

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“MEXANIKA” KAFEDRASI

SHERBOYEV ASQAR

**HARAKAT TENGLAMALARI PARAMETRIK KO'RINISHDA
BERILGAN MODDIY NUQTA HARAKATINI TADQIQ ETISHDA
MAPLE DASTURIDAN FOYDALANISH**

“5440200-mexanika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Himoyaga ruxsat berildi

Fakultet dekani:

prof. A.Soleyev

Kafedra mudiri:

prof. X.Xudoynazarov

Ilmiy rahbar :

dots. X.Buranov

M.O'.

Samarqand 2012

**HARAKAT TENGLAMALARI PARAMETRIK KO'RINISHDA
BERILGAN MODDIY NUQTA HARAKATINI TADQIQ ETISHDA
MAPLE DASTURIDAN FOYDALANISH**

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1-§ Asosiy tushunchalar	6
2-§ Nuqta harakatining berilish usullari	7
3-§ Nuqta tezligi. Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezligi	10
4-§ Nuqtaning tezlanishi.....	14
5-§ Masalalar.....	24
Xulosa.....	31
Adabiyotlar ro'yxati.....	32

KIRISH

Texnikaning hech bir sohasini mashina qismlarining harakatlarisiz tasavvur etish qiyin. Qattiq jismlar va mexanik sistemalarning harakatlari bir necha asrlardan buyon tadqiq etib kelinadi, juda ko'p olimlar tomonidan harakat etayotgan mexanik sistemalarning turli nuqtai nazardan tadqiq etilgan, va bu mavzuda ilmiy-nazariy kitoblar juda ko'p chop etilgan va hozirgi zamonda ham chop etilmoqda.

Masalaning qo'yilishi. Nazariy mexanikaning kinematika kursini o'tish jarayonida asosiy e'tibor nuqta yoki qattiq jismning harakatlari parametrik ko'rinishda berilgan holda uning harakat parametrlarini tekshirish – nuqta trayektoriyasini, tezligini, urinma, normal va to'la tezlanishini, trayektoriyaning egrilik radiusini topishga asosiy e'tibor beriladi.

Ushbu malakaviy bitiruv ishida harakati parametrik ko'rinishda berilgan nuqtaning harakatini tadqiq etish jarayonda zamonaviy hisoblash mashinalari – kompyuterlarni qo'llashga bag'ishlangan. Maple dasturi vositasida nuqta harakatining asosiy xarakteristikalarini aniqlash va nuqtaning trayektoriyasi bo'ylab harakatlanishi davomidagi uning asosiy xarakteristikalarining o'zgarishini tadqiq eish masalasi qaralgan.

Mavzuning dolzarbligi. Nazariy mexanika fani bo'yicha ko'pgina adabiyotlarda nuqta, mexanik sistema va qattiq jism kinematikasida tadqiq etilayotgan obyekt harakatlari tadqiq etish jarayonida uning harakatini tasavvur etish talabalarda muammolar keltirib chiqaradi. Tekshirilayotgan obyektning harakati parametrik ko'rinishda berilganda nuqta yoki qattiq jismlarning harakatlari zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanish masalalari e'tiborsiz qolib kelgan.

Hayotimizga kompyuter texnologiyalarining kirib kelganiga qator yillar bo'lgan bo'lsa hamki, hamon ulardan mexanik sistemalar harakatlarini tadqiq

etishda foydalanish juda oqsab kelayapti. Shu jihatdan malakaviy bitiruv ishida qarab o'tilgan masalalar dolzarbligicha qolmoqda.

Ishning maqsad va vazifalari. Malakaviy bitiruv ishida nuqta va mexanik sistemalar harakatini o'rganishda zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanish asosiy maqsad qilib olingan. Dasturlash usullarining sodda dasturi Maple olingan bo'lsa-da, malakaviy bitiruv ishida qarab o'tiladigan masalalar kelgusi o'quv yillarida mexanika yo'nalishida tahsil oladigan talabalarga foydali qo'llanmaga aylanishi asosiy vazifa sifatida qo'yilgan.

Ilmiy-tadqiqot metodlari. Malakaviy bitiruv ishida qaralayotgan metodlar nazariy mexanikaning kinematika bo'limida keng qo'llaniladi. Ishda nuqta harakati parametrik ko'rinishda berilgan holda uning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi, trayektoriyaning egrilik radiuslarini topish jarayonida *Maple* dasturidan foydalaniladi. Bundan tashqari nuqta harakati davomidagi asosiy kinematik xarakteristikalarining o'zgarishini animatsiya sifatida tasvirlash uchun prosedura-programma tuzilgan.

Ishning ilmiy va amaliy ahamiyati. Malakaviy bitiruv ishida olingan natijalar o'z ichida harakatlanuvchi jismlarni saqlaydigan qurilmalar qo'llaniladigan texnikaning har bir sohasida mehnat qilayotgan injener-texniklar, matematika, mexanika, amaliy matematika, fizika mutaxassisliklari talabalarini o'qitish jarayonida foydali bo'ladi.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish, beshta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, kirish qismida ishning mohiyati qisqacha yoritilgan. Birinchi paragrafda nuqta kinematikasining boshlang'ich tushunchalari keltirilgan. Ikkinchi paragrafda nuqta harakatining berilish usullari – tabiiy usul, koordinatalar usuli va vektor usullari haqida qisqacha ma'lumotlar berilgan. Uchinchi paragrafda harakati turli usullarda berilgan nuqtaning tezligini aniqlash formulalari keltirilgan. To'rtinchi paragrafda nuqtaning tezlanishi (urinma, normal va to'la) haqida ma'lumotlar berilib,

hisoblash formulalari keltirilgan. Beshinchi paragrafda harakati parametrik ko'rinishda berilgan nuqtaning asosiy kinematik xarakteristikalarini – trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi, egrilik radiusini topish uchun dastur tuzilgan, hamda ushbu dastur yordamida bir masala yechib ko'rsatilgan. Bundan tashqari shu nuqtaning harakati davomida ushbu parametrlarni o'zgarishi animasion tarzda namoyish etish uchun prosedura-programma tuzilgan. Chizmalar shaxsiy kompyuterlardan foydalanilgan holda Maple 7.0 dasturi yordamida olingan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni. Malakaviy bitiruv ishida harakati parametrik ko'rinishda berilgan nuqtaning asosiy kinematik xarakteristikalarini Maple dasturidan foydalanilgan holda topish uchun programma tuzilgan. Nuqtaning trayektoriyasi qurilgan. Dastur orqali nuqtaning vaqtning turli fiksirlangan paytlari uchun tezligi, urinma tezlanishi, to'la tezlanishi, normal tezlanishi va egrilik radiusi topib ko'rsatilgan.

1-§. Asosiy tushunchalar

Moddiy ob'yektlarning yoki moddiy nuqtaning harakati fazoda vaqt o'tishi bilan sodir bo'ladi. Kinematika geometriyadan shu bilan farq qiladiki, kinematikada ob'yektlarning fazoda ko'chishida uni ko'chish vaqti ham e'tiborga olinadi. Demak, kinematikada ob'yektlarning ixtiyoriy paytdagi holati uning geometrik koordinatalaridan tashqari vaqtga ham bog'liq bo'lar ekan. Shuning uchun ham kinematikani ba'zan to'rt o'lchovli fazodagi geometriya deb ham atash mumkin. To'rtinchi koordinata sifatida vaqt olinadi. Vaqt bu shunday o'zgaruvchiki, u fazoda ham va shu fazoda harakatlanuvchi ob'yektga ham bog'liq emas, ya'ni fazoni hamma joyida bir xil o'zgaradi. Moddiy ob'yektning harakati boshqa bir ob'yektga, ya'ni sanoq ob'yektiga nisbatan kuzatiladi. Sanoq ob'yektiga biror koordinalar sistemasini mahkamlab, moddiy ob'yektning harakati shu sanoq sistemasiga nisbatan o'rganiladi.

