

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

**AL-XORAZMIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI**

D.R. SAPARBAYEVA

**«ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI» fanidan masalalar yechish
bo‘yicha uslubiy qo‘llanma**

URGANCH-2016

Ushbu uslubiy qo‘llanmaning asosiy maqsadi, universitetning birinchi kurs «Matematika», «Amaliy matematika va informatika», «Mexanika» va «Fizika» bakalavr yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalarida «Algebra va sonlar nazariyasi» faniga bo‘lgan qiziqishini oshirishdan iborat.

Maskur uslubiy qo‘llanmadan bu fanga qiziquvchi Oliy o‘quv yurti talabalari, magistrantlari foydalanishlari mumkin.

Tuzuvchi:

D. Saparbayeva – UrDU Fizika-matematika fakulteti “Amaliy matematika” kafedrası o‘qituvchisi

Taqrizchilar:

A.B.Yaxshimuratov– UrDU Fizika-matematika fakulteti “Amaliy matematika” kafedrası dotsenti.

A.Reyimberganov – TATU Urganch filiali “Axborot texnologiyalari” kafedrası mudiri, dotsent.

So‘z boshi

Respublikamizda ta‘lim sohasida olib borilayotgan keng islohatlar talabalarni bilimini oshirish va mustaqil fikr yuritadigan mutaxassis bo‘lib yetishishlari maqsadida, o‘qitilayotgan har bir fandan darslik, o‘quv qo‘llanma, uslubiy qo‘llanma, masalalar to‘plami, laboratoriya ishlaridan topshiriqlar va ko‘rsatmalar majmuasi, tarqatma materiallar hamda ularning elektron variantlarini yaratishni taqozo qiladi.

Bitkazuvchi talaba o‘z ixtisosligi bo‘yicha fanlarning zamonaviy yutuqlaridan foydalana olishi uchun u o‘qishning boshidanoq bu fanlarning asoslarini mustahkam egallamog‘i zarur. Algebra va sonlar nazariyasi ana shunday asosiy fanlardan ekanligiga shak-shubha yo‘q.

Mazkur uslubiy qo‘llanma «Algebra va sonlar nazariyasi» fanidan o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlariga bag‘ishlangan bo‘lib, u «Matematika», «Amaliy matematika va informatika», «Mexanika» va «Fizika» yo‘nalishlarida tahsil olayotgan talabalarga mo‘ljallangan. Unda har bir amaliy mashg‘ulotlari uchun kerakli nazariy ma‘lumotlar keltirilgan, misollarni yechilishidan namunalar ko‘rsatilgan.

Ushbu qo‘llanmani yaxshilashga qaratilgan har qanday tanqidiy fikr, mulohaza va tavsiyalarni muallif mamnuniyat bilan qa‘bul qiladi va oldindan o‘z minnatdorchiligini bildiradi.

1-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi

1.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi.

Ikkita x va y noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

sistema **ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi** deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – (1.1) sistema koeffitsiyentlari, b_1, b_2 – berilgan sonlardir.

Agar (1.1) sistemadagi x ning o'rniga x_0 sonni, y ning o'rniga y_0 sonni qo'yganda tenglamalarning har biri ayniyatga aylansa, unda (x_0, y_0) juftlik (1.1) tenglamalar sistemasining **yechimi** deyiladi.

(1.1) sistemani o'rganishda bu sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.2)$$

determinant (uni (1.1) sistemaning determinant deyiladi) hamda bu determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirilgan ushbu

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad (1.3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \quad (1.4)$$

determinantlar muhim ahamiyatga ega.

(1.1) tenglamalar sistemasini yechish uchun avvalo bu sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglamasini esa $-a_{12}$ ga ko'paytirib, keyin hadlab qo'shib

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22}, \\ -a_{21}a_{12}x - a_{22}a_{12}y = -a_{12}b_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = \\ = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

bo'lishini topamiz. So'ngra (1.1) sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini esa a_{11} ga ko'paytirib keyin hadlab qo'shib

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -a_{21}b_1, \\ a_{11}a_{12}x + a_{22}a_{11}y = a_{11}b_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = \\ = a_{11}b_1 - a_{21}b_2$$

bo'lishini topamiz. Natijada (1.1) sistemaga teng kuchli bo'lgan ushbu

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_1 - a_{21}b_2$$

sistemaga kelamiz. Bu sistema yuqoridagi (1.2), (1.3) va (1.4) munosabatlarni hisobga olganda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \quad (1.5)$$

(1.5) sistemaning yechimi Δ , Δ_x hamda Δ_y larga bog'liq.

1-hol. $\Delta \neq 0$ bo'lsin. Bu holda (1.1) sistemadan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (1.6)$$

bo'lishini topamiz. Bu topilgan x va y lar (1.5) tenglamaning yechimi bo'ladi.

(1.1) sistemaning yechimini topishning bu qoidasi **Kramer qoidasi** deyiladi.

2-hol. $\Delta = 0$ bo'lib, Δ_x va Δ_y lardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsin. Bunda (1.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Bu holda (1.1) birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

3-hol. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsin. Bu holda (1.1) sistema yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, yoki umuman yechimga ega bo'lmaydi.

Endi uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz. Uchta x , y va z noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1.7)$$

sistema **uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi** deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ – bu sistemaning koeffitsiyentlari, b_1, b_2, b_3 – berilgan sonlardir.

Agar (1.7) sistemadagi x ning o'rniga x_0 sonni, y ning o'rniga y_0 sonni va z ning o'rniga z_0 sonni qo'yganda tenglamalarning har biri ayniyatga aylansa, unda (x_0, y_0, z_0) uchlik (1.7) sistemaning **yechimi** deyiladi.

Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

determinant berilgan (1.7) sistemaning **determinant** deyiladi. Bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib ushbu

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

determinantlarni hosil qilamiz.

Demak, (1.7) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarga ega bo‘lamiz.

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (7) sistema yagona (x, y, z) yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Lambda}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Lambda}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Lambda} \quad (1.9)$$

bo‘ladi;

2) $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, u holda (1.7) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsa, u holda (1.7) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bo'yicha yechish $n=4$ dan boshlab katta va mashaqqatli ishga aylanadi, chunki bu ish to'rtinchi tartibli beshta determinantni hisoblash bilan bog'liq. Shu sababli amalda Gauss usuli muvaffaqiyat bilan qo'llaniladi va u sistema birgalikda hamda aniq bo'lsa, uni soddaroq ko'rinishga keltirish va barcha noma'lumlarning qiymatlarini ketma-ket toppish imkonini beradi. Gauss usuli shundan iboratki, u almashtirishlar yordamida noma'lumlarni ketma-ket chiqarib, so'nggi tenglamada faqat bitta noma'lumni qoldiradi.

Quyidagi n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraylik:

[illegible]

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechish jarayoni ikki bosqichdan iborat. *1-bosqich.* (1.10) sistema uchburchak ko‘rinishga keltiriladi. Bu quyidagicha amalga oshiriladi: $a_{11} \neq 0$ deb (agar $a_{11} = 0$ bo‘lsa, 1-tartibli tenglama bilan $a_{li} \neq 0$ bo‘lgan i – tenglamaning ($i = 2, 3, \dots, n$) o‘rinlarini almashtiramiz) quyidagi nisbatlarni tuzamiz.

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}.$$

[illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}x_3 + \dots + a_{n2}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \\ \\ \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, m_{42} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, m_{42} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}x_3 + \dots + a_{n2}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{n3}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \\ \dots\dots\dots \\ \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}x_3 + \dots + a_{n2}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{n3}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \\ \dots\dots\dots \\ \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{array} \right.$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{i2}^{(1)}.$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{i2}^{(1)}.$$

Yechilishi: 1) Determinantlarni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) - [3 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-1)] =$$

$$= 24 + 18 + 5 - (-60 + 4 - 9) = 47 + 65 = 112.$$

Determinant $\Delta = 112 \neq 0$ bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega va Kramer qoidasini qo'llab, uni topamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - [3 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot (-1) \cdot 3] =$$

$$= 108 + 6 + 1 - (-12 + 18 - 3) = 115 - 3 = 112;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot (-5) - [3 \cdot 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 9 \cdot 3 \cdot 3] =$$

$$= 6 - 9 - 45 - (-15 - 2 + 81) = -48 - 64 = -112;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) - [9 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)] =$$

$$= -8 + 54 + 5 - (-180 + 4 + 3) = 51 + 173 = 224.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{112}{112} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-112}{112} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{224}{112} = 2.$$

Javob: $x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$

2) Ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi tenglamalardan x larni yo'qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamani ketma-ket $-2, 3, -2$ ga ko'paytiramiz va mos ravishda ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi tenglamalar bilan qo'shamiz. Natijada ushbu sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 4t = 2, \\ 3y - 7z + 11t = -1, \\ -y + 11z - 11t = -1, \\ 4y - 5z + 13t = -4. \end{cases}$$

Ikkinchi va to'rtinchi tenglamalarda y ni yo'qotamiz. Buning uchun uchinchi tenglamani ketma-ket $3, 4$ ga ko'paytiramiz va mos ravishda ikkinchi, to'rtinchi tenglamalar bilan qo'shamiz. Natijada ushbu sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 4t = 2, \\ -y + 11z - 11t = -1, \\ 26z - 22t = -4, \\ 39z - 31t = -8 \end{cases}$$

soʻngra uchinchi tenglamani -3 ga toʻrtinchi tenglamani 2 ga koʻpaytirib ikkalasini qoʻshsak, uchburchakli sistema hosil boʻladi:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 4t = 2, \\ -y + 11z - 11t = -1, \\ 26z - 22t = -4, \\ 4t = -4. \end{cases}$$

Bundan,

$$t = -1,$$

$$z = \frac{-4 + 22t}{26} = -1,$$

$$y = 11z - 11t + 1 = 1,$$

$$x = 2 + y - 3z + 4t = 2.$$

Javob: $x = 2, y = 1, z = -1, t = -1$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini Gauss usuli bilan yeching:

$$1. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9, \\ 4y + 11z = 1, \\ 7x - 5y = -1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + 5z = 27, \\ 5x + 2y + 13z = 70, \\ 3x - z = -2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 46, \\ x + 2y + z = 8, \\ x - 7y - 2z = 5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x + y - 3z = -1, \\ 8x + 3y - z = -1, \\ x + y - z = -1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 4y - 2z = 0, \\ 3x - 5y - 6z = 21, \\ 3x + y + z = -4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - 3y + z = 43, \\ x + y - z = 3, \\ 2x + y = 13. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + y - 2z = 6, \\ 5x - 3y + 2z = -4, \\ 4x - 2y - 3z = -2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + y + 2z = 11, \\ 2x + 2y - 3z = 9, \\ x - 5y - 8z = 23. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 5x + 6y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - 3z = 9, \\ 4x - 3y + 2z = -15. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15, \\ x + y + 5z = 16, \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x - 3y + z = 11, \\ x + 2y - z = -6, \\ x - 4y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x - 5y = 19, \\ 3x + 5y - z = -10, \\ x - 4y + 2z = 16. \end{cases}$$

2. Quyida berilgan tenglamalar sistemalarini Kramer qoidasidan foydalanib yeching.

$$1. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y + 2z = 18. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ -4x - y + 3z = -3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x - 5y = 31, \\ 4x + 11z = -43, \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + y + 3z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = -7. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x - 4y - 2z = -7, \\ 3x + y - z = 5, \\ -3x + 5y + 6z = 7. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 20, \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + 5y + z = -2, \\ 2x - 4y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -6, \\ 5x + 8y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

3. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

$$1. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 5x - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 4x + 3y - 5z = 0, \\ x + 5y - 6z = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0, \\ 4x - 2y - 9z = 0, \\ x - 2y + 7z = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0, \\ 4x + 3y - 5z = 0, \\ x + 5y - 6z = 0. \end{cases}$$

2-§. O‘rin almashtirishlar va o‘rniga qo‘yishlar

2.1. O‘rin almashtirishlar.

Ta’rif. n elementdan m tadan $1 \leq m \leq n$ *o‘rinlashtirishlar* deb bir-biridan kamida bitta element bilan yoki elementlarning tartibi bilan farq qiluvchi birikmalarga aytiladi.

Teorema. n elementdan m tadan o‘rinlashtirishlarning soni ushbuga teng:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1). \quad (2.1)$$

Ta’rif. n elementdan n tadan o‘rinlashtirishlarga n elementdan *o‘rin almashtirishlar* deyiladi.

n elementdan o‘rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi. Bu son (2.1) formuladan $m = n$ qiymatda kelib chiqadi:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(n-2))(n-(n-1)) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

n dan 1 gacha bo‘lgan hamma natural sonlar ko‘paytmasi «faktorial» deb ataladi va $n!$ ko‘rinishda belgilanadi. Shunday qilib,

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Masalan, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

n ta $1, 2, 3, \dots, n$ raqamlarning

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n \quad (2.2)$$

permutatsiyasidagi har bir a_i raqam o‘ng tomondagi o‘zidan kichik har bir raqam bilan *bitta inversiya tashkil etadi* deymiz. Demak, (2.2) permutatsiyada a_i ning o‘ng tomonida a_i dan kichik nechta raqam turgan bo‘lsa, a_i shuncha inversiya tashkil etadi. Agar a_i ning o‘ng tomonida a_i dan kichik bitta ham raqam turgan bo‘lmasa, a_i inversiya tashkil etmaydi.

Endi, (2.2) dagi inversiya tashkil etuvchi barcha raqamlarning inversiyalari (2.2) *permutatsiyaning inversiyalari* deyiladi.

Ta’rif. Inversiyalarning soni juft yoki toq bo‘lishiga qarab, permutatsiyani ham *juft* yoki *toq permutatsiya* deb ataymiz.

Masalan, 614253 juft permutatsiya 8 ta invertsiyaga ega va 634251 toq permutatsiya 11 ta inversiyaga ega.

Ta’rif. Permutatsiyada istalgan ikki raqamni o‘rin almashtirish *transpozitsiya* deyiladi.

Teorema. Har qanday transpozitsiya o‘rin almashtirishning juft-toqligini o‘zgartiradi.

2.2. O‘rniga qo‘yishlar. n ta ixtiyoriy $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlar to‘plamini olamiz. Bu elementlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun, ularning o‘z nomeri bilan belgilab, to‘plam elementlarini

$$1, 2, 3, \dots, n \quad (2.3)$$

ko‘rinishda yozamiz.

(2.3) to‘plamning har bir raqami shu to‘plamning bitta raqamiga o‘zaro bir qiymatli akslanadi deb faraz qilaylik. (2.3) raqamlarning hammasini shu raqamlarga o‘zaro bir qiymatli akslantirib chiqsak, shu raqamlardan tuzilgan qandaydir

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \quad (2.4)$$

permutatsiya hosil bo‘ladi. (2.3) va (2.4) lardan

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ko‘rinishdagi ifodani tuzamiz va buni (2.3) raqamlardan tuzilgan ***o‘rniga qo‘yish*** deymiz. Bu o‘rniga qo‘yish ushbu o‘zaro bir qiymatli akslantirishlarning bajarilishini ifodalaydi. Masalan: 1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan tuzilgan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

o‘rniga qo‘yishda $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 2$ akslanishlar bajariladi. Mana bu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

o‘rniga qo‘yish esa o‘zaro bir qiymatli $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 5$ akslanishlarni ifodalaydi.

(2.3) raqamlar (2.5) o‘rniga qo‘yishning *yuqori satrini*, (2.4) raqamlar esa uning *pastki satrini* tashkil etadi.

(2.3) raqamlarning yana boshqa

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yishini olib, ikki o‘rniga qo‘yishning tenglik tushunchasini kiritamiz: agar S va t o‘rniga qo‘yishlardagi yuqori satrning istalgan k raqami pastki satrning bir xil raqamiga akslansa, ya‘ni $i_k \rightarrow j_k$ bo‘lsa, bu ikki o‘rniga qo‘yishni *teng*, ya‘ni $S = t$ deymiz. Yuqori satrning biror k raqami uchun $i_k \neq j_k$ bo‘lsa ham, S va t lar *teng emas*, ya‘ni $S \neq t$ deyiladi.

(2.3) raqamlarining

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yish ***aynan (birlik) o‘rniga qo‘yish*** deyiladi.

(2.3) raqamlarning hamma $n!$ ta o‘rniga qo‘yishlari to‘plamini S_n bilan belgilab, S_n dagi istalgan ikki o‘rniga qo‘yishni ko‘paytirish tushunchasiga o‘tamiz.

Ikkita oʻrniga qoʻyishni koʻpaytirish deb, ularni ketma-ket bajarishni tushunamiz. Masalan, S_5 toʻplamning ikki

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

oʻrniga qoʻyishini ketma-ket bunday bajaramiz: S oʻrniga qoʻyishda $1 \rightarrow 4$ va t da $4 \rightarrow 3$. Demak, natijada

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 = 1 \rightarrow 3.$$

Xuddi shu usulda 2, 3, 4, 5 lar uchun avvalo S dagi soʻngra t dagi akslanishlarni ketma-ket bajarsak, ushbularga ega boʻlamiz:

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 = 2 \rightarrow 2,$$

$$3 \rightarrow 3 \rightarrow 4 = 3 \rightarrow 4,$$

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 = 4 \rightarrow 1,$$

$$5 \rightarrow 2 \rightarrow 5 = 5 \rightarrow 5.$$

Shunday qilib, natijada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

oʻrniga qoʻyish kelib chiqadi. Uni S va t ***oʻrniga qoʻyishlarning koʻpaytmasi*** deb atab, St shaklda yozamiz. Demak,

$$St = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

St oʻrniga qoʻyish yana S_5 toʻplamga qarashli $5! = 120$ ta oʻrniga qoʻyishlardan biri ekanligi ravshan. Biz koʻramizki, S_n ning oʻrniga qoʻyishlarini koʻpaytirish S_n da algebraik amaldir, chunki bu amal S_n da bajariluvchan va bir qiymatli. Istalgan $S \in S_n$ oʻrniga qoʻyishni e aynan oʻrniga qoʻyishga koʻpaytirish va e ni S ga koʻpaytirish S ni oʻzgartirmaydi. Masalan,

$$Se = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = S.$$

Shuningdek, $eS = S$ ekanini tekshirib koʻrish yengil. $S \in S_n$ oʻrniga qoʻyish uchun teskari oʻrniga qoʻyish deb $S \cdot S^{-1} = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi $S^{-1} \in S_n$ oʻrniga qoʻyishga aytiladi.

S_n ning har bir S oʻrniga qoʻyishi uchun S_n da teskari oʻrniga qoʻyish mavjud. Haqiqatan,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & . & . & . & i_n \end{pmatrix}$$

oʻrniga qoʻyishning yuqori va pastki satrlarining oʻrnini almashtirsak, xuddi S ga teskari

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & . & . & . & i_n \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \end{pmatrix}$$

oʻrniga qoʻyish kelib chiqadi, chunki $S^{-1} \in S_n$ boʻlib, $S \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot S = e$ dir.

Masalan,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$$

o'rniga qo'yishga teskari o'rniga qo'yish

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

bo'lib, $SS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ni hosil qilamiz. Shunga o'xshash $S^{-1}S = e$

bo'lishini tekshirish engil.

1, 2, 3, ..., n raqamlarning istalgan

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yishga murojaat qilamiz, bunda $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ va $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ lar yuqoridagi n ta raqamlarning qandaydir permutatsiyalaridan iborat, S dagi yuqori satrning inversiyalari sonini μ va pastki satrning inversiyalari sonini ν deymiz.

Ta'rif. $\mu + \nu$ yig'indining juft yoki toq bo'lishiga qarab, S o'rniga qo'yishni **juft** yoki **toq o'rniga qo'yish** deyiladi.

1-misol. $S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yish juftdir, chunki yuqori satr

8 ta va pastki satr 6 ta inversiyaga ega bo'lib, $8+6=14$ juft sonni ifodalaydi.

2-misol. $t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ esa toq o'rniga qo'yish, chunki yuqori satr

9 ta va pastki satr 12 ta inversiyaga ega, shu sababli, $9+12=21$ toq son.

Teorema. 1, 2, 3, ..., n raqamlarning $n!$ ta o'rniga qo'yishlaridan $\frac{n!}{2}$ tasi

juft va $\frac{n!}{2}$ tasi toqdir.

O'rniga qo'yishlarni ularning juft-toqligini oson topishga imkon beradigan yozuvining qulay usuli **sikllarga yoyishdir**. n - darajali har qanday o'rniga qo'yish 1, 2, 3, ..., n simvollarning ba'zilarini o'z o'rnida qoldirishi mumkin, qolganlarini esa ko'chirishi mumkin. **Siklik o'rniga qo'yish** yoki **sikl** deb shunday o'rniga qo'yishga aytiladiki, uni yetarlicha ko'p marta takrorlagandan so'ng, u haqiqatan ham ko'chiradigan simvollarning har qaysisi bu simvollarning ixtiyoriy boshqa biriga o'tishi mumkin. Masalan, sakkizinchi darajali quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yish shundaydir, u haqiqatan ham, 2, 3, 6 va 8 simvollarni ko'chiradi, shu bilan birga 2 simvolni 8 ga, 8 simvolni 3 ga, 3 simvolni 6 ga, 6 simvolni esa yana 2 ga o'tkazadi.

Sikl haqiqatan ko'chiradigan simvollar soni **siklning uzunligi** deyiladi.

Agar n - darajali ikkita tsikl haqiqatda o'zni almashtiriladigan umumiy simvollar bo'lmasa, ular **erkin (bog'liqmas)** sikllar deyiladi.

Misollar.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (13)(254).$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (156)(38)(47).$$

Aksincha, erkin sikllarga yoyilmasi bilan berilgan har qanday o'rniga qo'yish uchun (bu o'rniga qo'yishning darajasi ma'lum degan shart ostida) uning yozuvining odatdagi shaklini topish mumkin. Masalan,

3) agar $(1372)(45)$ o'rniga qo'yishning darajasi 7 ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa:

$$(1372)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

n - darajali o'rniga qo'yish berilgan va s - uning yoyilmasidagi erkin sikllar soni plus o'rniga qo'yish o'z o'rnida qoldiradigani simvollar soni bo'lsin. $n - s$ ayirma bu o'rniga qo'yishning **dekrementi** deyiladi. Dekrement haqiqatda almashtiriladigan simvollar soni minus o'rniga qo'yish yoyilmasiga kiradigan erkin sikllar soniga teng ekanligi ravshan. Yuqorida ko'rilgan 1), 2) va 3) misollar uchun dekrement mos ravishda 3, 4 va 4 ga teng bo'ladi.

O'rniga qo'yishning juft-toqligi uning dekrementining juft-toqligi bilan bir xil bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

4. Quyidagi o'rin almashtirishlarda inversiyalar sonini aniqlang.

- 1) 7, 2, 6, 1, 4, 3, 5
- 2) 2, 9, 3, 8, 6, 7, 5, 4, 1
- 3) 1, 10, 9, 2, 11, 8, 6, 7, 5, 4, 3
- 4) 3, 6, 9, ..., $3n$, 1, 4, 7, ..., $3n-2$, 2, 5, ..., $3n-1$
- 5) 1, 4, 7, ..., $3n-2$, 2, 5, ..., $3n-1$, 3, 6, 9, ..., $3n$
- 6) 7, 6, 2, 1, 8, 9, 5, 4, 3
- 7) 2, 4, 6, ..., $2n$, 1, 3, 5, ..., $2n-1$

5. Quyidagi o'rniga qo'yishlarda inversiyalar sonini aniqlang.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 & 3 & 8 & 5 & 7 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Quyidagi o'rniga qo'yishlarni ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Quyidagi o'rniga qo'yishlarni ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Quyidagi o'rniga qo'yishlarni ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Quyidagi o'rniga qo'yishlarni ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Quyidagi o'rniga qo'yish qanday darajada E ga teng:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Quyidagi o'rniga qo'yish qanday darajada E ga teng:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Quyidagi tenglamadan X o'rniga qo'yishni toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Quyidagi tenglamadan X o'rniga qo'yishni toping:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

14. Quyidagi o'rniga qo'yishni sikllar ko'paytmasiga yoying:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 6 & 3 & 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Quyidagi o'rniga qo'yishni sikllar ko'paytmasiga yoying:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Quyidagi oʻrniga qoʻyishni sikllar koʻpaytmasiga yoying:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Quyidagi oʻrniga qoʻyishga teskari oʻrniga qoʻyishni toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Quyidagi oʻrniga qoʻyishga teskari oʻrniga qoʻyishni toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Sikllar yordamida yozilgan oʻrniga qoʻyishni ikki satrli shaklga keltiring:

1. (4 7 6) (5 3) (2) (18)

2. (1 5 3) (2) (7 6) (8 4)

3. (9) (3 4 5 6) (2 1 7 8)

4. (6 5 4 2 3 1) (7) (9 8)

5. (1 3 5 4) (2 7) (6)

6. (3 2 4) (5) (1 6 7)

7. (6 1 3 4) (5) (7 9 8)

8. (3 2 1 4 5) (7 8 9)(6)

9. (7 3 5) (2 4 6)(1)

10. (6 1 5) (2 3 7) (4)

3-§. Determinantlar va ularning xossalari

3.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. To'rtta sondan iborat

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadval **ikkinchi tartibli kvadrat matritsa** deyiladi.

Ikkinchi tartibli kvadrat matritsaga mos keluvchi **ikkinchi tartibli determinant** deb quyidagi belgi va tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (3.1)$$

Bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — (1) determinantning elementlari: a_{11}, a_{12} sonlar birinchi satrni, a_{21}, a_{22} sonlar esa ikkinchi satrni; a_{11}, a_{21} sonlar birinchi ustunni, a_{12}, a_{22} sonlar esa ikkinchi ustunni tashkil qiladi.

Xuddi shunga o'xshash 3-, 4- va h.k. n — tartibli determinant tushunchalari kiritiladi.

Soddalik uchun biz bu yerda 3-tartibli determinantlar va ularning xossalari bilan tanishamiz. Yuqori tartibli determinantlarga kelsak, ular ham 3-tartibli determinant kabi xossalarga ega bo'ladi.

Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ifoda **uchinchi tartibli determinant**,

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$ **uning qiymati** deyiladi. Demak,

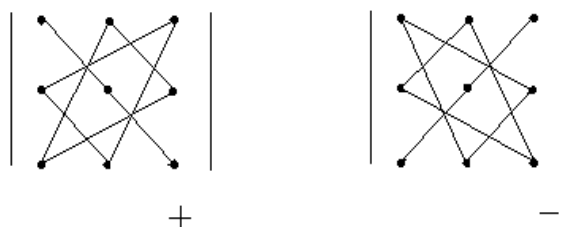
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \quad (3.2)$$

Bu holda ham determinant elementlarining birinchi indeksida turgan son satr raqamini, ikkinchi indeksida turgan son esa ustun raqamini bildiradi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} sonlar (3.2) determinantning *bosh diagonal elementlari*, a_{31}, a_{22}, a_{13} sonlar esa shu determinantning *yordamchi diagonal elementlari* deyiladi.

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ularning uchta musbat ishorali, uchta manfiy ishorali bo'ladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi,



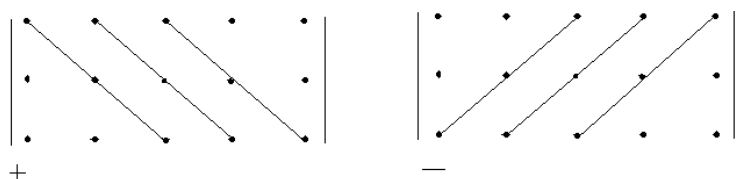
Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko'rinishda yozib olsak,

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12}$$

$$a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22}$$

$$a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32}$$

determinantning qiymatini *Sarryus usuli* deb ataluvchi usul bilan ham hisoblash mumkin:



$(n \times n)$ ta sondan iborat ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

jadval *n-tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Ta'rif. *n-tartibli determinant* deb quyidagi simvol bilan belgilangan sonni ataymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n - tartibli determinant n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementga ega. Bunda $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar *birinchi(bosh)* diagonalni, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlar *ikkinchi* diagonalni tashkil etadi.

3.2. Determinantlarning asosiy xossalari.

1⁰. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

2⁰. Agar determinantning satrlaridan biri nollardan iborat bo'lsa, bunday determinant nolga teng bo'ladi.

3⁰. Agar bir determinant ikkinchisidan uning ikkita satrining o'rnini almashtirish orqali hosil qilingan bo'lsa, u holda birinchi determinantning barcha elementlari teskari ishora bilan ikkinchi determinantning ham elementlari bo'ladi, ya'ni ikkita satrning o'rnini almashishidan determinant faqat ishorasini o'zgartiradi.

4⁰. Ikkita bir xil satrga ega bo'lgan determinant nolga teng.

5⁰. Agar determinantning birorta satrining barcha elementlarini biror k songa ko'paytirilsa, u holda determinantning o'zi ham k ga ko'paytiriladi.

6⁰. Ikkita proporsional satrga ega bo'lgan determinant nolga teng.

7⁰. Agar n -tartibli determinant i -satrining barcha elementlari ikkita qo'shiluvchining yig'indisi, ya'ni

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladi, bu determinantlarning i -satridan tashqari barcha satrlari berilgan determinantnikiday bo'ladi, ularning biridagi i -satr b_j elementlardan, boshqasi esa c_j elementlardan iborat bo'ladi.

8⁰. Agar determinantning satrlaridan biri uning qolgan satrlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, determinant nolga teng bo'ladi.

9⁰. Agar determinantning satrlaridan biriga boshqa satrning mos elementlarini birorta songa ko'paytirib qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Ta'rif. n - tartibli Δ determinantning istalgan r ta satri va r ta ustunlarini ajrataylik ($1 \leq r < n$), bu satrlar va ustunlarning kesishgan joylaridagi elementlarni Δ determinantdagidek tartibda olib, ulardan r - tartibli M determinantni tuzsak, u Δ ning *r - tartibli minori* deb ataladi.

Ta’rif. Δ determinantda ajratilgan r ta satr va r ta ustunni o‘chiraylik. Δ ning qolgan elementlarini shu Δ dagidek tartibda olib, ulardan $(n-r)$ - tartibli $\overline{M}$ determinantni tuzsak, u M ga **qo‘shma minor** deyiladi.

Misol. 5 – tartibli ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

determinantda 1 – va 5 – satrlarni, 3 – va 4 – ustunlarni ajratsak, ularning kesishgan joylaridagi elementlardan 2 – tartibli

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

minor tuziladi. Bu ajratilgan satr va ustunlarni o‘chirsak, qolgan elementlardan ushbu:

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

qo‘shma minor hosil bo‘ladi.

Agar k – satr va l – ustun ajratilsa, ularning kesishgan joyida a_{kl} element turgani uchun

$$M = a_{kl} \quad .$$

Bu holda, $\overline{M}$ qo‘shimcha minor, odatda, M_{kl} bilan belgilanib, a_{kl} **elementning minori** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 5 – tartibli determinantda 3 – satr va 4 – ustunga qarashli a_{34} elementning minori

$$M_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

bo‘lib, bu minor, determinantdan 3 – satr va 4 – ustunni o‘chirish bilan hosil qilingan.

Determinant a_{ik} elementining algebraik to‘ldiruvchisi

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Misol. Ushbu

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

minorning algebraik to'ldiruvchisi:

$$A = (-1)^{1+5+3+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

a_{34} elementning algebraik to'ldiruvchisi esa ushbudan iborat:

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = -M_{34} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Ixtiyoriy tartibli determinantni hisoblashning ikkita usulini keltiramiz:

1. *Determinant tartibini pasaytirish usuli* – determinant biror qatori (satr yoki ustuni) elementlarining bittasidan boshqalarini oldindan nolga aylantirib olib, shu qator bo'yicha yoyish usuli.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 91.$$

2. *Determinantni uchburchak ko'rinishga keltirish usuli* determinantni shunday almashtirishdan iboratki, uning bosh diagonalidan bir tomonda yotuvchi hamma elementlari nolga aylantiriladi va uchburchaksimon shaklga keltiriladi.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

20. Oldin biror qator elementlarining bittasidan boshqasini nollarga aylantirib, determinantni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 4 & -8 \\ -2 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

21. Berilgan determinantni uch usul bilan hisoblang:

a) uni i -satr elementlari buyicha yoying.

b) uni j -ustun elementlari buyicha yoying.

c) oldin j -ustundagi bittadan boshka elementlarni nolga aylantirib, sungra shu ustun elementlari buyicha yoying.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$i=2, j=4$$

$$2. \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$i=2, j=2$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$i=3, j=4$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$i=4, j=3$$

$$5. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$i=1, j=3$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$i=2, j=1$$

$$7. \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$i=3, j=3$$

$$8. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$i=1, j=2$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$i=3, j=1$$

4-§. Vektor fazo. Vektorlarning chiziqli bog‘liqligi va chiziqli erkliligi.

4.1. Vektor fazo.

Qandaydir elementlardan (vektorlardan, matritsalaridan yoki ko‘phadlardan va h. k.) tuzilgan V to‘plam berilgan bo‘lsin, uning elementlari quyidagicha kichik harflar bilan belgilanadi:

$$x, y, z, \dots, u, \vartheta, w, \dots$$

yoki

$$a, b, c, d, \dots$$

V to‘plam bilan bir qatorda biror sonlar maydonini olib, uni K (yoki haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni) bilan belgilaylik. K ning elementlari odatda

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$$

bilan belgilanadi.

V to‘plamning elementlari ustida qo‘shish deb atalgan amal o‘rnatilgan deb faraz qilaylik. Agar x va y elementlar qo‘shiladigan bo‘lsa, uni odatdagi $x + y$ belgi bilan ifodalab, yig‘indi va qo‘shiluvchilar terminlarini ishlatamiz.

Bu amaldan tashqari, yana K ning elementlarini (sonlarni) V ning elementlariga *ko‘paytirish* deb atalgan amal ham o‘rnatilgan bo‘lsin. Buni αx yoki, binobarin, $x\alpha$ shaklda belgilash qabul qilingan. Shunday qilib, $\alpha x = x\alpha$. Bunda ham *ko‘paytma* va *ko‘paytuvchilar* terminlarini ishlatamiz.

Mana shunday V to‘plam va K maydonga nisbatan ushbu ta’rifni beramiz:

Ta’rif. Quyidagi aksiomalarni qanoatlantiruvchi V to‘plam K maydongi *chiziqli fazo* deyiladi:

1. V dagi ixtiyoriy ikki elementning yig‘indisi yana shu V ning biror elementiga teng. Shuningdek V dagi elementning K dagi elementga ko‘paytmasi V ning biror elementiga teng.

2. V ning istalgan uch elementini qo‘shish assotsiativlik qonuniga bo‘ysunadi: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. V ning istalgan ikki elementini qo‘shish kommutativlik qonuniga bo‘ysunadi: $x + y = y + x$

4. V da nol element mavjud: $x + 0 = x$.

5. V ning har bir x elementi uchun V da unga qarama – qarshi $(-x)$ element mavjud: $x + (-x) = 0$.

6. V ning istalgan x elementi uchun: $1 \cdot x = x$.

7. K ning elementlarini V ning elementiga ko‘paytirish assotsiativlik qonuniga bo‘ysunadi: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

8. Distributivlik qonuni quyidagi ikki holda ham bajariladi:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \text{va} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Chiziqli V fazoning elementlari, odatda, *vektorlar* deb, V ning o‘zi esa *vektor fazosi* deb ham ataladi. Bu terminni ishlatganda, *nol vektor* deb aytish tabiiydir.

Haqiqiy sonlar maydonidagi chiziqli fazo, odatda, *haqiqiy fazo* deb, kompleks sonlar maydonidagi chiziqli fazo esa *kompleks fazo* deb ataladi.

4.2. Vektorlarning chiziqli bog‘liqligi. R maydon ustida V fazoning chekli sonidagi

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \quad (4.1)$$

vektorlar sistemasini olaylik.

Ta’rif. Aqalli bittasi noldan farqli $c_1, c_2, \dots, c_n \in P$ sonlar mavjud bo‘lib, (4.1) vektorlar uchun

$$c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_n \bar{x}_n = \bar{0} \quad (4.2)$$

tenglik bajarilsa, (4.1) vektorlar *chiziqli bog‘liqligi vektorlar* (*chiziqli bog‘liqligi vektorlar vektorlar sistemasi* yoki *chiziqli bog‘liqligi sistema*) deyiladi.

Agar aqalli bittasi noldan farqli va (4.2) tenglikni qanoatlantiruvchi $c_1, c_2, \dots, c_n \in P$ sonlar mavjud bo‘lmasa, demak, (4.2) tenglik faqat $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ shartdagina bajarilsa, (4.1) vektorlar *chiziqli erkli vektorlar* (*chiziqli erkli vektorlar vektorlar sistemasi* yoki *chiziqli erkli sistema*) deyiladi.

Xususiyl holda, (4.1) sistema bittagina $\bar{x} \in V$ vektordan iborat bo‘lsa, $x \neq \bar{0}$ shartda x vektorning o‘zi yolg‘iz chiziqli erkli, chunki $c\bar{x} = \bar{0}$ dan $c = 0$ kelib chiqadi.

Ta’rif. $\bar{y} \in V$ vektor va (4.1) vektorlar uchun $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$ sonlar mavjud bo‘lib (bularning hammasi 0 ga teng bo‘lishi ham mumkin),

$$\bar{y} = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n \quad (4.3)$$

tenglik bajarilsa, $\bar{y}$ vektor (4.1) vektorlarning [(4.1) sistemaning] *chiziqli kombinatsiyasi* yoki $\bar{y}$ vektor (4.1) vektorlar [(4.1) sistemaning] orqali *chiziqli ifodalanadi* deyiladi.

Vektorlarning chiziqli bog‘liqligi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. (4.1) vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning aqalli bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarli.

2-xossa. (4.1) sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, butun sistema ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

3-xossa. Agar (4.1) sistema chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda uning har qanday qism sistemasi ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

4-xossa. (4.1) ning istalgan $\bar{x}_i$ vektori (4.1) sistema orqali chiziqli ifodalanadi.

Ta’rif. R maydon ustida V fazoda n ta chiziqli erkli vektor mavjud bo‘lib, bu fazoning istalgan $(n+1)$ ta vektori chiziqli bog‘liq bo‘lsa, V ni *n o‘lchamli chiziqli fazo* deyiladi.

n o‘lchovli V fazo V_n yoki V^n ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’rif. n o‘lchovli V_n fazoning istalgan n ta chiziqli erkli vektori sistemasi bu fazoning *bazisi* deyiladi.

Misollar.

Ratsional sonlar maydonidagi 3 – tartibli matritsalarining chiziqli fazosini olamiz. Bu fazoning ushbu:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa (4.5) bazisdan (4.4) bazisga *o'tish matritsasi* deyiladi. (4.6) va (4.7) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \dots + b_n g_n.$$

Buning o'ng tomoniga (4.8) ifodalarni qo'yamiz:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = b_1 \sum_{i=1}^n c_{1i} e_i + b_2 \sum_{i=1}^n c_{2i} e_i + \dots + b_n \sum_{i=1}^n c_{ni} e_i = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n c_{1i} b_i \right) e_1 + \left(\sum_{i=1}^n c_{2i} b_i \right) e_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n c_{ni} b_i \right) e_n, \end{aligned}$$

bundan (4.4) bazisda x vektorning koordinatalari bir qiymatli aniqlangani uchun

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \dots + c_{n1}b_n, \\ a_2 &= c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \dots + c_{n2}b_n, \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \dots + c_{nn}b_n. \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) ni matritsaviy ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

(4.10) tenglik x vektorning (4.5) bazisdagi koordinatalaridan (4.4) bazisdagi koordinatalariga o'tish formulasini beradi.

Misol. V_3 geometrik vektorlar fazosidagi $x \in V_3$ vektor $e_1 + e_3$, $e_2 + e_3$, e_3 bazis orqali $x = 5(e_1 + e_3) + 4(e_2 + e_3) + 3e_3$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bu bazisdan e_1, e_2, e_3 bazisga o‘tish matritsasi quyidagicha:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x ning e_1, e_2, e_3 bazisdagi koordinatalarini toping.

Yechilishi. (4.10) formulaga asosan

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x = 5e_1 + 4e_2 + 12e_3$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

22. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring. $\bar{d}$ vektorning shu bazisdagi yoyilmasini toping:

1. $\bar{a} = \{4, 1, 0\}$, $\bar{b} = \{3, -1, 1\}$, $\bar{c} = \{0, 1, -2\}$, $\bar{d} = \{1, -4, 1\}$.
2. $\bar{a} = \{1, -1, 2\}$, $\bar{b} = \{-3, 2, 0\}$, $\bar{c} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{d} = \{8, 8, 7\}$.
3. $\bar{a} = \{-1, 1, 1\}$, $\bar{b} = \{3, 0, 2\}$, $\bar{c} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{d} = \{8, -5, 7\}$.
4. $\bar{a} = \{2, 0, -1\}$, $\bar{b} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{c} = \{0, 1, 3\}$, $\bar{d} = \{5, -4, 5\}$.
5. $\bar{a} = \{4, 1, 2\}$, $\bar{b} = \{1, 1, 0\}$, $\bar{c} = \{2, 0, 1\}$, $\bar{d} = \{3, 5, 0\}$.
6. $\bar{a} = \{2, 5, -3\}$, $\bar{b} = \{-1, 0, 1\}$, $\bar{c} = \{1, 0, 2\}$, $\bar{d} = \{-3, -5, 7\}$.
7. $\bar{a} = \{1, 0, 3\}$, $\bar{b} = \{0, 1, -2\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 0\}$, $\bar{d} = \{7, -1, 19\}$.
8. $\bar{a} = \{0, -1, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 3, 2\}$, $\bar{c} = \{1, 0, 5\}$, $\bar{d} = \{5, -15, 0\}$.
9. $\bar{a} = \{1, 0, 4\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, 3\}$, $\bar{c} = \{1, -2, 0\}$, $\bar{d} = \{-6, 2, 0\}$.
10. $\bar{a} = \{2, 1, -1\}$, $\bar{b} = \{0, -3, 2\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 4\}$, $\bar{d} = \{-6, -14, -9\}$.

23. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorlar berilgan. a) $\vec{d}$ vektorning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar orqali yoyilmasini; b) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ vektorning $\gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$ vektor yo'nalishidagi proyeksiyasini toping:

1. $\vec{a} = \{3, 2, -4\}$, $\vec{b} = \{-2, -7, 1\}$, $\vec{c} = \{6, 20, -3\}$, $\vec{d} = \{-1, 4, 3\}$;
 $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$, $\delta = 6$.
2. $\vec{a} = \{14, 9, -1\}$, $\vec{b} = \{5, 7, -2\}$, $\vec{c} = \{-3, 1, 3\}$, $\vec{d} = \{1, -4, 6\}$;
 $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$.
3. $\vec{a} = \{1, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{-2, -4, 3\}$, $\vec{c} = \{0, -2, 3\}$, $\vec{d} = \{-8, -10, 13\}$;
 $\alpha = 6$, $\beta = -7$, $\gamma = -1$, $\delta = -3$.
4. $\vec{a} = \{-3, -6, 7\}$, $\vec{b} = \{1, 3, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 5, 1\}$, $\vec{d} = \{7, 3, 8\}$;
 $\alpha = -3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $\delta = -6$.
5. $\vec{a} = \{4, -5, -1\}$, $\vec{b} = \{-2, 4, 1\}$, $\vec{c} = \{3, -1, 2\}$, $\vec{d} = \{1, -11, -9\}$;
 $\alpha = -3$, $\beta = 5$, $\gamma = 1$, $\delta = 7$.
6. $\vec{a} = \{2, 3, 4\}$, $\vec{b} = \{-4, 3, -1\}$, $\vec{c} = \{3, 1, 2\}$, $\vec{d} = \{4, 4, 9\}$;
 $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $\gamma = -2$, $\delta = 3$.
7. $\vec{a} = \{4, -3, 2\}$, $\vec{b} = \{3, 2, -7\}$, $\vec{c} = \{-2, 5, 1\}$, $\vec{d} = \{-4, 22, -13\}$;
 $\alpha = -5$, $\beta = -7$, $\gamma = -3$, $\delta = 2$.

8. $\vec{a} = \{-6, 4, 5\}, \vec{b} = \{-5, 3, -1\}, \vec{c} = \{1, 2, 3\}, \vec{d} = \{3, -9, 2\};$
 $\alpha = 2, \beta = -6, \gamma = 4, \delta = 5.$
9. $\vec{a} = \{-4, 3, -4\}, \vec{b} = \{3, -5, 6\}, \vec{c} = \{7, 2, 1\}, \vec{d} = \{-9, -16, 12\};$
 $\alpha = 6, \beta = 4, \gamma = 2, \delta = -7.$
10. $\vec{a} = \{4, -7, 4\}, \vec{b} = \{-3, 2, 1\}, \vec{c} = \{9, 5, 3\}, \vec{d} = \{10, 13, -8\};$
 $\alpha = 7, \beta = 2, \gamma = -6, \delta = -5.$

5-§. Matritsalar va ular ustida amallar. Matritsa rangi

Sonlarning m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchakli jadval $m \times n$ **o'lchamli matritsa** deyiladi. Bu matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar $m = 1$ bo'lsa, **satr matritsa**, $n = 1$ bo'lsa, **ustun matritsa**, $m = n$, bo'lsa, **kvadrat matritsa** hosil bo'ladi. Kvadrat A matritsa uchun shu matritsaning elementlaridan tuzilgan n -tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu determinant $\det A$ yoki $|A|$ orqali belgilanadi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Agar $\det A = 0$ bo'lsa, u holda A matritsa **maxsus**, $\det A \neq 0$ bo'lsa, **maxsusmas** deyiladi.

Bosh diagonalida turgan elementlari birga, qolgan elementlari nolga teng bo'lgan kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E bilan belgilanadi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

ravshanki, $\det E = 1$.

Agar o'lchamlari bir xil $m \times n$ bo'lgan ikki matritsaning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bu matritsalar **teng** deyiladi.

Bir xil $m \times n$ o'lchamli A va B matritsaning **yig'indisi** deb o'sha o'lchamli shunday $C = A + B$ matritsaga aytiladiki, uning har bir elementi A va B matritsalarining mos elementlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

$m \times n$ o'lchamli A matritsaning λ **songa ko'paytmasi** deb, o'sha o'lchamdagi $B = \lambda \cdot A$ matritsaga aytiladiki, bu matritsa elementlari A matritsa elementlarini λ ga ko'paytirishdan hosil bo'ladi.

$m \times k$ o'lchamli A matritsaning $k \times n$ o'lchamli B **matritsaga ko'paytmasi** deb, $m \times n$ o'lchamli shunday $C = A \cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matritsaning i - satri elementlarini B matritsaning j - ustunidagi mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Agar $AB = BA$ bo'lsa, u holda A va B matritsalar **o'rni almashinadigan** yoki **kommutativ matritsalar** deyiladi.

Ta'rif. A matritsaning **rangi** deb, uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ kabi belgilanadi.

Matritsani **elementar almashtirishlar** deb uni quyidagicha almashtirishlarga aytiladi:

- a) ikkita satrning yoki ikkita ustunning o'rnini almashtirish (transpozitsiya);
- b) satrni (yoki ustunni) noldan farqli ixtiyoriy songa ko'paytirish;
- c) bir satrga (yoki ustunga) biror songa ko'paytirilgan boshqa satrni (ustunni) qo'shish;
- d) faqat nollardan iborat satrni (ustunni) o'chirish.

Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi. Shu sababli, elementar almashtirishlardan foydalanib, matritsa diagonal elementlaridan tashqari barcha elementlari nolga teng bo'ladigan ko'rinishga keltirish mumkin. Bu holda matritsa rangi diagonaldagi nolga teng bo'lmagan elementlari soniga teng bo'ladi.

Masalaning qo'yilishi.

1) Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

matritsalarining AB va BA ko'paytmalarini toping.

2) Matritsaning rangini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi: 1) AB matritsa 2×2 o'lchamga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 28 & -39 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BA matritsa 3×3 o'lchamga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ 3 & -13 & 17 \\ 2 & 24 & -33 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$AB \neq BA$ bo'lganligi sababli A va B matritsalar kommutativ emas.

2) Matritsa ustida elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hosil qilingan matritsaning rangi 2 ga teng, demak, berilgan A matritsaning rangi ham 2 ga teng bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

24. Quyida berilgan matritsani rangini toping.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 61 \\ 2 & 5 & 1 & -23 \\ 17 & -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 12 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & 7 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$11) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

25. A va B matritsalar berilgan. AB va BA matritsalar ko'paytmalarini toping.

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ matritsalarini ko'paytiring.}$$

$$27. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } A = C^2 - B^2 \text{ ni toping.}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -9 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matritsalarini ko'paytiring.}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } C = (AB)^T - B^T A^T \text{ ni toping.}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ matritsalarini ko'paytiring.}$$

$$31. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } C = A^2 + B^2 \text{ ni toping.}$$

$$32. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ matritsalarini ko'paytiring.}$$

$$33. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } C = 2AB + (B^T A^T)^T \text{ ni toping.}$$

$$34. A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ matritsalarini ko'paytiring.}$$

$$35. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } S = B - AB \text{ ni toping.}$$

36. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = A^T B - B^T A$ ni toping.

37. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ matritsalarini ko'paytiring.

38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = AB + 2B$ ni toping.

39. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = B^T A - (AB)^T$ ni toping.

40. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = B^T A^T$ ni toping.

41. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = B^T A + (AB)^T$ ni toping.

42. $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $C = AB - (B^T A^T)^T$ ni toping.

6-§. Teskari matrisa

Agar kvadrat matritsa maxsusmas bo'lsa, u holda $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi va u A matrisaga **teskari matritsa** deyiladi. A matrisaning A^{-1} teskari matrisasi quyidagicha aniqlanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix},$$

bu yerda $A_{ik} - a_{ik}$ elementining algebraik to'ldiruvchisi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsaviy usuli. Ushbu n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini

[illegible]

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

U holda (6.1) sistemani matritsalarini ko‘paytirish qoidasidan foydalanib, ushbu ekvivalent shaklda yozish mumkin:

$$AX = B. \quad (6.3)$$

Bu yerda A – noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa, B – ozod hadlardan tuzilgan ustun matritsa, X – noma'lumlardan tuzilgan ustun matritsa.

Agar A maxsusmas matritsa, ya'ni $\det A \neq 0$ bo'lsa, u holda uning uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud. (6.3) matritsali tenglamaning ikkala qismini A^{-1} ga chapdan ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

yoki

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

$A^{-1}A = E, EX = X$ ekanini hisobga olib,

$$X = A^{-1}B \quad (6.4)$$

ni topamiz. (6.4) formula A matritsa xosmas bo'lganda n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi yechimining matritsali yozuvini beradi.

Misol-1. Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechilishi: Matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 28 - 30 + 35 - 16 = 17 \neq 0.$$

Demak, A matritsa maxsusmas matritsa ekan. Endi A_{ik} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 35; & A_{21} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = -(4-7) = 3; & A_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8-15) = 23; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2+3 = 1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(5+4) = -9; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -28; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -(-7+6) = 1; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

Teskari matritsani tuzamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 35 & 3 & -10 \\ 23 & 1 & -9 \\ -28 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ekanini tekshirish mumkin.

Misol-2. Ushbu $\begin{cases} x - 2y + z = 5, \\ 2x - z = 0, \\ -2x + y + z = -1 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechilishi: Bu misolda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

U holda berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B$$

ko'rinishda yozish mumkin. (6.4) formulaga asosan

$$X = A^{-1}B.$$

Bu sistemaning A matritsasi teskarisini 1-misoldagidek topamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bundan $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

43. A matrisa berilgan. A^{-1} teskari matrisani toping va $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ekanini tekshiring.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -5 & 7 & -4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

44. Quyidagi matrisaviy tenglamani yeching:

1) $X \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & 25 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

7) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7-§. Determinantlarni ko‘paytirish

Teorema. n -tartibli

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{va} \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ikki determinantning ko‘paytmasini yana n -tartibli

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lib, D ko‘paytmaning c_{ij} elementi D_1 ning i -satridagi hamma elementlarini D_2 ning j -ustunidagi mos elementlariga ko‘paytirib, natijalarni qo‘shish bilan vujudga keladi, ya’ni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (7.1)$$

$(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$

Isbot. Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$2n$ -tartibli determinantni olamiz.

