

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА «ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ»**

Самостоятельная работа

По предмету: «Информационные системы»

На тему: «Формальные системы»

Выполнила: группы ҚТЭТ -15
Тухтабаева М.А.

Принял: Фозылов А.Ш.

Ташкент 2016

Содержание

1. Предметная область.
2. Основные объекты предметной области и отношения на множестве этих объектов.
3. Семантика отношений. Примеры.
4. Свойства отношений.
5. Операции на множестве объектов предметной области. Их семантика. Примеры.
6. Разработка алгебраической системы.
7. Свойства операций.
8. Тип и класс полученной алгебраической системы.
9. Формальная логическая система с аксиоматикой свойств операций. Примеры логического вывода.
10. Программа, демонстрирующая отношения и основные операции алгебраической системы. Пример выполнения программы.

1. Предметная область.

В качестве предметной области будем рассматривать пазл.

2. Основные объекты предметной области и отношения на множестве этих объектов. Примеры.

Основным объектом предметной области является картеж следующего вида:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

где a_1 – верхняя сторона пазла;

- a_2 - правая сторона пазла;

- a_3 - нижняя сторона пазла;

- a_4 - левая сторона пазла;

Значения a_1, a_2, a_3, a_4 определяются следующим образом (в зависимости от элемента на этой стороне):

- $a_i = -1$ если на стороне вогнутость

- $a_i = 1$ если на стороне выпуклость

- $a_i = 0$ если на стороне нет ни выпуклости ни вогнутости (пустая сторона)

Запись A_2 означает, что используется 2я сторона пазла A , т.е.



$$A_2 = a_2.$$

Пример 1.

$(-1, 0, 1, 1)$, т.е.

В качестве отношений возьмем бинарные отношения меньше ($<$), больше ($>$) и равенство ($=$) элементов по:

- количеству выпуклостей ($>$; $<$; $=$)

- количеству вогнутостей ($>$; $<$; $=$)

- по общему числу ($=$)

3. Семантика отношений.

Введем понятие *веса* и *модуля* пазла:

Определение 1. *Весом выпуклостей* пазла A называется величина $V_{вп}(A)$, равная количеству сторон при $a_i = 1, i=\overline{1..4}$.

Определение 2. *Весом вогнутостей* пазла A называется величина $V_{вг}(A)$, равная количеству сторон при $a_i = -1, i = \overline{1..4}$.

Определение 3. *Модулем* пазла A называется величина $M(A)$, определяемая следующим уравнением:

$$M(A) = \sum_{i=1}^4 q_i b_i,$$

где q_i и b_i :

$$q_i = 10^{4-i}; \quad b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i = -1 \\ 0, & \text{если } a_i = 0 \\ 2, & \text{если } a_i = 1 \end{cases} \quad \text{где } i = \overline{1..4}$$

Отношение меньше (больше).

Определение 4. Пазл A меньше (больше) пазла B по количеству выпуклостей (по количеству вогнутостей) если вес выпуклостей (вогнутостей) A меньше (больше) веса выпуклостей (вогнутостей) пазла B , т.е.

$A <'' B$ ($A >'' B$), если $V_{вп}(A) < V_{вп}(B)$ ($V_{вп}(A) > V_{вп}(B)$)

$[A <' B$ ($A >' B$), если $V_{вг}(A) < V_{вг}(B)$ ($V_{вг}(A) > V_{вг}(B)$)].

Отношение больше является обратным к отношению меньше, т.е. если $A > B$, то $B < A$ и наоборот, если $A < B$, то $B > A$.

Отношение равенство.

Определение 5. Пазл A равен пазлу B по количеству выпуклостей (вогнутостей), если вес выпуклостей (вогнутости) пазла A равен весу выпуклостей (вогнутости) пазла B , т. е.

- $A =' B$ по количеству вогнутостей, если $V_{вг}(A) = V_{вг}(B)$

- $A ='' B$ по количеству выпуклостей, если $V_{вп}(A) = V_{вп}(B)$

Определение 6. Пазл A равен пазлу B , если равны модули пазлов, т.е. $A=B$, если $M(A)=M(B)$.

Пример.

$A = (-1, 1, 0, 0)$,

$$B = (0, 1, 1, -1);$$

- $V_{\text{вп}}(A) = 1$; $V_{\text{вп}}(B) = 2$; $V_{\text{вп}}(A) < V_{\text{вп}}(B)$, значит $A <' B$ по количеству выпуклостей;

- $V_{\text{вг}}(A) = 1$; $V_{\text{вг}}(B) = 1$; $V_{\text{вг}}(A) = V_{\text{вг}}(B)$, значит $A ='' B$ по количеству вогнутостей;

- $M(A) = 1200$; $M(B) = 221$; $M(A) \neq M(B)$, значит $A \neq B$.

