O`ZBEKİSTAN RESPUBLİKASI XALIQ BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİGİ

A`JİNİYAZ ATINDAG`I NO`KİS MA`MLEKETLİK

PEDAGOGİKALIQ İNSTİTUTI

MATEMATIKA OQITIW METODIKASI

kafedrasi

JOQARI MATEMATİKA TİYKARLARI

(5112100 – Miynet talim bag'dari ushin isshi oqiw bag`darlamasi tiykarinda du'zilgen)

No`kis - 2016

M A Z M U N I

Kirisiw

Joqarı bilimlendiriwdin` Ma`mleketlik ta`lim standartına ko`re "Qaraqalpaq tili ha`m a`debiyatı" ta`lim bag`darında oqıtılatug`ın "Joqarı matematika tiykarları" pa`ni bag`darlaması gumanitar fakul`tetler talabaları ushın du`zilgen bolıp, algebra, vektorlar algebrası ha`m sızıqlı algebra elementleri, tegisliktegi analitikalıq geometriya, ken`isliktegi analitikalıq geometriya,matematikalıq analiz elementleri, itimallıqlar teoriyası ha`m matematikalıq statistika elementleri ha`m de pa`n tariyxı ha`m rawajlanıwının` tendentsiyası qısqa kursın o`z ishine aladı.

Pa`ndi oqıtıwdan maqset- talabalarda joqarı matematika tiykarları kursının` teoriyalıq tiykarlarına baylanıslı bilim ha`m ko`nlikpelerin qa`liplestiriwden ibarat.

Pa`nnin` wazıypaları:

- talabalarg`a matematikanın` du`n`qarastı qaliplestiriwdegi a`hmiyetin ha`m a`tirap barlıqtı u`yreniwdegi ornın ashıp beriw;

- talabalarg`a joqarı matematika kursının` teoriyalıq tiykarların u`yretiw, olarda joqarı matematika kursın o`zlestiriwi ushın za`ru`r bilim ha`m ko`nlikpelerin qa`liplestiriw;

- talabalardı sızıqlı algebra elementleri, ko`plikler teoriyası, matematikalıq logika elementleri, pikirler, 2- ha`m 3-ta`rtipli determinantlar, sızıqlı ten`lemeler sisteması, vektorlar algebrası, matritsa haqqında tu`sinik, tegislikte ha`m ken`islikte tuwrı mu`yeshli koordinatalar sistemaları, funktsiya ha`m onın` beriliw usılları, funktsiyanın` limiti, limitler haqqında teoremalar, funktsiya tuwındısının` anıqlaması, onın` geometriyalıq ha`m mexanikalıq ma`nisleri, da`slepki funktsiya ha`m anıq emes integral anıqlaması, anıq emes integraldın` qa`siyetleri, integrallaw tablitsası, anıq integral, onın` geometriyalıq ma`nisi, qasiyetleri, N`yuton-Leybnits formulası, itimallıqlar teoriyası ha`m matematikalıq statistika elementleri menen tanıstırıw.

Joqarı matematika tiykarları oqıw pa`nin o`zlestiriw protsessinde a`melge asırılatug`ın ma`seleler do`gereginde bakalavr:

-shekli ha`m sheksiz ko`plikler ha`m olardın` qa`siyetlerin, pikir ha`m predikatlardı biliw; analitikalıq geometriya elementlerin biliw; elementar funktsiyalardın` ten`lemesin, qa`siyetlerin, funktsiya limiti anıqlamasın, tuwındının` anıqlaması, geometriyalıq ha`m mexanikalıq ma`nisin, da`slepki funktsiya, anıq emes ha`m anıq integral anıqlamaların, itimallıqlar teoriyası ha`m matematikalıq statistikanın` da`slepki tu`siniklerin biliwi kerek;

- shekli ha`m sheksiz ko`plikler u`stinde a`meller orınlaw, pikirler ha`m predikatlar u`stinde logikalıq a`mellerdi orınlaw, tuwrı sızıq ten`lemelerin du`ziw, sızıqlı ten`lemeler sistemasın sheshiw, determinantlardı esaplaw, elementar funktsiyalardın` grafigin jasay alıw, en` a`piwayı limitlerdi esaplay alıw, funktsiya tuwındısın tabıw, anıq emes integrallardı taba biliw, anıq integraldı esaplaw, anıq integraldı geometriyalıq ma`selelerdi sheshiwde qollay alıw, ha`diyselerdin` itimalllıg`ın tabıw, tosınnanlıq shamalardın` sanlı xarakteristikaların esaplay alıw ko`nlikpelerine iye bolıwı kerek;

- ko`plikler u`stinde a`meller orınlaw, haqıyqıy, kompleks sanlar u`stinde a`meller orınlaw, durıs ha`m nadurıs pikirlerde ajırata alıw, eki tochka arasındag`ı aralıqtı tabıw, elementar funktsiyalardın` grafigin jasay alıw bilimlerine iye bolıwı kerek. Joqarı matematika tiykarları pa`ni ta`biiy – ilimiy pa`n esaplanıp, gumanitar fakul`tetlerde 1-, 2- semestrlerde oqıtıladı.

