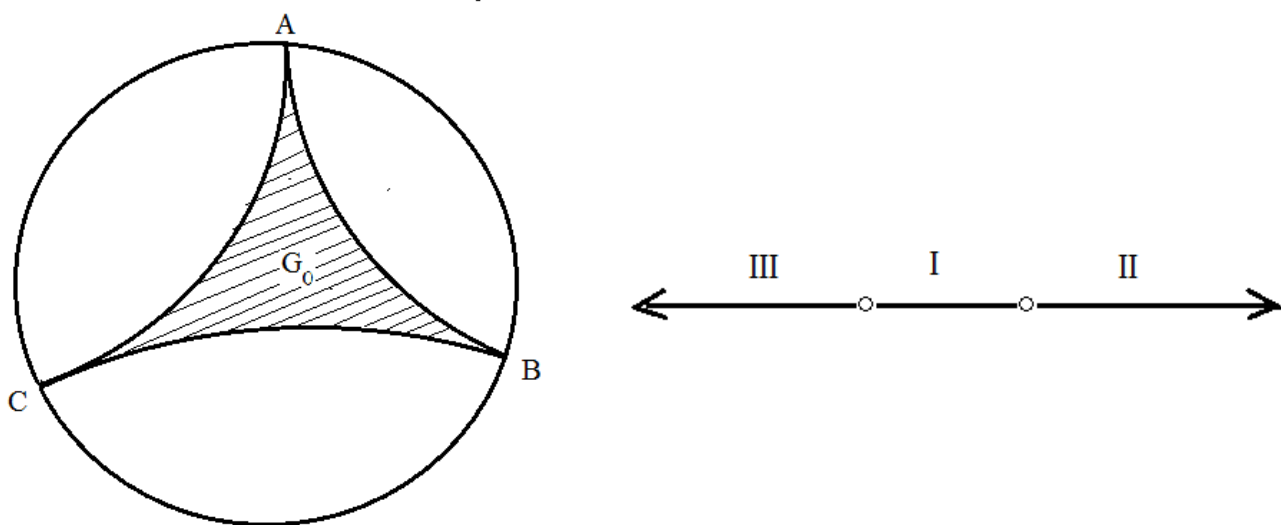
$$\sum_{j=1}^{\infty} [g_j(z) - h_j(z)]$$

qator ixtiyoriy $|z| < R$ (agar bu doiradan unga tushgan qutblarni chiqarib tashlansa) doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi

19-ma'ruza

Shvarsning modulyar funksiyasi.

Birlik aylana ustida uchta A, B, C nuqtalarni tanlab olamiz ularni ketma-ket ravishda birlik aylanaga ortogonal bo'lgan aylanalar yoylari bilan tutashtirib chiqamiz (1-rasm). Bu yoylar burchaklari nol gradusni tashkil etuvchi G_0 aylanaviy uchburchakli sohani chegaralab turadi. G_0 sohani yuqori yarim tekislikka shunday konform akslantiramizki, bunda A, B va C nuqtalar mos ravishda $0, 1$ va ∞ nuqtalarga o'tsin va $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ va $\widehat{CA}$ yoylar haqiqiy o'qning $[0, 1]$, $[1, +\infty]$ va $[-\infty, 0]$ oraliqlariga akslansin. Ularni mos ravishda I, II, III orqali belgilaymiz.

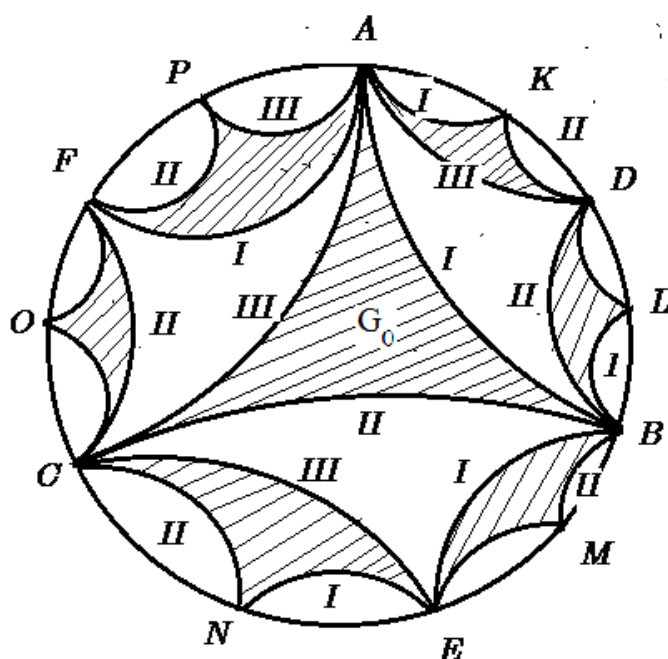


1-rasm

$w = \psi(z)$ funksiya bu akslantirishni amalga oshiruvchi akslantirish bo'lsin. Bu G_0 sohaga nisbatan Riman-Shvartsning simmetriya prinsipini qo'llaymiz. Bunga asosan $w = \psi(z)$ funksiya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ va $\widehat{CA}$ yoylarning har biri orqali mos ravishda burchaklari nol bo'lgan ABD , BCE va ACF uchburchakli sohalarga analitik davom etib bu uchburchaklardagi qiymatlari pastki yarim tekislikka

tushadi(2-rasm). Endi yana o'sha davom ettirilgan funksiya va har bir ABD , BCE va ACF uchburchakli sohalarga nisbatan alohida simmetriya prinsipini qo'llaymiz va $w = \psi(z)$ funksiyani AD , DB , BE , EC , CF , AF tomonlar orqali ADK , DBL , BEM , ECN , CFO , FAP uchburchakli sohalarga analitik davom ettiramiz(2-rasm). Bularning har birida funksiya yuqori yarim tekislikni to'ldiruvchi qiymatlar to'plamiga ega bo'ladi. Ushbu jarayonni cheksiz davom qildiradigan bo'lsak, berilgan funksiya butun birlik doira ichkarisida aniqlangan funksiyagacha analitik davom etadi.