Vaqtning harakatdan bog'liqligisligi shundan iboratki, har xil sanoq sistemalariga nisbatan harakatlanuvchi jismlar uchun vaqt bir xil o'zgaradi. Mexanik masalalarni yechishda vaqtning hisob boshi har safar kelishib olinadi. Texnik masalalarini yechishda, odatda, Yerga qo'zg'almas qilib mahkamlangan sanoq sistemi olinadi. Yerga nisbatan qo'zg'almas bo'lgan sanoq sistemasiga asosiy yoki **qo'zg'almas sanoq sistemi** deyiladi. Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan jismning vaziyati vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, jism tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda deyiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o'tishi bilan jismning vaziyati o'zgarib tursa, jism shu sanoq sistemasiga nisbatan harakatda deyiladi. Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan ixtiyoriy paytda jismning vaziyatini aniqlash mumkin bo'lsa, uning harakati shu sanoq sistemasiga nisbatan berilgan deyiladi.

Qattiq jismning harakati uni tashkil qiluvchi nuqtalarning (*zarrachalarining*) harakati bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham dastlab nuqta kinematikasi, undan keyin qattiq jism kinematikasi o'rganiladi.

Ko'chish va harakat kinematikaning asosiy tushunchalari hisoblanadi. Biror sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning Δt vaqt oralig'ida fazoda bir holatdan boshqa bir holatga ixtiyoriy ravishda o'tishiga uning ko'chishi deyiladi. Nuqtaning ko'chishi uning boshlang'ich va oxirgi holatlari hamda o'tgan Δt vaqt oralig'i bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning yoki moddiy nuqtaning holati fazoda maxsus parametrlar (*koordinatalar*) bilan aniqlanadi. Jismning harakati esa bu parametrlar bilan vaqt orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamalar bilan beriladi.

Kinematikaning asosiy masalasi: absolyut qattiq jismning (moddiy nuqtaning) berilgan harakat tenglamalariga qarab, uning barcha kinematik xarakteristikalarini (barcha nuqtalarning trayektoriyalari, tezliklari, tezlanishlari va h.k.) topishdan iborat.

Nuqta kinematikasida harakatning berilish usullariga qarab, nuqtaning kinematik xarakteristikalarini topish o'rganiladi. Nuqta kinematikasida trayektoriya tushunchasi asosiy hisoblanadi. Trayektoriyaning ko'rinishiga qarab, nuqtaning harakati to'g'ri yoki egri chiziqli harakatlarga bo'linadi.

2-§. Nuqta harakatining berilish usullari.

Nuqtaning harakati bir necha xil usullar bilan berilgan bo'lishi mumkin. Agar nuqtaning harakati biror usulda berilgan bo'lsa, tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan ixtiyoriy paytda nuqtaning holatini aniqlash mumkin.

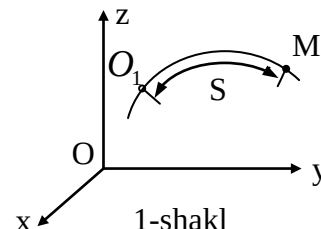
Tabiiy usul. Biror sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning trayektoriyasi berilgan bo'lsa, uning harakati tabiiy usulda berilgan deyiladi. Nuqtaning trayektoriyasi Oxyz koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo'lsin (1-shakl). Trayektoriyaning biror O_1 nuqtasini sanoq boshi deb qabul qilib, trayektoriya bo'ylab musbat $O_1M = S$ yo'nalishini tanlaymiz. Nuqtaning boshlang'ich O_1 holati bilan keyingi M holati orasidagi S yoy vaqtning funksiyasi ko'rinishida berilgan

bo'lsa, bu qonunga asosan nuqtaning ixtiyoriy paytda trayektoriya ustidagi holatini bir qiymatli aniqlash mumkin (1-shakl).

Agar vaqtning har bir payti uchun nuqtaning holatini tasvirlovchi masofa aniqlangan bo'lsa, ya'ni

$$S = f(t) \quad (1)$$

bog'lanish berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati tabiiy usulda aniqlangan deyiladi. (1) tenglamaga nuqtaning harakat tenglamasi deyiladi.



Aniqlanishiga ko'ra $S=f(t)$ funksiya qo'yidagi shartlarni qanoatlantiradi: bir qiymatli, chunki nuqta bir vaqtning o'zida fazoning turli joyida bo'la olmaydi; uzluksiz, bu degani harakat uzluksiz, ya'ni t vaqtning cheksiz kichik o'zgarishiga, S masofaning cheksiz kichik o'zgarishi mos keladi; differensiallanuvchi. Bu shartlarning zaruriyligi kinematika va dinamikaning asosiy talablaridan kelib chiqadi.

Agar $S=C=const$ bo'lsa, bu nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda ekanini bildiradi.

Koordinatalar usuli. Nuqtaning holati koordinatalar usulida berilgan bo'lishi uchun: sanoq ob'yektiga mahkamlangan biror koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanuvchi nuqtaning koordinatalari vaqtning funksiyasi ko'rinishida berilishi kerak.

Uch o'lchovli fazoda nuqtaning holati q, q_2, q_3 koordinatalar bilan aniqlanadi. Bu koordinatalarga egri chiziqli koordinatalar deyiladi. Demak, nuqtaning koordinatalari

$$q=q(t), \quad q_2= q_2(t), \quad q_3= q_3(t) \quad (2)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilgan hisoblanadi.

Oldingi holdagidek, bu yerda ham hamma funksiyalar bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanuvchi deb qaraladi.

Agar nuqtaning holati to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida berilgan bo'lsa, nuqtaning ixtiyoriy paytidagi holati

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (3)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

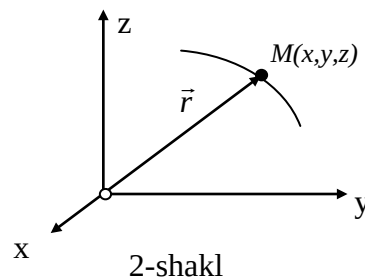
(3) tenglamalar bir tomondan nuqtaning harakat qonunini ifodalaydi, ya'ni vaqtning ixtiyoriy paytida x, y, z koordinatalarni va demak M nuqtaning holatini aniqlash imkonini beradi, ikkinchi tomondan trayektoriyaning parametrik tenglamalarini ifodalaydi. Bu tenglamalardan t parametrni yo'qotish mumkin bo'lsa, qo'yidagi tenglamalar sistemalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0; \\ \chi(x, z) = 0, \end{cases} \begin{cases} \psi(y, z) = 0; \\ \chi(x, z) = 0, \end{cases} \begin{cases} \chi(x, z) = 0; \\ \psi(y, z) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Bu sistemalarning har biri nuqta trayektoriyasini ikkita sirtning kesishishi ko'rinishida tasvirlaydi.

Nuqta harakatini o'rganishda boshqa koordinatalar sistemalaridan ham foydalanish mumkin. Masalan, silindrik, sferik va qutb koordinatalar sistemalari.

