

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI**

Esomurodova Risolat Jumaniyoz qizi

**Mavzu: Chegaraviy sharti spektral parametrga
ratsional bog'liq bo'lgan Shturm-Liuvill masalasi xos
qiymatlarining xossalari**

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.d., dots. Yaxshimuratov A.B.

Urganch 2016 yil

- Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish, 4 ta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yhatidan tashkil topgan.
- **Birinchi paragrafda** masalaning qo'yilishi keltirilgan va ratsional Herlots-Nevanlinna funksiyalarining xossalari o'rganilgan.
- **Ikkinchi paragrafda** xos qiymatlarning mavjudligi isbotlangan va xos funksiyalarning ossillyatsiya xossalari olingan.
- **Uchinchi paragrafda** chegaraviy sharti spektral parametrga ratsional bog'liq bo'lgan Shturm-Liuvill masalasi uchun Krum-Kreyn almashtirishi o'rganilgan.
- **To'rtinchi paragrafda** xos qiymatlar asimptotikasi uchun formula keltirib chiqarilgan.

1-§. Masalaning qo'yilishi va

Herlots-Nevanlinna funksiyalarining xossalari

Quyidagi masalani ko'rib chiqamiz

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$y(0)\cos\alpha = y'(0)\sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \pi) \quad (2)$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = f(\lambda). \quad (3)$$

Bu yerda $q(x) \in C[0, 1]$ - haqiqiy funksiya bo'lib, chegaraviy shartdagi $f(\lambda)$ funksiya quyidagi tasvirga ega:

$$f(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\lambda - c_k} \quad (4)$$

$$a \geq 0, \quad b_k \geq 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c_1 < c_2 < \dots < c_N, \quad N \geq 0. \quad (5)$$

Berilgan N uchun (4) ko‘rinishdagi (5) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha ratsional funksiyalarni R_N orqali belgilaymiz.

Ta’rif. Agar $f : C \rightarrow C$ kompleks o‘zgaruvchili funksiya uchun ushbu

$$1) \quad \overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

$$2) \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) \geq 0$$

shartlar bajarilsa, $f(z)$ funksiyaga Herlots-Nevanlinna funksiyasi deyiladi.

Lemma 1. Qutb maxsus nuqtalari haqiqiy va oddiy bo‘lgan ratsional funksiya Herlots-Nevanlinna funksiyasi bo‘lishi uchun biror N topilib, $f(z) \in R_N$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$$R_N^+ = \{f(z) \in R_N, a > 0\}, \quad R_N^0 = \{f(z) \in R_N, a = 0\}.$$

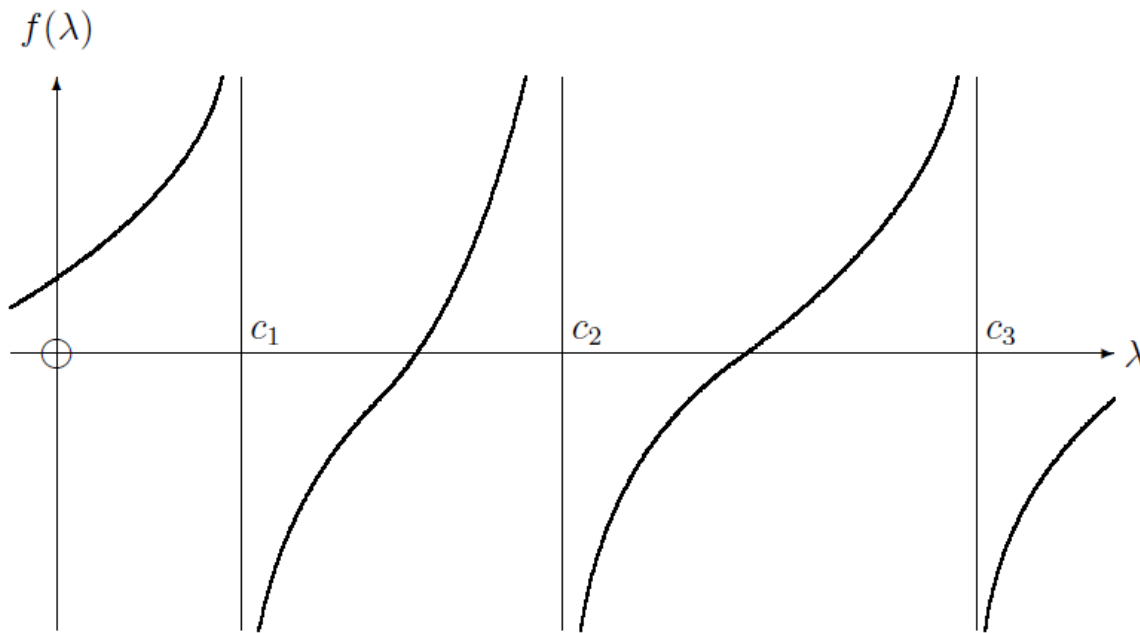
Lemma 2. $f(z) \in R_N$ bo'lsin. U holda