Aslida berilgan funksiya yuqoridagi jarayonni chekli marta qo'llash natijasida berilgan funksiyamiz tomonlari birlik aylanaga orthogonal aylana yo'ylaridan tashkil topgan ko'pburchakkacha analitik davom etadi. Masalan avvalo ABC uchburchak, keyin $ADBECF$ oltiburchak keyin o'n ikkiburchak va hokazo(2-rasm).

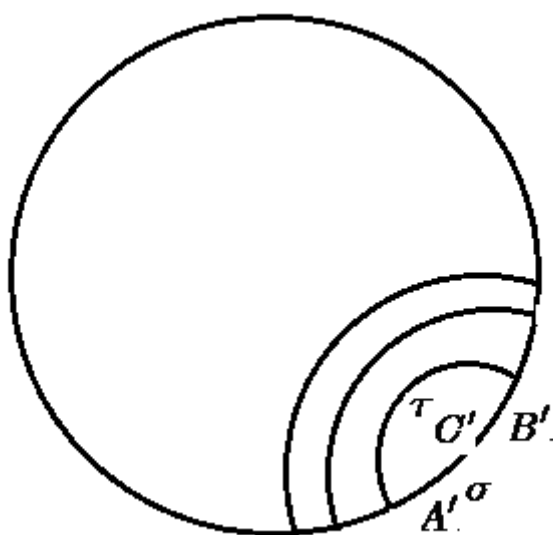


2-rasm

Birlik doiraning istlgan bir nuqtasi biror chekli sondagi amalga oshirilgan analitik davomdn keyin hisil qilingan ko'pburchak ichiga tushishini ko'rsatish uchun ko'p burchak yo'ylari tiralayotgan birlik aylanamiz yo'ylari uzunligi ko'pburchak

tomonlari cheksiz ortib borgan sayin nolga intilib borishini ko'rsatishimiz yetarli bo'ladi. Bu esa o'z navbatida birlik aylananing istalgan nuqtasi ko'pburchak uchlaridan iborat nuqtalar to'lam uchun limit nuqta bo'lishidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik aksincha bo'lsin, ya'ni birlik aylananing ko'pburchaklarni qo'shni uchlarini tutashtiruvchi ichma-ich joylashgan shunday $\{\sigma_n\}$ yoylar ketma-ketligi topilib, bu ketma-ketlik birorta ham ko'pburchak uchlarini o'zida saqlamaydigan σ yoyga yaqinlashadi.

Bu σ yoy ohirlarini birlik aylanaga ortogonal aylana yoyi τ bilan birlashtiramiz. τ ga nisbatan simmetrik almashtirishni qo'llab, σ da A, B, C nuqtalarga simmetrik A', B', C' nuqtalarni topamiz (3-rasm). Endi bu nuqtalarni σ_n yoyga nisbatan A'_n, B'_n, C'_n simmetrik nuqtalarini topamiz. Yetarlicha katta n larda A'_n, B'_n, C'_n obrazlar A', B', C' obrazlarga yaqinlashib boradi natijada ulardan birortasi σ yoy ichiga tushib qoladi. Bu ziddiyat $\psi(z)$ funksiyani haqiqatan ham birlik doirgacha davom qilishini isbotlaydi. Bu funksiya bir qiymatlidir.

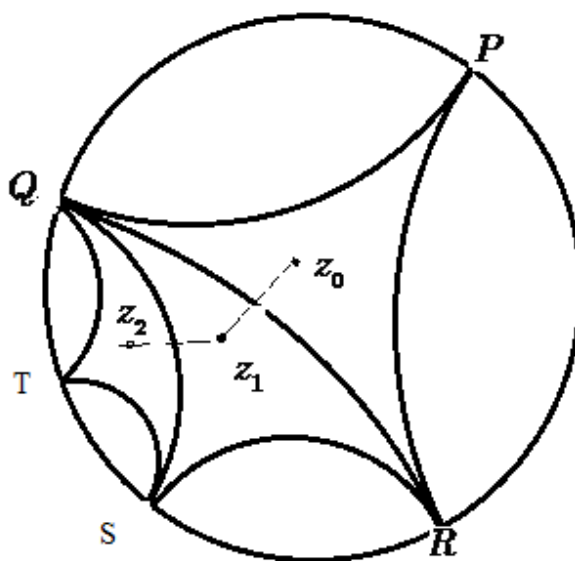


3-rasm

Yuqorida qurilgan $\psi(z)$ analitik funksiya birlik doirada aniqlangan va 0, 1 va ∞ nuqtalardan boshqa barcha qiymatlarni cheksiz martadan qabul qiluvchi funksiya

bo'ldi. Bundan tashqari yuqori yarim tekislikdagi qiymatlar 2-rasmda shtrixlangan sohalarda, quyi tekislikdagi qiymatlar esa shtrixlanmagan sohalarda qabul qilinadi. $(0,1)$, $(1,\infty)$ va $(-\infty,0)$ oraliqlaragi haqiqiy qiymatlar esa uchburchaklarning I, II, III kabi belgilangan tomonlarida erishiladi.(3-rasm).