Vektor usuli. Nuqtaning ixtiyoriy paytdagi holatini biror markazga nisbatan uning radius-vektori bilan aniqlash mumkin bo'lsa, ya'ni nuqtaning holatini aniqlovchi radius-vektor t vaqtning funksiyasi ko'rinishda berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati vektor usulida berilgan



deyiladi. Ta'rifga asosan biror O markazga nisbatan nuqtaning holatini aniqlovchi radius-vektor vaqtning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

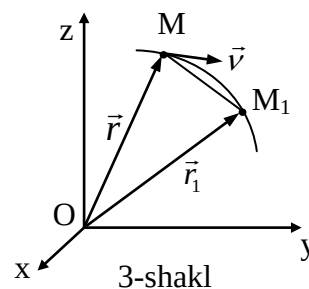
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (5)$$

Agar nuqtaning dekart koordinatalari x, y, z bo'lsa, uning koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektorining proyeksiyalari ham x, y, z bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (6)$$

3-§. Nuqta tezligi. Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezligi

Agar nuqtaning harakat trayektoriyasi egri chiziqdan iborat bo'lsa, uning bunday harakatiga egri chiziqli harakat deyiladi. Nuqta harakatining asosiy xarakteristikalaridan biri uning tezligi hisoblanadi. Harakatlanuvchi nuqtaning qaralayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan t paytdagi M holati $\vec{r}$ radius-vektor



bilan, $t + \Delta t$ paytdagi holati $\vec{r}_1$ radius-vektor bilan aniqlansin (3-shakl). Δt vaqt oralig'ida harakatlanuvchi nuqtaning radius-vektori $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ ga o'zgarsin (3-shakl).

$$\vec{v}^* = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

nisbatga nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik deyiladi.

Demak, nuqtaning o'rtacha tezligi $\Delta \vec{r}$ vektor yo'nalishidagi, ya'ni harakat yo'nalishidagi vektor bo'lar ekan.

O'rtacha tezlikning Δt vaqt oralig'i nolga intilgandagi (ba'zan oniy tezlik deb ham ataladi) limitik holati nuqtaning ixtiyoriy t paytidagi tezlikni ifodalaydi, ya'ni

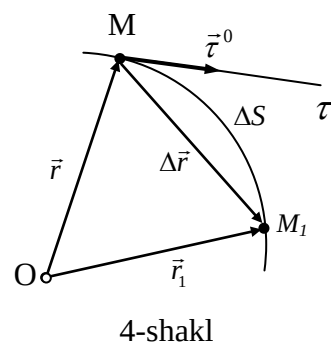
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Shunday qilib, nuqtaning ixtiyoriy paytidagi tezligi vektor kattalik bo'lib, nuqtaning radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ vektorning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik holati trayektoriyaning urinmasi bilan ustma-ust tushadi, demak, tezlik vektori trayektoriyaning urinmasi bo'ylab, harakat yo'nalishi tomonga qarab yo'nalgan vektordir. Tezlik vektorini quyidagicha almashtiramiz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s}. \quad (2)$$

(2) tenglikning o'ng tomonidagi $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ko'paytmani qaraymiz. $|\Delta S|$ va $|\Delta \vec{r}|$ miqdorlar bir xil tartibli kichik miqdorlar ekanligidan

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta S|} = 1$$



bo'ladi (4-shakl). Demak, $\Delta \vec{r} / \Delta s$ miqdorning $\Delta S \rightarrow 0$ (yoki) $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik holati nuqtaning urinmasi bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni ifodalaydi, ya'ni

$$\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}^0,$$

bu yerda $\vec{\tau}^0$ -urinmaning musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan birlik vektor. Shunday qilib, (2) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}^0. \quad (3)$$

$v = \frac{ds}{dt}$ miqdor tezlikning algebraik qiymati modulini bildiradi, yoki tezlik trayektoriyaning M nuqtasida o'tkazilgan urinmadagi proyeksiyasini bildiradi, ya'ni

$$v = v_\tau = \frac{ds}{dt}. \quad (4)$$

Nuqtaning radius-vektorini uning proyeksiyalari orqali yozamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Tezlikning ta'rifiga asosan:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (5)$$

Tezlik vektorini kordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozamiz:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (6)$$

(5) va (6) ifodalarni solishtirib, tezlikning proyeksiyalari uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (7)$$

Shunday qilib, tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari nuqtaning mos koordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarga teng bo'lar ekan.

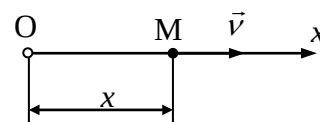
Tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishini topish mumkin:

$$\begin{aligned} v = |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \\ \cos(\vec{v}, \wedge x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}, \quad \cos(\vec{v} \wedge y) = \frac{v_y}{\dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\dot{y}}, \\ \cos(\vec{v}, \wedge z) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\dot{y}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Agar nuqtaning harakat trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, bunday harakatga to'g'ri chiziqli harakat deyiladi. Nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, koordinatalar o'qlaridan bittasini masalan, Ox o'qini harakat to'g'ri chizigi bo'ylab yo'naltiramiz. U holda tezlikning qolgan o'qlaridagi proyeksiyalari aynan nolga teng bo'ladi (5-shakl). Natijada nuqtaning tezligi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v = |\dot{x}|.$$

Shunday qilib, to'g'ri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezligi masofadan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng ekan.



5-shakl

Agar harakatning berilgan qismida $v = \frac{dx}{dt}$ tezlik va x koordinata bir xil ishoraga ega bo'lsa, nuqtaning bu holdagi harakatiga to'g'ri harakat deyiladi. Agar v va x lar har xil ishorali bo'lsa nuqtaning bunday harakatiga teskari harakat deyiladi.

Agar nuqtaning tezligi vaqtning biror paytida nolga teng bo'lsa, shu paytda x masofa o'zining statsionar qiymatiga ega bo'ladi. x o'zining maksimum yoki minimum qiymatiga erishgan paytda nuqtaning tezligi nolga teng bo'lib, shu payt tezlik o'zining yo'nalishini uzgartiradi va harakat agar teskari bo'lsa, to'g'ri harakatga o'tadi.

Agar nuqtaning tezligi qandaydir vaqt oralig'ida nolga teng bo'lsa, shu vaqt oralig'ida $x = \text{const}$ bo'lib, nuqta tinch holatda bo'ladi.

Tezlikning o'lchov birligi: $[v] = \frac{[uzunlik]}{[vaqt]}$. Tezlikning o'lchov birligi sifatida: *sm/sek, m/sek, km/soat* olinadi.

Agar butun harakat davomida nuqtaning tezligi o'zgarmas, ya'ni $v = v_0 = \text{const}$ bo'lsa, nuqtaning bunday harakatiga to'g'ri chiziqli tekis harakat deyiladi.

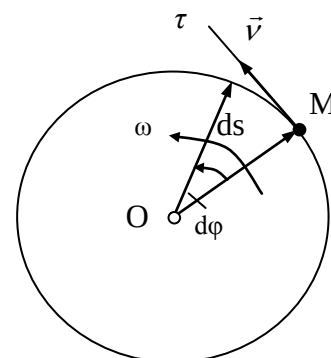
$$v = \frac{dx}{dt} = v_0.$$

Bundan

$$x = x_0 + v_0 t, \quad (9)$$

bu yerda x_0 -nuqtaning boshlang'ich koordinatasi. (9) tenglama to'g'ri chiziqli tekis harakat tenglamasini ifodalaydi.

Aylana bo'ylab harakatlanayotgan nuqtaning tezligi. Burchak tezligi. Nuqtaning R radiusli aylana



6-shakl

bo'ylab harakatini qaraymiz. Bu holda M nuqta tezligining son qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt},$$

bu yerda $dS = R d\varphi$.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

miqdorga R radiusning aylanish burchak tezligi deyiladi.