- 1) $f(\lambda)$ chekli bo'lsa, $f'(\lambda) > 0$ bo'ladi;
- 2) $\lim_{\lambda \rightarrow c_k + 0} f(\lambda) = -\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow c_k - 0} f(\lambda) = +\infty$;
- 3) $f(z) \in R_N^+$ bo'lsa, u holda $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = -\infty$;
- 4) $f(z) \in R_N^0$ bo'lsa, $f(\lambda) \uparrow b$, $(\lambda \rightarrow \infty)$ va $f(\lambda) \downarrow b$, $(\lambda \rightarrow -\infty)$.

Misol. $f(z) \in R_3^0$ bo'lsa, u holda

$$f(\lambda) = b - \frac{b_1}{\lambda - c_1} - \frac{b_2}{\lambda - c_2} - \frac{b_3}{\lambda - c_3}$$

bo'ladi. Bu yerda $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, $c_1 < c_2 < c_3$. Bu funksiya grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



$f(\lambda) \in R_N$ funksiya va $\mu < c_1$ son berilgan bo'lsin. Ushbu

$$F(\lambda) = -\frac{\lambda - \mu}{f(\lambda) - f(\mu)} - f(\mu) \quad (6)$$

funksiyani kiritib olamiz. Bu funksiyaning uzluksizligi bo'yicha davom qildiramiz:

$$F(c_k) = -\frac{c_k - \mu}{f(c_k) - f(\mu)} - f(\mu) = -f(\mu), \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$F(\mu) = -\frac{1}{f'(\mu)} - f(\mu).$$

Izoh. Agar $f(\lambda) \in R_N$ bo'lsa, u holda $F(\lambda) \in R_M$, ya'ni

$$F(\lambda) = A\lambda + B - \sum_{k=1}^M \frac{B_k}{\lambda - C_k}, \quad (7)$$

$A \geq 0, B_k \geq 0, B \in R, C_1 < C_2 < \dots < C_M$ ekanligini isbotlaymiz. Bu yerda M soni a ga bog'liq ravishda N yoki $N-1$ bo'ladi, aniqrog'i quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 1. 1) Agar $f(\lambda) \in R_N^+$ bo'lsa, u holda $F(\lambda) \in R_N^0$ bo'lib,

$$\mu < c_1 < C_1 < c_2 < \dots < c_N < C_N$$

bo'ladi;

2) Agar $f(\lambda) \in R_N^0$ bo'lsa, u holda $F(\lambda) \in R_{N-1}^+$ bo'lib,

$$\mu < c_1 < C_1 < c_2 < \dots < C_{N-1} < c_N$$

bo'ladi.