Birinchidan: Δ determinantda birinchi n ta satrni ajratib, ulardan n -tartibli minorlar tuzsak, birinchi minor D_1 va uning algebraik to‘ldiruvchisi D_2 bo‘ladi. Qolgan hamma minorlar esa nolga teng, chunki ularning eng kamida, bitta ustuni nollardan iborat. Demak, Δ ning shu minorlar bo‘yicha yoyilmasi

$$\Delta = D_1 \cdot D_2.$$

Ikkinchidan: Δ determinantni shaklan shunday o‘zgartiraylikki, natijada hamma b_{ij} lar o‘rinlaridagi elementlar nolga aylansin. Buning uchun, 1-ustunni b_{11}

ga, 2-ustunni b_{21} ga, ..., n – ustunni b_{n1} ga ko‘paytirib, natijalarni $(n+1)$ -ustunga qo‘shamiz. So‘ngra 1-ustunni b_{12} ga, 2-ustunni b_{22} ga, ..., n – ustunni b_{n2} ga ko‘paytirib, natijalarni $(n+2)$ -ustunga qo‘shamiz va hokazo. Eng oxirgi, 1-ustunni b_{1n} ga, 2-ustunni b_{2n} ga, ..., n – ustunni b_{nn} ga ko‘paytirib, natijalarni $2n$ – ustunga qo‘shamiz.

Bularni bajargandan keyin, Δ determinantni quyidagi shaklni oladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix},$$

bunda hamma c_{ij} elementlar xuddi (7.1) yig‘indilarga teng.

Endi, Δ ni so‘nggi n ta satrdan tuzilgan n -tartibli minorlar bo‘yicha yoyamiz. Bu minorlar orasida faqat:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

minor noldan farqli bo‘lib, uning algebraik to‘ldiruvchisi quyidagi determinantdan iborat:

$$A = (-1)^{[(n+1)+(n+2)+\dots+2n]+[1+2+\dots+n]} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n(2n+1)} \cdot D.$$

Qolgan hamma minorlar nolga teng. Demak, bizning yoyilmamiz:

$$\Delta = MA = (-1)^n \cdot (-1)^{n(2n+1)} \cdot D = (-1)^{2(n^2+n)} \cdot D = D$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$D = D_1 \cdot D_2.$$

Teorema isbotlandi.

Bu isbot qilingan ko‘paytirish qoidasi - «satrlarni ustunlarga» qoidasi deyiladi. Determinantda satrlarni ustunlar bilan almashtirish mumkin bo‘lgani uchun, yana uchta ko‘paytirish qoidasini hosil qilamiz:

«satrlarni satrlarga», «ustunlarni satrlarga» va «ustunlarni ustunlarga» qoidasi.

Misol. Ushbu

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

determinantlarni «satrlarni satrlarga» va «ustunlarni ustunlarga» qoidasi bo'yicha ko'paytmasini hisoblang.

Yechilishi: «Satrlarni satrlarga» qoidasi bo'yicha quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \cdot \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 & (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 8 & 17 & -8 \\ 17 & 9 & -2 \\ 8 & 23 & -10 \end{vmatrix} = -286. \end{aligned}$$

Bu determinantlarni «ustunlarni ustunlarga» qoidasi bo'yicha ko'paytirsak ham yana o'sha natijaga kelamiz:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \cdot \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 8 & 3 & 12 \\ 8 & 12 & 1 \\ 6 & 17 & -13 \end{vmatrix} = -286. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

45. Quyida berilgan determinantlarni «satrlarni satrlarga» qoidasi bo'yicha ko'paytiring:

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 7 & 14 \\ 2 & -10 & 32 \\ 22 & -3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$2) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3) \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \\ 1 & 13 & -5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5) \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & -9 & 1 \\ -2 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

46. Quyida berilgan determinantlarni «ustunlarni ustunlarga» qoidasi bo'yicha ko'paytiring:

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$2) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 25 & -7 \\ 3 & 45 & 2 \\ 9 & 0 & -4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -14 & 1 & -2 \\ 3 & -51 & 5 \\ -4 & 3 & 67 \end{vmatrix}$$

$$5) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

8-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sonlardan ildiz chiqarish

8.1. Kompleks sonning algebraik formasi. Ushbu

$$a + bi$$

ko'rinishdagi sonlar **kompleks sonlar** deyiladi, bu yerda a, b lar haqiqiy sonlardir.

Kompleks sonlarni bitta harf bilan ham belgilash mumkin, masalan:

$$\alpha = a + bi,$$

bu yerda a son α ning **haqiqiy**, b esa **mavhum** qismi deb ataladi va mos ravishda

$$\operatorname{Re} \alpha = a \quad \text{va} \quad \operatorname{Im} \alpha = b$$

ko'rinishda yoziladi (latincha *reabis* – haqiqiy, *imaginarius* – mavhum demakdir).

Masalan:

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{Im}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}.$$

$a + bi$ son kompleks sonning **algebraik formasi (shakli)** deyiladi.

8.2. Kompleks sonlar ustida to'rt amal. Agar berilgan

$$\alpha = a + bi \quad \text{va} \quad \beta = c + di$$

kompleks sonlarda

$$a = c \quad \text{va} \quad b = d$$

bo'lsa, bu kompleks sonlar teng deyiladi. Bu $\alpha = \beta$ kabi yoziladi.

Har qanday ikkita kompleks sonni quyidagicha qo'shish va ayirish qabul qilingan:

$$\alpha \pm \beta = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Masalan:

$$(5 - 2i) + (8 - 7i) = (5 + 8) + i(-2 - 7) = 13 - 9i;$$

$$(2 + i\sqrt{3}) - (6 - i) = (2 - 6) + i(\sqrt{3} + 1) = -4 + i(1 + \sqrt{3}).$$

Har qanday ikkita kompleks sonni ko'paytirish ko'phadlarni ko'paytirish qoidasiga binoan bajariladi, ya'ni

$$\alpha \cdot \beta = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Ma'lumki, $i^2 = -1$, shuning uchun

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Quyidagi

$$\alpha = a + bi \quad \text{va} \quad \overline{\alpha} = a - bi$$

kompleks sonlar **o'zaro qo'shma sonlar** deyiladi. Qo'shma sonlarning yig'indisi ham, ko'paytmasi ham haqiqiy son bo'ladi:

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2a \quad \text{va} \quad \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Masalan,

$$(5 + 4i) + (5 - 4i) = 10,$$

$$(5 + 4i)(5 - 4i) = 25 + 16 = 41.$$

Ikkita $\alpha = a + bi$ va $\beta = c + di$ kompleks sonning birini ikkinchisiga bo'lish uchun kasrning surat va maxrajini $\overline{\beta} = c - di$ qo'shma kompleks songa ko'paytiramiz. U holda

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Masalan:

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{2i}{2} = i;$$

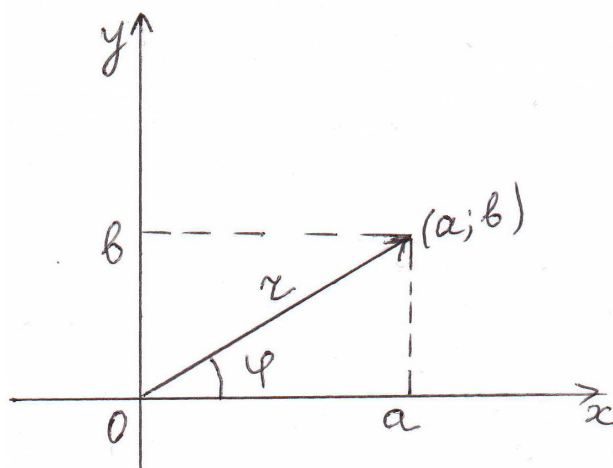
$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i.$$

8.3. Kompleks sonning trigonometrik shakli. $\alpha = a + bi$ kompleks sonning ikki xil geometrik ma'nosi bor:

a) u tekislikda (a, b) nuqtani tasvirlaydi;

b) u $(0, 0)$ nuqta bilan (a, b) nuqtani tutashtiruvchi vektorni tasvirlaydi.

Ma'lumki, tekislikda har bir kompleks songa bitta nuqta va aksincha, har bir nuqtaga bitta kompleks son mos keladi. 1-chizmadan quyidagilarni ko'rish mumkin:



1-chizma

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (8.1)$$

Bu yerda ishtirok etayotgan r va $\alpha = a + bi$ ning **moduli**, φ esa uning **argumenti** (yoki **fazasi**) deyilib, quyidagicha yoziladi:

$$r = |\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{va} \quad \varphi = \arg \alpha.$$

Shakldan ko'rinadiki,

$$0 \leq r < +\infty \quad \text{va} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

ba'zan $-\pi < \varphi < \pi$ chegaralari ham ishlatilib, ikkala chegara ham bir maqsadga olib keladi. (8.1) ga muvofiq α kompleks son ushbu

$$\alpha = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (8.2)$$

ko'rinishga ega bo'lib, u kompleks sonning **trigonometrik shakli** deyiladi. Kompleks sonlar ustida amallar bajarishda asosan (8.2) forma ishlatiladi.

Matematik analiz kursidagi Eylerning

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

formulasidan foydalanib, (8.2) ni

$$\alpha = re^{i\varphi} \quad (8.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (8.3) kompleks sonning **ko'rsatkichli shakli** deyiladi.

Ta'rif. α **kompleks son** deb ma'lum bir tartibda berilgan a va b haqiqiy sonlar juftiga aytiladi:

$$\alpha = (a, b).$$

Shunday qilib, bitta kompleks sonni quyidagicha

$$\alpha = a + bi, \quad \alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \alpha = re^{i\varphi}$$

uch xil shaklda yozish mumkin bo'lib, so'nggi ikkita ifoda ko'pincha qo'l keladi. Har qanday kompleks sonni bir shakldan ikkinchi shaklga o'tkazish mumkin. Buning uchun (8.1) munosabatlardan foydalanishga to'g'ri keladi. Ko'pincha kompleks sonni trigonometrik shaklga keltirish talab qilinadi, shunday vaqtlarda 1-

chizmaga murojaat qilinib, kompleks songa tegishli vektorning qaysi chorakda yotishiga e'tibor qilish tavsiya etiladi.

Izoh. φ burchakka uning davrini ham qo'shib, quyidagicha yoziladi:

$$\operatorname{Arg} \alpha = \arg \alpha + 2\pi k = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

8.4. Kompleks sonni ko'paytirish va darajaga ko'tarish. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni o'zaro ko'paytirish va darajaga ko'tarish quyidagicha bajariladi:

$\alpha \cdot \beta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = r\rho[\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)]$, ya'ni ikki kompleks sonning ko'paytmasi yana kompleks son bo'lib, uning moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga, argumenti ko'paytuvchilar argumentlarining yig'indisiga tengdir.

Agar $\alpha = \beta$ bo'lsa,

$$\alpha^2 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Umuman

$$\alpha^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (8.4)$$

Xususan α ning moduli $r = 1$ bo'lsa, (4) dan:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (8.5)$$

Bu tenglik **Muavr formulasi** deb ataladi. Buning chap tomonidagi qavslarni Nyuton binomi bo'yicha ochib, so'ngra tenglikning ikki tomonidagi haqiqiy qismlarni o'zaro hamda mavhum qismlarni o'zaro tenglashtirish natijasida trigonometriyaga doir turli formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Misol uchun (8.5) da $n = 2$ bo'lsin, u holda

$$\cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi,$$

bu yerdan

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad \text{va} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

va h.k.

Agar algebraik shaklda berilgan kompleks sonni darajaga ko'tarish talab qilinsa, dastlab uni trigonometrik shaklga keltirib olish maqsadga muvofiqdir.

8.5. Kompleks sonlardan ildiz chiqarish. Birning ildizlari. Agar $a + bi$ kompleks sonning n – darajali ildizlarini topish lozim bo'lsa, dastlab uni trigonometrik shaklga keltirib olish zarur.

Kompleks sondan n – darajali ildiz chiqarish formulasi quyidagidan iborat:

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (8.6)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Ma'lumki, $\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + 2(k+n)\pi}{n}$, shuning uchun $k = n, n+1, \dots$, deb faraz qilinsa, oldingi ildiz kelib chiqaveradi. Shunday qilib,

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$$

ildizlar hosil bo‘ladi, ya’ni $a + bi$ sonning n – darajali ildizlari faqat n ta bo‘ladi ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Xususiyl holda (6) formuladan 1 ning ildizlari kelib chiqadi:

$$\beta_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (8.7)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Masalan:

a) $\beta_k = \sqrt{1} = \cos k\pi + i \sin k\pi$, $\beta_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, $\beta_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

b) $\beta_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\beta_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Misol. $(1 + i)^{25}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Dastlab $1 + i$ ni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Endi (4) formulaga muvofiq:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{25} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{25} = (\sqrt{2})^{25} \left(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4} \right) = \\ &= (\sqrt{2})^{25} \left(\cos \left(6\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(6\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) = (\sqrt{2})^{25} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= (\sqrt{2})^{25} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{12} (1 + i). \end{aligned}$$

Demak,

$$(1 + i)^{25} = 2^{12} (1 + i).$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

47. Quyida berilgan kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring.

- | | | | |
|---|---------------------------|--|--|
| 1. $(2 + 2i\sqrt{3})^{10}$ | 2. $(5 - 12i)^{12}$ | 3. $(-3 - 3i)^6$ | 4. $\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^8$ |
| 5. $\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{18}$ | 6. $(1 + i\sqrt{2})^{14}$ | 7. $\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \right)^8$ | 8. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{16}$ |

48. Quyidagi kompleks sonlarni algebraik shaklda tasvirlang.

$$1. 12(\cos 330^0 + i \sin 330^0)$$

$$2. 21(\cos 750^0 + i \sin 750^0)$$

$$3. 15 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{30} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{30} \right) \right)^5$$

$$4. 3 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^{15}$$

$$5. 7 \left(\cos \frac{19\pi}{24} + i \sin \frac{19\pi}{24} \right)^6$$

$$6. 6 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^3$$

$$7. 4 \left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)^5$$

$$8. 16 \left(\cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{5\pi}{14} \right)^7$$

$$9. 2(\cos 945^0 + i \sin 945^0)^6$$

$$10. 3(\cos(-1005^0) + i \sin(-1005^0))^3$$

49. Hisoblang.

$$1. \sqrt{-2i}$$

$$2. \sqrt{8i}$$

$$3. \sqrt{3+4i}$$

$$4. \sqrt{15-8i}$$

$$5. \sqrt{-3+4i}$$

$$6. \sqrt{4+3i}$$

$$7. \sqrt{\sqrt{3}-i}$$

$$8. \sqrt{-8-6i}$$

$$9. \sqrt[4]{-1}$$

$$10. \sqrt[4]{1}$$

$$11. \sqrt{1+i\sqrt{3}}$$

$$12. \frac{(1+i)^{12}}{(1-i)^{10}}$$

$$13. \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

$$14. \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$$

9-§. Ko'phadlar va ular ustida amallar. Gerner sxemasi

9.1. Ko'phadlar va ular ustida amallar. P sonlar maydoni berilgan bo'lsin. Har qanday son qiymatlarini qabul qiluvchi o'zgaruvchi(noma'lum)ni, masalan, x bilan belgilab, quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan ifodalarni hosil qilamiz:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (9.1)$$

Bunday ifodada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar P maydonning elementlaridan iborat bo'lsa, ifodaning o'zi P **maydondagi ko'phad** deyiladi. Bunda n – manfiy bo'lmagan butun son; $a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, \dots, a_{n-1}x, a_n$ – ko'phadning **hadlari**, a_0x^n – ko'phadning **bosh hadi**, a_n esa **ozod had** deb ataladi; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – ko'phadning koeffitsiyentlari, a_0 esa **bosh koeffitsiyent** deyiladi. (9.1) ko'phad x ning kamayib boruvchi darajalari bo'yicha yozilgan. Ko'phadni x ning ortib boruvchi darajalari bo'yicha ham yozish mumkin:

$$a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

yoki

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (9.2)$$

Bu so'nggi ko'phadda a_0 - ozod had va a_n - bosh koeffitsiyentdir. (9.1) ko'phadda $a_0 \neq 0$ yoki (9.2) ko'phadda $a_n \neq 0$ holda, ko'phad n – **darajali ko'phad** deb aytiladi. Demak, n – darajali ko'phad (9.1) ko'phad berilgan bo'lsa, albatta $a_0 \neq 0$, lekin qolgan koeffitsiyentlardan ba'zilar yoki hammasi nolga teng bo'lishi ham mumkin. Masalan,

$$5x^3 - 2x^2 + 4$$

ratsional sonlar maydonidagi 3-darajali ko'phad. Shuningdek,

$$\sqrt{3}x^7 - 0,8x^4 + x$$

haqiqiy sonlar maydonidagi 7-darajali ko'phad,

$$\frac{1}{2} + ix - (1 - 3i)x^3 + x^{10}$$

esa kompleks sonlar maydonidagi 10-darajali ko'phaddir.

1-Ta'rif. Hamma $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – koeffitsiyentlari nolga teng bo'lgan ko'phad **nol ko'phad** deyiladi. Demak, bunday ko'phad x o'zgaruvchining har qanday qiymatida nolga teng:

$$f(x) \equiv 0.$$

Agar $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – koeffitsiyentlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lmasa, ko'phad **nolmas ko'phad** deb ataladi.

Agar $a_0 \neq 0$ va $n = 0$ bo'lsa, $f(x)$ ko'phad $f(x) = a_0x^0 = a_0$ ko'rinishni oladi va **nolinchi darajali** ko'phad deb ataladi.

2-Ta'rif. P maydondagi ikki:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

va

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

ko'phadning mos koeffitsiyentlari teng, ya'ni $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ bo'lgandagina, bu ko'phadlar **teng** deyiladi.

Ko'phadlarning tengligi $f(x) \equiv \varphi(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $f(x)$ ko'phadning aqalli bitta koeffitsiyenti $\varphi(x)$ ko'phadning mos koeffitsiyentiga *teng bo'lmasa*, bu ko'phadlar *tengmas* hisoblanadi. Masalan, ratsional sonlar maydonidagi

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 9$$

va

$$\varphi(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$$

ko'phadlar *tengmas*.

Ko'phadlarning tengsizligi, odatda, $f(x) \neq \varphi(x)$ shaklda yoziladi.

3-Ta'rif. Agar P maydonda berilgan $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun o'sha maydonda:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $h(x)$ ko'phadni topish mumkin bo'lsa, $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linadi va $g(x)$ **ko'phad** $f(x)$ **ko'phadning bo'luvchisi** deyiladi.

Teorema. (Qoldikli bo'lish algoritmi.) P maydondagi har qaysi ikkita $f(x)$ va $\varphi(x) \neq 0$ ko'phad uchun, o'sha maydonda

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x) \quad (9.3)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi birdan-bir $q(x)$ va $r(x)$ ko'phadlar mavjud va bunda $r(x)$ ning darajasi $\varphi(x)$ ning darajasidan kichik bo'ladi.

Butun sonlarning bo'linish xossalari ko'phadlar uchun ham o'rinlidir. Bularni ko'zdan kechirib o'taylik. Biz hozir va bundan keyin birgalikda tekshiriladigan ko'phdlarning hammasini bitta P maydondagi ko'phdlar deb faraz etamiz.

1°. $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ko'phadga, $\varphi(x)$ esa $\psi(x)$ ko'phadga bo'linsa, $f(x)$ ko'phad $\psi(x)$ ga ham bo'linadi.

2°. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'phadlarning har qaysisi $\varphi(x)$ ko'phadga bo'linsa, ularning algebraik yig'indisi ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi.

3°. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'phadlarning birontasi $\varphi(x)$ ko'phadga bo'linsa, ularning ko'paytmasi ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi.

4°. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'phadlarning har qaysisi $\varphi(x)$ ko'phadga bo'linsa va $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ ixtiyoriy ko'phadlarni bildirsa,

$$f_1(x)g_1(x) \pm f_2(x)g_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)g_m(x)$$

algebraik yig'indi $\varphi(x)$ ga bo'linadi.

5°. Istalgan $f(x)$ ko'phad har qanday nolinchi darajali ko'phadga bo'linadi.

6°. $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ga bo'linsa, $\alpha\varphi(x)$ ga ham bo'linadi, bunda α – istalgan nolinchi darajali ko'phad.

7°. $f(x) \neq 0$ va $\varphi(x) \neq 0$ ko'phadlar bir-biriga bo'linsa, ular bir-biridan o'zgarmas $a \neq 0$ ko'paytuvchi bilangina farq qiladi.

9.2. Gorner sxemasi. Istalgan sonlar maydonidagi:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

ko'phadni $x - a$ ayirmaga bo'lishning *Gorner sxemasini* ko'rib o'taylik, bunda a – har qanday son. Ravshanki, $f(x)$ ni $x - a$ ga bo'lganda:

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + r \quad (9.4)$$

tenglik hosil bo'lib, bunda $\varphi(x)$, umuman, kompleks sonlar maydonidagi $(n - 1)$ – darajali ko'phadni, r esa kompleks sonni ifodalaydi.

Agar

$$\varphi(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

deb faraz qilib,

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= \\ &= (x - a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + r \end{aligned}$$

tenglikning o'ng tomonida tegishli amallarni bajarsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= \\ &= b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - ab_{n-2})x + (r - ab_{n-1}). \end{aligned}$$

Bundan, ikki ko'phadning tenglik shartiga binoan:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - ab_0, \quad a_2 = b_2 - ab_1, \quad \dots, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}, \quad a_n = r - ab_{n-1}$$

chiqadi. Bu tengliklar esa $\varphi(x)$ bo'linmaning koeffitsiyentlarini va r qoldiqni aniqlashga imkon beradi:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = ab_0 + a_1, \quad b_2 = ab_1 + a_2, \quad \dots, \quad b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}, \quad r = ab_{n-1} + a_n.$$

Demak, $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, r$ koeffitsiyentlarning qiymatlarini quyidagi Gorner sxemasi deb ataluvchi sxema yordami bilan aniqlashimiz mumkin:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$r = ab_{n-1} + a_n$

Gorner sxemasini misollarda ko'rib o'taylik.

Misollar.

1. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 7$ ni $x - 2$ ga bo'lamiz. Gorner sxemasiga muvofiq quyidagini topamiz:

	1	-2	0	3	-1	7
2	1	$2 \cdot 1 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 + 0 = 0$	$2 \cdot 0 + 3 = 3$	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$2 \cdot 5 + 7 = 17$

Demak, bo'linma $\varphi(x) = x^4 + 3x + 5$ va qoldiq $r = 17$.

2. Endi, $f(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$ ni $x + \frac{3}{2}$ ga bo'lamiz. Yana

Gorner sxemasidan foydalanib, quyidagini topamiz:

	1	-2	1	-3	4	-1	6	-1
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{99}{8}$	$\frac{361}{16}$	$-\frac{1115}{32}$	$\frac{3729}{64}$	$-\frac{11315}{128}$

Shunday qilib,

$$\varphi(x) = x^6 - \frac{7}{2}x^5 + \frac{25}{4}x^4 - \frac{99}{8}x^3 + \frac{361}{16}x^2 - \frac{1115}{32}x + \frac{3729}{64}$$

va qoldiq $r = -\frac{11315}{128}$.

4-Ta'rif. Agar x ning α son qiymatida $f(x)$ ko'phad nolga aylansa, α ga $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Teorema(Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phadni $x - \alpha$ ikkihadga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f(\alpha)$ ga teng.

Misol. $f(x) = x^7 - 2x^5 + x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ ko'phadni $x - 2$ ikkihadga bo'lishdagi qoldiqni toping.

Yechish. Bezu teoremasidan foydalanib qoldiqni topamiz:

$$\begin{aligned} r = f(2) &= 2^7 - 2 \cdot 2^5 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 2 = 2^5(4 - 2) + 8 - 12 - 24 + 2 = \\ &= 32 \cdot 2 - 26 = 64 - 26 = 38 \end{aligned}$$

Javob: $r = 38$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

50. Gorner sxemasidan foydalanib, qoldiqni toping va $f(x) = (x - \alpha)g(x) + r$ ko'rinishida yozing:

1. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 7$, $\alpha = -5$

2. $f(x) = x^6 - x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, $\alpha = 3$

3. $f(x) = x^5 + 8x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 28x + 8$, $\alpha = -2$

4. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$, $\alpha = 2$

5. $f(x) = x^7 - 3x^5 - 10x^4 + 24x^2 - 32x + 20$, $\alpha = -1$

6. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 15$, $\alpha = 2$

51. Bezu teoremasidan foydalanib, qoldiqni toping:

1. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 2$

2. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$, $x_0 = -3$

$$3. f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10, \quad x_0 = -2$$

$$4. f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 1, \quad x_0 = -4$$

$$5. f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad x_0 = 3$$

$$6. f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1, \quad x_0 = -3$$

52. Gorner sxemasidan foydalanib, sodda kasrlarga yoying:

$$1. \frac{x^4 + 3x^2 - 5x + 6}{(x-1)^6}$$

$$2. \frac{x^4 + x^2 - 11}{(x+2)^5}$$

$$3. \frac{x^3 + 2x^2 + x - 5}{(x+3)^4}$$

$$4. \frac{x^3 + 7x - 6}{(x+1)^6}$$

$$5. \frac{x^3 + 2x^2 - x + 5}{(x-4)^6}$$

$$6. \frac{x^3 - 6x + 5}{(x+1)^4}$$

$$7. \frac{x^3 + 5x^2 - 8}{(x+2)^5}$$

$$8. \frac{x^5 + 2x^4 - x^3}{(x+5)^6}$$

$$9. \frac{x^3 + 6x^2 - 1}{(x-2)^4}$$

$$10. \frac{x^5 + 4x^3 + x^2}{(x+3)^6}$$

10-§. Evklid algoritmi. Eng katta umumiy bo'luvchi

10.1. Evklid algoritmi. Butun sonlar uchun ma'lum bo'lgan Evklid algoritmi va uning natijalarining ko'phadlarga ham tatbiq etilishini ko'rib o'taylik.