Shunday qilib, aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqta tezligining miqdori quyidagicha topiladi:

$$v = R\omega. \quad (2)$$

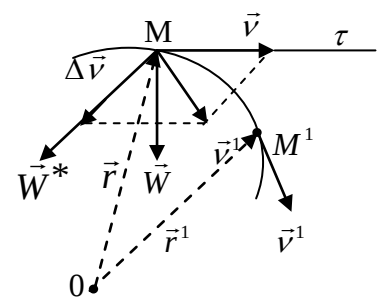
Tezlik vektori aylana urinmasi bo'ylab, harakat yo'nalishi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

4-§. Nuqtaning tezlanishi

Moddiy nuqtaning harakat qonuni vektor yoki koordinata usulida berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ yoki } x=x(t), y=y(t), z=z(t). \quad (1)$$

Moddiy nuqta (1) qonun bo'yicha harakatlanib, vaqtning biror t paytida M holatda va tezligi $\vec{v} = \vec{v}(t)$, $t + \Delta t$ paytda M^1 holatda va tezligi $\vec{v}^1 = \vec{v}^1(t + \Delta t)$ bo'lsin (7-shakl). $\vec{v}'$ vektorni o'z-o'ziga parallel ravishda M nuqtaga ko'chiramiz (7-shakl). U holda $\vec{v} - \vec{v}' = \Delta \vec{v}$, bu yerda $\Delta \vec{v}$ - tezlikning Δt vaqt oralig'ida erishgan



7-shakl

orttirmasi. $\Delta \vec{v}$ ning Δt ga nisbati nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanishi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}^* = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2)$$

$\vec{W}^*$ o'rtacha tezlanishining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitiga nuqtaning berilgan t paytdagi tezlanishi deyiladi, ya'ni

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3)$$

yoki tezlikning ta'rifiga asosan:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (4)$$

Shunday qilib, nuqtaning tezlanishi vektor kattalik bo'lib, tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki radius-vektordan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo'lar ekan. $\vec{W}^*$ yoki $\Delta \vec{v}$ vektor $M\tau$ urinmani qaysi tomonida yotsa, $\vec{W}$ tezlanish vektori ham o'sha tomonda yotadi, shuning uchun u hamma vaqt trayektoriyani botiq tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

Nuqta trayektoriyasining $M\tau$ urinmasi va M nuqta orqali o'tuvchi tekislikning M nuqta M nuqtaga intilgandagi limitik holatiga trayektoriyani M nuqtasidagi yopishma tekisligi deyiladi. Egri chiziq tekis egri chiziqdan iborat bo'lsa, uning yopishma tekisligi egri chiziq tekisligining o'zi bo'ladi.

(3) tenglikka asosan $\vec{W}$ vektor $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ vektor yotgan tekisligining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik tekisligida yotadi. Demak tezlanish vektori $\vec{W}$ yopishma tekislikda yotib, trayektoriyani botiq tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi.

Nuqta radius-vektorini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini ikki marta vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

Bundan

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \quad (5)$$

tezlanish vektorining moduli

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (6)$$

yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\vec{W}, \wedge x) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \wedge y) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \wedge z) = \frac{W_z}{W}. \quad (7)$$

(5) tenglikka asosan, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari mos ravishda nuqta koordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilalarga teng bo'lar ekan.

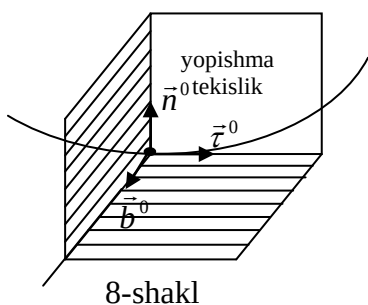
Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, koordinata o'qlaridan bittasini, masalan x o'qini harakat to'g'ri chizigi bo'ylab yo'naltiramiz u holda nuqta tezlanishining proyeksiyalari

$$W_x = \ddot{x}, \quad W_y = 0, \quad W_z = 0.$$

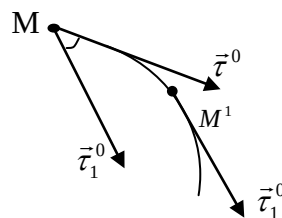
bo'ladi. Tezlanish vektori x o'qi bo'ylab yo harakat yo'nalishi bilan bir xil yoki harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

Agar $\vec{W}$ vektorning yo'nalishi $\vec{v}$ vektor bilan bir xil bo'lsa, harakat tezlashuvchan, qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, harakat sekinlashuvchan bo'ladi.

Normal va urinma tezlanishlar. Tabiiy uchyot. Nuqta trayektoriyasining M va M' nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning M nuqta M nuqtaga intilgandagi limitik holatiga trayektoriyaning M nuqtasidagi urinmasi deyiladi. M nuqtada egri chiziq urinmasiga perpendikulyar to'g'ri chiziqqa egri chiziqlarning M nuqtadagi normali deyiladi. Bu ta'rifga asosan M nuqtada egri chiziqqa cheksiz ko'p normallar o'tkazish mumkin. Bu normallarning hammasi M nuqtadan o'tuvchi urinmaga perpendikulyar tekislikda yotadi. Bu tekislikka egri chiziqlarning M nuqtasidagi normal tekisligi deyiladi. Egri chiziqlarning M nuqtasidagi yopishma tekisligida yotuvchi normaliga uning bosh normali deyiladi. Shunday qilib, M



8-shakl



9-shakl

nuqtadagi yopishma tekislik bilan normal tekislik egri chiziqlarning bosh normali bo'ylab kesishar ekan. Egri chiziqlarning M nuqtasidan o'tuvchi yopishma tekislikka perpendikulyar bo'lgan normalga M nuqtadagi binormal deyiladi.

Egri chiziqlarning M nuqtasidagi urinma bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni $\vec{\tau}^0$ bilan, bosh normali bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni $\vec{n}^0$ bilan va binormal bo'ylab

yo'nalgan birlik vektorni $\vec{b}^0$ bilan belgilaymiz (8-shakl). Bu vektorlar orqali quyidagi tekisliklar o'tadi: $(\vec{\tau}^0, \vec{n}^0)$ yopishma tekislik, $(\vec{n}^0, \vec{b}^0)$ normal tekislik va $(\vec{b}^0, \vec{\tau}^0)$ urinma tekislik.

$\vec{\tau}^0$, $\vec{n}^0$ va $\vec{b}^0$ vektorlar uchta o'zaro perpendikulyar to'g'ri burchakli uchyoqni hosil qiladi. Bu uchyoqqa tabiiy uchyoq deyiladi. Bu tabiiy uchyoq M nuqta bilan birgalikda harakatlanadi. Tabiiy uchyoqdan tashqil topgan koordinatalar sistemasiga tabiiy koordinatalar sistemasi deyiladi.