Simmetriya prinsipiga asosan ABC uchburchakning simmetrik akslantirishlar ketma-ketligi natijasida hosil bolgan biror PQR uchburchak z_0 nuqtasining QR ga nisbatan obrazi bo'lgan z_1 nuqtadagi funksiyaning $\psi(z_1)$ qiymati $\psi(z_0)$ qiymatning qo'shmasidan iborat bo'ladi(4-rasm): $\overline{\psi(z_0)} = \psi(z_1)$. Boshqa bir masalan QS ga nisbatan simmetrik obrazi z_2 nuqtaga olib keladi va $\psi(z_2) = \overline{\psi(z_1)} = \psi(z_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi.



4-rasm

Demak ikki marotaba akslantirish natijasida funksiya qiymatlari oldingi holatga qaytadi. Lekin birlik doirani ortogonal aylanaga nisbatan simetrik akslantirishdan iborat bo'lgan har qanday inversiyasi, kasr chiziqli akslantirishning qo'shmasi orqali ifodalanadi. Shuning uchun ikki karrali akslanirish ya'ni ikkita akslantirish ko'paytmasi birlik doirani o'zini o'ziga akslantiruvchi biror

$z_2 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$ kasr-chiziqli funksiya bilan aniqlanadi. Natijada

$\psi\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) = \psi(z_0)$ munosabat bajariladi. Ketma-ket keluvchi turli obrazlarga

turli kasr-chiziqli funksiyalar mos keladi. Shuning uchun birlik doirani o'z-o'ziga akslantiruvchi cheksiz ko'p kasr-chiziqli akslantirishlar mavjud bo'lishi kerak

$$\left\{ L_n[z] = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \right\}$$

va har bir natural n va istalgan z , $|z| < 1$ uchun $\psi\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right) = \psi(z)$ tenglik

bajarilishi kerak. Bu nuqtai nazardan yuqorida qurilgan $\psi(z)$ Shvartsning modulyar funksiyasi avtomorf funksiyalarning hususiy holini ifoda etadi. Avtomorf funksiyalar birlik doiraning biror avtomorfizmlar gruppasiga nisbatan invariant bo'lgan analitik funksiyalar hisoblanadi. Masalan oddiygina faqat parallel ko'chirishga nisbatan invariant funksiyalar davriylik hususiyatini aks ettiradi.

$w = \psi(z)$ funksiya birlik doirani yuqori va quyi yarim tekisliklarning cheksiz sondagi nushalaridan iborat Riman sirtiga akslaniradi. Bunda har bir yuqori(quyi) yarim tekislik pastki (yuqorigi) uchta yarim tekisliklar bilan haqiqiy o'qning I, II, III oraliqlari bo'yicha tutashgan bo'ladi. Bu sirt ustida berilgan funksiya teskarisi bir qiymatli analitik funksiya bo'lib moduli bo'yicha chegaralangan bo'ladi. Biz bu teskari funksiyani kompleks o'zgaruvchili funksiya sifatida qarab $\omega(w)$ orqali belgilasak u holda $0, 1, \infty$ nuqtalardan o'tmaydigan istalgan egri chiziq bo'yicha analitik davom etuvchi ko'p qiymatli analitik funksiya bo'ladi. Bu ko'p qiymatlar orasida ABC va ADB uchburchak ichiga tushuvchi qiymatlarini $\omega(w)$ ni bosh qiymatlari deymiz.

20-ma'ruza

Butun va meromorf funksiyalarning qiymatlari haqidagi Pikarning kichik teoremasi.

Teorema 1. (Pikar). *O'zgarmasdan farqli har qanday butun funksiya kompleks tekislikdagi bitta nuqtadan boshqa barcha chekli nuqtalarni qiymat sifatida qabul qiladi.*

Isboti. Faraz qilaylik $f(z)$ butun funksiya ikkita turli $a, b \in \mathbb{C}$ nuqtalarni qiymat sifatida qabul qilmasin. U holda ushbu funksiya

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

Ham butun funksiya bo'lib 0 va 1 qiymatlarni qabul qilmaydi. $z_0 \in \mathbb{C}$ ixtiyoriy nuqta uchun $w_0 = g(z_0)$ nuqta atrofida golomorf bo'lgan μ modulyar funksiyani olib, μ^{-1} teskari funksiyasining biror bir qiymatli tarmog'ini qaraymiz. Agar biz $\varphi = \mu^{-1}(g(z))$ funksiyani qarasak, $g(z)$ funksiya μ^{-1} funksiya uchun maxsus nuqtalar hisoblangan 0,1 va ∞ qiymatlarni qabul qilmagani uchun φ funksiya istalgan $\gamma \subset \mathbb{C}$ egri chiziq bo'ylab analitik davom qiladi. $\mathbb{C}$ bir bog'lamli ekanidan monodromiya haqidagi teoremaga asosan, φ funksiya $\mathbb{C}$ da golomorf bir qiymatli funksiya bo'ladi, ya'ni butun funksiya bo'ladi. Lekin μ^{-1} ni barcha qiymatlari birlik doira ichida bo'ladi va natijada φ chegaralangan funksiya bo'ladi. Liuvill teoremasidan bu funksiya o'zgarmas funksiya bo'lishi kelib chiqadi. U holda $g(z)$ va demak $f(z)$ funksiya ham o'zgarmasdir. Bu holat teorema shartiga zid bo'lgani uchun farazimiz noto'g'ri ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Yuqoridagi Pikar teoremasini meromorf funksiyalar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Teorema 2. (Pikar). *Butun kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da o'zgarmasdan farqli har qanday meromorf funksiya $\overline{\mathbb{C}}$ kompleks tekislikdagi ikkita nuqtadan boshqa barcha nuqtalarni qiymat sifatida qabul qiladi.*