$f(x) \neq 0$ ko'phadning darajasi $\varphi(x) \neq 0$ ko'phadning darajasidan kichik emas deb faraz qilamiz va $f(x)$ ni $\varphi(x)$ ga bo'lamiz. Hosil bo'lgan bo'linma va qoldiqni, mos ravishda $q_1(x)$ va $r_1(x)$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $r_1(x)$ ning darajasi $\varphi(x)$ ning darajasidan kichikdir. Endi $\varphi(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo'lib, bo'linma va qoldiqni $q_2(x)$ va $r_2(x)$ orqali belgilaymiz. Yana $r_2(x)$ ning darajasi $r_1(x)$ nikidan kichikligini e'tiborga olib, $r_1(x)$ ni $r_2(x)$ ga bo'lamiz; hosil bo'lgan bo'linma va qoldiqni $q_3(x)$ va $r_3(x)$ bilan belgilaymiz va h. k. Umuman har bir qoldiqni undan keyingi qoldiqqa bo'lamiz. Natijada darajalari kamayib boruvchi:

$$r_1(x), r_2(x), r_3(x), r_4(x), \dots$$

qoldiqlar vujudga keladi. Bu qoldiqlarning soni albatta cheklidir, chunki ularning darajalari kamayib boruvchi (lekin manfiy emas) butun sonlar ketma-ketligini tashkil etadiki, bunday qator cheksiz bo'la olmaydi. Shu sababli, yuqoridagi bo'lish protsessi chekli bo'lib, biz shunday $r_k(x)$ qoldiqqa kalamizki, unga oldingi $r_{k-1}(x)$ qoldiq rosa bo'linadigan bo'ladi. Natijada ushbu

Teorema. P maydondagi $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi $d(x)$ bo'lsa, bu maydonda ular uchun:

$$f(x)g(x) + \varphi(x)h(x) = d(x) \quad (10.2)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $g(x)$ va $h(x)$ ko'phadlar mavjud.

10.2. Keltiriladigan va keltirilmaydigan ko'phadlar.

4-Ta'rif. Agar P maydonda darajasi nolga teng bo'lmagan $f(x)$ ko'phadni P maydonda va darajalari $f(x)$ ning darajasidan kichik ikkita $g(x)$ va $h(x)$ ko'phad ko'paytmasi sifatida ifodalash (ko'paytmaga keltirish) mumkin bo'lsa, $f(x)$ ni P maydonda **keltiriladigan ko'phad** deymiz.

P maydonda darajasi nolga teng emas $f(x)$ ko'phadni bunday ko'paytma sifatida ifodalash (bunday ko'paytmaga keltirish) mumkin bo'lmasa, u, P maydonda **keltirilmaydigan ko'phad** deb ataladi.

Masalan, ratsional sonlar maydonidagi $f(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ ko'phad shu maydonda keltiriladi, chunki

$$x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^2 + 1).$$

Ratsional sonlar maydonidagi $f(x) = x^2 - 5$ ko'phad esa bu maydonda keltirilmaydi. Haqiqatan, bu ko'phadni ratsional sonlar maydonida keltiriladigan desak,

$$f(x) = g(x)h(x) \quad (10.3)$$

tenglik bajarilib, $g(x)$ va $h(x)$ ning darajalari 2 dan kichik va koeffitsiyentlari ratsional bo'lishi lozim. Demak, $g(x)$ va $h(x)$ birinchi darajali ko'phadlar bo'lgandagina (10.3) tenglik bajarilishi mumkin, shu sababli:

$$x^2 - 5 = (ax + b)(cx + d)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, a, b, c, d ratsional sonlar bo'lishi kerak.

So'nggi tenglikning o'ng tomoni va, demak, chap tomoni ham $x = -\frac{b}{a}$,

qiymatda nolga aylanadi, ya'ni $\frac{b^2}{a^2} - 5 = 0$, bundan $\sqrt{5} = \pm \frac{b}{a}$. Lekin bunday tenglik

mavjud bo'lishi mumkin emas, chunki $\sqrt{5}$ irratsional son $\pm \frac{b}{a}$ ratsional songa teng bo'lolmaydi.

Har qanday P sonlar maydonidagi birinchi darajali istalgan ko'phad – shu maydonda keltirilmaydigan ko'phaddir. Haqiqatan, darajasi 1 dan kichik ko'phad faqat nolinch darajali bo'lishi mumkin. Lekin, birinchi darajali ko'phadni ikkita nolinch darajali ko'phadning ko'paytmasi qilib yozish hech mumkin emas.

Birinchidan yuqori darajali bo'lib, P maydonda keltirilmaydigan $f(x)$ ko'phad P ni o'z ichiga olgan kengroq maydonda keltiriladigan bo'lishi mumkin. Masalan, ratsional sonlar maydonida keltirilmaydigan $x^2 - 5$ ko'phad haqiqiy sonlar maydonida keltiriladi, chunki

$$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

shuningdek, haqiqiy sonlar maydonida keltirilmaydigan $x^2 + 4$ ko'phad kompleks sonlar maydonida keltiriladi:

$$x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i).$$

Shu sababli $f(x)$ ko'phadning *keltiriladiganligi* yoki *keltirilmaydiganligi* haqida biror maydonni ko'zda tutibgina gapirish mumkin.

Keltirilmaydigan ko'phadlar quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Agar keltirilmaydigan $p(x)$ ko'phad keltirilmaydigan ikkinchi $q(x)$ ko'phadga bo'linsa, $p(x)$ va $q(x)$ bir-biridan o'zgarmas ko'paytuvchi bilangina farq qiladi.

2-xossa. Istalgan $f(x)$ ko'phad keltirilmaydigan ixtiyoriy $p(x)$ ko'phadga yo bo'linadi, yoki u, $p(x)$ bilan o'zaro tub bo'ladi.

3-xossa. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'phadlarning hech qaysisi keltirilmaydigan $p(x)$ ko'phadga bo'linmasa, ularning $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'paytmasi ham $p(x)$ ga bo'linmaydi.

4-xossa. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'paytma keltirilmaydigan $p(x)$ ko'phadga bo'linsa, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ko'phadlarning aqalli bittasi $p(x)$ ga bo'linadi.

5-xossa. $p(x)$ - keltirilmaydigan ko'phad bo'lsa, $ap(x)$ ham keltirilmaydigan ko'phadni ifodalaydi, bunda a - istalgan nolinchi darajali ko'phad.

Teorema. P maydonda berilgan va darajasi 1 dan kichik bo'lmagan har bir $f(x)$ ko'phad shu maydonda keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga yoyiladi:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdot \dots \cdot p_r(x)$$

va bu yoyilma o'zgarmas ko'paytuvchilargacha aniqlik bilan yagonadir.

Misol. $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ va $\varphi(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisini aniqlang.

Yechilishi. Buning uchun $f(x)$ ni $\varphi(x)$ ga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 & x^4 - 5x^2 + 4 \\ \hline x^4 & -5x^2 + 4 \\ \hline & x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{array}$$

$\varphi(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^2 + 4 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x & x + 2 \\ \hline & 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \\ \hline & 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Demak, biz izlagan eng katta umumiy bo'luvchi $d(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

53. Quyidagi ko'phadlarning EKUBini toping.

- 1) $f(x) = x^4 - 1$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.
- 2) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$, $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.
- 3) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = 3x^3 + x^2 + 3x - 1$.
- 4) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.
- 5) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.
- 6) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$.
- 7) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.
- 8) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.
- 9) $\begin{cases} f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35, \\ g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25. \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4, \\ g(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2. \end{cases}$

54. Evklid algoritmidan foydalanib, $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) = \delta(x)$ tenglikdan $M_1(x)$, $M_2(x)$ ko'phadlarni toping, bu yerda $\delta(x) = f_1(x)$ va $f_2(x)$ ko'phadlarning EKUBidir.

1. $f_1(x) = x^4 - 1$, $f_2(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.
2. $f_1(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$, $f_2(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$.
3. $f_1(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$, $f_2(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
4. $f_1(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, $f_2(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.
5. $f_1(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$, $f_2(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.
6. $f_1(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$, $f_2(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$.
7. $f_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = 3x^3 + x^2 + 3x - 1$.
8. $f_1(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1$, $f_2(x) = x^3 - 5x - 3$.
9. $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.
10. $f_1(x) = x^4 + 2x^3 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

55. Quyida berilgan ko'phadlar qaysi sonlar maydonida keltiriladi va qaysi sonlar maydonida keltirilmaydi?

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^4 + 49x^3 + 14x^2$

3. $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$
6. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 18x^2 - 27$
7. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$
8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 36$

56. Quyidagi ko'phadlarning ratsional sonlar maydonida keltirilmasligini isbotlang:

- 1) $f(x) = x^4 - 2x + 3$
- 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x + 2$
- 3) $f(x) = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$
- 4) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x + \frac{1}{2}$
- 5) $f(x) = x^4 + 16$

11-§. Karrali ko'paytuvchilarga ajratish. Viyet formulalari.

11.1. Karrali ko'paytuvchilarga ajratish.

Ta'rif. Agar $f(x)$ ko'phad $\varphi^\alpha(x)$ ga bo'linib, lekin $\varphi^{\alpha+1}(x)$ ga bo'linmasa, $\varphi(x)$ ko'phad $f(x)$ ning α **karrali ko'paytuvchisi** deyiladi.

Bu ta'rifga asosan $f(x)$ ko'phadni

$$f(x) = \varphi^\alpha(x)q(x) \quad (11.1)$$

shaklda tasvirlash mumkin, bunda $q(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ga bo'linmaydi, chunki, aks holda $q(x) = \varphi(x)h(x)$ ifodani (1) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(x) = \varphi^{\alpha+1}(x)h(x),$$

bu esa $f(x)$ ning $\varphi^{\alpha+1}(x)$ ga bo'linishini ko'rsatadi.

Masalan, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ ko'phad uchun $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ ikki karrali ko'paytuvchidir. Chunki $f(x)$ ko'phad $(x^2 + x + 1)^2$ ga bo'linadi, lekin $(x^2 + x + 1)^3$ ga bo'linmaydi. Biz $f(x) = (x^2 + x + 1)^2(x - 1)$ ga egamiz. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ ko'phad uchun $\varphi(x) = x^3 + 2x - 1$ bir karrali ko'paytuvchi, chunki $f(x) = (x^3 + 2x - 1)(x + 2)$.

$$f(x) = 5(x^2 - 4)^4(2x^3 + x - 1)^3(x + 1)(x^4 - 3x^3 + 1)^5$$

ko'phad uchun $\varphi_1(x) = x^2 - 4$ to'rt karrali ko'paytuvchi, $\varphi_2(x) = 2x^3 + x - 1$ uch karrali ko'paytuvchi, $\varphi_3(x) = x + 1$ bir karrali ko'paytuvchi va $\varphi_4(x) = x^4 - 3x^3 + 1$ besh karrali ko'paytuvchi ekanligi ravshan.

Teorema. Agar keltirilmaydigan $p(x)$ ko'phad $f(x)$ ko'phad uchun α karrali ko'paytuvchi bo'lsa, uning $f(x)$ hosilasi uchun bu $p(x)$ ko'phad $(\alpha - 1)$ karrali ko'paytuvchi bo'ladi.

Endi $f(x)$ ko'phadning karrali ko'paytuvchilarini ajratish metodi bilan tanishamiz. Faraz qilaylik, $f(x)$ ko'phad keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga quyidagicha yoyilgan bo'lsin:

$$f(x) = a \cdot p_1^{\alpha_1}(x) \cdot p_2^{\alpha_2}(x) \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}(x). \quad (11.2)$$

Bu yoyilmadagi hamma bir karrali keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasini X_1 orqali, bittadan (ya'ni birinchi darajali qilib) olingan hamma ikki karrali keltirilmaydigan ko'phadlarning ko'paytmasini X_2 orqali, bittadan olingan hamma uch karrali keltirilmaydigan ko'phadlarning ko'paytmasini X_3 orqali belgilaymiz va h. k., nihoyat, keltirilmaydigan ko'phadlar orasida eng yuqori s karrali ko'phadlarning bittadan olib tuzilgan ko'paytmasini X_s orqali belgilaymiz. Agar yoyilmada biror k karrali ko'phadlar bo'lmasa $X_k = 1$ deb hisoblaymiz. Shunday qilib, yuqoridagi yoyilma

$$f(x) = a \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 \cdot \dots \cdot X_s^s$$

ko'rinishni oladi.

Masalan, $f(x)$ ko'phadning keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasi

$$f(x) = 4(x^2 - 3)^3(x - 1)(x - 2)(3x^3 + 1)(2x^2 + 1)(x + 7)^8$$

bo'lsa, bunda

$$\begin{aligned} X_1(x - 1)(x - 2), \quad X_2 = 1, \quad X_3 = x^2 - 3, \quad X_4 = 1, \\ X_5 = (3x^3 + 1)(2x^2 + 1), \quad X_6 = 1, \quad X_7 = 1, \quad X_8 = x + 7 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, bu misolda

$$f(x) = 4 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 \cdot X_4^4 \cdot X_5^5 \cdot X_6^6 \cdot X_7^7 \cdot X_8^8.$$

$f(x)$ ning (11.2) yoyilmadagi har bir $p_i(x)$ ko'paytuvchi $f'(x)$ hosila uchun bitta kam karrali ko'paytuvchi bo'ladi. Shu sababli $f'(x)$ uchun X_1 ko'paytuvchi bo'lmaydi, X_2 esa bir karrali ko'paytuvchi, X_3 uch karrali ko'paytuvchi bo'ladi va h. k. Demak,

$$f(x) = a \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3 \cdot \dots \cdot X_s^{s-1} \varphi_1(x)$$

bo'lib, bunda $\varphi_1(x)$ bilan hosilagagina xos, ya'ni $f(x)$ ga kirmaydigan ko'paytuvchilarning ko'paytmasini belgiladik. $f(x)$ va $f'(x)$ ning eng katta umumiy bo'luvchisi $d_1(x)$ bu ikki ko'phad uchun umumiy bo'lgan ko'paytuvchilardangina tuziladi. Shu sababli

$$d_1(x) = a \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot \dots \cdot X_s^{s-1}.$$

Xuddi yuqoridagi mulohazani takrorlab, $d_1(x)$ ning hosilasi

$$d'_1(x) = a \cdot X_3 \cdot X_4^2 \cdot \dots \cdot X_s^{s-2} \varphi_2(x)$$

ko'rinishga ega degan natijaga kelamiz. $d_1(x)$ va $d'_1(x)$ ning eng katta umumiy bo'luvchisi esa ushbudan iborat:

$$d_2(x) = a \cdot X_3 \cdot X_4^2 \cdot \dots \cdot X_s^{s-2}.$$

So'ngra $d_1(x)$ va uning

$$d'_2(x) = a \cdot X_4 \cdot X_5^2 \cdot \dots \cdot X_s^{s-3} \varphi_3(x)$$

hosilasi uchun eng katta umumiy bo'luvchi

$$d_3(x) = a \cdot X_4 \cdot X_5^2 \cdot \dots \cdot X_s^{s-3}$$

ekanini topamiz va hokazo. Shu yo'l bilan eng oxirda

$$d_{s-1}(x) = a \cdot X_s \text{ va } d_s(x) = 1$$

ko'phadlarga kelamiz. Endi ushbu nisbatlarni tuzamiz:

$$E_1 = \frac{f(x)}{d_1(x)} = a \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_s,$$

$$E_2 = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = a \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{s-1} \cdot X_s,$$

$$E_3 = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = a \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{s-1} \cdot X_s,$$

.....

$$E_{s-1} = \frac{d_{s-2}(x)}{d_{s-1}(x)} = a \cdot X_{s-1} \cdot X_s,$$

$$E_s = \frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)} = a \cdot X_s.$$

Natijada karrali ko'paytuvchilar quyidagicha ajraladi:

$$\frac{E_1}{E_2} = X_1, \quad \frac{E_2}{E_3} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{E_{s-1}}{E_s} = X_{s-1}, \quad E_s = aX_s.$$

Misol. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ ko'phadning karrali ko'paytuvchilarini ajrating.

Yechilishi. Ko'phadni karrali ko'paytuvchilarga ajratish uchun avvalo ko'phadning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5.$$

Endi Evklid algoritmi yordami bilan $f(x)$ va $f'(x)$ ning eng katta umumiy bo'luvchini topamiz:

$$\begin{array}{r}
4x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 20x - 8 \Big| 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\
4x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x \\
\hline
x^3 - 6x^2 - 15x - 8 \\
4x^3 - 24x^2 - 60x - 32 \\
\hline
4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\
-27x^2 - 54x - 27 \\
\hline
x^2 + 2x + 1.
\end{array}$$

Demak, $d_1(x) = x^2 + x + 1$. Endi $d_1(x)$ va $d'_1(x) = 2x + 2$ hosilaning eng katta umumiy bo'luvchisini izlaymiz:

$$\begin{array}{r}
x^2 + 2x + 1 \Big| x + 1 \\
x^2 + x \\
\hline
x + 1 \\
- x + 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

Bundan $d_2(x) = x + 1$. Nihoyat, $d_2(x) = x + 1$ va $d'_2(x) = 1$ ning eng katta umumiy bo'luvchisi $d_3(x) = 1$. Bularga asosan

$$E_1 = \frac{f(x)}{d_1(x)} = x^2 - x - 2, \quad E_2 = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = x + 1, \quad E_3 = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = x + 1$$

va eng oxirgi

$$X_1 = \frac{E_1}{E_2} = x - 2, \quad X_2 = \frac{E_2}{E_3} = 1, \quad X_3 = E_3 = x + 1.$$

Shunday qilib,

$$f(x) = X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 = (x - 2)(x + 1)^3.$$

11.2. Viyet formulalari. Bosh koeffitsienti 1 bo'lgan n -darajali $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (11.3)$$

va $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ uning ildizlari bo'lsin. U holda $f(x)$ quyidagi yoyilmaga ega bo'ladi:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

O'ng tarafdagi qavslarni ko'paytirib, so'ngra o'xshash hadlarni ixchamlab va hosil bo'lgan koeffitsientlarni (11.3) dagi koeffitsientlar bilan taqqoslab, *Viyet formulalari* deb ataluvchi va ko'phad koeffitsientlarini uning ildizlari orqali ifodalovchi quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

.....

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n),$$

$$a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Shunday qilib, k -tenglikning ($k=1, 2, \dots, n$) o'ng tomonida k ta ildizning mumkin bo'lgan barcha ko'paytmalarining k ning juft yoki toqqligiga qarab musbat yoki manfiy ishora bilan olingan yig'indisi turibdi.

$n=2$ da bu formulalar kvadrat ko'phadning ildizlari va koeffitsiyentlari orasidagi elementlar algebradan ma'lum bo'lgan munosabatga aylanadi. $n=3$ da, ya'ni uchinchi darajali ko'phadlar uchun bu formulalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Viyet formulalari ko'phadni uning berilgan ildizlari bo'yicha yozishni osonlashtiradi. Masalan, oddiy ildizlari 5 va -2 hamda ikki karrali ildizi 3 bo'lgan to'rtinchi darajali $f(x)$ ko'phadni topaylik. Quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_1 = -(5 - 2 + 3 + 3) = -9,$$

$$a_2 = 5 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17,$$

$$a_3 = -[5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 33,$$

$$a_4 = 5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -90,$$

shuning uchun

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90.$$

Agar $f(x)$ ko'phadning bosh koeffitsiyenti a_0 birdan farqli bo'lsa, Viyet formulasini tatbiq qilish uchun dastlab barcha koeffitsiyentlarni a_0 ga bo'lish kerak, bu ko'phad ildizlariga ta'sir qilmaydi. Shunday qilib, bu holda Viyet formulalari barcha koeffitsiyentlarning bosh koeffitsiyentga nisbati uchun ifodani beradi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

57. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ ko'phadni karrali ko'paytuvchiga ajrating.

58. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ ko'phadni karrali ko'paytuvchiga ajrating.

59. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ ko'phadni karrali ko'paytuvchiga ajrating.

60. $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ko'phadni karrali ko'paytuvchiga ajrating.

61. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ko'phad karrali ildizga egami?

62. $f(x)=x^3+4x^2+5x+2$ ko‘phad karrali ildizga egami?
63. $f(x)=x^3+3x^2-4$ ko‘phad karrali ildizga egami?
64. $f(x)=x^3-3x^2+4$ ko‘phad karrali ildizga egami?
65. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari -5, 2, -1 bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
66. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari -3, -5, 2 bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
67. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari $\frac{1}{2}$, 1, -2 bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
68. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari 6, 3, -4 bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
69. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
70. Viyet teoremasidan foydalanib, ildizlari -1, 2, 4 bo‘ladigan kubik ko‘phad tuzing.
71. Quyidagi $f(x)$ ko‘phadning barcha ildizlari kvadratlari yig‘indisini toping:
1. $f(x)=x^4-9x^2+6x-5$
 2. $f(x)=x^5-8x^4-9x^3-10x+2$
 3. $f(x)=x^5-6x^4+9x^3+7x-15$
 4. $f(x)=x^4+6x^3+8x-5$
 5. $f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+1$
 6. $f(x)=3x^4+12x^3+9x^2-1$
 7. $f(x)=x^4-12x^3-5x-10$
 8. $f(x)=x^4-7x^2+8x-1$
 9. $f(x)=x^5-10x^3+x^2-13x+4$
 10. $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-9x+1$
72. $f(x)=x^3+3x^2-5x+\lambda$ ko‘phadni ikkita ildizini yig‘indisi 4 ga teng bo‘lsa, λ ni toping.
73. $f(x)=x^3-4x^2+5x+\lambda$ ko‘phadni ikkita ildizini yig‘indisi -2 ga teng bo‘lsa, λ ni toping.
74. $f(x)=x^3-2x^2-3x-\lambda$ ko‘phadni ikkita ildizini yig‘indisi -3 ga teng bo‘lsa, λ ni toping.
75. $f(x)=x^3-\lambda x^2+2x+4$ ko‘phadni ikkita ildizini ko‘paytmasi 2 ga teng bo‘lsa, λ ni toping.

76. $f(x) = x^3 - \lambda x^2 - 2x - 3$ ko'phadni ikkita ildizini ko'paytmasi 1 ga teng bo'lsa, λ ni toping.

77. $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 7x - 5$ ko'phadni ikkita ildizini ko'paytmasi 2 ga teng bo'lsa, λ ni toping.

78. $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 5x - 2$ ko'phad ildizlari kvadratlarining yig'indisi 20 ga teng bo'lsa, λ ni toping.

79. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 7$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

ni hisoblang.

80. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3}$

ni hisoblang.

81. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 11$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3^2}$ ni hisoblang.

82. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1^4 x_2^3 x_3^3} + \frac{1}{x_1^3 x_2^4 x_3^3} + \frac{1}{x_1^3 x_2^3 x_3^4}$ ni hisoblang.

83. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 7$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_1 x_3 x_4} + \frac{1}{x_1 x_2 x_4}$ ni hisoblang.

84. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 + 11x^2 - 13x + 5$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1 x_2^2} + \frac{1}{x_2 x_3^2} + \frac{1}{x_1^2 x_3}$ ni hisoblang.

85. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x + 10$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1 x_2^2} + \frac{1}{x_2 x_3^2} + \frac{1}{x_1^2 x_3}$ ni hisoblang.

86. x_1, x_2, x_3 lar $f(x) = x^3 + 9x^2 - 5x + 12$ ning ildizlari bo'lsa, $q = \frac{1}{x_1^4 x_2^3 x_3^3} + \frac{1}{x_1^3 x_2^4 x_3^3} + \frac{1}{x_1^3 x_2^3 x_3^4}$ ni hisoblang.

12-§. Uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalar

12.1. Uchinchi darajali tenglamalar. Kompleks sonlar maydonidagi uchinchi darajali tenglamaning ikkala tomonini bosh koeffitsiyentga bo'lib, uni

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (12.1)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Bu tenglama quyidagi metod bilan yechiladi.

(12.1) tenglamani yangi noma'lum y ga nisbatan ikkinchi darajali had ishtirok etmagan uchinchi darajali tenglamaga quyidagicha keltirish mumkin: α ni (12.1) tenglamada $x = y + \alpha$ almashtirishni bajargandan keyin yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi uchinchi darajali tenglama hosil bo'ladigan qilib tanlaymiz.

(12.1) da x o'rniga $y + \alpha$ ni qo'yib y^2 ning koeffitsiyentini nolga tenglashdan

$3\alpha + a = 0$ tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamadan $\alpha = -\frac{a}{3}$ topiladi.

Aytilganlarga asosan (12.1) tenglamada

$$x = y - \frac{a}{3} \quad (12.2)$$

almashtirishni bajarsak,

$$y^3 + py + q = 0 \quad (12.3)$$

hosil bo'ladi, bunda:

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c. \quad (12.4)$$

(12.3)-uchinchi darajali tenglamaning *normal* shakli deb ataladi.

(12.3) normal tenglamani yechish uchun

$$y = u + v \quad (12.5)$$

deymiz, bunda u va v -yangi noma'lumlardir. Bu ifodani (12.3) tenglamaga qo'ysak, quyidagi kelib chiqadi:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

bundan:

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0. \quad (12.6)$$

Endi, u va v noma'lumlarni shunday aniqlaylikki,

$$3uv + p = 0 \quad \text{yoki} \quad uv = -\frac{p}{3} \quad (12.7)$$

bajarilsin. Bu vaqtda (12.6) va (12.7) lardan

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

hosil bo'ladi. Ko'ramizki, u^3 va v^3 ushbu

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlaridan iborat. Bu tenglamani yechib, quyidagini topamiz:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

yoki

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{va} \quad v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

bundan, (12.5) ga ko'ra:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (12.8)$$

(12.8) tenglik, odatda, *Kardano formulasi* deb ataladi. Bu tenglik-ikkita ildizning yig'indisidan iborat bo'lib, har bir ildiz uchta qiymatga ega; u ning har bir qiymatini v ning har bir qiymati bilan olsak, $y = u + v$ uchun hammasi bo'lib to'qqizta qiymatni hosil qilamiz. Ammo (12.3) tenglama faqat uchta ildizga ega; shu sababli, yuqoridagi to'qqizta qiymatdan uchtasini, ya'ni $y = u + v$ yig'indining (12.7) shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarini olishimiz kerak. Shu maqsadda avval:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ildizning uchta qiymatini topamiz. Buning uchun, ma'lumki, u ning bitta, masalan, u_1 ildizini 1 ning uchinchi darajali

$$\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon,$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2$$

ildizlariga ko'paytirishimiz lozim. Natijada u ning uchinchi darajali ildizlari $u_1, u_2 = \varepsilon u_1, u_3 = \varepsilon^2 u_1$ bo'ladi.