Egri chiziqning egriligi va egrilik radiusi. M nuqta trayektoriyasining bir-biriga juda yaqin M va M nuqtalaridan $M\tau$ va $M^1\tau_1$ urinmalarini o'tkazamiz. Urinmalar orasidagi burchakni $\Delta\theta$ bilan, MM^1 yoy uzunligini ΔS bilan belgilaymiz (9-shakl). Quyidagi

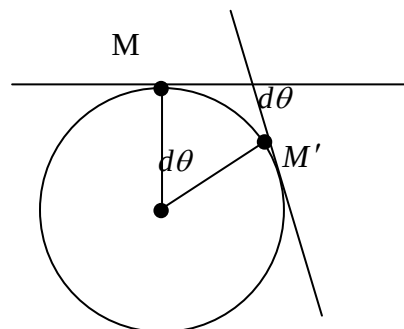
$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S} = k^*$$

nisbatga egri chiziqning MM qismidagi o'rtacha egrili deyiladi. O'rtacha egrilikning $\Delta S \rightarrow 0$ dagi limitiga (agar mavjud bo'lsa) egri chiziqning M nuqtadagi egriligi deyiladi, ya'ni

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} = k. \quad (1)$$

θ burchakka egri chiziqning siljish burchagi deyiladi. Siljish burchagi egri chiziqning har xil nuqtalarida har xil bo'ladi. Egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egriligi, elementar siljish burchagini elementar yoy uzunligiga nisbatiga teng, ya'ni

$$k = \frac{d\theta}{dS}. \quad (2)$$



10-shakl

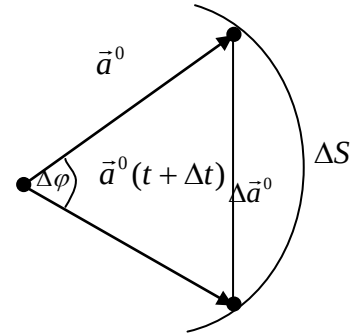
R radiusli aylananing egriligini topamiz. (10-shakl). M va M nuqtalardagi urinmalar orasidagi siljish burchagi $d\theta$, aylananing unga mos markaziy burchagiga teng, shuning uchun

$$dS = R d\theta$$

bo'ladi. U holda

$$k = \frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{Rd\theta} = \frac{1}{R}$$

Demak, aylananing egriligi o'zgarmas bo'lib, aylana radiusiga teskari miqdor ekan. Ixtiyoriy egri chiziqning egriligi umuman olganda o'zgaruvchi miqdordir. Egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egriligiga teskari miqdorga egri chiziqning shu nuqtasidagi egrilik radiusi deyiladi va quyidagicha yoziladi:



11-shakl

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta} \quad (3)$$

$\vec{a}^0$ birlik vektorning differensialini qaraymiz. Bu vektorni o'z-o'ziga skalyar ko'paytiramiz, ya'ni

$$\vec{a}^0 \cdot \vec{a}^0 = 1.$$

Tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d\vec{a}^0}{dt} \cdot \vec{a}^0 + \vec{a}^0 \cdot \frac{d\vec{a}^0}{dt} = 0 \quad \text{yoki} \quad 2 \frac{d\vec{a}^0}{dt} \cdot \vec{a}^0 = 0.$$

Demak, birlik vektorning differensial vektorning o'ziga perpendikulyar bo'lar ekan.

11-shakldagi ΔS va $|\Delta \vec{a}^0|$ miqdorlar bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar bo'lgani uchun $\Delta S \approx |\Delta \vec{a}^0|$. Bunga asosan:

$$\Delta S \approx |\Delta \vec{a}^0| = |\vec{a}^0| \Delta \varphi = \Delta \varphi \quad (3)$$

11-shakldagi uchburchakdan:

$$|\Delta \vec{a}^0| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta \varphi. \quad \text{Bu tenglikning ikkala tomonini } \Delta t \text{ ga bo'lib, } \Delta t \rightarrow 0 \text{ da}$$

$(\Delta \varphi \rightarrow 0)$ limitiga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{a}^0|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$

bundan

$$\frac{|d\vec{a}^0|}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{yoki} \quad |d\vec{a}^0| = d\varphi \quad (4)$$

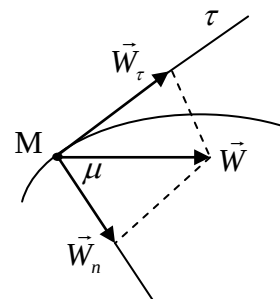
Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi.

Agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (3) va (4) formulalarga asosan uning tezligi

$$\vec{v} = v_{\tau} \vec{\tau}^0 = v \vec{\tau}^0, \quad (1)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda $v = v_{\tau} = \dot{s}$ tezlik vektorining $M\vec{\tau}^0$ o'qdagi proyeksiyasi. (1) tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} v. \quad (2)$$



12-shakl

(2) formulaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi

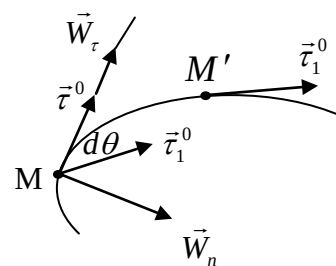
$\frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0$ trayektoriyaaning urinmasi bo'ylab yo'nalgan vektorni ifodalaydi, shuning uchun unga tezlanishning urinma (tangensial) tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}_{\tau} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 \quad (3)$$

Ikkinchi qo'shiluvchini qaraymiz. Biz bilamizki, birlik vektorining differensial uning o'ziga perpendikulyar.

Demak, $v \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}$ vektor $\vec{\tau}^0$ vektorga perpendikulyar bo'lib,

bu vektor $\vec{n}^0$ bosh normal bo'ylab yo'nalgan va



13-shakl

yopishma tekislikda yotadi.

(4) formulaga asosan $|d\vec{\tau}^0| = d\theta$ va $d\vec{\tau}^0 = d\theta \vec{n}^0$, natijada

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{n}^0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

bu yerda $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{\rho}$, ρ egri chiziqning M nuqtadagi egrilik radiusi. Shunday

qilib, $\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} v$ trayektorianing bosh normal bo'ylab yo'nalgan vektorni ifodalaydi.

Unga tezlanishning normal tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \quad (4)$$

(3) va (4) ifodalarga asosan (2) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0. \quad (5)$$

(3) va (4) formulalarga asosan tezlanish vektorining tabiiy koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_g = 0 \quad (6)$$

bo'ladi. Tezlanish vektorining moduli quyidagicha topiladi:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (7)$$

$\vec{W}$ tezlanish vektori bilan bosh normal orasidagi μ burchak quyidagiga teng:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{W_\tau}{W_n} \quad (8)$$

Shunday qilib, agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (6), (7) va (8) formulalar yordamida nuqta tezlanishining proyeksiyalari, moduli va yo'nalishi topiladi.

Quyida biz nuqta harakatining ba'zi xususiy hollardagi harakatlarini qarang o'tamiz.

1) *To'g'ri chiziqli harakat.* Agar nuqta harakatining trayektoriyasi o'g'ri chizig'dan iborat bo'lsa, u holda trayektoriyaning egrilik radiusi $\rho=\infty$ bo'ladi. Va demak, $w_n = 0$. Nuqtaning to'la tezlanishi uning urinma tezlanishiga teng bo'ladi

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Bu holda nuqtaning tezligi faqat son qiymati jihatidan o'zgarganligi uchun *urinma tezlanishi nuqta tezligining faqat son qiymati jihatidan o'zgarishini ifodalaydi*, degan xulosaga kelamiz.

2) *Tekis aylanma harakat.* Tekis harakat deganda nuqtaning shunday egri chiziqli harakat tushuniladiki, unda nuqta tezligining moduli o'zgarmas bo'lib qoladi $v=const$. U holda $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ va nuqtaning to'la tezlanishi faqat normal tezlanishiga teng bo'ladi:

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Bu holda tezlanish vektori hamma vaqt nuqta trayektoriyasiga normal ravishda yo'nalgan bo'ladi.

Bu holda tezlanish tezlikning yo'nalishi o'zgarishi hisobiga paydo bo'lganligi uchun *normal tezlanish tezlikning yo'nalishining hzgarishi hisobidan paydo bo'ladi* degan xulosani chiqarish mumkin.

Egri chiziqli tekis harakat qonunini topaylik. $\frac{ds}{dt} = v$ эканидан $ds = vdt$

Boshlang'ich $t=0$ paytda nuqta sanoq boshidan s_0 masofada bo'lsin. U holda tenglikning o'ng va chap tomonlaridan mos oraliqlarda aniq integrallar olib,

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t vdt \quad \text{ёки} \quad s - s_0 = vt,$$

Bu yerda $v=const$ bo'lganligi e'tiborga olingan.

