

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“Funktsiyalar nazariyasi” KAFEDRASI
5130100-MATEMATIKA TA'LIM YO'NALISHI
302-GURUHI TALABASI

Quromboyeva Gulruxsorning

Trigonometrik funksiyalar

mavzusida yozgan

KURS ISHI

Topshirdi: _____ *Quromboyeva G.*

Qabul qildi: _____ *Matyoqubov Z.*

REJA

1. Trigonometrik funksiyalar.
2. Teskari trigonometik funksiyalar.

1- Trigonometrik funksiyalar.

1-Ta'rif .

Ushbu

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

ko`rinishdagi funksiyalar trigonometrik funktsiyalar deyiladi. $W = \sin z$ va

$$W = \cos z$$

funksiyalar butun kompleks tekislik C da aniqlangan, $W = \operatorname{tg} z$ funksiya

$$C \setminus \left\{ z \in C : z = k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

to`plamda $W = \operatorname{ctg} z$ funksiya esa

$$C \setminus \{ z \in C : z = k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

to`plamda aniqlangan.

$$\text{Quyidagiga} \quad \operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Sg} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad \operatorname{Sth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

aniqlangan funksiyalar giperbolik funksiyalar deyiladi. Trigonometrik hamda giperbolik funksiyalar o`zaro quyidagi  $\cos z = \operatorname{Ch} z$ ,  $\sin z = i \operatorname{Sh} z$ ,  $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{Ch} z = \cos iz$ ,  $\operatorname{Sh} z = -i \sin iz$ ,  $\operatorname{Cth} z = i \operatorname{Ctg} z$  munosabatlar bilan bog`langan. Biz ulardan birining, masalan $\operatorname{Sh} z = -i \sin iz$ bo`lishini ko`rsatamiz:

$$\sin iz = \frac{1}{2i} (e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2i} (e^{-z} - e^z) = -\frac{1}{i} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\frac{1}{i} \operatorname{Sh} z$$

(1) va (2) munosabatlardan foydalanib topamiz:

(1)

demak

$$Shz = -i \sin iz$$

biz quyida trigonometrik funksiyalarning ba'zi xossalari keltiramiz

1. Ushbu

$$1) \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$2) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

$$3) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$4) \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$$

$$5) \sin(z + \pi) = -\sin z \quad \cos(z + \pi) = -\cos z,$$

bu formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. $W = \sin z$ va $W = \cos z$ funksiyalarning ta'riflaridan foydalanib topamiz:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

kolgan tengliklar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2. $W = \sin z$ toq funksiya, $W = \cos z$ esa juft funksiya bo'ladi.

Bu xossaning o'rinli bo'lishini $W = \sin z$, $W = \cos z$ funksiyalarning ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi.

Trigonometrik funksiyalar davriy bo'lib, $W = \sin z$, $W = \cos z$ funksiyalarning davri 2π ga, $W = \operatorname{tg} z$, $W = \operatorname{ctg} z$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Haqiqatan, $W = \sin z$, funksiya ta'rifi hamda $e^{2\pi i} = 1$ bo'lishini etiborga olib topamiz:

$$W(z + 2\pi) = \sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{iz} e^{2\pi i} - e^{-iz} \frac{1}{e^{2\pi i}} \right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z = W(z)$$

demak,

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$

bu esa $W = \sin z$ davriy funksiya va uning davri 2π ga teng bo'lishini

bildiradi.

$$W = \operatorname{tg} z$$

funksiya ta'rifidan foydalanib ,ushbu

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = -i \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = -i \frac{e^{i\pi} (e^{iz} - e^{-iz} e^{-2\pi i})}{e^{i\pi} (e^{iz} + e^{-iz} e^{-2\pi i})} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z \quad (2)$$

tenglikka kelamiz.

$$\text{Demak } \operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z .$$

Shunga o`xshash  $W = \cos z, W = C \operatorname{tg} z$  funksiyalarning davriy funksiya ekanligi ko`rsatiladi.

1. $W = \sin z$ va $W = \cos z$ funksiyalar $\forall z \in C$ da hosilaga ega bo`lib  $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$  bo`ladi .

$$W = \operatorname{tg} z$$

funksiya

$$\forall z \in C \setminus \left\{ z \in C : z = k\pi + \frac{\pi}{2} : k = 0, \pm 1, \dots \right\}$$

da hosilaga ega bo`lib

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad (3)$$

bo`ladi .

$$W = c \operatorname{tg} z$$

funksiya

$$\forall z \in C \setminus \{z \in C : z = k\pi : k = 0, \pm 1, \dots\}$$

da hosilaga ega bo`lib,

$$(c \operatorname{tg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \quad (4)$$

bo`ladi .

Haqiqatan ham,

$$(\sin)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{1}{2i} (e^{iz} \cdot i + e^{-iz} \cdot i) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^{iz} \cdot i - e^{-iz} \cdot i) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

xuddi shunga o`xshash (3) va (4) formulalarning to`g`riligi ko`rsatiladi .

Izoh. Xaqiqiy argumentli $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalarning qiymatlari $[-1,1]$ kesmada bo`lishini bilamiz.

Kompleks argumentli $\sin z$, $\cos z$ funksiyalarning qiymatlari modul jixatdan birdan katta bo`lishi ham mumkin:

$$|\cos i| = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} > 1$$

Tayanch iboralar: Trigonometrik funksiya, giperbolik funksiya, trigonometrik funksiyalarni davriyligi .

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т.1. М. Наука, 1985
2. Худойберганов Г., Ворисов А.К, Мансуров Х.Т., Комплекс анализ. Т. Университет 1998.
3. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Туйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ) 3 қисм. “Ўзбекистон” 2000 й.
4. Волковский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., “Наука” 1975.
5. Сирождинов С.Х, Салохитдинов М.С., Максудов Ш. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Т. “Ўқитувчи” 1979.
6. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного М., “Наука” 1977.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекции по ТФКП. М., “Наука” 1984.
8. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного М., “Наука” 1972.
9. *Интернет-справочник по математическому анализу и ТФКП*
<http://allmath.ru/highermath/mathanalysis/matan/matan.htm>