Endi v ning tegishli qiymatlarini (7) shartdan topamiz:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}; \quad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\varepsilon u_1} = \varepsilon^2 \left(-\frac{p}{3u_1} \right) = \varepsilon^2 v_1;$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 u_1} = \varepsilon \left(-\frac{p}{3u_1} \right) = \varepsilon v_1,$$

bunda $\varepsilon^3 = 1$ dan foydalandik. Shunday qilib, u ning har bir qiymatini v ning mos qiymatiga qo'shsak, y uchun quyidagi uchta qiymat kelib chiqadi:

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \quad y_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Agar bu tenglamalarga ε va ε^2 ning qiymatlarini qo'ysak, (12.3) normal tenglamaning ildizlari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Endi, (12.2) tenglikdan foydalanib, (12.1) tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 - \frac{a}{3}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}, \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

1-misol. $x^3 + 3x^2 + 15x + 13 = 0$ tenglamani yechaylik. Bunda $a=3$, $b=15$, $c=13$ bo'lgani uchun, (12.4) tengliklarga asosan, $p = 15 - \frac{9}{3} = 12$ va $q = \frac{2 \cdot 3^3}{27} - \frac{3 \cdot 15}{3} + 13 = 0$. Endi

$$u = \sqrt[3]{0 + \sqrt{0 + \frac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8}.$$

Agar $u_1 = 2$ desak, $v_1 = -\frac{12}{3 \cdot 2} = -2$ hosil bo'ladi.

Demak, (12.10) ga binoan, berilgan tenglamaning ildizlari quyidagilardan iborat:

$$x_1 = 2 - 2 - 1 = -1, \quad x_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2) - 1 = 2\sqrt{3}i - 1, \quad x_3 = -i\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2) - 1 = -2\sqrt{3}i - 1.$$

12.2. To'rtinchi darajali tenglamalar. Kompleks sonlar maydonidagi to'rtinchi darajali tenglamaning ikkala tomonini bosh koeffitsiyentga bo'lib, uni

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (12.11)$$

ko'rinishga keltira olamiz.

To'rtinchi darajali tenglamani yechishning usullari bor. Biz ularning ba'zilarini ko'rib o'tamiz.

1) Ferrari usuli. (12.11) tenglamaning keyingi uchta hadini o'ng tomonga o'tkazib, ikkala tomonga $\frac{a^2 x^2}{4}$ ni qo'shamiz. Natijada:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$$

hosil bo'ladi. Endi, so'nggi tenglamaning ikkala tomoniga $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 y + \frac{y^2}{4}$ yig'indini qo'shib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right). \quad (12.12)$$

Yangi y noma'lumni (12.12) tenglamaning o'ng tomoni to'liq kvadratdan iborat bo'lib qoladigan qilib tanlaymiz. Buning uchun

$$\frac{a^2}{4} - b + y = A^2, \quad \frac{ay}{2} - c = 2AB, \quad \frac{y^2}{4} - d = B^2 \quad (12.13)$$

deb olishimiz kerak. Ushbu

$$4A^2B^2 = (2AB)^2$$

ayniyatga asosan, quyidagi natijaga kelamiz:

$$4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2. \quad (12.14)$$

Qavslarni ochib, y ning darajalariga nisbatan o'xshash hadlarni yig'sak,

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [d(a^2 - 4b) + c^2] = 0 \quad (12.15)$$

shakldagi uchinchi darajali tenglamaga kelamiz. Ko'ramizki, y noma'lumning qiymatlari - shu (12.14) tenglamaning ildizlaridan iborat. Bu tenglamani **hal qiluvchi** tenglama yoki (12.11) tenglamaning **rezolventasi** deyiladi.

Agar (12.15) tenglamaning bironta ildizini y_0 bilan belgilasak, bu qiymatda (12.14) tenglik bajarilib, (12.13) tengliklarga asosan, (12.12) tenglama quyidagi

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2}\right)^2 = (Ax + B)^2$$

yoki

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \pm(Ax + B)$$

ko'rinishni oladi. Demak, berilgan to'rtinchi darajali tenglama ikkita ushbu

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = Ax + B,$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -Ax - B$$

kvadrat tenglamaning ko'paytmasiga yoyiladi. Bu tenglamalarni yechib, berilgan to'rtinchi darajali tenglamaning to'rtta ildizini topamiz.

2-misol. $x^4 + 3x^3 - 5x - 3 = 0$ tenglamani yechaylik. Bunda $a=3$, $b=0$, $c=-5$, $d=-3$.

Avval (12.15) tenglamani tuzamiz. a, b, c, d ning qiymatlarini (12.15) ga qo'yib, quyidagini topamiz:

$$y^3 - 3y + 2 = 0.$$

Bu tenglamani yechamiz:

$$u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1-1}} = \sqrt[3]{-1},$$

bundan $u_1 = 1, v_1 = -\frac{-3}{3(-1)} = -1$. Demak, $y_0 = 1 - 1 = 0$.

(12.13) tengliklardan A va B ni aniqlaymiz:

$$A^2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{2},$$

masalan, $A = \frac{1}{2}$ ni olsak, $2AB = \frac{3(-2)}{2} + 5 = 2$ dan $B = 2$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Bu tenglamalarni yechib, berilgan tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_3 = x_4 = -1.$$

2) Lobachevskiy usuli.

$$x = y - \frac{a}{4} \quad (12.16)$$

almashtirish yordami bilan (12.11) tenglamani

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (12.17)$$

shaklga keltiramiz. Buni to'rtinchi darajali tenglamaning *normal* shakli deyiladi.

Bu normal tenglamaning istalgan ildizini y bilan belgilab, ushbu

$$z^3 - yz^2 + az + \beta = 0 \quad (12.18)$$

yordamchi tenglamani tuzamiz; shuni aytish kerakki, α ning qiymati bizga kerak bo'lmaydi, β ning qiymati esa keyinroq aniqlanadi. Agar (12.18) tenglamada z ni $-z$ bilan almashtirsak,

$$z^3 + yz^2 + az - \beta = 0 \quad (12.19)$$

tenglama hosil bo'ladi. So'nggi (12.18) va (12.19) tenglamalarni o'zaro ko'paytirib,

$$u^3 + lu^2 + mu - n = 0 \quad (12.20)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $u = z^2$ va

$$l = 2\alpha - y^2, \quad m = \alpha^2 + 2\beta y, \quad n = \beta^2.$$

Bu tengliklarning birinchi va uchinchiidan α va β ni aniqlab, ikkinchisiga qo'ysak,

$$y^4 + 2ly^2 + 8\sqrt{n}y + (l^2 - 4m) = 0$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamaning xuddi yuqoridagi (12.17) tenglamadan iborat bo'lishini talab qilib,

$$2l = p, \quad 8\sqrt{n} = q, \quad l^2 - 4m = r$$

deymiz, bundan

$$l = \frac{p}{2}, \quad n = \frac{q^2}{64}, \quad m = \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{4} - r \right) \quad (12.21)$$

hosil bo'ladi. $\beta^2 = n$ va $n = \frac{q^2}{64}$ tengliklarga asosan, $\beta = \frac{q}{8}$ deb hisoblashimiz mumkin.

(12.21) tengliklardan foydalanib, (12.20) tenglamani ushbu

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{4} - r \right) u - \frac{q^2}{64} = 0 \quad (12.22)$$

shaklga keltiramiz. Bu *hal qiluvchi* tenglama yoki (12.17) tenglamaning *rezolventasidir*.

Agar u_1, u_2, u_3 bilan (12.22) tenglamaning ildizlarini belgilasak, $z^2 = u$ ga asosan $z_1 = \sqrt{u_1}, z_2 = \sqrt{u_2}, z_3 = \sqrt{u_3}$ sonlar (12.18) yordamchi tenglamaning ildizlarini ifodalaydi. Shu sababli

$$z_1 + z_2 + z_3 = y, \quad z_1 z_2 z_3 = -\beta = -\frac{q}{8}$$

shartlar bajariladi.

Ko'ramizki, z_1, z_2, z_3 qiymatlar $z_1 z_2 z_3 = -\frac{q}{8}$ shartni qanoatlantiradigan bo'lsa,

$$z_1, \quad -z_2, \quad -z_3;$$

$$-z_1, \quad z_2, \quad -z_3;$$

$$-z_1, \quad -z_2, \quad z_3$$

qiymatlar ham bu shartni qanoatlantiradi. Demak, (12.17) tenglamaning ildizlari quyidagilardan iborat bo'ladi:

$$y_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$y_2 = z_1 - z_2 - z_3,$$

$$y_3 = -z_1 + z_2 - z_3,$$

$$y_4 = -z_1 - z_2 + z_3.$$

Bu qiymatlarni (6) ga qo'yib, (1) tenglamaning ildizlarini topamiz.

3-misol. $x^4 + 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{16} = 0$ tenglamani yechaylik. Avval $x = y - 1$ almashtirishni bajarib, normal tenglamaga o'tamiz:

$$y^4 - \frac{7}{2}y^2 + y + \frac{21}{16} = 0.$$

Bunda $p = -\frac{7}{2}, q = 1, r = \frac{21}{16}$ ekanini e'tiborga olib, (12.22) rezolventani tuzamiz:

$$u^3 - \frac{7}{4}u^2 + \frac{7}{16}u - \frac{1}{64} = 0.$$

Bu tenglamani ko'paytuvchilarga ajratib yechish yengildir.

$$\begin{aligned}\left(u^3 - \frac{1}{64}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) &= \left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u^2 + \frac{1}{4}u + \frac{1}{16}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) = \\ &= \left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{16}\right) = 0.\end{aligned}$$

Demak, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_{2,3} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}$.

Bunda $q = 1 > 0$ bo'lgani uchun, $z_1 z_2 z_3 = -\frac{q}{8} = -\frac{1}{8}$ shartni qanoatlantirish

maqsadida: $z_1 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$, $z_{2,3} = +\sqrt{\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{2}$ deb olamiz. Natijada:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

87. Kardano formulasidan foydalanib, quyidagi tenglamalarning yechimlarini toping.

1. $x^3 + 3x^2 + 15x + 13 = 0$

2. $x^3 - 2x - 4 = 0$

3. $x^3 - 3x + 2 = 0$

4. $x^3 - 7x + 6 = 0$

5. $x^3 - 6x + 9 = 0$

6. $x^3 + 12x + 63 = 0$

7. $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

8. $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$

9. $x^3 + 12x^2 + 45x + 54 = 0$

88. Ferrari usuli bilan quyidagi to'rtinchi darajali tenglamalarni yeching:

1) $x^4 + 4x + 3 = 0$

2) $x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$

3) $x^4 - 4x + 3 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

5) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

6) $x^4 - 2x^3 + 18x^2 - 27 = 0$

89. Lobachevskiy usuli bilan quyidagi to‘rtinchi darajali tenglamalarni yeching:

$$1) x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 100x - 75 = 0$$

$$2) x^4 + 8x^3 - 32x^2 + 80x + 100 = 0$$

$$3) x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 8 = 0$$

$$4) x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$5) x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 22x - 12 = 0$$

$$6) x^4 - 4x^3 + 1 = 0$$

$$7) 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

$$8) 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9 = 0$$

13-§. Haqiqiy ildizlarni ajratish

13.1. Haqiqiy ildizlarning chegaralari. Haqiqiy sonlar maydonidagi

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (13.1)$$

algebraik tenglamaning haqiqiy ildizlarini taqribiy hisoblash masalasini qo‘yamiz.

Haqiqiy ildizlarni taqribiy hisoblash jarayoni uch bosqichga bo‘linadi:

1⁰. *Haqiqiy ildizlarning chegaralarini aniqlash.*

Bu masala quyidagidan iborat: shunday ikki α va β haqiqiy sonni ($\alpha < \beta$) topish kerakki, (13.1) tenglamaning hamma haqiqiy ildizlari shu sonlar orasida yotadigan bo‘lsin.

2⁰. *Haqiqiy ildizlarni ajratish.* Bu masala quyidagicha tushunamiz: shunday oraliqlarni topish kerakki, ularning har qaysisida (13.1) tenglamaning bittagina haqiqiy ildizi yotadigan bo‘lsin.

3⁰. *Haqiqiy ildizlarni taqribiy hisoblash.* Bu paragrafda ildizlarning chegaralarini aniqlash masalasi bilan shug‘ullanib, chegaralarni aniqlashning to‘rtta usulini ko‘rish mumkin.

Avval shuni aytib o‘taylikki, (13.1) tenglamada x ga biz faqat haqiqiy qiymatlarnigina beramiz; shu sababli tenglamaning chap tomonidagi $f(x)$ ko‘phad ham faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun «modul» so‘zi o‘rniga «absolyut qiymat» so‘zini ishlatish mumkin.

Birinchi usul. Agar $|a_1|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|, |a_n|$ sonlarning eng kattasini A bilan belgilab,

$$R = \frac{A}{|a_0|} + 1$$

desak, (13.1) tenglamaning haqiqiy ildizlari $-R$ va R chegaralar orasida yotadi.

Isbot. Modullarning ma’lum xossalriga asosan, x ning har qanday va, demak, $|x| > 1$ qiymatlarida ham

$$|f(x)| \geq |a_0||x|^n - |a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \quad (13.2)$$

tengsizlik bajariladi.

Agar

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1||x|^{n-1} + |a_2||x|^{n-2} + \dots + |a_n|$$

tengsizlikda $|a_1|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|, |a_n|$ lar o'rniga ularning eng kattasi bo'lgan A ni qo'ysak, tengsizlik yana ham kuchayadi,

$$|a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| \leq A(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1) = A \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < A \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1}. \quad (13.3)$$

(13.3) ga muvofiq, (13.2) dan quyidagini topamiz:

$$|f(x)| > |a_0| |x|^n - A \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1} = \frac{|x|^n}{|x| - 1} (|a_0|(|x| - 1) - A). \quad (13.4)$$

Endi x ning qanday qiymatlarida

$$|a_0|(|x| - 1) - A > 0$$

tengsizlik bajarilishini aniqlaymiz. Buning uchun shu tengsizlikni yechib,

$$|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1 \quad (13.5)$$

ekanini topamiz. Demak, x ning qiymatlari (13.5) tengsizlikni qanoatlantirsa, (13.4) dan $|f(x)| > 0$ kelib chiqadi. Boshqacha aytganda x ning absolyut qiymati

$R = \frac{A}{|a_0|} + 1$ dan katta bo'lsa, $f(x)$ ko'phad nolga aylanmaydi, ya'ni (13.1)

tenglama ildizlarga ega bo'lmaydi. Bu hol absissalar o'qidagi R nuqtaning o'ng tomonida va $-R$ nuqtaning chap tomonida (13.1) tenglamaning haqiqiy ildizlari yo'qligini ko'rsatadi. Shunday qilib, haqiqiy ildizlari $-R$ va R chegaralar orasidagina bo'lishi mumkin.

Haqiqiy ildizlarning chegaralarini aniqlagandan keyin, musbat ildizlarning chegaralarini alohida va manfiy ildizlarning chegaralarini alohida aniqlash mumkin. Biz buni konkret misollarda ko'rib o'tamiz. Agar musbat ildizlar musbat yoki nolga teng bo'lgan α va β sonlar ($\alpha < \beta$) orasida yotsa, α - musbat ildizlarning *quyi* chegarasi, β esa *yuqori* chegarasi deyiladi. Shuningdek, manfiy ildizlar manfiy yoki nolga teng bo'lgan γ va δ sonlar ($\gamma < \delta$) orasida yotsa, γ - manfiy ildizlarning *quyi* chegarasi, δ esa *yuqori* chegarasi deb ataladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 22x + 120 \quad (13.6)$$

tenglamani olaylik. Bunda $|a_0| = 2$, $A = 120$ va $R = \frac{120}{2} + 1 = 61$. Demak, tenglamaning haqiqiy ildizlari -61 va 61 chegaralar orasida yotadi.

61 musbat ildizlarning *yuqori* chegarasidir. Musbat ildizlarning *quyi* chegarasini topish uchun, (13.6) tenglamaga $x = \frac{1}{y}$ ni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$120y^4 + 22y^3 - 33y^2 - 3y + 2 = 0. \quad (13.7)$$

Bunda $|a_0|=120$, $A=33$. Demak, $R = \frac{33}{120} + 1 = \frac{11}{40} + 1 = \frac{51}{40}$. Shunday qilib, (13.7) tenglamaning musbat ildizlari uchun $\frac{51}{40}$ – yuqori chegara bo‘ladi, ya’ni y ni musbat ildiz desak, $y \leq \frac{51}{40}$. Bundan, $y = \frac{1}{x}$ ga binoan, $x \geq \frac{51}{40}$ ni topamiz. Demak, (13.6) tenglamaning musbat ildizlari uchun $\frac{40}{51}$ – quyi chegara bo‘ladi.

-61 manfiy ildizlarning quyi chegarasini ifodalaydi. Manfiy ildizlarning yuqori chegarasini topish maqsadida, (13.6) tenglamaga $x = -\frac{1}{z}$ ni qo‘yamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$120z^4 - 22z^3 - 33z^2 + 3z + 2 = 0. \quad (13.8)$$

Agar $|a_0|=120$, $A=33$ ekanini e’tiborga olsak, $R = \frac{33}{120} + 1 = \frac{51}{40}$ bo‘ladi. Demak, (13.8) tenglama uchun musbat ildizlarning yuqori chegarasi $\frac{51}{40}$, ya’ni $z \leq \frac{51}{40}$.

Bundan, $x = -\frac{1}{z}$ ga binoan:

$$\frac{1}{z} \geq \frac{40}{51}; \quad -\frac{1}{z} \leq -\frac{40}{51} \quad \text{yoki} \quad x \leq -\frac{40}{51}.$$

Shunday qilib, (13.6) tenglamaning manfiy ildizlari uchun yuqori chegara $-\frac{40}{51}$ dan iborat. (13.6) tenglamaning hamma ildizlari haqiqiy bo‘lib, ular $\left\{4, \frac{5}{2}, -2, -3\right\}$ to‘plamning elementlaridir. Bundan, ma’lumki, musbat ildizlarning chegaralari sifatida, masalan, 2 va 5 ni, manfiy ildizlarning chegaralari sifatida esa, masalan, -1 va -4 ni olish mumkin. Shunday qilib, hamma haqiqiy ildizlarning chegaralari -4 va 5 sonlaridan iborat bo‘la oladi.

Biz ko‘rib o‘tgan usulning kamchiligi shundaki, u chegaralarni juda katta qilib aniqlaydi.

Bu usul bilan haqiqiy ildizlarning chegaralari aniqlangandan keyin, shu chegaralar orasida tenglamaning albatta haqiqiy ildizlari bor degan natijaga kelish mumkin emas, chunki haqiqiy ildizlar butunlay bo‘lmasligi ham ehtiol. Haqiqiy ildizlarning bor-yo‘qligi, ularni taqribiy hisoblash protsessining ikkinchi qismida, ya’ni ildizlarni ajratish vaqtidagina ma’lum bo‘ladi.

2-misol. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ tenglama uchun $|a_0|=1$, $A=3$ va $R = \frac{3}{1} + 1 = 4$ bo‘lib, haqiqiy ildizlarning chegaralari sifatida -4 va 4 ni hosil qilamiz. Ammo tenglamaning ildizlari $i, -i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ dan iborat, demak, u, haqiqiy ildizlarga ega emas.

Ikkinchi usulga o'tishdan ilgari shuni e'tiborga olaylikki, (13.1) tenglamaning a_0 bosh koeffitsiyentini musbat deb hisoblash mumkin, chunki aks holda tenglamaning ikkala tomonini -1 ga ko'paytirish bilan bunga erisha olamiz.

Ikkinchi usul. (13.1) tenglamaning manfiy koeffitsiyentlaridan eng birinchisini (chapdan o'ngga tomon hisoblaganda) a_k bilan va manfiy koeffitsiyentlarning absolyut qiymatlari orasida eng kattasini B bilan belgilasak,

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1$$

bo'ladi.

Isbot. x musbat bo'lgan holda ushbu

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + \dots + a_{k-1} x^{n-k+1} + a_k x^{n-k} + a_{k+1} x^{n-k-1} + \dots + a_n \geq \\ &\geq a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-k+1} - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + 1). \end{aligned}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

$x > 1$ shartda $a_1 x^{n-1}, \dots, a_{k-1} x^{n-k+1}$ musbat hadlarni tashlasak, yuqoridagi tengsizlik yana ham kuchayadi:

$$f(x) \geq a_0 x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + 1) = a_0 x^n - B \cdot \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} > a_0 x^n - B \cdot \frac{x^{n-k+1}}{x - 1}$$

yoki

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} [a_0 x^{k-1} (x - 1) - B].$$

$x^{k-1} > (x - 1)^{k-1}$ bo'lgani uchun so'nggi tengsizlikni yana kuchaytiramiz:

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} [a_0 (x - 1)^k - B].$$

Agar

$$a_0 (x - 1)^k - B > 0 \quad (13.9)$$

shart bajarilsa, $f(x) > 0$ bo'ladi.

(13.9) tengsizlikni yechib, quyidagini topamiz:

$$x > \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1. \quad (13.10)$$

Shunday qilib, x ning (13.10) tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida $f(x) > 0$ bajariladi, ya'ni (13.1) tenglama ildizlarga ega bo'lmaydi. Shu sababli

$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1$ ni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb qabul qilish mumkin.

3-misol. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 47x^2 - 112x + 240 = 0$ tenglamani olamiz. Bunda $a_0 = 2$, $k = 2$, $B = 112$. Demak,

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \sqrt{\frac{112}{2}} + 1 < 8,5.$$

Musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb 8,5 ni qabul qilamiz.

Musbat ildizlarning quyi chegarasini aniqlash uchun tenglamaga $x = \frac{1}{y}$ ni qo'yib, quyidagini topamiz:

$$240y^4 - 112y^3 - 47y^2 + 7y + 2 = 0.$$

Agar $a_0 = 240$, $k = 1$, $B = 112$ ni e'tiborga olsak,

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \frac{112}{240} + 1 < \frac{3}{2}$$

bo'ladi. Demak, $y < \frac{3}{2}$, bundan $\frac{1}{y} > \frac{2}{3}$ yoki $x > \frac{2}{3}$.

Manfiy ildizlarning quyi chegarasini topish maqsadida $x = -z$ ni tenglamaga qo'yamiz va ushbuni

$$2z^4 - 7z^3 - 47z^2 + 112z + 240 = 0.$$

hosil qilamiz.

Bu tenglama uchun $a_0 = 2$, $k = 1$, $B = 47$ dir. Shu sababli:

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \frac{47}{2} + 1 = 24,5.$$

Demak, $z < 24,5$, bundan $-z > -24,5$ yoki $x > -24,5$.

Nihoyat, manfiy ildizlarning yuqori chegarasini aniqlash uchun, tenglamaga $x = -\frac{1}{u}$ ni qo'yamiz:

$$240u^4 + 112u^3 - 47u^2 - 7u + 2 = 0.$$

$$\text{Bunda } a_0 = 240, k = 2, B = 47 \text{ bo'lib, } \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \sqrt{\frac{47}{240}} + 1 < \frac{7}{15} + 1 = \frac{22}{15}.$$

Shunday qilib, $u < -\frac{22}{15}$, $-\frac{1}{u} > \frac{15}{22}$, $-\frac{1}{u} < -\frac{15}{22}$ yoki $x < -\frac{15}{22}$.

Agar birinchi usulni tatbiq etsak, tenglamaning haqiqiy ildizlari uchun $R = \frac{240}{2} + 1 = 121$ va $-R = -121$ chegaralarni topar edik. Ikkinchi usul bilan esa bunday chegaralar sifatida biz 8,5 va -24,5 sonlarni hosil qildik. Demak, bu misolda ikkinchi usul yordami bilan chegaralar orasi ancha qisqa bo'lib aniqlandi. Ammo tenglamamiz -5, -4, $-\frac{3}{2}$, 4 ildizlarga egadir, shu sababli chegaralar sifatida, masalan, -6 va 5 ni olish mumkin edi.

Agar (13.1) tenglamaning koeffitsiyentlari musbat bo'lsa, tenglama musbat ildizlarga ega bo'lmaydi, chunki tenglamaga $x = a > 0$ qiymatni qo'ysak, uning chap tomonida musbat son kelib chiqadi.

Hamma koeffitsiyentlari manfiy bo'lgan tenglamani esa -1 ga ko'paytirish bilan, koeffitsiyentlari musbat bo'lgan tenglamaga keltirish mumkin.

Uchinchi usul (Nyuton usuli). Agar $x = a > 0$ qiymatda n – darajali $f(x)$ ko'phad va uning hamma $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalari musbat bo'lsa, a ni $f(x) = 0$ tenglamaning musbat ildizlari uchun yuqori chegara deb hisoblash mumkin.

Isbot. $f(x)$ ni $x - a$ ning darajalari bo'yicha yoyib,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

tenglikni hosil qilamiz.

$x > a$ qiymatlarda bu tenglikning o'ng tomoni musbatdir, chunki shart bo'yicha $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ sonlar noldan katta. Shu sababli $x > a$ uchun $f(x) > 0$ hosil bo'lib, a musbat ildizlarining yuqori chegarasini ifodalaydi.

So'ngra, yuqoridagidek, $x = \frac{1}{y}, x = -\frac{1}{z}, x = -u$ almashtirishlar yordami bilan qolgan chegaralarni topamiz.

Quyidagilarni aytib o'tish lozim:

1⁰. $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ qiymatlarni Gorner sxemasi bilan aniqlashimiz ham mumkin. Haqiqatan, yuqoridagi tenglikni

$$f(x) = (x-a)f_1(x) + f(a)$$

va

$$f_1(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} \quad (13.12)$$

shaklda yozib, $f(x)$ ni $x - a$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f(a)$ ekanini ko'ramiz. Shuningdek, (5.12) ni

$$f_1(x) = (x-a)f_2(x) + f'(a)$$

va

$$f_2(x) = \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2} \quad (13.13)$$

ko'rinishda yozsak, $f_1(x)$ ni $x - a$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f'(a)$ ekanligi ma'lum bo'ladi.

So'ngra (13.13) ni

$$f_2(x) = (x-a)f_3(x) + \frac{f''(a)}{2!}$$

va

$$f_3(x) = \frac{f'''(a)}{3!} + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-3}$$

shaklga keltirib $f_2(x)$ ni $x - a$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq $\frac{f''(a)}{2!}$ ekanini ko'ramiz, va hokazo.

4-misol. $f(x) = x^5 - 4x^3 - 2x + 11$ ko'phad uchun $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$, $f^{IV}(2)$, $f^V(2)$ qiymatlarni hisoblaylik. Gorner sxemasini tuzib, quyidagini topamiz:

	1	0	-4	0	-2	11
2	1	2	0	0	-2	7
2	1	4	8	16	30	
2	1	6	20	56		
2	1	8	36			
2	1	10				
2	1					

Demak: $f(2) = 7$; $f'(2) = 30$, $\frac{f''(2)}{2!} = 56$, $\frac{f'''(2)}{3!} = 36$, $\frac{f^{IV}(2)}{4!} = 10$, $\frac{f^V(2)}{5!} = 1$.