Izoh. $f(\lambda)$ dan $F(\lambda)$ ga o'tish amalini bir qancha marta qo'llab $R_N \rightarrow R_0^0$ akslantirishni ko'rsatish mumkin. Keyinchalik bu fikrni ishlatamiz.

2-§. Xos qiymatlarning mavjudligi va xos funksiyalarning ossillyatsiya xossalari

Teorema 2. (1)-(3) masalaning xos qiymatlari haqiqiy.

Teorema 3. (1)-(3) masalaning xos qiymatlari oddiy (karrasiz).

Teorema 4. (1)-(3) masala cheksizta xos qiymatga ega. Bu xos qiymatlarni

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

orqali belgilasak, ular ∞ ga intiladi. Bunda $\lambda_0 < c_1$ bo'ladi.

Teorema 5. (1)-(3) masalada b ning qiymati kamaysa, c_k va $q(x)$ ning qiymatlari ortsa, λ_j larning har biri ortadi. Agar $a > 0$ bo'lib, a kamaysa va b_k ortsa har bir musbat $\lambda_j > c_k$ ortadi.

λ_n^D orqali quyidagi masalaning xos qiymatlarini belgilaymiz:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0)\cos\alpha = y'(0)\sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \pi),$$

$$y(1) = 0.$$

Endi $\{c_j\}$, $j=1, 2, \dots, N$, $\{\lambda_n^D\}$, $n=1, \dots, \infty$ sonlardan bitta to'plam tuzamiz va uning elementlarini kamaymaydigan tartibda λ_n^{cD} orqali belgilaymiz. Agar $c_j = \lambda_k^D$ bo'lsa, λ_n^{cD} ikki karrali deb hisoblaymiz.

k_j orqali $c_i \leq \lambda_j$ shartni qanoatlantiradigan c_i lar sonini belgilaymiz.

Teorema 6. 1) λ_i va λ_j^{cD} ketma-ketliklar quyidagi ma'noda almashinib keladi: $\lambda_0 < \lambda_0^{cD} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{cD} \leq \dots$;

2) Ushbu $c_{k_j} \leq \lambda_j < c_{k_j+1}$ qo'sh tengsizliklar bajariladi;

3) Agar $\lambda_{-1}^D = -\infty$ deb olsak, ushbu $\lambda_{j-1-k_j}^D < \lambda_j \leq \lambda_{j-k_j}^D$ qo'sh tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bu teoremaga asoslanib, biz xos funksiyalar uchun ossillyatsiya xossasini keltirib chiqarishimiz mumkin. Agar $\lambda \in (\lambda_{i-1}^D, \lambda_i^D]$ bo'lsa, u holda (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi noldan farqli yechimi $(0,1)$ oraliqda i ta ildizga ega bo'ladi.

Natija. λ_j ga mos keluvchi xos funksiyaning $(0,1)$ oraliqdagi ildizlar sonini ω_j orqali belgilaymiz. Bu holda $\omega_j = j - k_j$ bo'ladi, hususan $\omega_0 = 0$ bo'ladi. Agar $\lambda_j > c_N$ bo'lsa, u holda $\omega_j = j - N$ bo'ladi.

3-§. Krum-Kreyn almashtirishi

Bu paragrafda (1)-(3) masalani xos qiymatlaridan ko'pchiligini saqlagan holda boshqa bir Shturm-Liuvill masalasiga o'tkazamiz. Natijada, hosil bo'ladigan Shturm-Liuvill masalasida $f(\lambda)$ o'rnida oldingi paragrafda o'rganilgan $F(\lambda)$ bo'ladi. Bu almashtirishni bir necha marta qo'llab, klassik Shturm-Liuvill masalasini hosil qilamiz.

Hosil bo'ladigan klassik Shturm-Liuvill masalasining xos qiymatlari eng oldingi Shturm-Liuvill masalasining xos qiymatlaridan cheklitaga farq qiladi holos. (1)-(3) masalaning $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ xos qiymatlariga mos keluvchi xos funksiyalarini $y_0(x), y_1(x), \dots$ orqali belgilaymiz.