Isboti. Faraz qilaylik $f(z)$ meromorf funksiya uchta turli $a, b, c \in \mathbb{C}$ nuqtalarni qiymat sifatida qabul qilmasin. Bu nuqtalarni barchasini chekli deb faraz qilishimiz mumkin. Aks holda birortasi ∞ bo'lsa u holda $f(z)$ butun funksiya bo'lib, yuqorida isbot qilinganidek bu funksiya o'zgarmas bo'lgan bo'lar edi. Quyidagi funksiyanı qaraymiz:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

Bu funksiya butun funksiya bo'lib $\frac{1}{a - c}$ va $\frac{1}{b - c}$ qiymatlarnı qabul qilmaydi.

Yuqorida isbot qilingan 1-teoremadan $g(z)$ va demak $f(z)$ funksiya ham o'zgarmasdir. Bu holat teorema shartiga zid bo'lgani uchun farazimiz noto'g'ri ekan. Teorema isbot bo'ldi.

21-ma'ruza

Analitik funksiyalarning normal oilasi.

Normallik kriteriyasi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning geometrik nazariyasida konform akaslantirishlar bilan bog'liq natijalarning ko'pchilligi umumiylik nuqtai nazaridan analitik funksiyalarning quyuklanishi prinsipiga tayanadi. Biroq bu natijalar o'z navbatida analitik funksiyalarni yaqinlashish masalalarini o'rganishni rivojlantirishni taqazo etadi. Buni ko'rsatish uchun Montel tomonidan ilgari surilgan analitik funksiyalarning normal oilasi tushunchasini kiritamiz.

1-Ta'rif. $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ funksiyalarning cheksiz oilasi B sohada normal deyiladi, agar har bir funksiyalar ketma-ketligidan B ichida biror golomorf funksiyaga yoki ∞ ga tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikni ajratish mumkin bo'lsa. $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ oila $z_0 \in B$ nuqtada normal deyiladi, agar u shu nuqtaning qandaydir atrofida normal bo'lsa.

Agar $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ oila B sohada normal bo'lsa, u holda u har bir $z_0 \in B$ nuqtada normal bo'ladi. Ushbu faktning aksinchasi ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz:

1-teorema. Agar $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ funksiyalar oilasi har bir $z_0 \in B$ nuqtada normal bo'lsa, u holda u B sohada ham normal bo'ladi.

Haqiqatan ham, $B \neq \emptyset$ ni o'z ichiga olmaydi deb hisoblashimiz mumkin. B sohadan ratsional koordinatali barcha nuqtalar to'plamini olamiz va r_k , $k=1,2,\dots$, ketma-ketlikka joylashtiramiz. ρ_k orqali markazi r_k nuqtada bo'lgan doiralar orasida $\mathfrak{M}$ oila normal bo'ladigan eng kattasini radiusini belgilaymiz. ρ_{n_k} sonlar ketma-ketligi nolga faqat va faqat r_{n_k} markazlar B ning chegarasida quyuklashsagina intiladi. $f_n(z)$, $n=1,2,3,\dots$ — $\mathfrak{M}$ oilaning ixtiyoriy funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. $|z - r_1| < \rho_1$ aylanada $\mathfrak{M}$ normalligidan, $f_n(z)$ dan

$|z - r_1| < \frac{\rho_1}{2}$ da biror funksiyaga yoki ∞ ga yaqinlashuvchi $f_{n,1}(z)$ ketma-ketlikni ajratish mumkin. $f_{n,1}(z)$ dan $|z - r_2| < \frac{\rho_2}{2}$ da biror funksiyaga yoki cheksizga tekis yaqinlashuvchi $f_{n,2}(z)$ ketma-ketlikni ajratish mumkin va hakoza. Ushbu jarayonda hosil qilingan $f_{n,n}(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ diagonal ketma-ketlik B sohada biror funksiyaga yoki ∞ ga yaqinlashadi va bu yaqinlashish istalgan $|z - r_k| < \frac{\rho_k}{2}$, $k = 1, 2, \dots$ doirada tekis bo'ladi. U B ning ichida ham tekis yaqinlashadi. Aslida agar $E \subset\subset B$ yopiq to'plam bo'lsa, u yuqoridagi aylanalar bilan qoplab olinadi. Geyne-Borel teoremasiga bu aylanalarning cheklitasi bilan ham E to'plamni qoplash mumkin. Biroq $f_{n,n}(z)$ keta-ketlik tanlangan aylanalarning har birida tekis yaqinlashadi va bundan u E to'plamda ham tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

Agar B sohada normal $\mathfrak{M}$ funksiyalar oilasi biror $z_0 \in B$ nuqtada chegaralangan bo'lsa, u holda u B ning ichida ham tekis chegaralangan bo'ladi.