№1 TEMA:

Matematika pa'ninin' predmeti. Matematika rawajlani'wi'ni'n' tiykarg'i' basqi'shlari'. Ko`plik ha`m onın` elementleri, ko`plikler u`stinde a`meller ha`m olardın` qa`siyetleri. Sanli' ko'plikler, haqiyqiy sanlar ko'pligi, haqiyqiy sanni'n' moduli, qa'siyetleri ha'm geometriyaliq ma'nisi.

1. Ko'plikler ha'm olar u'stinde a'meller

Ko'plik matematikanın' da'slepki tusniklerinen bolıp, og'an o'zinen a'piwılaw tusinikler arqalı anıqlama berip bolmaydı . Sonın' ushın ko'plik tusinigi mısallar arqalı tusindiriledi. Mısalı, auditoriyadagı studentler ko'pligi, kitapxanadagı barlıq kitaplar ko'pligi, mekteptegi oqıwshılar ko'pligi, $x^2-7x+10=0$ ten'lemenin' sheshimler ko'plig'i, natural sanlar ko'pligi, Amiwdaryadag'ı balıqlar ko'pligi, Galaktikamızdag'ı planetalar ko'pligi ha'm tag'ı basqalar ko'plik tusinigine mısal bola aladı.

Berilgen bir qa`siyeti boyınsha toplang`an elementler lıynag`ına ko`plik deymiz. Elementler – bul matematikalıq obiektler,tu`sinikler,aytimlar h.t.b. Ko`pliklerdi latın alfavitinin` bas h`a`ripleri menen A,B,C,…X,Y,Z,,al elementlerin kishi h`a`ripleri menen a,b,c,…x,y,z, belgileymiz.

$$a \in A$$

Eger *ko'plikka tiyisli bolatug'ın na'rselerdin' belgisi ko'rsetilgen bolsa, onda ko'plik berilgen deb esaplanadı.* A'dette, ko'plik payda etiwshi na'rseler onın' *elementleri* dep ataladı. Ko'plik latın alipbesinin' bas haripleri, $A,B,C,...,X,Y,...$, onın' elementleri kishi haripleri, $a,v,c,d,...,x,y,z,...$ menen belgilenedi. Bazı-bir x element A ko'pliginin' elementi ekeni $x \in A$ koriniste, elementi emesligi bolsa $x \overline{\in} A$ (yamasa $x \notin A$) koriniste jazıladı ha'm birinshi jag'dayda «*x element A ga tiyisli*», ekinshi jag'dayda «*x element A ga tiyisli emes*» deb oqıladı. Mısalı, natural sanlar ko'pligin alsaq:

$$N=\{1,2,3,4,...,n,...\},$$

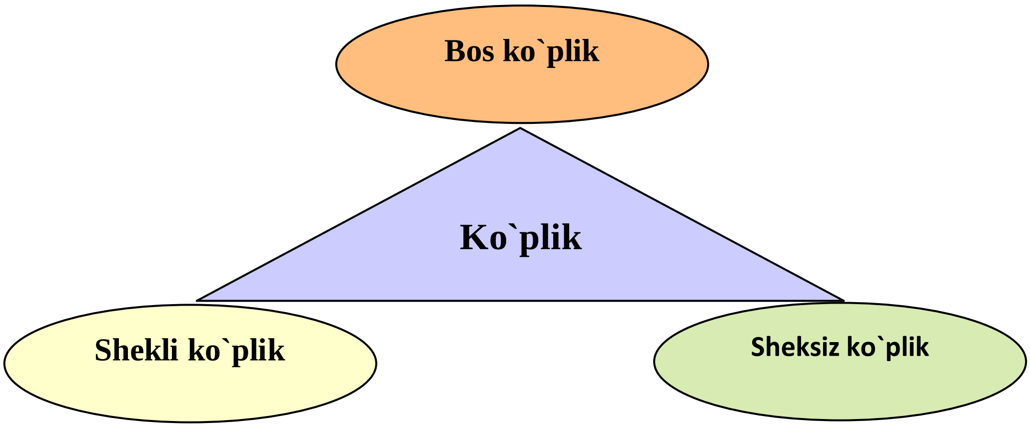
bunda $2 \in N$, $1000 \in N$ qatnaslar orınlı; $x^2+5x-14=0$ kha'mdrat ten'lemenin' sheshimleri $x_1=-7$, $x_2=2$ lerdi alsaq, $-7 \notin N$, $2 \in N$ boladı.