Oxirgi tenglikda boshlang'ich paytda nuqta sanoq boshida deb olinsa, ya'ni $s_0 = 0$ bo'lsa, s masofa nuqta tomonidan t vaqt mobaynida bosib o'tilgan yo'lni bildiradi. Demak, tekis harakat nuqta tomonidan bosib o'tilgan yo'l vaqtning ortishiga proporsional ravishda ortadi, tezlik esa, masofaning vaqtga nisbatiga teng:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}$$

3) *To'g'ri chiziqli tekis harakat.* Bu holda

$$w_n = w_\tau = 0.$$

Demak, $w=0$. Nuqtaning tezlanishi hamma vaqt nolga teng bo'ladigan yagona harakat bu – nuqtaning to'g'ri chiziqli tekis harakati.

4) *Tekis o'zgaruvchan egri chiziqli harakat.* Tekis o'zgaruvchan egri chiziqli harakat deb shunday harakatga aytiladiki, bunda urinma tezlanishi absolyut qiymati jihatidan o'zgarmaydi $w_\tau = \text{const}$.

$t=0$ bo'lganda $s=s_0$; $v=v_0$ boshlang'ich shartlar o'rinli bo'lsin deb olamiz. U holda $\frac{dv}{dt} = w_\tau$ yoki $dv = w_\tau dt$ ekanligini va urinma tezlanishi o'zgarmasligini e'tiborga olib, tenglikning har ikkala tomonidan mos oraliqlarda integral olib,

$$v = v_0 + w_\tau t.$$

Bu formulani

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + w_\tau t \quad \text{ёки} \quad ds = v_0 dt + w_\tau t dt$$

Oxirgi tenglikni yana bir marta integrallab, egri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakat qonunini hosil qilamiz:

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Agar qaralayotgan harakatda tezlik modul jihatdan ortib borsa, harakat tekis tezlanuvchan, aks holda tekis sekinlanuvchan deb aytiladi.

5) *Garmonik tebranishlar.* Nuqtaning to'g'ri chiziqli garmonik tebranishlarini qarab o'taylik. Faraz qilamiz, nuqtaning O markazgacha bo'lgan masofasi x quyidagi qonun bo'yicha o'zgarsin:

$$x = a \sin kt$$

Bu yerda a va k – biror o'zgarmaslar.

Bu holda M nuqta $+a$ chetki holatidan $-a$ chetki holatigacha doimiy borib keladi. Bu qonun bo'yicha harakatlanuvchi nuqta texnikada juda katta rol egallaydi. U oddiy garmonik tebranishlar deb yuritiladi. Tebranishlar markazidan eng chetki holatigacha bo'lgan masofa a ga tebranishlar amplitudasi deyiladi.

Trigonometrik funksiyalarning xossalaridan ma'lumki, sinus va kosinus funksiyalar $T = t_1 = \frac{2\pi}{k}$, oraliqda takrorlanadi. Nuqtaning bir marta to'liq tebranishiga ketgan vaqt uning tebranishlari davri deb ataladi.

Nuqtaning harakat qonunidan vaqt bo'yicha hosilalar olib,

$$v = -ak \sin k, \quad w = -ak^2 \cos kt.$$

Demak, harakat davomida nuqtaning tezligi va tezlanishi garmonik qonun bo'yicha o'zgaradi. Ishoralardan ko'rish mumkinki, nuqta markazga qarab harakatlanayotganda uning harakati tezlanuvchan, markazdan qochayotganda sekinlanuvchan bo'lar ekan.

Keltirilgan ushbu mulohazalar ixtiyoriy egri chiziq bo'ylab garmonik qonun bilan harakatlanayotgan nuqta uchun o'rinli. Faqat u yerda nuqta tezlanishining o'rniga urinma tezlanish olinadi. Bundan tashqari normal tezlanish ham vujudga keladi.

5-§. Masalalar.

1-Masala. Nuqta harakati tenglamalari berilgan:

$x = 4 - 2t$; $y = 2 + 2 \cos \frac{\pi t}{4}$. $t=1$ sek bo'lganda nuqtaning trayektoriyadagi vaziyati, tezligi, to'la, urinma va normal tezlanishlari, hamda shu nuqtada trayektoriyaning egrilik radiusi topilsin.

Yechish: Nuqtaning harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan.

> **eq1:=x=4-2*t;**

eq2:=y=2+2*cos(Pi/4*t);

$$eq1 := x = 4 - 2 t$$

$$eq2 := y = 2 + 2 \cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)$$

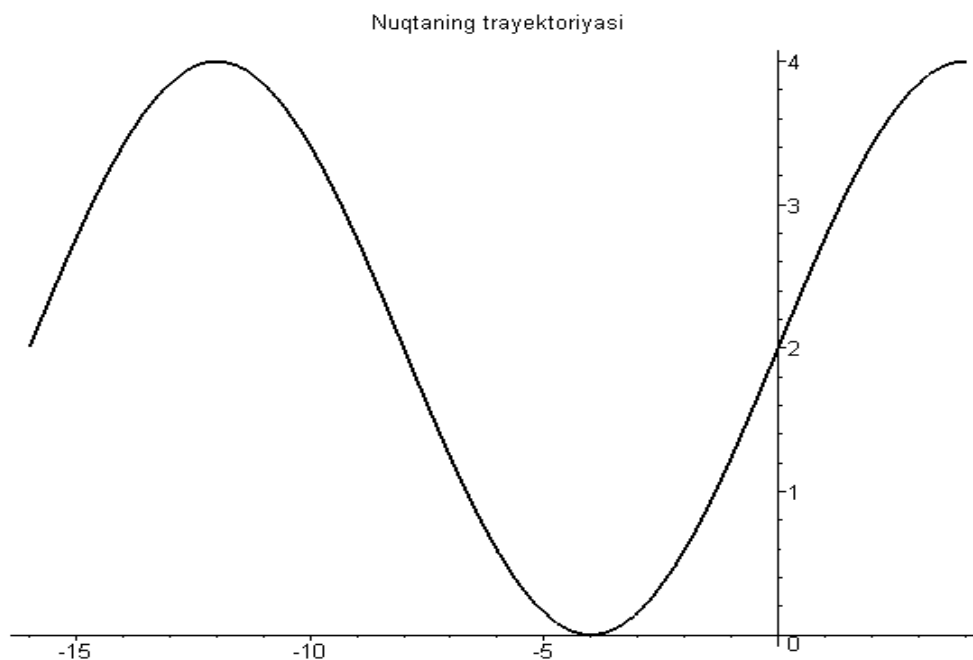
Harakat tenglamalarini oddiy ko'rinishda topish uchun bu tenglamalardan t parametrni yo'qotish kerak:

> **simplify(subs(isolate(eq1,t),eq2));**

$$y = 2 + 2 \cos\left(\frac{1}{8} \pi (x - 4)\right)$$

isolate buyrug'i bilan nuqta harakat qonunining x koordinatasidan t parametrni topib, uni y koordinata tenglamasiga qo'ydik. Trayektoriya tenglamasi sinusoidaning bir bo'lagini ifodalaydi:

> **plot([rhs(eq1),rhs(eq2),t=0..10],color=black,thickness=2,title="Nuqtaning trayektoriyasi");**



Nuqta tezligining proyeksiyalarini topish uchun harakat tenglamalarini vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

```
> v[x]:=diff(rhs(eq1),t);
eval(v[x],t=1);
v[y]:=diff(rhs(eq2),t);
eval(%,t=1);
evalf(%);
```

$$v_x := -2$$

$$-2$$

$$v_y := -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right) \pi$$

$$-\frac{1}{4} \sqrt{2} \pi$$

$$-1.110720734$$

$t=1$ sek dagi tezligining moduli quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

va quyidagiga teng:

```
v:=sqrt(v[x]^2+v[y]^2);
evalf(eval(v,t=1));
```

$$V := \frac{1}{2} \sqrt{16 + \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2} \pi^2$$