2-teorema. (Normallik kriteriyasi) *Biror G sohada analitik bo'lgan funksiyalar oilasi $\{f(z)\}$ normal oila bo'lishi uchun bu sohada berilgan funksiyalardan hech biri qabul qilmaydigan 2 ta chekli a va b qiymatlar mavjud bo'lishi yetarlidir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun G sohadagi ixtiyoriy doirada berilgan funksiyalar oilasini normalligini ko'rsatish yetarli. Bu esa G ni avval boshdan doira deb hisoblashimiz mumkinligini anglatadi. Oilaning har bir $f(z)$

funksiyasini $\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$ bilan almashtiramiz. U holda G doirada birga ham,

nolga ham teng bo'lmaydigan $\{\varphi(z)\}$ funksiyalar oilasini hosil qilamiz. Agar biz $\{\varphi(z)\}$ oilani normalligini isbotlasak, bundan $\{f(z)\}$ oila normalligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $\{\varphi_n(z)\}$ funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz va bu funksiyalarning biror

$z_0 \in G$ nuqtadagi qiymatlaridan iborat sonli ketma-ketligini olamiz. Bunda quyidagi ikki holat bo'lishi mumkin:

- a) $\{\varphi_0(z)\}$ 0, 1 va ∞ dan farqli limit nuqtaga ega;
- b) bunday limit nuqta mavjud emas. Birinchi holatda zarur bo'lsa qisman ketma-ketlikga o'tib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = \alpha \neq 0, 1, \infty.$$

α nuqtani shunday bir kichik atrofini tanlab olamizki, u 0, 1 va ∞ nuqtalarni o'zida saqlamasin va bu atrofda $\omega(w)$ funksiyani bir qiymatli tarmog'ini ajratib olamiz, bunda $\omega(\alpha) = \beta$ bosh qiymat bo'lsin. Yetarlicha katta n larda $\{\varphi_n(z_0)\}$ nuqtalar tanlangan atrofga tegishli bo'lganidan, z_0 nuqtaning atrofida $\omega\varphi_n(z)$ analitik funksiya elementlarini hosil qilamiz. Bunda ω qiymatlari tanlangan tarmoqda yotadi. Bu elementlarning har biri G doiraga analitik davom qiladi, chunki $\varphi_n(z)$ - funksiyalar bu doirada analitik bo'lib, ularning barcha qiymatlari o'sha sohada bo'ladi. $\omega(w)$ esa maxsus nuqtalarga ega emas. Analitik davom qildirish natijasida hosil qilingan $\omega\varphi_n(z)$ funksiyalar G doiraga analitik va bir qiymatli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega\varphi_n(z_0) = \beta$ shartni qanoatlantiradi. Bu funksiyalarning barcha qiymatlari birlik doiraga tegishli. Shuning uchun $\{\omega\varphi_n(z)\}$ ketma-ketlik kompakt oila tashkil etadi ya'ni shunday $\{\omega\varphi_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlik topilib, G ichida tekis yaqinlashadi.

$\Omega(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} \omega\varphi_{n_k}(z)$ bo'lsin, bu funksiya $\Omega(z_0) = \beta$ shartni qanoatlantiradi va $|\beta| < 1$ bo'lgani uchun $\Omega(z)$ modul bo'yicha 1 ga teng o'zgarmas funksiya bo'la olmaydi.

Chunki G sohada $|\omega\varphi_{n_k}(z)| < 1$ tengsizlik bajarilib, $|\Omega(z)| \leq 1$ munosabat kelib chiqadi va modul maksimum prinsipiga ko'ra $|\Omega(z)| < 1, z \in G$ bo'ladi. G sohaga tegishli yopiq K doirani qaraymiz. $t = \Omega(z)$ funksiya bu to'plamni birlik doirada yotgan biror yopiq D sohaga akslantiradi. Natijada $\omega = \chi(t)$ funksiya D da tekis uzliksiz bo'lib $\{\chi\omega\varphi_{n_k}(z)\}$ ketma-ketlik K to'plamda $\chi\Omega(z)$ funksiyaga

tekis yaqinlashadi. Shunday qilib birinchi holatda $\{\varphi_n(z)\}$ ketma-ketlikning G soha ichida tekis yaqinlashuvchi $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketligi mavjud bo'lishi kelib chiqdi.

Endi ikkinchi holat ya'ni $\{\varphi_n(z_0)\}$ ketma-ketlik $0, 1$ va ∞ dan farqli limit nuqtalarga ega bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz. Avvalo 1 nuqta bu ketma-ketlik uchun limit nuqta bo'lsin. Umumiylikni buzmaganda $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = 1$ olishimiz mumkin. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz

$$\psi_n(z) = \frac{Ln\varphi_n(z) + 2\pi i}{4\pi i},$$

Bunda $Ln\varphi_n(z)$ funksiyani z_0 nuqtadagi qiymati sifatida bosh qiymatni olamiz va bunga asosan $\lim_{x \rightarrow \infty} Ln\varphi_n(z_0) = 0$ bo'ladi. $Ln\varphi_n(z)$ funksiyalarni G doiraga analitik davom qildirib natijada bu doirada analitik va bir qiymatli bo'lgan $\psi_n(z)$ funksiyalarni hosil qilamiz. Bu funksiyalar $0, 1, \infty$ ni qabul qilmaydi chunki $Ln\varphi_n(z) \neq -2\pi i, 2\pi i, \infty$. z_0 nuqtada esa $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(z_0) = \frac{1}{2} \neq 0, 1, \infty$ munosabat bajariladi. Shuning uchun $\{\psi_n(z)\}$ ketma-ketlikka yuqoridagi birinchi holatdagi mulohazalarni qo'llash mumkin. Ya'ni shunday $\psi_{n_k}(z)$ qisman ketma-ketlik mavjud bo'lib G sohaning ichida biror $\psi(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. $\psi_{n_k}(z)$ funksiyalarning hech biri G sohada $\frac{1}{2}$ qiymatni qabul qilmagani sababli ularning limiti ham bu qiymatni qabul qilmaydi aks holda u o'zgarmas bo'lib qo'ladi (bu Gurvits teoremasidan kelib chiqadi). Bunda G sohada $Ln\varphi_{n_k}(z)$ funksiyalarning ajratilgan bir qiymatli tarmoqlari 0 ga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Bu esa $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ 1 ga tekis yaqinlashishini taqozo qiladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 1$ o'rniga $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \infty$ tengliklarni olsak u holda $\{1 - \varphi_n(z)\}$ yoki $\{1 - \frac{1}{\varphi_n(z)}\}$ funksiyalar ketma-ketligi qarab chiqamiz.