4. Свойства отношений.

Отношение больше (меньше)[\[1\]](#).

1) Отношение **антирефлексивно**.

Доказательство. Отношение $A <' A$ ($A >' A$) не выполняется ни для какого пазла A , т. к.

$V_{\text{вг}}(A) = V_{\text{вг}}(A)$ и не может быть, что $V_{\text{вг}}(A) < V_{\text{вг}}(A)$ ($V_{\text{вг}}(A) > V_{\text{вг}}(A)$).

2) Отношение **антисимметрично**.

Доказательство. Если $A <' B$ ($A >' B$) то $V_{\text{вг}}(A) < V_{\text{вг}}(B)$ ($V_{\text{вг}}(A) > V_{\text{вг}}(B)$) \Rightarrow условие $V_{\text{вг}}(A) > V_{\text{вг}}(B)$ ($V_{\text{вг}}(A) < V_{\text{вг}}(B)$) неверно, отсюда неверно, что $A >' B$ ($A <' B$).

3) Отношение **транзитивно**.

Доказательство. Пусть $A <' B$, $B <' C$, тогда $V_{\text{вг}}(A) < V_{\text{вг}}(B)$, $V_{\text{вг}}(B) < V_{\text{вг}}(C) \Rightarrow V_{\text{вг}}(A) < V_{\text{вг}}(C)$, т. о. $A <' C$ (Аналогично для отношения больше).

Отношение равенство[\[2\]](#).

1) Отношение **рефлексивно**.

Доказательство. Для любого пазла A $M(A) = M(A) \Rightarrow A = A$.

2) Отношение **симметрично**.

Доказательство. Пусть $A = B$, тогда $M(A) = M(B) \Rightarrow M(B) = M(A) \Rightarrow B = A$.

3) Отношение **транзитивно**.

Доказательство. Пусть $A = B$, $B = C$, тогда $M(A) = M(B)$, $M(B) = M(C) \Rightarrow M(A) = M(C) \Rightarrow A = C$.

Отношение равенства является отношением эквивалентности.

5. Операции на множестве объектов предметной области. Их семантика.

Будем рассматривать две бинарные операции: наложение (+) и склеивание (*); унарная операция: инверсия (()-1) и нульарные: операции слабой (0) и сильной (1) единицы.

Операция слабая единица - 0.

Данная операция - константа 0 представляет - собой картеж вида (0,0,0,0)

Операция сильная единица - 1.

Данная операция - константа 1_i - представляет собой один из картежей:

- (1, 0, -1, 0), при $i=1$;
- (0, 1, 0, -1), при $i=2$;
- (-1, 0, 1, 0), при $i=3$;
- (0, -1, 0, 1), при $i=4$;

где i определяет сторону с элементом «выпуклость».

Операция наложения.

Данная операция накладывает один пазл на другой, в результате чего получается новый пазл. Новый пазл образуется по следующему правилу:

Правило боковых граней:

если на накладываемой стороне 1го пазла находится выпуклость, а у 2го пазла на соответствующей стороне - вогнутость, то результатом будет пустая сторона

если на сторонах обоих пазлов находятся выпуклость (или вогнутость), то в результате получится сторона с выпуклостью (вогнутостью)

если сторона одного из пазлов является пустой, то результирующая сторона будет иметь тот же элемент, что и сторона второго пазла

вышесказанное можно отобразить формулами:

$$C = A + B:$$

$$c_i = a_i + b_i$$

$$c_i = \begin{cases} c_i'/2, & \text{если } |c_i'|=2 \\ c_i' & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $i = \overline{1..4}$

Операция наложения справедлива для любых пазлов.

Операция имеет вид:

$$C = A + B.$$

Примеры.

$$1) A = (0, 0, -1, 1),$$



$$B = (-1, 1, -1, -1).$$

$$A + B = C = (-1, 1, -1, 0), \quad \text{т.е.}$$

Операция склеивания.

Данная операция склеивает два пазла для получения нового.

Операция выполняется не для всех пазлов, а только для тех, которые удовлетворяют *условиям операции*:

- склеиваемые стороны на должны быть пустыми и должны иметь противоположные элементы (т.е., например, 1й пазл – вогнутость и 2й пазл – выпуклость);

- разность между номерами склеиваемых сторон должна быть по модулю равна 2 (т.е., например, 1й пазл – 2 и 2й пазл – 4: $|2 - 4| = 2$);

Новый пазл получается следующим образом:

- звездочкой (*) указываются номера склеиваемых сторон;
- элементы сторон, противоположных склеиваемым сторонам, не изменяются;
- элементы двух других сторон образуются по *правилу боковых сторон*;

$$\text{Операция имеет вид: } C = A1 * B3 = (a1*, a2, a3, a4) * (b1, b2, b3*, b4)$$

Пример.

$$A = (0, 1, -1, 0),$$

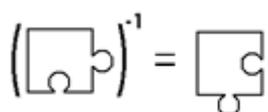
$$B = (-1, 1, 0, -1).$$

$$A_2 * B_4 = (0, 1^*, -1, 0) * (-1, 1, 0, -1^*) = (-1, 1, -1, 0), \text{ т.е.}$$



Операция инверсия.