2.287728251

Huddi shunday tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topish uchun tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

```
w[x]:=diff(rhs(eq1),t,t);
evalf(eval(w[x],t=1));
w[y]:=diff(rhs(eq2),t,t);
evalf(eval(%,t=1));
```

$$w_x := 0$$

0.

$$w_y := -\frac{1}{8} \cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right) \pi^2$$

-.8723580250

Nuqta tezlanishining qaralayotgan paytdagi absolyut qiymati esa quyidagicha hisoblanadi:

```
W:=sqrt(w[x]^2+w[y]^2);
evalf(eval(%,t=1));
```

$$W := \frac{1}{8} \pi^2 \sqrt{\cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2}$$

.8723580250

Nuqtaning urnma tezlanishi uning tezligining modulidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sifatida topiladi:

$$w_r = \left| \frac{dv}{dt} \right|;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v}.$$

Masala shartiga asosan, urnma tezlanish quyidagiga teng:

```
w[tau]:=(v[x]*w[x]+v[y]*w[y])/V;
```

```
evalf(eval(w[tau], t=1));
```

$$w_{\tau} := \frac{1}{8} \frac{\sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right) \pi^3 \cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)}{\sqrt{16 + \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^2}}$$

.4235407532

Urinma tezlanishning ishorasi musbat bo'lishi nuqtaning tezlanuvchan harakatda ekanligini bildiradi, va demak, tezlik vektorining yo'nalishi bilan urinma tezlanishi vektorining yo'nalishi qaralayotgan paytda bir xil bo'ladi.

Nuqta tezlanishining normal tuzuvchisi quyidagi formula asosida topiladi:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_{\tau}^2}.$$

Uning $t=1s$ dagi qiymati

```
> w[n]:=sqrt((w^2-w[tau]^2));
```

```
evalf(eval(%, t=1));
```

$$w_n := \frac{1}{8} \sqrt{\cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^4 - \frac{\sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^6 \cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2}{16 + \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^2}}$$

.7626413012

ga teng.

Nuqta trayektoriyasining egrilik radiusini topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

Uning qaralayotgan paytdagi qiymati quyidagiga teng:

```
> rho:=V^2/w[n];
```

```
evalf(eval(%, t=1));
```

$$\rho := 2 \sqrt{\frac{16 + \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^2}{\cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^4 - \frac{\sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^6 \cos\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2}{16 + \sin\left(\frac{1}{4} \pi t\right)^2 \pi^2}}}$$

6.862597846

Shunday qilib, nuqta harakatining barcha xarakteristikallari topildi, lekin biz hisoblashlar davomida *Maple* dasturidan faqat kalkulyator sifatida foydalandik. Lekin biz berilgan vaqtda nuqta trayektoriyasi, tezlik va tezlanish vektorlarini qurayotganimizda ushbu programma juda asqotadi. Biz endi nuqta harakatining tenglamalari asosida trayektoriyasini qurib, shu trayektoriyaning istalgan nuqtasidagi tezlik vektori, urinma, normal va to'la tezlanish vektorlari tasvirlash imkonini beruvchi prosedura-programmasini tuzamiz. Bu prosedura orqali biz harakatlanuvchi nuqtani va tegishli vektorlarni ko'rishimiz mumkin. Bu prosedurani keltiramiz.

Nuqtaning berilgan trayektoriya bo'ylab harakati.

```
➤ restart:
move:=proc(x::anything, y::anything, t::name, tn::numeric,
xx::numeric, a::numeric, b::numeric, c::numeric,
d::numeric, widthV::numeric, widthW::numeric)
    local vx, vy, wx, wy, w, w1, wtau, wn, s, w1n, w1t, t1,
t2, t3, t4, t5, t6, g, v, f, v1, dt, ff, i, roo;

> #nuqta tezligini hisoblash#

vx:=diff(x, t);
vy:=diff(y, t);
v:=sqrt(vx^2+vy^2);

> #nuqta tezlanishini hisoblash #
```

```

wx:=diff(vx,t);
wy:=diff(vy,t);
w:=sqrt(wx^2+wy^2);
wtau:=(vx*wx+vy*wy)/v;
wn:=sqrt(w^2-wtau^2);

> #egrilik radiusini hisoblash#

roo:=v*v/wn;
dt:=tn/40;

> #trayektoriyani yasash#

ff:=plot([x,y,t=0..2*tn],color=black,thickness=3);
for i from 0 to 40 do

> #tezlik vektorini yasash#

v1:='plottools/arrow'([eval(x,t=i*dt),eval(y,t=i*dt)],vektor
([eval(vx,t=i*dt),eval(vy,t=i*dt)]),widthV,3*widthV,0.1,color=green);

> #tezlanish vektorini yasash#

w1:='plottools/arrow'([eval(x,t=i*dt),eval(y,t=i*dt)],vektor
([eval(wx,t=i*dt),eval(wy,t=i*dt)]),widthW,3*widthW,0.1,color=red);

> #urinma tezlanish vektorini yasash#

w1t:=plot([[eval(x,t=i*dt),eval(y,t=i*dt)],[eval(x+wtau*v
x/v,t=i*dt),eval(y+wtau*vy/v,t=i*dt)]],color=pink,thickness=4
);

> #normal tezlanish vektorini yasash#

w1n:=plot([[eval(x,t=i*dt),eval(y,t=i*dt)],[eval(x-
wn*vy/v,t=i*dt),eval(y+wn*v
x/v,t=i*dt)]],color=pink,thickness=4);

```

> #tezlik vektori koordinatalarini tasvirlash#

```
s:=cat("v(x,y)=[",convert(evalf(eval(vx,t=i*dt),3),string),  
",",convert(evalf(eval(vy,t=i*dt),3),string),"]");  
t1:=plots[textplot]([xx,a,s],align=(ABOVE,RIGHT));
```

> #tezlanish vektori koordinatalarini tasvirlash#

```
s:=cat("w(x,y) = [", convert(evalf(eval(wx,t=i*dt),3),  
string),",",convert(evalf(eval(wy,t=i*dt),3),string),"]");  
t2:=plots[textplot]([xx,b,s],align=(ABOVE,RIGHT));
```

> #urinma va normal tezlanish vektori qiymatlarini tasvirlash#

```
s:=cat("w(tau,n)=[",convert(evalf(eval(wtau,t=i*dt),3),stri  
ng),",",convert(evalf(eval(wn,t=i*dt),3),string),"]");  
t3:=plots[textplot]([xx,c,s],align=(ABOVE,RIGHT));
```

> #egrilik radiusi qiymatini tasvirlash#

```
s:=cat("ro=",convert(evalf(eval(roo,t=i*dt),3),string));  
t4:=plots[textplot]([xx,d,s],align=(ABOVE,RIGHT));
```

> #vaqt momentini tasvirlash#

```
s:=cat("t=",convert(evalf(i*dt,3),string));  
t5:=plots[textplot]([0.2,0.4,s],align=(ABOVE,RIGHT));
```

> #animatsiya kadrini tasvirlash#

```
g||i:='plots/display'({ff,v1,w1,w1t,w1n,t1,t2,t3,t4,t5});  
end do;
```

> #animatsiyani tasvirlash#

```
'plots/display'([seq(g||i,i=0..40)],  
insequence=true,scaling=constrained);  
end proc;
```

XULOSA

Kinematika kursini o'tish jarayonida asosiy e'tibor nuqta yoki qattiq jismning harakatlari parametrik ko'rinishda berilgan holda uning harakat parametrlarini tekshirish – nuqta trayektoriyasini, tezligini, urinma, normal va to'la tezlanishini, trayektoriya egrilik radiusini topishga asosiy e'tibor beriladi. Tekshirilayotgan obyektning harakati parametrik ko'rinishda berilganda nuqta yoki qattiq jismlarning harakatlari zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanish masalalari e'tiborsiz qolib kelgan.