Ularning har bir funksiyasi G sohada analitik va $0, 1, \infty$ qiymatlarni qabul

qilmaydi. Bundan tashqari ularning z_0 nuqtadagi qiymatlari 1 ga yaqinlashadi. Ularga yuqorida qarab chiqilgan hususiy hollarni qo'llab $\varphi_n(z)$ ketma-ketlik G sohaning ichida 0 ga yoki ∞ ga tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikka ega bo'lishini ko'ramiz. Teorema isbotlandi.

22-ma'ruza

Butun va meromorf funksiyalarning qiymatlari haqidagi Pikarning katta teoremasi.

Pikarning kichik teoremasiga asosan kompleks tekislikda har qanday butun funksiya faqat bitta nuqtani meromorf funksiyalar esa ikkita nuqtani istisno tariqasida qabul qilmasligi mumkin ekan. Masalan: $f(z) = e^z$ funksiya 0 qiymatni qabul qilmaydi va $f(z) = \operatorname{tg} z$ meromorf funksiya esa $\pm i$ qiymatlarni qabul qilmaydi. Mazkur natija Pikarning katta teoremasida quyidagicha umumlashtiriladi:

1-Teorema (Pikar) $f(z)$ analitik funksiya o'zining z_0 muhim maxsus nuqtasining istalgan atrofida ko'pi bilan bitta qiymatdan tashqari barcha chekli qiymatlarni qabul qiladi.

Isboti: Umumiylikni buzmaganda, $z_0 = 0$ deb olishimiz mumkin. (Bu xolda $\xi = z - z_0$ yoki $\xi = \frac{1}{z}$ deb almashtirish bajarib boshqa nuqtalarga ham o'tish mumkin). Teskarisini faraz qilamiz, $f(z)$ $z_0 = 0$ nuqtaning biror $|z| < R$ atrofida ikkita chekli a va b qiymatlarni qabul qilmasin. Markazi z_0 nuqtada bo'lgan doiraviy halqalarni quramiz:

$$\Gamma_0\left(\frac{R}{2} < |z| < R\right), \Gamma_1\left(\frac{R}{2^2} < |z| < \frac{R}{2}\right), \dots, \Gamma_n\left(\frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n}\right) \dots$$

va $f_1(z) = f\left(\frac{z}{2}\right), \dots, f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right), \dots$ funksiyalar ketma ketligini olamiz. $f(z)$ funksiya Γ_n xalqada qanday qiymatlar qabul qilsa $f_n(z)$ funksiya Γ_0 xalqada shunday qiymatlarni qabul qilsin. Bundan esa $\{f_n(z)\}$ ketma-ketlik Γ_0 xalqada bir qiymatli bo'lib, a va b qiymatlarni qabul qilamaydigan analitik funksiyalar ketma-ketligi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni, natijada $\{f_n(z)\}$ normal oiladan iborat bo'ladi. $\{f_n(z)\}$ - Γ_0 ni ichida tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib olamiz. Dasavval $F(z)$ limit funksiya uchun $F(z) \neq \infty$ bo'lsin. Unda $|F(z)|$

funksiya $|z| = \rho$, $\frac{R}{2} < \rho < R$ aylanada chegaralangan bo'ladi va natijada $\{f_{n_k}(z)\}$ bu aylanada tekis chegaralanganligi kelib chiqadi. Bu esa $f(z)$ funksiyaning $|f(z)| < M$, $|z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}$, $(k=1,2,\dots)$ tengsizlikni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Natijada modulning maksimum prinsipiga ko'ra $|f(z)| < M$, $0 < |z| \leq \rho$ bo'ladi. $z=0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi ekanidan bunday holat bo'lishi mumkin emas.

Agar $F(z) \equiv \infty$ bo'lsa, u holda $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$ analitik funksiyalar ketma-

ketligi Γ_0 ni ichida nolga tekis yaqinlashadi.

Bu esa $\varphi(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$ funksiyaning $0 < |z| \leq \rho$ sohada chegaralanganligini bildiradi. Demak, $z=0$ nuqta $\varphi(z)$ uchun maxsus nuqta emas va o'z navbatida $f(z)$ uchun ham muhim mahsus nuqta bo'lmaydi va bu teorema shartiga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri va shu bilan teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi kuchaytirilgan variantdagi Pikarning kichik teoremasi natija sifatida kelib chiqadi. *$f(z)$ transendent butun funksiya bitta nuqtadan boshqa har bir chekli A qiymatni cheksiz ko'p nuqtalarda qabul qiladi.*

Haqiqatan ham, agar ikkita chekli a va b qiymatlarni chekli sondagi nuqtalarda qabul qilsa, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtani atrofi mavjud bo'lib, funksiya ularning birortasini ham qabul qilmaydi. Bu esa yuqorida isbotlangan teoremaga zid. ($f(z)$ uchun $z = \infty$ muxim maxsus nuqta)

Yuqoridagi natija quyidagicha umumlashadi:

Chekli tekislikda $f(z)$ transendent meromorf funksiya ikkita nuqtadan boshqa har bir chekli A qiymatni cheksiz ko'p nuqtalarda qabul qiladi.