Данная операция инвертирует пазл, т. е. заменяет выпуклости вогнутостями и наоборот, в результате чего получается новый пазл. Операция имеет вид: $C = A^{-1}$.



Пример.

$$A = (0, 1, -1, 0)$$

$$A^{-1} = C = (0, -1, 1, 0), \text{ т. е.}$$

6. Алгебраическая система.

Определение 7. Система трех множеств $\mathcal{E} = \langle A, \Omega, R \rangle$ называется *алгебраической системой*, где A – множество однотипных элементов, называемое носителем алгебры или базовым множеством, Ω – множество операций с областью определения и областью значений в множестве A , R – множество отношений на элементах множества A .

Множество A представляет собой множество всех пазлов, представленных в виде картежей, описанных выше.

Сигнатура алгебры $\Omega = \{ +, *, -1(), 0, 1 \}$.

$R = \{ <, <', <'', >, >', >'', =, =', ='' \}$

Согласно определению операций, мы получим пазл в виде картежа, описанного выше, значит мы получим элемент базового множества, что говорит о замкнутости операций.

7. Свойства операций.

Свойство единицы:

$A + A^{-1} = A^{-1} + A = 1$ – сильная единица:

$A_i * 0 = 0 * A_i = A$, $i = \overline{1..4}$ – слабая единица;

Операция наложения.

1) Операция **идемпотентна**, поскольку для данной операции справедливо утверждение

$$A + A = A;$$

2) Операция **коммутативна**, поскольку для данной операции справедливо утверждение

$$A + B = B + A;$$

3) Операция **не ассоциативна**, поскольку для нее справедливо утверждение

$$A + (B + C) \neq (A + B) + C.$$

Свойства по отношению к операции склеивание:

4) Операция **не дистрибутивна слева**, т. к. $A + (B * C) \neq (A + B) * (A + C)$

5) Операция **не дистрибутивна справа**, т. к. $(A * B) + C \neq (A + C) * (B + C)$

Операция склеивание.

Поскольку условие операции не выполняется для всех пазлов, то операция склеивания:

1) **не идемпотентна**

2) **не коммутативна**

3) **не ассоциативна**

и по отношению к операции наложения:

4) **не дистрибутивна слева**

5) **не дистрибутивна справа**

8. Тип и класс полученной алгебраической системы.

Типом алгебраической системы является следующее множество

$$\{ 0(0), 1(0), -1(1), +(2), *(2) \}$$

Алгебра, содержащая бинарную операцию, есть группоид. Алгебра, содержащая бинарную операцию и единицу, называется группоидом с единицей. Алгебра $(A, +(2), 1(0))$ является моноидом.

Алгебра $(A, *(2), 1(0))$ является группоидом с единицей.

9. Формальная логическая система с аксиоматикой свойств операций.

Построим формальную логическую систему на основе имеющейся алгебраической системы.

Предметные константы:

Константы 1 и 0 – соответствуют картежам, описанным выше.

Множество переменных:

$\{A_1, A_2, \dots, A_{81}\}$ – множество картежей, обозначенных латинскими буквами. Вид картежа описан ранее.

Предикатные символы:

- Предикат W' (A, B) соответствует отношению меньше по количеству выпуклостей алгебраической системы; выполняется, если $A <' B$.

- Предикат W'' (A, B) соответствует отношению меньше по количеству вогнутостей алгебраической системы; выполняется, если $A <'' B$.

- Предикат S' (A, B) соответствует отношению больше по количеству выпуклостей алгебраической системы; выполняется, если $A >' B$.

- Предикат S'' (A, B) соответствует отношению больше по количеству вогнутостей алгебраической системы; выполняется, если $A >'' B$.

- Предикат R' (A, B) соответствует отношению равенства по количеству выпуклостей алгебраической системы; выполняется, если $A =' B$.

- Предикат R'' (A, B) соответствует отношению равенства по количеству вогнутостей алгебраической системы; выполняется, если $A ='' B$.

- Предикат R (A, B) соответствует отношению равенства алгебраической системы; выполняется, если $A = B$.

Функциональные символы:

- f_+ соответствует операции наложения.

- f_2^+ (A, B) ó A + B.

- F^* соответствует операции склеивания.

- f_2^* (A_i, B_j) ó A_i * B_j, $i, j = \overline{1..4}$, $|i - j| = 2$.

- f_{-1} соответствует операции инверсия.