2^o. Nyuton usulini tatbiq etish jarayonida, Gorner sxemasining biror satridagi hamma sonlar musbat bo'lib qolsa, hisoblashlarni davom ettirmaslik mumkin, chunki bu holda keyingi satrlarning hammasida faqat musbat sonlarga hosil bo'ladi.

5-misol. Ushbu:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x - 4 = 0$$

tenglamani olamiz. Bunda, eng kamida, $x = 5$ qiymatni olish mumkin. Gorner sxemasi bo'yicha quyidagini hosil qilamiz:

	1	-4	0	-8	-4
5	1	1	5	17	81

Hisoblashni davom ettirmaymiz, chunki musbat sonlardangina iborat satr hosil bo'ladi. Shunday qilib, $f(5)$, $f'(5)$, $f''(5)$, $f'''(5)$, $f^{IV}(5)$ sonlarning hammasi musbatdir. Shu sababli, 5 ni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb olamiz.

Endi $x = \frac{1}{y}$ ni tenglamaga qo'ysak,

$$4y^4 + 8y^3 + 4y - 1 = 0$$

hosil bo'ladi; $y = 1$ qiymatni olib, Gorner sxemasini tuzamiz:

	4	8	0	4	-1
1	4	12	12	16	15

Demak, $y = 1$; $x = \frac{1}{y} = \frac{1}{1} = 1$ bo'lib, musbat ildizlarning quyi chegarasi 1 ga

teng.

$y = -\frac{1}{z}$ almashtirish bilan

$$4z^4 - 8z^3 - 4z - 1 = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. $z = 3$ qiymatida quyidagiga ega bo'lamiz:

	4	-8	0	-4	-1
3	4	4	12	32	95

Shunday qilib, $x = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}$ manfiy ildizlarning yuqori chegarasi.

Nihoyat, $x = -u$ almashtirish

$$u^4 + 4u^3 + 8u - 4 = 0$$

tenglamaga olib keladi: $u = 1$ qiymatda

	1	4	0	8	-4
1	1	5	5	13	9

sxemaga ega bo'lamiz. Demak, manfiy ildizlarning quyi chegarasi $x = -u = -1$.

Natijada, haqiqiy ildizlarning chegaralari -1 va 5 bo'lib aniqlandi.

13.2. Haqiqiy ildizlarni ajratish. Haqiqiy ildizlarni ajratish masalasi munosabati bilan quyidagilarni ta'kidlab o'tamiz. Biror haqiqiy sonlar chekli ketma-ketligini, masalan,

$$-2, 4, -5, -3, 1 \quad (13.14)$$

ni olaylik. Bu ketma-ketlikdagi sonlarni ishoralari quyidagicha navbatlashadi:

$$-, +, -, -, +$$

va demak, uch marta o'zgaradi, ya'ni avval minusdan plusga, so'ngra plusdan minusga, va nohoyat, minusdan yana plusga o'tadi. Shunday qilib, (13.14) ketma-ketlikda uchta ishora almashinish bor. Agar

$$8, -2, 1, -3, 2, -6, -7, 5$$

ketma-ketlikni olsak, oltita ishora almashinish borligini ko'ramiz.

$f(x)$ haqiqiy sonlar maydoni ustidagi ko'phad bo'lsin. Bu ko'phadni o'zining hosilasi bilan o'zaro tub deb, ya'ni $f(x)$ va $f'(x)$ ning eng katta umumiy bo'luvchisi o'zgarmas songa teng deb faraz qilamiz. Bu holda $f(x)$ ko'phad karrali haqiqiy ildizlarga ega bo'lmaydi. Chunki aks holda $f(x)$ ning m ($m > 1$) karrali α ildizi $f'(x)$ uchun $m-1$ karrali ildiz bo'lib, $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlar $(x - \alpha)^{m-1}$ ga bo'linadi, va shu sababli, ular o'zaro tub bo'lmaydi.

Endi $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlarga Evklid algoritmini tatbiq etamiz. Ammo bunda har gal qoldiqning ifodasini o'zgartiramiz. Masalan, $f(x)$ ni $f'(x)$ ga bo'lishdan $r(x)$ ko'phadni olamiz. Buni nazarda tutib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(x)g(x) - f_1(x), \\
f'(x) &= f_1(x)g_1(x) - f_2(x), \\
&\dots\dots\dots \\
f_{m-2}(x) &= f_{m-1}(x)g_{m-1}(x) - f_m(x),
\end{aligned}
\tag{13.15}$$

bundan $f_m(x)$ nolinch darajali ko'phad, chunki bu qoldiq $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisini ifodalaydi.

Ta'rif. Ushbu

$$f(x), f'(x), f_1(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x) \tag{13.16}$$

ko'phadlar *Shturm funktsiyalari* deyiladi, bularning birinchisi va oxirgisidan boshqa har biri *oraliq funktsiya* deb ataladi.

13.3. Shturm teoremasi. $f(x)$ ko'phadning ildizlaridan farqli a va b haqiqiy sonlarni olib, x ni a dan b gacha o'zgartirganda $f(x)$ uchun tuzilgan Shturm qatorida nechta ishora almashinishlar yo'qolsa, $f(x)$ ning (a, b) oraliqda xuddi shuncha haqiqiy ildizlari mavjud bo'ladi.

Isbot. Chindan ham, x o'sa borib, Shturm qatoridagi oraliq funktsiyaning haqiqiy ildizidan o'tsa-o'tmasa, baribir, bu qatordagi ishora almashinishlarning soni o'zgarmaydi.

Agar x o'sa borib, $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizidan o'tsa, $f(x)$ va $f'(x)$ orasida va, demak, butun Shturm qatorida bitta ishora almashinish yo'qoladi.

Shunday qilib, x ni a dan b gacha o'zgartirganda, Shturm qatorida nechta ishora almashinishlar yo'qolsa, $f(x)$ ko'phadning (a, b) oraliqda xuddi shuncha haqiqiy ildizlari mavjud bo'ladi.

(a, b) oraliqda biror chegarasida ba'zi oraliq funktsiyalar nolga teng bo'lib qolsa, Shturm qatoridagi ishora almashinishlar sonini hisoblashda, bunday nolga teng funktsiyalarni e'tiborga olmaslik mumkin. Haqiqatan, $x = a$ qiymatda $f_k(a) = 0$ desak, $f_{k-1}(a)$ va $f_{k+1}(a)$ sonlar qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi. Shu sababli, $f_{k-1}(a)$ ning ishorasini qanday deb hisolamaylik, baribir, $f_{k-1}(a)$, $f_k(a)$, $f_{k+1}(a)$ sonlar bitta ishora almashinishni tashkil etadi.

6-misol. Yuqoridagi $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ ko'phadni olib, Shturm qatorini tuzamiz:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2, \\
f'(x) &= 2x^3 - 6x^2 + x + 3, \\
f_1(x) &= 5x^2 - 10x - 7, \\
f_2(x) &= x - 1, \\
f_3(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Avval haqiqiy ildizlarning sonini aniqlaymiz. Ma'lumki, x ning etarlicha katta absolyut qiymatida har bir Shturm funktsiyaning ishorasi undagi bosh hadning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Shu sababli, x ning yetarlicha katta musbat

qiymatini $+\infty$ bilan va absolyut qiymat bo'yicha yetarlicha katta manfiy qiymatini $-\infty$ bilan belgilab, quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashinishlar soni
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	-	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Ko'ramizki, x ning qiymati $-\infty$ dan 0 gacha o'zgarganida, ikkita ishora almashinish yo'qoladi. Demak, $f(x)$ ko'phad ikkita manfiy haqiqiy ildizga ega ekan.

x ning qiymati 0 dan $+\infty$ gacha o'zgarganda ham ikkita ishora almashinish yo'qoladi. Bu hol, $f(x)$ ning ikkita musbat haqiqiy ildizi borligini bildiradi.

Nyuton usuli bo'yicha, berilgan ko'phadning haqiqiy ildizlari uchun -1 va 3 chegaralarni topamiz. Endi Shturm teoremasini tatbiq etamiz:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashinishlar soni
-1	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	-	+	2
1	+	0	-	0	+	2
2	+	-	-	+	+	2
3	+	+	+	+	+	0

Shunday qilib, $(-1, 0)$ oraliqda ikkita manfiy, $(2, 3)$ oraliqda ikkita musbat haqiqiy ildiz bor. Bularni ajratish uchun, $(-1, 0)$ va $(2, 3)$ oraliqlarni yana ham kichikroq bo'laklarga bo'lamiz:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashinishlar soni
-1	+	-	+	-	+	4
$-\frac{1}{2}$	-	+	-	-	+	3
0	+	+	-	-	+	2
2	+	-	-	+	+	2
$2\frac{1}{2}$	-	-	-	+	+	1
3	+	+	+	+	+	0

Demak, ko'phadning haqiqiy ildizlari $\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(2, 2\frac{1}{2}\right), \left(2\frac{1}{2}, 3\right)$ oraliqlarda yotadi.

Haqiqatan, biz olgan ko'phadning ildizlari $1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}$ bo'lib, ular quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} -1 < 1-\sqrt{3} < -0,5; & -0,5 < 1-\sqrt{2} < 0; \\ 2 < 1+\sqrt{2} < 2,5; & 2,5 < 1+\sqrt{3} < 3. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

100. Haqiqiy sonlar maydonidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlari uchun chegaralar topilsin(Nyuton usulida):

- 1) $x^4 - 12x^2 - x - 4 = 0$
- 2) $x^4 + 1,5x^3 + 8,5x^2 - 7 = 0$
- 3) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3 = 0$
- 4) $x^5 + 7x^3 - 3 = 0$
- 5) $x^3 + 2x^2 + 89x + 18 = 0$
- 6) $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$
- 7) $x^4 - 2x^2 + 5x - 5 = 0$
- 8) $x^3 - 7x + 7 = 0$

101. Shturm teoremasidan foydalanib, tenglamani ildizlari qaysi oraliqlarda yotishini ko'rsating:

1. $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$
2. $f(x) = x^4 - x - 1$
3. $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 1$
4. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
5. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x + 9$
6. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$
7. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 1$
8. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
9. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$
10. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$

14-§. Butun sonlarning bo'linish nazariyasi

14.1. Evklid algoritmi. Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi.

Ta'rif. $a, b \in \mathbb{C}$ sonlarning har birini bo'ladigan songa shu sonlarning *umumiy bo'luvchisi* deyiladi.

Biz faqat natural bo'luvchilar bilan shug'ullanamiz. $a, b \in \mathbb{C}$ sonlar bir nechta umumiy bo'luvchiga ega bo'lishi mumkin. Bu bo'luvchilar to'plamini biz $D_{a,b}$ orqali belgilaymiz. Masalan, $a = 24, b = 18$ bo'lsin, u holda $D_{24,18} = \{1, 2, 3, 6\}$.

Ta'rif. $a, b \in \mathbb{N}$ sonlarning har birini bo'luvchi sonlarning eng kattasi berilgan a va b sonlarning *eng katta umumiy bo'luvchisi* (EKUB) deyiladi. Ikkita sonning EKUBi odatda (a, b) orqali belgilanadi.

Ta'rif. $(a, b) = 1$ bo'lsa, a va b sonlar *o'zaro tub sonlar* deyiladi.

Berilgan sonlarning EKUBini topish uchun avvalo har bir sonning bo'luvchilari to'plamini tuzamiz. Agar A to'plam $a \in \mathbb{N}$ sonning bo'luvchilari to'plami, B esa $b \in \mathbb{N}$ sonning bo'luvchilari to'plami bo'lsa, $D_{a,b} = A \cap B$ bo'lishi ravshan. $A \cap B$ kesishmaning eng katta elementi berilgan a, b sonlarning EKUBi bo'ladi. A va B to'plamlar chekli bo'lganligidan $D_{a,b}$ to'plam ham chekli bo'ladi. Natural sonlarning har qanday chekli to'plami doimo eng katta va eng kichik elementga ega.

Teorema. $(a/b) \Rightarrow [(D_{a,b} = D_b) \wedge ((a, b) = b)]$.

Isbot. a va b sonlarning har bir umumiy bo'luvchisi b ni ham bo'ladi. a/b bo'lgani uchun b ning har bir bo'luvchisi a ning ham bo'luvchisi bo'ladi. Shuning uchun $D_{a,b} = D_b$. Lekin b son bo'luvchilarining eng kattasi b ning o'zidir. Shuning uchun $(a, b) = b$. **Teorema isbotlandi.**

Faraz qilaylik, $a \nmid b$ bo'lsin, u holda qoldikli bo'lish haqidagi teoremaga asosan quyidagi tengliklar sistemasini yozish mumkin.

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b, \\ b &= r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \tag{14.1}$$

(14.1) sistemaning o'ng tomonidagi tengsizliklarga e'tibor bersak, quyidagi bog'lanish ko'zga tashlanadi:

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \dots > r_n > 0,$$

bu yerda hamma $r_i (i = \overline{2, n})$ lar natural sonlardir. Lekin natural sonlar to'plami quyidan chegaralangan. Shuning uchun biror n nomerdan boshlab $r_{n+1} = 0$ bo'ladi.

(14.1) tengliklar sistemasining birinchisiga asosan a va b ning ixtiyoriy umumiy bo‘luvchisi r_2 ni bo‘ladi va aksincha $a = r_2 + bq_1$ ga asosan r_2 va b ning har qanday umumiy bo‘luvchisi a sonni bo‘ladi. Demak,

$$(D_{a,b} = D_{b,r_2}) \Rightarrow (a,b) = (b,r_2)$$

(14.1) sistemadagi ikkinchi, uchinchi va undan keyin keladigan tengliklarga asosan

$$D_{a,b} = D_{b,r_2} = D_{r_2,r_3} = \dots = D_{r_{n-1},r_n} = D_{r_n} \text{ va } (a,b) = r_n. \quad (14.2)$$

Ikki sonning EKUBini bu usulda topishni birinchi bo‘lib, Evklid ko‘rsatgani tufayli, bu usul odatda **Evklid algoritmi** deb yuritiladi. (14.2) ga asosan $D_{a,b} = D_{r_n}$ va $r_n = (a,b)$ bo‘lgani uchun quyidagi xulosani yoza olamiz: a va b sonlarning umumiy bo‘luvchilari to‘plami $D_{a,b}$ shu sonlar EKUBlarining bo‘luvchilari to‘plami D_{r_n} bilan ustma-ust tushadi va bu sonlarning EKUBi Evklid algoritmidagi noldan farqli eng oxirgi qoldiqqa teng bo‘ladi. Bu xulosani qisqa qilib, quyidagicha yozish mumkin:

$$(D_{a,b} = D_{r_n}) \wedge ((a,b) = r_n).$$

1-misol. 76501 va 29719 sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.

Yechish:

$$76501 = 29719 \cdot 2 + 17063,$$

$$29719 = 17063 \cdot 1 + 12656,$$

$$17063 = 12656 \cdot 1 + 4407,$$

$$12656 = 4407 \cdot 2 + 3842,$$

$$4407 = 3842 \cdot 1 + 565,$$

$$3842 = 565 \cdot 6 + 452,$$

$$565 = 452 \cdot 1 + 113,$$

$$452 = 113 \cdot 4.$$

Demak, $(76501, 29719) = 113$.

14.2. Sonli funktsiyalar.

Ta’rif. Natural sonar to‘plamida aniqlangan funktsiya **sonli funktsiya** deyiladi.

Biz ba’zi sonli funktsiyalarni qarab o‘tamiz.

1. Berilgan $n \in N$ sonning natural bo‘luvchilari soni. Berilgan $n \in N$ sonning natural bo‘luvchilari sonini $\tau(n)$ deb belgilaymiz. Ma’lumki, har qanday p natural sonni

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (14.3)$$

shaklda yozish mumkin edi. (14.3) shakldagi sonning barcha natural bo‘luvchilari

$$\alpha = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \quad (14.4)$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, bu yerda

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1; \quad 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2; \quad \dots \quad 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k. \quad (14.5)$$

n sonning barcha bo‘luvchilarini topish uchun (14.4) dagi β_i larning mumkin bo‘lgan barcha kombinatsiyalarini qarab chiqish kerak. Har bir β_i (14.5) ga asosan

$\alpha_i + 1$ marta o'zgaradi. β_i larning har xil qiymatlariga mos keluvchi kombinatsiyalar soni

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

ga teng. Demak, $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ ekan.

2-misol. $n = 504$ bo'lsin. $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ bo'lgani uchun

$$\tau(504) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

2. Berilgan sonning natural bo'luvchilari yig'indisi. Biz oldingi punktda p sonning barcha natural bo'luvchilari sonini ifodalovchi funktsiyani topdik. Endi shu natural bo'luvchilarning yig'indisi qaysi formula orqali berilishini tekshiramiz.

$n \in N$ sonning barcha natural bo'luvchilari yig'indisi odatda $S(n)$ yoki $\sum_{n/d} d$

orqali belgilanadi. Quyidagi ko'paytmani qarab chiqamiz:

$$\begin{aligned} (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \\ = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Bu yerda har bir β_i mos ravishda 0 dan α_i gacha qiymatlarni qabul qiladi. Geometrik progressiya hadlari yig'indisini topish formulasidan foydalanib, (14.6) yig'indini quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \quad (14.7)$$

Ikkinchi tomondan, (14.7) ning chap tomonidagi har bir $p_i^{\beta_i}$ ($i = \overline{1, k}$) ($0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$) son n sonning bo'luvchisidir. Demak, (14.7) tenglik n sonning natural bo'luvchilari yig'indisini ifodalovchi formuladir, ya'ni

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

3-misol. $S(504) = S(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) = \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = 1560.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

102. Quyida berilgan sonlarni Evklid algoritmi yordamida EKUBini toping:

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. 360 va 248 | 2. 1024 va 132 |
| 3. 1225 va 500 | 4. 2025 va 400 |
| 5. 3464 va 642 | 6. 876 va 300 |
| 7. 864 va 120 | 8. 720 va 144 |

103. Quyida berilgan sonlarning bo‘luvchilar soni nechaga teng:

- | | |
|--------------|---------------|
| 1. 1224, 652 | 2. 284, 1125 |
| 3. 6025, 284 | 4. 7560, 372 |
| 5. 5008, 350 | 6. 400, 2072 |
| 7. 1332, 576 | 8. 640, 1296 |
| 9. 510, 6315 | 10. 216, 2250 |

104. Quyida berilgan sonlarning bo‘luvchilar yig‘indisini toping:

- | | |
|--------------|---------------|
| 1. 504, 280 | 2. 180, 216 |
| 3. 375, 396 | 4. 735, 576 |
| 5. 480, 168 | 6. 1224, 1220 |
| 7. 400, 1512 | 8. 1036, 280 |
| 9. 325, 2072 | 10. 6315, 652 |

15-§. Z halqada taqqoslamalar va ularning chegirmalar sinflari.

Uzluksiz kasrlar

15.1. Uzluksiz(zanjirli) kasrlar. Ushbu

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

tengliklar sistemasining birinchi tengligini b ga, ikkinchisini r_2 ga, uchinchisini r_3 ga va hokazo, eng oxirgisini esa r_n ga bo‘lib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}, \\ \frac{b}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \\ \frac{r_1}{r_2} &= q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (*)$$

bundan

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_2}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}} \dots \quad (15.1)$$

Agar $\frac{r_i}{r_{i+1}} = q_{i+1} + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}}$ nisbatlarni (*) sistemadan topib (15.1) ga qo'ysak, $\frac{a}{b}$ nisbat quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \dots + \frac{1}{q_n}}}} \quad (15.2)$$

$\frac{a}{b}$ nisbatning (15.2) ko'rinishiga uni *uzluksiz(zanjirli) kasrga yoyish* deyiladi,

$q_1, q_1 + \frac{1}{q_2}, q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}, \dots$ lar esa *uzluksiz kasrning qismlari* (bo'laklari)

deyiladi. Uzluksiz kasr quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{a}{b} = (\overline{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n})$$

$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ lar uzluksiz kasrning *qismaniy maxrajlari*, q_1 esa $\frac{a}{b}$ ratsional sonning *butun qismi* deyiladi.

Quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

a) $a > b$ bo'lsa, $q_1 > 0$ bo'ladi;

b) $0 \leq a < b$ bo'lganda esa $q_1 = 0$ bo'ladi;

c) $a < 0$ bo'lsa, $\frac{a}{b}$ nisbatni $\frac{a}{b} = -k + \frac{r_2}{b}$, $k > 0$ shaklda yozib olamiz. Bu

yerda $\frac{r_2}{b}$ to'g'ri musbat kasr bo'ladi. Natijada quyidagi yoyilma hosil bo'ladi:

$$\frac{a}{b} = -k + \frac{r_2}{b} = (\overline{-k, q_2, q_3, \dots, q_n})$$

1-Eslatma. Har qanday butun sonni bir qismli (bo'lakli) uzluksiz kasr deb qarash mumkin.

Masalan, $5 = (5)$.

$\frac{1}{a}$ shakldagi ($a > 1$) kasrni ikki qismli uzluksiz kasr deb qaraladi.

2-Eslatma. Agar eng so'nggi qismaniy maxrajga hech qanday shart qo'yilmagan bo'lsa, $\frac{a}{b}$ ratsional sonning uzluksiz kasrga yoyilmasi ikkita har xil ko'rinishga ega bo'ladi. $q_n > 1$ bo'lsa, $\frac{a}{b} = (\overline{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n})$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $q_n > 1$ shart qo'yilmagan bo'lsin. Unda $q_n = (q_n - 1) + \frac{1}{1}$ tenglikka asosan $(\overline{q_1, q_2, \dots, q_n}) = (\overline{q_1, q_2, \dots, q_n - 1, 1})$ kabi yozish mumkin. Bu yerda o'ng tomondagi yoyilmada qismlar soni chapdagi yoyilma qismlari sonidan bitta ortiqdir.

Misol.
$$\frac{95}{42} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = (\overline{2, 3, 1, 4, 2})$$

$(2, 3, 1, 4, 2) = (2, 3, 1, 4, 1, 1).$

Endi sonning butun va kasr qismlari ustida to'xtalib o'tamiz. Qoldikli bo'lish teoremasiga asosan har qanday $a \in C$ va $m \in N$ uchun

$$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m \quad (15.3)$$

bog'lanish mavjud va yagona edi. (15.3) ning ikkala tomoni m ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}, \quad 0 \leq \frac{r}{m} < 1. \quad (15.4)$$

Demak, q son $\frac{a}{m}$ kasr sonidan kichik bo'lgan butun sonlarning eng kattasi ekan. Bu

usulda aniqlangan q son $\frac{a}{m}$ ratsional sonning *butun qismi* deyiladi va u $q = \left[\frac{a}{m} \right]$

orqali belgilanadi. $\frac{a}{m} - q = \frac{r}{m}$ son esa $\frac{a}{m}$ ratsional sonning *kasr qismi* deyiladi va

u $\frac{r}{m} = \left\{ \frac{a}{m} \right\}$ orqali belgilanadi.

Misollar.

$$\left[\frac{147}{17} \right] = 8; \quad \left\{ \frac{147}{17} \right\} = \frac{11}{17}; \quad \left\{ -\frac{79}{17} \right\} = \frac{6}{17}; \quad \{-7,25\} = 0,75; \quad \{4\} = 0; \quad \left\{ \frac{13}{17} \right\} = \frac{13}{17}.$$

α sonning butun qismini (15.4) qoida asosida aniqlash *sonning butun qismini ajratish* deb ataladi.

Agar α haqiqiy son bo'lsa, uning butun qismi quyidagi shart asosida ajratiladi:

$$k \leq \alpha < k + 1, \quad \text{bu yerda} \quad k = [\alpha]$$

Har qanday α haqiqiy son uchun quyidagi da'volar uchun:

$$\begin{aligned}\{\alpha\} &= \alpha - [\alpha], \\ \alpha &= [\alpha] + \{\alpha\},\end{aligned}\quad 0 \leq \{\alpha\} < 1.$$

15.2. Munosib kasrlar. Biz yuqorida har bir ratsional sonni chekli uzluksiz kasrga yoyish mumkinligini ko'rib o'tdik. Endi masalani aksincha qo'yamiz. Har bir chekli uzluksiz kasr biror ratsional sonni ifodalaydimi? Bu masalani hal etishda $\frac{a}{b}$ ratsional sonning munosib kasrlari deb ataluvchi

$$\delta_1 = q_1, \quad \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad \delta_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}, \quad \dots \quad (15.5)$$

kasrlar muhim rol o'ynaydi. Bu yerda

$$\delta_n = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \dots + \frac{1}{q_n}}}}$$

bo'lganidan n – munosib kasr $\frac{a}{b}$ ratsional sonning o'zi bo'ladi. k – munosib kasr

δ_k dan $(k+1)$ – munosib kasr δ_{k+1} ga o'tish uchun δ_k dagi q_k ni $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$ bilan almashtirish lozimligi (15.5) dan ko'rinib turibdi. Istalgan munosib kasrni hisoblash uchun $P_0 = 1, Q_0 = 0, P_1 = q_1, Q_1 = 1$ deb quyidagilarni yozib olamiz:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}, \\ \delta_2 &= q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 \cdot q_1 + 1}{q_2} = \frac{q_2 \cdot q_1 + 1}{q_2 \cdot 1 + 0} = \frac{q_2 \cdot P_1 + P_0}{q_2 \cdot Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2}, \\ \delta_3 &= \frac{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right)P_1 + P_0}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right)Q_1 + Q_0} = \frac{q_3(q_2 \cdot P_1 + P_0) + P_1}{q_3(q_2 \cdot Q_1 + Q_0) + Q_1} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}.\end{aligned}$$

Matematik induktsiya prinsipiga asosan

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} \quad (15.6)$$

ni yoza olamiz. Bu yerda

$$\begin{aligned}P_k &= q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.\end{aligned} \quad (15.7)$$

(15.6) bog'lanish δ_k munosib kasrni hisoblash uchun xizmat qiladigan rekurrent formuladir. Quyidagi sxema istalgan P_k va Q_k sonlarni hisoblashga imkon beradi.

		q_1	q_2	q_3	q_4	$\dots$	q_{k-2}	q_{k-1}	q_k	$\dots$	q_n
P_k	$P_0 = 1$	$P_1 = q_1$	P_2	P_3	P_4	$\dots$	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	$\dots$	P_n
Q_k	$Q_0 = 0$	$Q_1 = 1$	Q_2	Q_3	Q_4	$\dots$	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	$\dots$	Q_n

Misol. $(2, 3, 1, 4, 2)$ ga mos ratsional son topilsin.