Pikar teoremasini analiz qilib, umumiy xulosa qilishimiz mumkin.

Ushbu teoremaning isbotlanishi jarayonada analitik funksiyalarning yana bir muhim hususiyatiga ega bo'lishini ko'rish mumkin. Ya'ni $f(z)$ analitik funksiya

o'zining z_0 muhim maxsus nuqtasining istalgan atrofida biror a qiymatni qabul qilsa bu $f(z) = a$ tenglama yechimlari z_0 nuqtadan chiquvchi biror nur (yoki nurlar) atrofida tebranar ekan. Bu esa $E_a = \{f(z) = a\}$ to'plam geometriyasini o'rganishda muhim natija hisoblanadi.

Endi $f_n(z) = f(\frac{z}{2^n})$ bir birining ichida yotuvchi quyidagi xalqalarni qaraymiz.

$$\Gamma'_0(\frac{R}{2^4} < |z| < R), \Gamma'_1(\frac{R}{2^5} < |z| < \frac{R}{2}), \dots, \Gamma'_n(\frac{R}{2^{n+4}} < |z| < \frac{R}{2^n}) \dots$$

$\{f_n(z)\}$ funksiyalar oilasini Γ'_0 xalqada normal bo'lmasligini isbotlaymiz.

Teskarisini faraz qilamiz. Unda bu ketma-ketlikning shunday qisman ketma-ketligi

topiladiki, Γ'_0 da tekis yaqinlashadi, shuningdek, $\Gamma(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2})$ yopiq xalqada

tekis yaqinlashadi. $F(z)$ limit funksiya ixtiyoriy qisman ketma-ketlikda aynan ∞

ga teng bo'lishi kerak. Teskarisi o'rinli bo'lishini faraz qilsak, Pikarning katta

teoremasida yuritilgan fikrga ko'ra biror $0 < |z| \leq \rho$ da $f(z)$ moduli bo'yicha

chegaralangan bo'ladi va bunday bo'lishi mumkin emas. Ammo, Γ da ixtiyoriy

tekis yaqinlashuvchi $\{f_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlik aynan cheksizga intilishidan,

$\{f_n(z)\}$ ketma-ketlikning o'zi ham Γ da cheksizga tekis yaqinlashishi kelib

chiqadi. Aksincha bo'lgan holda shunday $N > 0$ soni topilib, Γ ga tegishli z_k

nuqtalar ketma-ketligi va shunday $\{n_k\}$ o'suvchi natural sonlar ketma-ketligi

mavjud bo'ladiki, $|f_{n_k}(z_k)| \leq N$ bo'ladi. Lekin bu holat $\{f_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-

ketlik Γ da ∞ ga tekis yaqinlashuvchi boshqa $\{f'_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlikni o'z

ichiga olishiga zid bo'ladi. Shunday ekan, $\{f_n(z)\}$ ketma-ketlik Γ'_0 da normal oila

bo'ladi. Bundan $\{f_n(z)\}$ Γ da ∞ ga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak,

yetarlicha katta N soni uchun Γ xalqaning nuqtalarida yetarlicha katta n lar

uchun $|f_n(z)| > N$ tengsizlik bajariladi, ya'ni boshqacha qilib aytganda, $n \geq \nu(N)$

va $z \in \Gamma$ uchun $\left|f(\frac{z}{2^n})\right| > N$ bo'ladi.

z nuqta $\Gamma(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2})$ xalqadan olinganda, $\frac{z}{2^n}$ nuqta esa

$\gamma_n(\frac{R}{2^{n+3}} < |z| < \frac{R}{2^{n+1}})$ xalqaga tegishli bo'ladi. $\gamma_n(n = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \dots)$ xalqlar bir-

birining ustiga tushib kirishib boradi va $0 < |z| < \frac{R}{2^{\nu+1}}$ sohani to'ldiradi. Natijada bu

sohaning barcha nuqtalarida $|f(z)| > N$ tengsizlik bajariladi. Boshqacha qilib

aytganda $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ bo'ladi va bu esa $z = 0$ muhim maxsus nuqta ekaniga zid

bo'ladi.

Biz $\{f_n(z)\}$ funksiyalar oilasini Γ'_0 xalqada normal bo'lmasligini isbotladik.

Bundan kelib chiqadiki, bu xalqada kamida bitta shunday ξ nuqta mavjudki, bu

nuqtaning har qandaning har qanday atrofida $\{f_n(z)\}$ oila normal bo'lmaydi.

Haqiqatan, agar Γ'_0 xalqaning har bir nuqtasining biror atrofida $\{f_n(z)\}$ oila

normal bo'ladigan bo'lsa, u holda bu oila Γ'_0 da normal bo'lar edi.