- f_{-1} (A) ó (A)₋₁.

Синтаксис термов:

Терм - всякая предметная константа, предметная переменная либо функциональная форма.

Предикатная форма – предикатная константа, соединяющаяся с подходящим числом терм:

$$P(t_1, \dots, t_n);$$

$$P().$$

Если f_n – функциональный символ, t_1, t_2, \dots, t_n – термы, то $f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ также терм.

Понятие формулы в логике определим следующим образом:

- всякая предикатная форма есть формула;
- если A – формула, то $\neg A$ тоже формула;
- если A и B – формулы, то $A \vee B$, $A * B$ также формулы;
- если A – формула и $x \in A$ – переменная, то $\forall x A$ и $\exists x A$ – формулы;
- других формул нет.

Для данной формальной логической системы справедливы следующие аксиомы:

1. $\exists x (f_+(A, x), A)$,
2. $\exists x (f_+(A, A), A)$,
3. $\forall i (i = \overline{1..4}) \exists x (f_*(A_i, f_{-1}(A_i)), 1i)$,
4. $\exists x (f_+(A, B), f_+(B, A))$,
5. $\forall (A \mid f_{-1}(A_i) = 1i, i = \overline{1..4}) \exists x (f_*(A_i, 1i), A_i)$

Формула общезначима (является тавтологией), если она истинна в любой интерпретации.

Формула невыполнима (противоречива, тождественно ложна), если она при всех интерпретациях является ложной.

Множество теорем определим как множество общезначимых формул.

Приведем примеры логического вывода:

1) Пусть A, B, C – любые формулы, тогда выводами являются следующие последовательности:

$$a) A \dot{\vee} (B \dot{\vee} A);$$

$$б) A \dot{\vee} (B \dot{\vee} A), A \dot{\vee} (B \dot{\vee} A);$$

$$в) A \dot{\vee} (A \dot{\vee} A), (A \dot{\vee} (B \dot{\vee} C)) \dot{\vee} ((A \dot{\vee} B) \dot{\vee} (A \dot{\vee} C))$$

г) $(\emptyset A \dot{\equiv} \emptyset B) \dot{\equiv} (B \dot{\equiv} A), B \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} B), \emptyset A \dot{\equiv} (\emptyset B \dot{\equiv} \emptyset A)$;

д) $(A \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} A)) \dot{\equiv} ((A \dot{\equiv} A) \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} A)), (A \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} A)), (A \dot{\equiv} A) \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} A)$:

$$\frac{(A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset A) \supset (A \supset A)), (A \supset (A \supset A)), (A \supset A) \supset (A \supset A)}{(A \supset A) \supset (A \supset A)}$$

2) Выведем: $\vdash A(u) \dot{\equiv} \exists u A(u)$, где $A(u)$ – любая предикатная формула.

Формула $\exists u \emptyset A(u) \dot{\equiv} \emptyset A(u)$, согласно аксиоме $\exists x F(x) \dot{\equiv} F(y)$, выводима.

Формула $(p \dot{\equiv} \emptyset q) \dot{\equiv} (q \dot{\equiv} \emptyset p)$ – тавтология и следовательно выводима. Из этого следует, что предикатная формула $(A \dot{\equiv} \emptyset B) \dot{\equiv} (B \dot{\equiv} \emptyset A)$, где A, B – любые формулы, выводима в исчислении предикатов. Тогда выводима и формула $(\forall u \neg A(u) \supset \neg A(u)) \supset (A(u) \supset \neg \forall u \neg A(u))$. Отсюда по правилу заключения $\vdash A(u) \dot{\equiv} \exists u \emptyset A(u)$, то есть $\vdash A(u) \dot{\equiv} \exists u A(u)$.

Также можно использовать и следующие правила вывода:

$\vdash A \dot{\equiv} B, \vdash B \dot{\equiv} C$, то $\vdash A \dot{\equiv} C$

$A \vdash B, C \vdash D, B, D \vdash E$, то $A, C \vdash E$

$\vdash A \dot{\equiv} (B \dot{\equiv} C)$, то $\vdash B \dot{\equiv} (A \dot{\equiv} C)$

$\vdash A \dot{\equiv} (B \dot{\equiv} C)$, то $A + B \dot{\equiv} C$

$\vdash A + B \dot{\equiv} C$, то $\vdash A \dot{\equiv} (B \dot{\equiv} C)$

\vdash - символ « выводимости »

10. Блок-схема программы, демонстрирующей отношение и основные операции алгебраической системы. Пример выполнения программы.

Ниже приведена блок-схема программы, содержащая функции и процедуры, которые реализуют основные операции и отношения алгебраической системы, и пример работы программы, в которой пользователем задаются 2 пазла – A и B и вычисляется $C = A + B, D = A * C$, происходит сравнение A и B .