μ orqali quyidagi shartni qanoatlantiruvchi biror sonni belgilaymiz: agar $\alpha > 0$ bo'lsa, $\mu = \lambda_0$, agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $\mu < \lambda_0$.

$\omega(x, \mu)$ orqali (1) tenglamaning $\lambda = \mu$ bo'lgandagi $\omega(1) = 1$, $\omega'(1) = f(\mu)$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. Quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz

$$z = \frac{\omega'(x, \mu)}{\omega(x, \mu)}, \quad \hat{q}(x) = q(x) - 2z'(x).$$

$\gamma \in [0, \pi)$ sonni shunday olamizki, bunda agar $\alpha = 0$ bo'lsa $\operatorname{ctg} \gamma = -z(0)$, agar $\alpha > 0$ bo'lsa, $\gamma = 0$.

Teorema 7. Quyidagi

$$-y'' + \hat{q}(x)y = \lambda y, \tag{8}$$

$$\frac{y'(0)}{y(0)} = \operatorname{ctg} \gamma, \tag{9}$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = F(\lambda) \tag{10}$$

chegaraviy masalaning xos qiymatlari λ_j sonlar bilan, xos funksiyalari esa $U_j(x) = y'_j(x) - z(x)y_j(x)$ funksiyalar bilan ustma-ust tushadi. Bu yerda $\alpha > 0$ bo'lsa, $j \geq 1$ deb hisoblanadi, $\alpha = 0$ bo'lsa, $j \geq 0$ deb olinadi.

Bu teoremani bir necha marta qo'llab quydagi natijaga kelamiz.

Natija. (1)-(3) Shturm-Liuvill masalasi berilgan bo'lib, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ bu masalaning xos qiymatlari bo'lsin. Bu yerda $f(\lambda) \in R_N$. U holda shunday

$$-y'' + \tilde{q}(x)y = \lambda y,$$

$$\frac{y'(0)}{y(0)} = \operatorname{ctg} \alpha_0, \quad \frac{y'(1)}{y(1)} = \operatorname{ctg} \alpha_1$$

Shturm-Liuvill masalasi mavjudki, uning $\mu_0 < \mu_2 < \dots$ xos qiymatlari uchun quyidagilardan biri bajariladi:

$$1) \alpha > 0, \quad f \in R_N^+ \text{ bo'lsa, } \alpha_0 = 0, \quad \mu_j = \lambda_{j+N+1};$$

$$2) \alpha = 0, \quad f \in R_N^0 \text{ bo'lsa, } \alpha_0 = 0, \quad \mu_j = \lambda_{j+N}$$

$$3) \text{ boshqa hollarda, } \alpha_0 > 0, \quad \mu_j = \lambda_{j+N}.$$

4-§. Xos qiymatlarning asimptotikasi

Bu paragrafda klassik Shturm-Liu vill masalasi xos qiymatlarining asimptotikasi yordamida (1)-(3) masala xos qiymatlarining asimptotikasini keltirib chiqaramiz.

Teorema 9. 1) Agar (1)-(3) masalada $f(\lambda) \in R_N^0$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$\lambda_j = \begin{cases} (j - N)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx - 2b + 2ctg \alpha + o\left(\frac{1}{j}\right), & \alpha \neq 0 \\ \left(j + \frac{1}{2} - N\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx - 2b + o\left(\frac{1}{j}\right), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (11)$$

asimptotik formula o'rinli bo'ladi.

2) Agar (1)-(3) masalada $f(\lambda) \in R_N^+$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$\lambda_j = \begin{cases} \left(j - \frac{1}{2} - N\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{a} + o\left(\frac{1}{j}\right), & \alpha \neq 0 \\ (j - N)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx + \frac{2}{a} + o\left(\frac{1}{j}\right), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (12)$$

asimptotik formula o'rinli bo'ladi.

E`TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!!!