$|z - \xi| < \varepsilon$ - ξ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofi bo'lsin. $\{f_n(z)\}$ funksiyalar

oilasi bu atrofida normal bo'lmasligidan, bu funksiyalar oilasining barcha

funksiyalari bu atrofda ko'pi bilan bitta qiymatdan tashqari barcha chekli

qiymatlarni qabul qiladi. Aniqroq qilib aytganda ixtiyoriy A chekli son uchun

(ko'pi bilan birgina A_0 qiymatdan tashqari) shunday $\{f_{n_k}(z)\}$ funksiyalar

yetarlicha katta n_k nomerli funksiyalar topilib, biror z_k nuqtada A qiymatni qabul

qiladi. $\{f_{n_k}(z)\} = f(\frac{z}{2^{n_k}})$ ekanligini inobatga olib va $\frac{z_k}{2^{n_k}}$ ni ξ_k orqali belgilasak,

$f(\xi_k) = A$ tenglikni hosil qilamiz. Ravshanki, $\{\xi_k\}$ ketma-ketlik $z = 0$ nuqtaga

yaqinlashadi va $z = 0$ nuqtadan chiquvchi va $|z - \xi| < \varepsilon$ aylana bilan urinuvchi

burchak ichida joylashadi. ξ nuqta tayinlangan, ε yetarlicha kichik ekanidan biz

quyidagi tasdiqqa kelamiz :

2-teorema. z_0 maxsus nuqtasi bo'lgan $f(z)$ analitik funksiya uchun bu nuqtadan chiquvchi kamida bitta shunday nur topilib, bu nurga nisbatan simmetrik bo'lgan istalgan burchakda $f(z)$ funksiya ko'pi bilan bitta nuqtadan tashqari

barcha chekli qiymatlarni z_0 ga yaqinlashuvchi cheksiz nuqtalar ketma-ketligida qabul qiladi.

Ravshanki, bu teorema Pikarning katta teoremasini aniqlashtirilgan varianti hisoblanadi. Aynan Pikar teoremasi, $f(z)$ ni A nuqtalari maxsus nuqtani atrofida qanday joylashganligi haqida ma'lumot bermaydi. Mazkur teoremada esa ixtiyoriy A uchun funksiyaning A nuqtalari biror nurni atrofida guruhlangan holda bo'lishini ta'kidlaydi (Bunday nurlar bir nechta yoki cheksiz bo'lishi mumkin). Teoremada aytib o'tilgan nur (yoki nurlar) Julia nurlari deyiladi. $z_0 = \infty$ bo'lgan holda biz $\xi = \frac{1}{z}$ almashtirish bajaramiz. Hususan, butun funksiyalar uchun quyidagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

3-Teorema. *$f(z)$ -transendent butun funksiya bo'lsin. U holda tekislikda koordinata boshidan farqli shunday nuqtalar topilib, bu nuqtlarning istalgan atrofida $f(2^n z)$ funksiyalar oilasi normal bo'lmaydi. Koordinatalar boshidan chiquvchi va shunday nuqtalar orqali o'tuvchi nur uchun bu nurga nisbatan simmetrik bo'lgan ixtiyoriy kichik burchagi ixtiyoriy A chekli qiymat uchun $f(z)$ funksiyaning A nuqtalarining cheksiz to'plamini o'z ichiga oladi.*

Bunda e^z funksiyaning misol tariqasida keltirishimiz mumkin. U ikkita Julia nuriga ega. Mavhum o'qni musbat va manfiy yo'nalishlari bo'yicha. Haqiqatan, agar $A \neq 0$ bo'lsa, u holda $e^z = A$ tenglamaning ildizi

$$z_k = \operatorname{Ln} A = \ln |A| + i \arg A + 2k\pi i$$

ko'rinishda bo'ladi. Aniqlik uchun k musbat son bo'lsin deb faraz qilamiz. z_k vektor va mavhum o'qni musbat yo'nalishi ortasidagi burchakning tangensi

$\frac{\ln |A|}{\arg A + 2k\pi}$ ga teng ekanidan u $k \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bundan kelib chiqadiki,

biror nomerdan boshlab z_k nuqtalar mavhum o'qning musbat qismiga nisbatan simmetrik bo'lgan ixtiyoriy tayinlangan burchakka tegishli bo'ldi. Huddi shunday natijani k manfiy son bo'lganda mavhum o'qning manfiy yo'nalishiga nisbatan olish mumkin. Shuni ta'kidlab o'tish joizki, ixtiyoriy atrofida $\{e^{2^n z}\}$ funksiyalar

oilasi normal bo'lmaydigan nuqtalar mavhum o'qning barcha nuqtalari bo'ladi. Haqiqatan, bu nuqtalarning har biri uchun $|e^{2^n z}| = 1$ bo'lib o'ng yoki chap tekisliklarida joylashgan ixtiyoriy nuqtalarda $\{e^{2^n z}\}$ ketma-ketlik mos ravishda ∞ yoki 0 qiymatlarga intiladi. Bundan kelib chiqadiki, mavhum o'qning nuqtalari uchun $\{e^{2^{n_k} z}\}$ ketma-ketlik tekis yaqinlashadigan atrof mavjud emas ekan.

ADABIYOTLAR.

1. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Част 2, Москва, «Наука», 1969.
2. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966 г.
3. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. В 2-х т. – М.: Наука, 1968. Т.2. – 624с.
4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1987 г.
5. И.И. Привалов. Введение в теории функций комплексного переменного М., “Наука” 1977.
6. С.Х. Сирожиддинов, М.С. Салохитдинов, Ш. Максудов. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Т. “Ўқитувчи”, 1979.
7. Г. Худайберганов. «Комплекс анализ» маърузалар матни, 2-қисм, Қарши, «Насаф» нашриёти, 2004.
8. А.Садуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров, А. Ворисов, Т. Туйчиев. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ) 3-қисм, “Ўзбекистон”, 2000 й.
9. Л.И. Волковский, Г.А. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., “Наука” 1975.
10. М. А. Евграфов. Сборник задач по теории аналитических функций. М., “Наука” 1972.