		$q_1 = 2$	$q_2 = 3$	1	4	2
P_k	1	2	$P_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$	$P_3 = 7 \cdot 1 + 2 = 9$	$P_4 = 9 \cdot 4 + 7 = 43$	$P_5 = 43 \cdot 2 + 9 = 95$
Q_k	0	1	$Q_2 = 1 \cdot 3 + 0 = 3$	$Q_3 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$	$Q_4 = 4 \cdot 4 + 3 = 19$	$Q_5 = 19 \cdot 2 + 4 = 42$

Demak, berilgan uzluksiz kasr uchun

$$\delta_1 = \frac{1}{2}, \quad \delta_2 = \frac{7}{3}, \quad \delta_3 = \frac{9}{4}, \quad \delta_4 = \frac{43}{19}, \quad \delta_5 = \frac{95}{42}.$$

15.3. Taqqoslama va ularning xossalari. Qoldikli bo'linish haqidagi teorema asosan har qanday ikkita natural son uchun yagona r va q_1 sonlar itopiladiki,

$$a = mq_1 + r \quad (15.8)$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $0 \leq r < m$ bo'lib, m bo'luvchi, q_1 chala bo'linma, r qoldiq deyiladi.

Shunday b sonni olaylikki,

$$b = mq_2 + r \quad (15.9)$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Ta'rif. Agar ikkita butun a va b sonni $m \in N$ ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqlar o'zaro teng bo'lsa, a va b sonlar m modul bo'yicha teng qoldikli yoki taqqoslanuvchi deyiladi va

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (15.10)$$

orqali belgilanadi. Bu yozuv a va b sonlar m modul bo'yicha o'zaro taqqoslanadi deb o'qiladi. (15.8) dan (15.9) ni ayiramiz: $a - b = m(q_1 - q_2)$ yoki

$$a - b = mt; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.11)$$

Endi taqqoslamalarning ta'rifidan kelib chiqadigan ba'zi bir sodda xossalalar bilan tanishib o'tamiz.

1) m modul bo'yicha taqqoslanuvchi sonlarning ayirmasi shu modulga qoldiqsiz bo'linadi;

2) agar $a = b + mt$ bo'lib, b ni m ga bo'lganda qoldiq r ga teng bo'lsa, a ni ham m ga bo'lgandagi qoldiq r ga teng bo'ladi.

Haqiqatan, $b = mq_1 + r$ ni $a = b + mt$ ga qo'yamiz:

$$a = mq_1 + r + mt = m(q_1 + t) + r = mq_2 + r.$$

Demak, $a = mq_2 + r$ bo'lib, a ni m ga bo'lgandagi qoldiq ham r ga teng ekan. Shunday qilib,

$a \equiv b \pmod{m}$ jumlani $a - b = mt$ va $a = b + mt$ jumlar bilan ekvivalent deyish mumkin.

Agar $a = mq + r$ bo'lsa, $a \equiv r \pmod{m}$ deb yozish mumkin.

3) agar a/m bo'lsa, $a \equiv 0 \pmod{m}$ bo'ladi.

Taqqoslama a) refleksivlik; b) simmetriklik; v) tranzitivlik xossalariga ega.

Isboti. a) $a \equiv a \pmod{m}$, chunki $a - a = 0$ bo'lib, 0 son m ga bo'linadi;

b) $a \equiv b \pmod{m}$ bo'lsin: $a - b = mt$, bundan $b - a = m(-t)$, demak, $b - a \equiv 0 \pmod{m}$ yoki $b \equiv a \pmod{m}$;

v) $a \equiv b \pmod{m}$ va $b \equiv c \pmod{m}$ bo'lsa, u holda $a \equiv c \pmod{m}$ bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$a = b + mt_1; \quad b = c + mt_2$$

tengliklarni hadlab qo'shsak, $a - c = mt$ hosil bo'ladi. Bu yerda $t = t_1 + t_2$. Demak, $a \equiv c \pmod{m}$.

Endi taqqoslamalarning asosiy xossalarini bayon etamiz.

1-xossa. Bir xil modulli taqqoslamalarni hadlab qo'shish (ayirish) mumkin.

2-xossa. Bir xil modulli taqqoslamalarni hadlab ko'paytirish mumkin.

3-xossa. Agar $x \equiv y \pmod{m}$ bo'lsa, u holda

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n \pmod{m}$$

bo'ladi.

4-xossa. Agar taqqoslamaning ikkala tomonidagi umumiy bo'luvchi modul bilan o'zaro tub bo'lsa, taqqoslamaning ikkala tomonini shu umumiy bo'luvchiga bo'lish mumkin.

5-xossa. Taqqoslamaning ikkala tomonini va modulni bir xil butun musbat songa ko'paytirish mumkin (agar bo'linsa, bo'lish mumkin).

6-xossa. Agar taqqoslama bir necha modul bo'yicha o'rinli bo'lsa, u shu modullarning eng kichik umumiy karralisi bo'yicha ham o'rinli bo'ladi.

7-xossa. Agar taqqoslama biror m modul bo'yicha o'rinli bo'lsa, u shu modulning ixtiyoriy bo'luvchisi m_1 modul bo'yicha ham o'rinli bo'ladi.

8-xossa. Taqqoslamaning bir tomoni va modulning eng katta umumiy bo'luvchisi bilan ikkinchi tomoni va modulning eng katta umumiy bo'luvchisi o'zaro teng bo'ladi.

15.4. Chegirmalar sistemalari. Barcha butun sonlarni biror natural m songa bo'lishdan $0, 1, 2, \dots, (m-1)$ qoldiqlar hosil bo'ladi. Har bir qoldiqqa sonlarning biror sinfi mos keladi. m modulga bo'lganda bir xil qoldiq qoladigan sonlar to'plamini bitta sinf deb qaraymiz. U sinflarni mos ravishda

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1} \quad (15.12)$$

orqali belgilaymiz.

Bo'linma va qoldiqning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga asosan chegirmalarning m modul bo'yicha har xil sinflari umumiy elementga ega bo'lmaydi. Demak, butun sonlar to'plami o'zaro kesishmaydigan sinflarga yoyiladi.

C_r sinfnining elementlari $mq+r$ shaklga ega bo'lib, q ga har xil butun qiymatlar berish natijasida bu elementlarning barchasini hosil qilish mumkin. $m=10$ bo'lganda 3 qoldiq hosil qiladigan sonlar $10q+3$ ko'rinishga ega va $q=0; \pm 1; \pm 2; \dots$ desak, $\dots, -27, -17, -7, 3, 13, 23, \dots$ sinf hosil bo'ladi.

Ikkita butun son m modul bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lishi uchun ular shu modul bo'yicha bitta sinfnining vakili bo'lishi kerakligi o'z-o'zidan ravshan. Har bir sinfnining ixtiyoriy elementi shu sinfnining chegirmasi deyiladi.

Ta'rif. m modul bo'yicha tuzilgan har bir sinfdan bittadan olib tuzilgan sonlar to'plami m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasi deyiladi.

$m=10$ modul bo'yicha $10q, 10q+1, \dots, 10q+9$ sinflarni hosil qilish mumkin. Shularning har biridan bittadan olib tuzilgan 20, 31, 112, 13, 24, 135, 6, 147, -2, -31 sistema 10 modul tuzilgan chegirmalar sistemasidir.

Chegirmalarning m modul bo'yicha to'la sistemasi sifatida $\{0, 1, 2, \dots, (m-1)\}$ to'plam olinadi. Ba'zi hollarda esa absolyut qiymati bo'yicha eng kichik chegirmalar olinadi. m juft bo'lsa, uning ko'rinishi $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{m-1}{2}, \pm \frac{m}{2}\right\}$, m toq bo'lganda esa $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{m-1}{2}\right\}$ bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan quyidagi xulosaga kelimiz. Berilgan sonlar to'plami biror m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini hosil qilishi uchun bu to'plam elementlari quyidagi ikkita shartni qanoatlantirishi kerak:

- 1) ular m modul bo'yicha har xil sinflarning vakillari bo'lishi;
- 2) ularning soni xuddi modul m ga teng bo'lishi kerak.

1-Teorema (chiziqli forma haqida). Agar $ax+b$ chiziqli formadagi x o'zgaruvchi har qanday butun b son va $(a, m)=1$ bo'lganda m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etsa, u holda $ax+b$ o'zgaruvchi ham m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etadi.

15.5. Chegirmalarning keltirilgan sistemasi. Taqqoslamalarning 8-xossasiga asosan m modul bo'yicha o'zaro taqqoslanuvchi sonlar m modul bilan bir xil bo'lgan eng katta umumiy bo'luvchiga ega edi. m modul bo'yicha taqqoslanuvchi sonlar bitta sinfnining vakillaridan iboratligini biz yuqorida ko'rsatgandik. Demak, sinfnining bitta chegirmasi modul bilan o'zaro tub bo'lsa, bu sinfnining barcha elementlari ham modul bilan o'zaro tub bo'ladi. Shuning uchun m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinflari to'g'risida gapirish mumkin. Bu sinflar to'plami sonlar nazariyasida muhim rol o'ynaydi.

Ta'rif. m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinflaridan bittadan element olib tuzilgan to'plam *chegirmalarning m modul bo'yicha keltirilgan sistemasi* deyiladi.

Chegirmalarning keltirilgan sistemasini shu chegirmalarning to'la sistemasidan ham tuzish mumkin. Buning uchun to'la sistemadan m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalarni ajratib olish kifoya. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to'plam 10 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasi bo'lgani holda $\{1, 3, 7, 9\}$ sistema 10 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasidir. Xuddi

shunday, $\{1, 3, -3, -1\}$ ham 10 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi bo'ladi. Chegirmalarning keltirilgan sistemasidagi sonlar sonini aniqlash uchun *Eyler funksiyasi* deb ataluvchi $\varphi(m)$ funktsiyadan foydalaniladi.

Eyler funktsiyasi har bir musbat butun m son uchun aniqlangan bo'lib, u $0, 1, 2, \dots, m-1$ sonlar orasida m bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar sonini bildiradi.

Berilgan sonlar to'plami m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi bo'lishi uchun quyidagi uchta shart bajarilishi kerak:

1) to'plam elementlari $\varphi(m)$ ta bo'lishi;

2) m modul bo'yicha o'zaro taqqoslanuvchi bo'lmasligi (ya'ni modul bo'yicha har xil sinf vakillari bo'lishi);

3) m modul bilan o'zaro tub bo'lishi zarur.

Misol. $a = 15, m = 14$ bo'lsin. $(15, 14) = 1, m = 14$ modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi $\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$ dan iborat. Endi $5x$ ni ($m = 14$ modul bo'yicha) hisoblaymiz.

$$5 \cdot 1 \equiv 5 \pmod{14},$$

$$5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{14},$$

$$5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 11 \pmod{14},$$

$$5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 3 \pmod{14},$$

$$5 \cdot 11 \equiv 55 \equiv 13 \pmod{14},$$

$$5 \cdot 13 \equiv 65 \equiv 9 \pmod{14}.$$

Demak, keltirilgan sistema $\{5, 1, 11, 3, 13, 9\}$ bo'ladi, $\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$ va $\{5, 1, 11, 3, 13, 9\}$ sistemalar bir-biridan faqat elementlarining o'rnini bilan farq qiladi, xolos. Bu elementlar ko'paytmalari esa o'zaro teng, ya'ni

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 5 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 9.$$

15.6. Eyler funksiyasining xossalari.

Ta'rif. Agar 1) $f(n)$ funksiya barcha natural n sonlar uchun aniqlangan bo'lib, n ning har qanday qiymatida $f(n) \neq 0$ bo'lsa va 2) ixtiyoriy o'zaro tub n_1 va n_2 sonlar uchun $f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2)$ shartlar bajarilsa, $f(n)$ funksiya *multiplikativ* funksiya deyiladi.

Teorema. *Eyler funksiyasi multiplikativ funksiyadir.*
 $\varphi(m)$ ni hisoblash formulalarini keltiramiz.

a) $m = p$ bo'lsin. U holda $\varphi(p) = p - 1$ ligi o'z-o'zidan aniq.

Misol. $p = 7$ bo'lsin. 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlarning har biri 7 bilan o'zaro tubdir.

b) $m = p^\alpha$ bo'lsin, $\varphi(p^\alpha)$ ni hisoblash uchun 1 dan p^α gacha sonlarni quyidagicha yozib olamiz.

$$1, 2, 3, \dots, p, \dots, 2p, \dots, 3p, \dots,$$

$$p \cdot p \dots p^{\alpha-1} p = p^\alpha. \quad (15.13)$$

Bu qatordagi $p, 2p, \dots, p^{\alpha-1} \cdot p$ sonlarning barchasi p ga bo'lingani uchun p bilan o'zaro tub emas. p ga bo'linadigan sonlar soni $p^{\alpha-1}$ tadir. (15.13) qatorda esa p^{α} ta son bor. Demak, p bilan (13) dagi o'zaro tub sonlar soni

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ta ekan.

c) $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ bo'lsin. Eyler funksiyasi multiplikativ bo'lgani uchun

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{\alpha_k})$$

tenglik o'rinli. Har bir ko'paytuvchi uchun b) ni qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

yoki

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1).$$

Misol. $m = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$$\varphi(m) = \varphi(360) = 2^2(2-1) \cdot 3(3-1) \cdot 5^0(5-1) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96.$$

$$\varphi(360) = 96.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

105. Quyida berilgan ratsional kasrni uzluksiz kasrga yoying:

1. $\frac{113}{47}$

2. $\frac{57}{23}$

3. $\frac{67}{23}$

4. $\frac{95}{41}$

5. $\frac{371}{174}$

6. $\frac{97}{50}$

7. $\frac{73}{30}$

8. $\frac{217}{112}$

9. $\frac{145}{53}$

10. $\frac{65}{17}$

11. $\frac{147}{53}$

12. $\frac{97}{40}$

106. Quyida berilganlarga ko'ra chegirmalar sistemasini yozing:

1. $m = 10$

2. $m = 15$

3. $m = 13$

4. $m = 17$

5. $m = 18$

6. $m = 12$

7. $m = 14$

8. $m = 19$

107. 33^{66} ni 5 ga bo'lgandagi goldiqni taqqoslama yordamida toping.

108. 7^{54} ni 9 ga bo'lgandagi qoldiqni taqqoslama yordamida toping.

109. 222⁵⁵⁵ ni 7 ga bo‘lgandagi qoldiqni taqqoslama yordamida toping.

110. $2^{60} + 7^{30}$ ni 13 ga bo'lgandagi qoldiqni taqqoslama yordamida toping.

111. 3^{32} ni 5 ga bo'lgandagi qoldiqni taqqoslama yordamida toping.

112. $3^{4n+2} + 6^{2n+1}$ ni 5 ga bo'lgandagi qoldiqni taqqoslama yordamida toping.

113. 12^{2n+1} sonini 133 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

114. 11^{n+1} sonini 133 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

115. $12^{2n+1} + 11^{n+1}$ yig'indini 133 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

116. $3^{4n+2} + 6^{2n+1}$ yig'indini 5 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

117. $103^{3n+2} + 11^{6n+1}$ yig'indini 9 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

118. $3^{3336n+3} + 6^{6663n+6}$ yig'indini 5 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

119. $9^{9n+1} + 7^{42n+1}$ yig'indini 10 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

16-§. Bir noma'lumli birinchi darajali taqqoslamalar va ularni yechish

16.1. Bir noma'lumli birinchi darajali taqqoslamalar. Bunday taqqoslama- larning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$ax \equiv b \pmod{m} \quad (16.1)$$

bu yerda a, b – butun sonlar. Taqqoslamani yechish deganda uni to‘g‘ri sonli taqqoslamaga aylantiruvchi sonlar sinfini tushunamiz. Chunki (16.1) taqqoslamani biror x_1 son qanoatlantirsa, uni $x_1 + mt$ (t – butun son) sonlar sistemasi ham qanoatlantiradi. (1) taqqoslamaning yechimini topish uchun biz quyidagi ikkita holni qaraymiz. Bitta sinfdagi barcha yechimlarni bitta yechim deb qabul qilamiz.

1. $(a, m) = 1$. Agar (16.1) taqqoslama yechimga ega bo'lsa, u yechim m modul bo'yicha chegirmalarning birorta sinfidan iborat bo'ladi. Ma'lumki, chegirmalarning to'la sistemasidagi har bir chegirmaga bitta sinf mos kelardi. Demak, x o'zgaruvchi chegirmalarning to'la sistemasini qabul qilar ekan, u holda

chiziqli forma haqidagi 1- teoremaga asosan ax ham chegirmalarning to'la sistemasini qabul qiladi.

x o'zgaruvchining biror x_0 qiymatida ax_0 chegirma bilan b son bitta sinfga tegishli bo'ladi, ya'ni $ax_0 \equiv b(\text{mod } m)$ bo'lib, $x \equiv x_0(\text{mod } m)$ (16.1) taqqoslamaning yagona yechimi bo'ladi.

2. $(a, m) = d > 1$. Ma'lumki, $ax \equiv b(\text{mod } m)$ taqqoslamaning $ax - b = my$ deb yozish mumkin. Bu yerda y — butun son. Demak, $ax - b = my$ tenglikda $(m/d \wedge a/d) \Rightarrow b/d$. Bundan agar $b \nmid d$, ya'ni b son d ga bo'linmasa, (16.1) taqqoslama yechimga ega bo'lmaydi, degan natija kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $b = db_1$ bo'lsin. Taqqoslamalarning 5-xossasiga asosan (16.1) ning ikkala qismi va modulini d ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_1x \equiv b_1(\text{mod } m_1). \quad (16.2)$$

Bu yerda $(a_1, m_1) = 1$ bo'lganidan (16.1) holga asosan (16.2) taqqoslama m_1 modul bo'yicha yagona x_0 yechimga ega:

$$x \equiv x_0(\text{mod } m_1) \Rightarrow x = x_0 + km_1, \quad k \in C.$$

Bu yechim (16.1) ni ham qanoatlantiradi. Lekin (16.1) ning yechimlari shu bilan tugallanmaydi. Berilgan taqqoslamaning yechimlarini m modul bo'yicha topish uchun quyidagilarga e'tibor beramiz:

$$\dots, x_1 - m_1, x_1, x_1 + m_1, \dots, x_1 + (d-1)m_1, x_1 + dm_1, \dots \quad (16.3)$$

Bu chegirmalarning har biri m_1 modul bo'yicha teng qoldikli bo'lib, m modul bo'yicha har xil sinfga tegishlidir. Shu har xil sinflarning vakillari

$$x_1, x_1 + m_1, x_1 + 2m_1, \dots, x_1 + (d-1)m_1 \quad (16.4)$$

dan iborat. Haqiqatan, (16.4) ning har qanday ikkita elementi m modul bo'yicha taqqoslanuvchi emas. (16.3) sinfnig (16.4) ga kirmagan har bir elementi uchun (16.4) dan shunday element topiladiki, ularning ayirmasi $m_1d = m$ ga bo'linadi. Shuning uchun ular bitta sinfnig vakillari hisoblanadi. Demak, $(a, m) = d$ va $(b, m) = d$ bo'lsa, (16.1) taqqoslama (16.4) orqali aniqlanuvchi d ta yechimga ega ekan. Yuqoridagilarga asosan quyidagi xulosalarni yoza olamiz:

Xulosalar. 1. Agar $(a, m) = 1$ bo'lsa, (1) ning yechimi mavjud va yagonadir.

2. $(a, m) = d > 0$ bo'lib,

a) $a \nmid b$ chin bo'lsa, yechim mavjud emas;

b) a/b chin bo'lsa, (1) taqqoslama d ta yechimga ega.

Misollar. 1. $3x \equiv 7(\text{mod } 11)$; $(3, 11) = 1$ bo'lgani uchun yechim yagona bo'ladi. m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ dan iborat. Bevosita tekshirib ko'rish bilan $x \equiv -5(\text{mod } 11)$ yechim ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. $5x \equiv 7(\text{mod } 15)$; $(5, 15) = 5$, lekin $7 \not\equiv 5$ bo'lgani uchun bu taqqoslama yechimga ega emas.

3. $9x \equiv 6(\text{mod } 15)$; $(9, 15) = 3$; $(6, 15) = 3$ bo'lgani uchun taqqoslama uchta yechimga ega bo'ladi. Haqiqatan, taqqoslamani $3x \equiv 2(\text{mod } 5)$ shaklda yozib olamiz. $(3, 5) = 1$ bo'lgani uchun bu taqqoslama 5 modul bo'yicha yagona yechimga ega bo'ladi. Haqiqatan,

$$x \equiv -1(\text{mod } 5)$$

yechimdir. Berilgan taqqoslamaning yechimi -1 , $-1+5$, $-1+10(\text{mod } 15)$ yoki $x \equiv -1(\text{mod } 15)$, $4(\text{mod } 15)$, $9(\text{mod } 15)$ dan iborat.

16.2. Birinchi darajali taqqoslamalarni yechish usullari. Bir noma'lumli taqqoslamalarni yechishning bir qancha usullari mavjud. Biz hozir shulardan ba'zilarini bayon etamiz. Faraz qilaylik,

$$ax \equiv b(\text{mod } m)$$

taqqoslama berilgan bo'lsin.

1. *Tanlash usuli.* Bu usulning mohiyati shundaki, (16.1) taqqoslamadagi x o'rniga chegirmalarning to'la sistemasidagi barcha chegirmalar ketma-ket qo'yib chiqiladi. Ulardan qaysi biri (16.1) ni to'g'ri taqqoslamaga aylantirsa, o'sha yechim bo'lib hisoblanadi. Biz yuqoridagi ikkita misolni shu usulda yechdik. Lekin modul ancha katta bo'lganda bu usul uncha samarali bo'lmay qoladi.

2. *Koeffitsientlarni o'zgartirish usuli.* Amalda taqqoslamalarning xossalaridan foydalanib, noma'lum oldidagi koeffitsientlarni va b ni shunday o'zgartirish kerakki, o'ng tomonda hosil bo'lgan son x ning koeffitsientiga bo'linsin.

Agar $(b, m) = d > 0$ bo'lsa, yangi o'zgaruvchiga o'tish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Misollar.

1. $7x \equiv 5(\text{mod } 9)$,
 $7x \equiv (5 + 9)(\text{mod } 9)$,
 $7x \equiv 14(\text{mod } 9)$;
 $(7, 9) = 1$ bo'lganidan
 $x \equiv 2(\text{mod } 9)$.

2. $17x \equiv 25(\text{mod } 28)$,
 $17x + 28x \equiv 25(\text{mod } 28)$,
 $45x \equiv 25(\text{mod } 28)$, $9x \equiv 5(\text{mod } 28)$,
 $(9, 28) = 1$ bo'lganidan $9x \equiv 5(\text{mod } 28)$,
 $9x \equiv 5 - 140(\text{mod } 28) \equiv -135(\text{mod } 28)$.
 $9x \equiv -135(\text{mod } 28)$,
 $x \equiv -15 \equiv 13(\text{mod } 28)$.

3. *Eyler teoremasidan foydalanish.* Ma'lumki, $((a, m) = 1) \Rightarrow (a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m})$ edi. Bundan $a^{\varphi(m)} \cdot b \equiv b \pmod{m}$ deb yozish mumkin. Bu taqqoslamalarni $ax \equiv b \pmod{m}$ bilan solishtirib, $x \equiv a^{\varphi(m)-1} \cdot b \pmod{m}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Misollar yechishda $a^{\varphi(m)-1} \cdot b$ ifodani m modul bo'yicha eng kichik chegirmaga keltirish lozim.

Misol. $3x \equiv 7 \pmod{11}$

$$x \equiv 3^{\varphi(11)-1} 7 \pmod{11}$$

$$\varphi(11) \equiv 10; 3^2 \equiv 9 \equiv -2 \pmod{11}; 3^4 \equiv 4 \pmod{11},$$

$$3^5 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}; 3^9 \equiv 4 \pmod{11}$$

bo'lganidan $x \equiv 3^9 \cdot 7 \equiv 28 \equiv 6 \pmod{11}$ yoki $x \equiv 6 \pmod{11}$.

Lekin taqqoslamalarning moduli yetarlicha katta bo'lsa, yuqoridagi usullarning birortasi ham uncha samarali emas. Bunday hollarda quyidagi usul ancha foydalidir.

4. *Uzluksiz kasrlardan foydalanish usuli.* Ushbu

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

taqqoslama berilgan bo'lib, $(a, m) = 1$ va $a > 0$ bo'lsin. m/a kasrni uzluksiz kasrga yoyib, uning munosib kasrlarini P_k / Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) deb belgilaymiz. P_k / Q_k qisqarmas kasr bo'lganidan

$$P_n = m, \quad Q_n = a,$$

u holda oldindan ma'lum $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$ tenglik $m Q_{n-1} - P_{n-1} a = (-1)^n$ shaklni oladi. Oxirgi tenglikdan $a \cdot P_{n-1} = -(-1)^n + m Q_{n-1}$ yoki $a \cdot P_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{m}$ hosil bo'ladi. Oxirgi taqqoslamaning ikkala tomonini $(-1)^{n-1} \cdot b$ ga ko'paytiramiz:

$$a \cdot (-1)^{n-1} \cdot b \cdot P_{n-1} \equiv b \pmod{m}. \quad (16.5)$$

(16.5) va (16.1) ni solishtirib

$$x \equiv (-1)^{n-1} \cdot b \cdot P_{n-1} \pmod{m} \quad (16.6)$$

ekan degan xulosaga kelamiz. Bu yerda P_{n-1} son $\frac{m}{a}$ kasrning $(n-1)$ munosib kasrdagi suratdan iboratdir. (16.1) taqqoslama yagona yechimga ega bo'lgani uchun (16.6) yechim (16.1) ning yechimi bo'ladi.

Misol. $285x \equiv 177 \pmod{924}$ taqqoslama yechilsin.