Ishda nuqta harakati parametrik ko'rinishda berilgan holda uning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi, trayektoriya egrilik radiuslarini topish jarayonida *Maple* dasturidan foydalaniladi. Bundan tashqari nuqta harakati davomidagi asosiy kinematik xarakteristikalarining o'zgarishini animatsiya sifatida tasvirlash uchun prosedura-programma tuzilgan.

Bitiruv malakaviy ishida harakati parametrik ko'rinishda berilgan nuqtaning asosiy kinematik xarakteristikalarini – trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi, egrilik radiusini topish uchun dastur tuzilgan, hamda ushbu dastur yordamida bir masala yechib ko'rsatilgan. Bundan tashqari shu nuqtaning harakati davomida ushbu parametrlarni o'zgarishi animasion tarzda namoyish etish uchun prosedura-programma tuzilgan. Chizmalar shaxsiy kompyuterlardan foydalanilgan holda Maple 7.0 dasturi yordamida olingan.

Malakaviy bitiruv ishida harakati parametrik ko'rinishda berilgan nuqtaning asosiy kinematik xarakteristikalarini Maple dasturidan foydalanilgan holda topish uchun programma tuzilgan. Nuqtaning trayektoriyasi qurilgan. Dastur orqali nuqtaning vaqtning turli fiksirlangan paytlari uchun tezligi, urinma tezlanishi, to'la tezlanishi, normal tezlanishi va egrilik radiusi topib ko'rsatilgan.

Adabiyotlar

1. Aziz-Qoriyev S.Q., Yangurazov Sh.X. Nazariy mexanikadan masalalar yechish metodikasi. I-qism. – T.: «O'qituvchi», 1974.
2. Meshcherskiy I.V. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. - T.: O'qituvchi, 1989.
3. Rashidov T., Shoziyotov Sh., Mo'minov Q.B. Nazariy mexanika asoslari. - T.: «O'qituvchi», 1990.
4. O'rozboyev M.T. Nazariy mexanika asosiy kursi, - T.: «O'qituvchi», 1966.
5. Yablonskiy A.A.Sbornik zadaniy dlya kursovix rabot po teoreticheskoy mexanike. M.: Visshaya shkola, 1972.
6. Targ S.M. Kratkiy Kurs teoreticheskoy mexaniki. - M.: «Nauka», 1974.

Samarqand davlat universiteti mexanika-matematika fakulteti Mexanika va Amaliy matematika bo'limi 4-kurs talabasi Sherboyev Asqarning «Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuidagi malakaviy bitiruv ishiga

TAQRIZ

«Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuidagi malakaviy bitiruv ishi mundarija, to'rtta paragraf va adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, kirish qismida mavzuning dolzarbligi, masalaning qo'yilishi, yechilish usullari va ishning tuzilishi qisqacha bayon etilgan, 1-4 paragraflarda qaralayotgan muammo haqida qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirilgan – nuqta harakatining berilish usullari, tezligi va tezlanishi, ularning tuzuvchilari haqida boshlang'ich tushunchalar keltirilgan.

Oxirgi beshinchi paragrafda nuqta harakati tenglamalari vaqtga bog'liq holda uning harakatini tadqiq etish – uning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi, trayektoriyaning egrilik radiuslarini topish Maple dasturidan foydalanilgan holda amalga oshirilgan. Tadqiqot jarayonida barcha amallarni bajarish jarayonining izohlari keltirilgan. Tekshirilayotgan obyektning harakati parametrik ko'rinishda berilganda nuqta yoki qattiq jismlarning harakatlari zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanish masalalari e'tiborsiz qolib kelgan. Bundan tashqari nuqta harakati davomidagi asosiy kinematik xarakteristikalarining o'zgarishini animatsiya sifatida tasvirlash uchun prosedura-programma tuzilgan. Chizmalar olingan.

Sherboyev Asqarning «Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuli malakaviy bitiruv ishlariga qo'yilgan talablarga to'liq javob beradi va uni 27 ball bilan baholash mumkin, deb hisoblayman.

Differensial va matematik fizika
tenglamalari kafedrası assistenti:

D.Shodiyev.

Samarqand davlat universiteti mexanika-matematika fakulteti Mexanika va Amaliy matematika bo'limi 4-kurs talabasi Sherboyev Asqarning «Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuidagi malakaviy bitiruv ishiga

MULOHAZA

Sherboyev Asqarning «Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuidagi malakaviy bitiruv ishida nuqta yoki qattiq jismning harakatlari parametrik ko'rinishda berilgan holda uning harakat parametrlarini tekshirish – nuqta trayektoriyasini, tezligini, urinma, normal va to'la tezlanishini, trayektoriyaning egrilik radiusini topish jarayonida Maple dasturini qo'llashga bag'ishlangan.

Sherboyev Asqar malakaviy bitiruv ishini bajarish jarayonida nazariy mexanikaning asosiy kursini takrorlab chiqib, matematik dasturlashning Maple dasturining boshlang'ich kursini o'rgandi va bu dastur vositasida nuqtaning harakati parametrik ko'rinishda berilganda uning asosiy kinematik xarakteristikalarini topish uchun eng sodda dasturlar tuzdi va bu dasturlar asosida natijalar oldi.

Sherboyev Asqar ishni bajarish davomida o'zining yaxshi tomonlari bilan ajralib turdi, uning «Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish» mavzuli malakaviy bitiruv ishi bitiruv ishlariga qo'yilgan talablarga to'liq javob beradi va uni 18 ball bilan baholash mumkin, deb hisoblayman.

Mexanika kafedrası dotsenti, f.-m.f.n:

X.M.Buranov.

A. Navoiy nomidagi Samarqand
davlat universiteti Mexanika-matematika
fakul'teti Mexanika kafedrasida 2012-yil 30-
maydagi №10 majlis bayonnomasidan

KO'CHIRMA

QATNASHDILAR: Barcha kafedra a'zolari.

KUN TARTIBI

Eshitildi: Majlisni kafedra mudiri prof. X.Xudoynazarov olib bordi, kun tartibi bilan tanishtirdi va bakalavrlarga so'z berildi.

Talaba: Sherboyev Asqar

Mavzu: Harakat tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan moddiy nuqta harakatini tadqiq etishda Maple dasturidan foydalanish

Ma'ruzachiga quyidagi savollar berildi:

1. _____
2. _____
3. _____

Taqrizchi etib _____ni
tayinlash taklif etildi. Taklif ovozga qo'yildi va bir ovozdan tasdiqlandi.

Ma'ruzachi savollarga qoniqarli javob berdi.

QAROR QILINDI:

1. "Mexanika" kafedrasida talaba **Sherboyev Asqar**
tomonidan bajarilgan bakalavr bitiruv malakaviy ishining dastlabki
himoyasi qoniqarli deb topilsin.

2. "Mexanika" kafedrasida talaba **Sherboyev Asqar**
tomonidan bajarilgan bakalavr bitiruv ishiga taqrizchi etib
_____ tavsiya etilsin.

3. "Mexanika" kafedrasida talaba **Sherboyev Asqar**
tomonidan bajarilgan bakalavr bitiruv malakaviy ishi Yakuniy Davlat Nazorati
Komissiyasiga himoya uchun taqdim qilinsin.

Ko'chirma asliga to'g'ri.

Kafedra laboranti:

Abdikarimov N.