Yechilishi. $(285, 924) = 3$, $177 = 3 \cdot 59$ bo'lgani sababli taqqoslamaning moduli va ikkala qismini 3 ga bo'lamiz:

$$95x \equiv 59 \pmod{308}.$$

Endi $308/59$ kasrni munosib kasrga yoyamiz. Buning uchun ketma-ket bo'lishni quyidagicha bajaramiz:

$$308 = 95 \cdot 3 + 23,$$

$$95 = 23 \cdot 4 + 3,$$

$$23 = 3 \cdot 7 + 2,$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1,$$

$$2 = 2 \cdot 1,$$

$q_1 = 3, q_2 = 4, q_3 = 7, q_4 = 1, q_5 = 1$. Quyidagi jadvalni tuzamiz:

q_k	0	3	4	7	1	2
P_k	1	3	13	94	107	308

Demak, $P_{n-1} = P_4 = 107$. Bundan

$$x \equiv (-1)^4 \cdot 107 \cdot 59 \pmod{308},$$

$$x \equiv 153 \pmod{308}.$$

Berilgan taqqoslamalarning yechimlari esa quyidagilardan iborat bo'ladi:

$$x \equiv 153, 461, 769 \pmod{924}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

120. Quyida berilgan taqqoslamani tanlash usulida yeching:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $3x \equiv 8 \pmod{13};$ | 2) $25x \equiv 15 \pmod{17};$ |
| 3) $25x \equiv 15 \pmod{17};$ | 4) $5x \equiv 26 \pmod{12};$ |
| 5) $4x \equiv 7 \pmod{8};$ | 6) $14x \equiv 22 \pmod{36}.$ |

121. Quyida berilgan taqqoslamani uzluksiz kasrlardan foydalanib yeching:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $7x \equiv 4 \pmod{19};$ | 2) $13x \equiv 1 \pmod{27};$ |
| 3) $37x \equiv 25 \pmod{117};$ | 4) $113x \equiv 89 \pmod{311};$ |
| 5) $221x \equiv 111 \pmod{360};$ | 6) $23x \equiv 667 \pmod{693};$ |
| 7) $43x \equiv 41 \pmod{221};$ | 8) $91x \equiv 143 \pmod{222};$ |
| 9) $271x \equiv 25 \pmod{119};$ | 10) $13x \equiv 178 \pmod{153}.$ |

122. Quyida berilgan taqqoslamani Eyler teoremasidan foydalanib yeching:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1) $3x \equiv 1 \pmod{5};$ | 2) $5x \equiv 6 \pmod{7};$ |
| 3) $5x \equiv 7 \pmod{10};$ | 4) $3x \equiv 8 \pmod{13};$ |
| 5) $25x \equiv 15 \pmod{17};$ | 6) $29x \equiv 3 \pmod{12};$ |
| 7) $5x \equiv 26 \pmod{12};$ | 8) $4x \equiv 7 \pmod{8}.$ |

123. Quyida berilgan taqqoslamani yeching:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $5x \equiv 11 \pmod{15};$ | 2) $2x \equiv 5 \pmod{7};$ |
| 3) $3x \equiv 5 \pmod{2};$ | 4) $4x \equiv 6 \pmod{8};$ |
| 5) $5x \equiv 7 \pmod{10};$ | 6) $5x \equiv 15 \pmod{20};$ |
| 7) $9x \equiv 3 \pmod{6};$ | 8) $9x \equiv 4 \pmod{7};$ |

- 9) $3x \equiv 2 \pmod{5}$; 10) $5x \equiv 9 \pmod{7}$;
 11) $5x \equiv 8 \pmod{3}$; 12) $2x \equiv 5 \pmod{7}$;
 13) $6x \equiv 9 \pmod{15}$.

17-§. Evklid fazosi. Ortogonal va ortonormal sistemalar. Ortogonalash protsessi.

17.1. Evklid fazolari. P haqiqiy sonlar maydoni ustida V_n chiziqli fazoni qarab, $\forall x, y \in V_n$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Agar har ikki $x, y \in V_n$ vektorga bitta a haqiqiy son bir qiymatli mos keltirilgan bo'lsa, uni

$$(x, y) = a$$

ko'rinishda belgilaymiz, shu bilan birga bu moslik quyidagi 4 ta xossaga ega bo'lsa, V_n da *skalyar ko'paytma* aniqlangan deyiladi:

- 1) $\forall x, y \in V_n ((x, y) = (y, x))$ (skalyar ko'paytirish kommutativ);
- 2) $\forall b \in P, \forall x, y \in V_n ((bx, y) = b(x, y))$ (aralash ko'paytirish assotsiativ);
- 3) $\forall x, y, z \in V_n ((x, y + z) = (x, y) + (x, z))$ (skalyar ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv);
- 4) $\forall (x \neq \bar{0}) \in V_n ((x, x) > 0 \text{ va } \bar{0} \in V_n ((\bar{0}, \bar{0}) = 0))$ (skalyar kvadrat manfiy emas).

Bu aksiomalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. $(x, cy) = (cy, x) = c(y, x) = c(x, y)$. Demak, $(bx, cy) = bc(x, y)$.
2. $(x + z, y) = (y, x + z) = (y, x) + (y, z) = (x, y) + (z, y)$. Demak,
 $(b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m, c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k) = b_1c_1(x_1, y_1) + b_1c_2(x_1, y_2) + \dots +$
 $+ b_1c_k(x_1, y_k) + b_2c_1(x_2, y_1) + b_2c_2(x_2, y_2) + \dots + b_2c_k(x_2, y_k) + \dots +$
 $+ b_mc_1(x_m, y_1) + b_mc_2(x_m, y_2) + \dots + b_mc_k(x_m, y_k)$.
3. $(x, y - z) = (x, y + (-z)) = (x, y) + (x, -z) = (x, y) + (x, (-1)z) =$
 $= (x, y) + (-1)(x, z) = (x, y) - (x, z)$. Demak, $(x - z, y) = (x, y) - (z, y)$.
4. $(0, y) = (x - x, y) = (x, y) - (x, y) = 0$. Shunday qilib, $(x, 0) = 0$.

x va y vektorlarning (x, y) skalyar ko'paytmasi amali bu vektorlarni *skalyar ko'paytirish* deyiladi.

Ta'rif. P haqiqiy sonlar maydoni ustida V_n chiziqli fazoda skalyar ko'paytirish aniqlangan bo'lsa, u holda V_n *Evklid fazosi* deyiladi.

Ta’rif. $(x, y) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x, y \in V_n$ vektorlar *ortogonal vektorlar* deyiladi.

Misollar.

V_3 arifmetik fazoda $x = (2, 5, -1)$ va $y = (-3, 4, 14)$ vektorlar ortogonal, chunki $(x, y) = 2(-3) + 5 \cdot 4 - 1 \cdot 14 = 0$.

V_4 fazoda $f(x) = x - 2x^3$ va $\varphi(x) = 3x^2$ vektorlar ortogonal. Haqiqatan,

$$(f(x), \varphi(x)) = 3 \int_{-1}^{+1} (x^3 - 2x^5) dx = 3 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{3} \right) \Big|_{-1}^{+1} = 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 0.$$

$\bar{0} \in V_n$ vektor $\forall x \in V_n$ ga ortogonal, chunki

$$(x, \bar{0}) = (\bar{0}, x) = 0.$$

Ta’rif. Evklid fazosining $\forall x$ vektori uchun aniqlangan

$$|x| = \sqrt{(x, x)} \geq 0$$

son bu vektorning *uzunligi* deyiladi.

1-Teorema. n o’lchovli V_n Evklid fazosining noldan farqli va o’zaro ortogonal n ta

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

vektori bu fazoning bazisini tashkil etadi.

Ta’rif. V_n Evklid fazosining o’zaro ortogonal vektorlardan tuzilgan bazisi *ortogonal bazis* deyiladi. $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortogonal bazisni tasvirlovchi har bir vektorning uzunligi 1 ga teng, ya’ni $e_i = 1$ bo’lsa, bu bazis *ortonormal bazis* deyiladi.

Shunday qilib, ortogonal bazis uchun $(e_i, e_j) = 0$ va $(e_i, e_i) = \alpha_i > 0$ bo’lib, ortonormal bazis uchun $(e_i, e_j) = 0$ va $(e_i, e_i) = 1$.

2-Teorema. n o’lchovli V_n Evklid fazosiga qarashli hech qanday $x \neq \bar{0}$ vektor ortogonal bazis tashkil etuvchi vektorlarning hammasi bilan bir vaqtda ortogonal bo’la olmaydi.

17.2. Ortogonallashtirish protsessi. V_n Evklid fazosining ixtiyoriy

$$g_1, g_2, \dots, g_n \tag{17.1}$$

bazisiga asoslanib,

$$e_1, e_2, \dots, e_n \tag{17.2}$$

ortogonal bazisni yasash protsessi bilan tanishamiz. Bunga *ortogonallashtirish protsessi* deyiladi. U quyidagidan iborat: yasaladigan (17.2) ortogonal bazisning birinchi e_1 vektorini, masalan, $e_1 = g_1$ deb olamiz; $g_1 \neq \bar{0}$ bo’lganidan $e_1 \neq \bar{0}$ dir. Endi, ikkinchi e_2 vektorni $e_2 = g_2 + ag_1 = g_2 + ae_1$ ko’rinishda olib, a sonni shunday aniqlaymizki,

$$(e_1, e_2) = (e_1, g_2 + ae_2) = 0 \quad (17.3)$$

shart bajarilsin, ya'ni e_1 va e_2 vektorlar ortogonal bo'lsin. Avval $e_2 = g_2 + ae_1 \neq \bar{0}$ ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan, (17.1) bazisning g_1, g_2 qism sistemasi chiziqli erkli bo'lgani sababli $e_2 = g_2 + ae_1 = g_2 + ag_1 \neq \bar{0}$ dir.

(17.3) tenglikdan $(e_1, g_2) + a(e_1, e_1) = 0$ ni, bundan esa

$$a = -\frac{(e_1, g_2)}{(e_1, e_1)} \quad (17.4)$$

ni keltirib chiqaramiz.

(17.2) ning e_3 vektorini $e_3 = g_3 + ce_2 + be_1$ ko'rinishda olib, c va b ni shunday aniqlaymizki, bu e_3 vektor avvalgi e_1 va e_2 vektorlar ortogonal bo'lsin, ya'ni

$$(e_1, e_3) = (e_1, g_3 + ce_2 + be_1) = 0, \quad (17.5)$$

$$(e_2, e_3) = (e_2, g_3 + ce_2 + be_1) = 0 \quad (6)$$

tengliklar bajarilsin. Birinchidan $e_3 = g_3 + ce_2 + be_1 \neq \bar{0}$ ekanini aniqlaymiz. (17.1) bazisning g_1, g_2, g_3 qism sistemasi chiziqli erkli bo'lgani sababli

$e_3 = g_3 + ce_2 + be_1 = g_3 + c(g_2 + ag_1) + bg_1 = g_3 + cg_2 + (ac + b)g_1 \neq \bar{0}$ hosil bo'ladi. Ikkinchidan, (17.5) va (17.6) tengliklar quyidagini beradi:

$$(e_1, g_3) + c(e_1, e_2) + b(e_1, e_1) = 0,$$

$$(e_2, g_3) + c(e_2, e_2) + b(e_2, e_1) = 0$$

yoki

$$(e_1, g_3) + b(e_1, e_1) = 0 \quad \text{va} \quad (e_2, g_3) + c(e_2, e_2) = 0, \quad \text{chunki}$$

$$(e_1, e_2) = (e_2, e_1) = 0.$$

Bulardan

$$b = -\frac{(e_1, g_3)}{(e_1, e_1)} \quad \text{va} \quad c = -\frac{(e_2, g_3)}{(e_2, e_2)}, \quad (17.7)$$

va h. k. Mana shu ortogonallashtirish protsessini oxirigacha davom ettirib, (17.2) ortogonal bazisga kelamiz.

(17.2) ortogonal bazisga asoslanib, ortonormal bazis yasash mumkin. Buning uchun, (17.2) ning har bir e_i vektorini uning $|e_i|$ uzunligiga bo'lish kifoya. U holda ushbu

$$\frac{e_1}{|e_1|}, \frac{e_2}{|e_2|}, \dots, \frac{e_n}{|e_n|} \quad (17.8)$$

ortonormal bazis hosil bo'ladi. Haqiqatan,

$$\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \frac{e_i}{|e_i|} \right) = \frac{1}{|e_i|^2} (e_i, e_i) = \frac{1}{|e_i|^2} |e_i|^2 = 1 \quad \text{va}$$

$$\left(\frac{e_i}{|e_i|}, \frac{e_j}{|e_j|} \right) = \frac{1}{|e_i| \cdot |e_j|} (e_i, e_j) = \frac{1}{|e_i| \cdot |e_j|} \cdot 0 = 0. \quad (17.9)$$

Misol. V_3 Evklid arifmetik fazosida

$$g_1 = (1, 1, 1); \quad g_2 = (1, -1, 3); \quad g_3 = (2, 2, 8) \quad (17.10)$$

vektorlar bazis tashkil etadi, chunki ular chiziqli erkli. Haqiqatan,

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0 \text{ yoki } c_1(1, 1, 1) + c_2(1, -1, 3) + c_3(2, 2, 8) = (c_1 + c_2 + 2c_3, c_1 - c_2 + 2c_3, c_1 + 3c_2 + 8c_3) = (0, 0, 0) \text{ dan}$$

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 0,$$

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0,$$

$$c_1 + 3c_2 + 8c_3 = 0$$

bir jinsli sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

bo'lgani uchun, sistema faqat $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ nol yechimga ega. Lekin (17.10)

ortogonal bazis emas, chunki $(g_1, g_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 3 \neq 0$. (17.10)

bazisga asoslanib, ortogonal bazis tuzamiz. $e_1 = g_1 = (1, 1, 1)$; $e_2 = g_2 + ae_1$.

(17.4) ga muvofiq

$$a = -\frac{(e_1, g_2)}{(e_1, e_1)} = -\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{1^2 + 1^2 + 1^2} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Demak, $e_2 = g_2 + ae_1 = (1, -1, 3) - (1, 1, 1) = (0, -2, 2)$.

Endi $e_3 = g_3 + ce_2 + be_1$ ni topamiz. (17.7) ga asosan

$$b = -\frac{(e_1, g_3)}{(e_1, e_1)} = -\frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8}{3} = -4;$$

$$c = -\frac{(e_2, g_3)}{(e_2, e_2)} = -\frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 8}{0^2 + 2^2 + 2^2} = -\frac{3}{2};$$

$$e_3 = g_3 + ce_2 + be_1 = (2, 2, 8) - \frac{3}{2}(0, -2, 2) - 4(1, 1, 1) = (-2, 1, 1).$$

Shunday kilib, ortogonal bazis $e_1 = (1, 1, 1)$; $e_2 = (0, -2, 2)$; $e_3 = (-2, 1, 1)$ dir, chunki $(e_1, e_2) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0$; $(e_1, e_3) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$; $(e_2, e_3) = 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$.

Endi ortonormal bazisni yasaymiz: $|e_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;
 $|e_2| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $|e_3| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Demak, (17.8) ga ko'ra

$$\frac{e_1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad \frac{e_2}{2\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$\frac{e_3}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

124. Quyida berilgan vektorlarni normal vektorga keltiring.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\bar{b} = (2, 0, 1, -7)$ | 2. $\bar{b} = (3, 1, 2, 1)$ |
| 3. $\bar{b} = (1, -1, -1, 1)$ | 4. $\bar{b} = (1, -2, 2, -3)$ |
| 5. $\bar{b} = (-2, 1, 0, -5)$ | 6. $\bar{b} = (0, 1, -3, 4)$ |
| 7. $\bar{b} = (-3, 0, 4, 0)$ | 8. $\bar{b} = (6, 2, -1, 0)$ |
| 9. $\bar{b} = (1, 0, 1, -2)$ | 10. $\bar{b} = (4, -2, 1, -1)$ |

125. Ortogonallashtirish jarayoni yordamida quyidagi vektorlarga ortogonal baza toping.

- | | |
|--|---|
| 1. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 2, 7, -1), \\ \bar{a}_2 = (3, -1, 2, 4), \\ \bar{a}_3 = (1, 1, 3, 2). \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 1, -1, 1), \\ \bar{a}_2 = (1, 2, 1, -1), \\ \bar{a}_3 = (1, 1, 2, 1). \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (3, 2, -5, 4), \\ \bar{a}_2 = (3, -1, 3, -3). \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 3, -4, -1), \\ \bar{a}_2 = (1, -2, 1, 3). \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 1, -3), \\ \bar{a}_2 = (3, 1, -5), \\ \bar{a}_3 = (4, 2, -1). \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 3, 5, -4, 1), \\ \bar{a}_2 = (1, -1, 2, 3, 5), \\ \bar{a}_3 = (1, -1, 1, -2, 3). \end{cases}$ |
| 7. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (2, -1, 3, 4, -1), \\ \bar{a}_2 = (1, 2, -3, 1, 2). \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (4, 3, -1, 1, -1), \\ \bar{a}_2 = (2, 1, -3, 2, -5), \\ \bar{a}_3 = (1, -3, 0, 1, -2). \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (1, 2, 1), \\ \bar{a}_2 = (2, 3, 3), \\ \bar{a}_3 = (3, 7, 1). \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} \bar{a}_1 = (3, 1, 4), \\ \bar{a}_2 = (5, 2, 1), \\ \bar{a}_3 = (1, 1, -6). \end{cases}$ |

$$11. \begin{cases} \bar{a}_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \bar{a}_2 = (1, 2, 1, 1), \\ \bar{a}_3 = (1, 1, 2, 1), \\ \bar{a}_4 = (1, 3, 2, 3). \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \bar{a}_1 = (1, 1, 1), \\ \bar{a}_2 = (1, 1, 2), \\ \bar{a}_3 = (1, 2, 3). \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \bar{a}_1 = (2, 1, -3), \\ \bar{a}_2 = (3, 2, -5), \\ \bar{a}_3 = (1, -1, 1). \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \bar{a}_1 = (1, -1, 1, 0), \\ \bar{a}_2 = (1, 1, 0, 1), \\ \bar{a}_3 = (2, 0, 1, 1). \end{cases}$$

126. Vektor fazoda $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$ vektorlar berilgan. Uning bazisini va o'lchovini toping.

$$1. \begin{cases} \bar{x}_1 = (1, -1, 1, 0), \\ \bar{x}_2 = (1, 1, 0, 1), \\ \bar{x}_3 = (2, 0, 1, 1). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{x}_1 = (2, 1, 3, 1), \\ \bar{x}_2 = (1, 2, 0, 1), \\ \bar{x}_3 = (-1, 1, -3, 0). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{x}_1 = (2, 0, 1, 3, -1), \\ \bar{x}_2 = (1, 1, 0, -1, 1), \\ \bar{x}_3 = (0, -2, 1, 5, -3), \\ \bar{x}_4 = (1, -3, 2, 9, -5). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{x}_1 = (2, 1, 3, -1), \\ \bar{x}_2 = (-1, 1, -3, 1), \\ \bar{x}_3 = (4, 5, 3, -1), \\ \bar{x}_4 = (1, 5, -3, 1). \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \bar{x}_1 = (1, 0, 0, -1), \\ \bar{x}_2 = (2, 1, 1, 0), \\ \bar{x}_3 = (1, 1, 1, 1), \\ \bar{x}_4 = (1, 2, 3, 4), \\ \bar{x}_5 = (0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \bar{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0), \\ \bar{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1), \\ \bar{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1), \\ \bar{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2), \\ \bar{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0). \end{cases}$$

127. $\bar{x}$ vektorni $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n$ bazislar orqali koordinatalarini toping.

$$1. \begin{cases} \bar{x} = (1, 2, 1, 1), \\ \bar{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \bar{e}_2 = (1, 1, -1, -1), \\ \bar{e}_3 = (1, -1, 1, -1), \\ \bar{e}_4 = (1, -1, -1, 1). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{x} = (0, 0, 0, 1), \\ \bar{e}_1 = (1, 1, 0, 1), \\ \bar{e}_2 = (2, 1, 3, 1), \\ \bar{e}_3 = (1, 1, 0, 0), \\ \bar{e}_4 = (0, 1, -1, -1). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{x} = (7, 14, -1, 2), \\ \bar{e}_1 = (1, 2, -1, -2), \\ \bar{e}_2 = (2, 3, 0, -1), \\ \bar{e}_3 = (1, 2, 1, 4), \\ \bar{e}_4 = (1, 3, -1, 0). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{x} = (6, 9, 14), \\ \bar{e}_1 = (1, 1, 1), \\ \bar{e}_2 = (1, 1, 2), \\ \bar{e}_3 = (1, 2, 3). \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \bar{x} = (6, 2, -7), \\ \bar{e}_1 = (2, 1, -3), \\ \bar{e}_2 = (3, 2, -5), \\ \bar{e}_3 = (1, -1, 1). \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \bar{x} = (3, -2, 5), \\ \bar{e}_1 = (1, 0, 2), \\ \bar{e}_2 = (1, 0, -2), \\ \bar{e}_3 = (1, 1, 1). \end{cases}$$

128. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ bazisdan $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ bazisga o'tish matritsasini toping:

$$1. \begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \\ \bar{e}_4 = (0, 0, 0, 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = (1, 1, 0, 0), \\ \bar{e}'_2 = (1, 0, 1, 0), \\ \bar{e}'_3 = (1, 0, 0, 1), \\ \bar{e}'_4 = (1, 1, 1, 1). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 2, -1, 0), \\ \bar{e}_2 = (1, -1, 1, 1), \\ \bar{e}_3 = (-1, 2, 1, 1), \\ \bar{e}_4 = (-1, -1, 0, 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = (2, 1, 0, 1), \\ \bar{e}'_2 = (0, 1, 2, 2), \\ \bar{e}'_3 = (-2, 1, 1, 2), \\ \bar{e}'_4 = (1, 3, 1, 2). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \bar{e}_2 = (1, 2, 1, 1), \\ \bar{e}_3 = (1, 1, 2, 1), \\ \bar{e}_4 = (1, 3, 2, 3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = (1, 0, 3, 3), \\ \bar{e}'_2 = (-2, -3, -5, -4), \\ \bar{e}'_3 = (2, 2, 5, 4), \\ \bar{e}'_4 = (-2, -3, -4, -4). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 2, 1), \\ \bar{e}_2 = (2, 3, 3), \\ \bar{e}_3 = (9, 7, 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = (3, 1, 4), \\ \bar{e}'_2 = (5, 2, 1), \\ \bar{e}'_3 = (1, 1, 6). \end{cases}$$

129. $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ bazisdan $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ bazisga o'tish matritsasini toping:

$$1. \begin{cases} \bar{e}'_1 = (1, 0, 3, 3), \\ \bar{e}'_2 = (-2, -3, -5, -4), \\ \bar{e}'_3 = (2, 2, 5, 4), \\ \bar{e}'_4 = (-2, -3, -4, -4). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \bar{e}_2 = (1, 2, 1, 1), \\ \bar{e}_3 = (1, 1, 2, 1), \\ \bar{e}_4 = (1, 3, 2, 3). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{e}'_1 = (1, & 1, & 0, & 0), \\ \bar{e}'_2 = (1, & 0, & 1, & 0), \\ \bar{e}'_3 = (1, & 0, & 0, & 1), \\ \bar{e}'_4 = (1, & 1, & 1, & 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, & 0, & 0, & 0), \\ \bar{e}_2 = (0, & 1, & 0, & 0), \\ \bar{e}_3 = (0, & 0, & 1, & 0), \\ \bar{e}_4 = (0, & 0, & 0, & 1). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{e}'_1 = (3, & 1, & 4), \\ \bar{e}'_2 = (5, & 2, & 1), \\ \bar{e}'_3 = (1, & 1, & 6). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, & 2, & 1), \\ \bar{e}_2 = (2, & 3, & 3), \\ \bar{e}_3 = (9, & 7, & 1). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{e}'_1 = (2, & 1, & 0, & 1), \\ \bar{e}'_2 = (0, & 1, & 2, & 2), \\ \bar{e}'_3 = (-2, & 1, & 1, & 2), \\ \bar{e}'_4 = (1, & 3, & 1, & 2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, & 2, & -1, & 0), \\ \bar{e}_2 = (1, & -1, & 1, & 1), \\ \bar{e}_3 = (-1, & 2, & 1, & 1), \\ \bar{e}_4 = (-1, & -1, & 0, & 1). \end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. А.Г.Курош. «Олий алгебра курси». Тошкент, Ўқитувчи, 1976.
2. Р.Искандаров. «Олий алгебра», I-қисм. Тошкент, 1963.
3. Д.К.Фадеев, И.С.Соминский. «Сборник задач по высшей алгебре». Москва, Наука, 1977.
4. И.В.Проскураков. «Сборник задач по линейной алгебре». Москва, Наука, 1984.
5. Р. Искандаров, Р. Назаров. «Алгебра ва сонлар назарияси», 1-2-қисм. Тошкент, 1963.
6. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси». Тошкент, «Ўзбекистон», 2001й.
7. Соатов Й.У. «Олий математика». 3-қисм. Тошкент, 1993.

MUNDARAJA

Soʻz boshi.....	3
1-§. Chiziqli tenglamalar sistemalari.	4
2-§. Oʻrin almashtirishlar va oʻrniga qoʻyishlar.....	13
3-§. Determinantlar va ularning xossalari	20
4-§. Vektor fazo. Vektorlarning chiziqli bogʻliqligi va chiziqli erkliligi.....	26
5-§. Matritsalar va ular ustida amallar. Matritsa rangi.....	31
6-§. Teskari matritsa.....	37
7-§. Determinantlarni koʻpaytirish.....	40
8-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sonlardan ildiz chiqarish.....	44
9-§. Koʻphadlar va ular ustida amallar. Gerner sxemasi.....	50
10-§. Evklid algoritmi. Eng katta umumiy boʻluvchi.....	54
11-§. Karrali koʻpaytuvchilarga ajratish. Viyet formulalari.....	59
12-§. Uchinchi va toʻrtinchi darajali tenglamalar.....	66
13-§. Haqiqiy ildizlarni ajratish.....	73
14-§. Butun sonlarning boʻlinish nazariyasi.....	83
15-§. Z halqada taqqoslamalar va ularning chegirmalar sinflari. Uzluksiz kasrlar.....	87
16-§. Bir nomaʼlumli birinchi darajali taqqoslamalar va ularni yechish.....	96
17-§. Evklid fazosi. Ortogonal va ortonormal sistemalar. Ortogonalash jarayoni.....	101
Foydalanilgan adabiyotlar.....	109