Ko`lik-elementler jıynag`ı

Ko'pliklerdi olardın' elementleri shekli sanda yamasa sheksiz ko'p bolıwına qarap eki klassqa ajratıw mumkin. Eger ko'plikti payda etiwshi elementler shekli sanda bolsa, bunday ko'plik *shekli ko'plik* delinedi. Ma'selen, QMU studentleri ko'pligi shekli ko'plikti payda etedi. Eger ko'pliktin' elementleri sheksiz ko'p bolsa, bunday ko'plik *sheksiz ko'plik* delinedi. Mısalı, natural, jup, on' , taq sanlar ko'plikleri sheksiz ko'pliklerge mısal bola aladı.

1.1- anıqlama. Birde elementke iye bolmag'an ko'plik *bos ko'plik* dep ataladı ha'm $\varnothing$ simvoli menen belgilenedi.

Mısalı, $x^2+1=0$ tenlemenin' haqıqıy korenler ko'pligi bos ko'plik.



1.2- anıqlama. Eger *A* ko'pliginin' ha'mme elementleri *B* ko'plikke teyisli bolsa, *A ko'plik B ko'plignin' ules ko'pligi* delinedi ha'm $A\subset B$ dep jazıladı.

Bunda «*A ko'plik B te jatadı*» yamasa «*A ko'plik B tin' ulesi*» dep oqıladı. Bul anıqlamadan to'mendegi kelip shıg'adı': $\varnothing\subset A$, $A\subset A$.

1.3- anıqlama. *Eger $A\subset B$ ha'm $B\subset A$ bolsa $A=B$ dep qabıl qılınadı.*

1.4- anıqlama. A_i $\left(i=\overline{1;n}\right)$ ko'pliklerinin' *birigiwi (qosındısı)* dep, har bir elementi bul ko'pliklerdin' en' bolmag'anda birewine tiyisli elementlerden ibarat bolg'an A ko'pligine aytıladı ha'm $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$ yamasa $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ sıyaqlı belgilenedi.

Mısal-1. $A=\{1,3,5\}$ ha'm $B=\{2,3,4\}$ berilgen bolsa, $C=A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

Mısal-2. *D={a,o,o',e,i,u,u',a',ı}* ha'm E=*{b,v,n.m,f,d}* berilgen bolsa,F=$D\cup E$=*{ a,o,o',e,i,u,u',a',ı, b,v,n.m,f,d }*.

1.5- aniqlama. A_i $\left(i=\overline{1;n}\right)$ ko'pliklerinin' *kesilispesi (ko'peymesi)* dep, har bir elementi bul ko'pliklardin' ha'mmesine tiyisli elementlerden ibarat bolg'an *A* ko'pligine aytıladı ha'm $A=A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ yamasa $A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ dep belgilenedi.

Mısal-1. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$bolsa, $C=A\cap B=\{1,3,5,7\}$ boladı.

Mısal-2. *D={a,o,o',e,i,u,u',a',ı}* ha'm E=*{b,v,n.m,f,d}* berilgen bolsa,F=$D\cap E=\varnothing$ boladı.

1.6-anıqlama. *A* ha'm *B ko'pliklernin' ayırmasi* dep, *A* ko'pliginin' *B* g'a teyisli bolmag'an barlıq elementlerinen ibarat *C* ko'pline aytıladı ha'm $C=A\backslash B$ dep belgilenedi.

Mısalı,

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},\ B=\{2,4,6,8\}\ \text{bolsa},\ C=A\backslash B=\{1,3,5\}.$$

1.7-anıqlama. *A⊃B* bolg'anda, *A\B* ayırma *B ko'pliginin' A ko'pligine shekem toltıruwshısı* delinedi ha'm B_A sıyaqlı belgilenedi.

1.8-anıqlama. Eger $A_i\left(i=\overline{1;n};n\in N,n\geq 2\right)$ ko'plikler berilgen bolıp, ha'm olardan $C=\left\{(x_1,x_2,...,x_n):x_i\in A_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$ ko'pligi duzilgen bolsa, onı $A_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *ko'pliklerinin' tıwrı (Dekart) ko'peymesi* diymiz ha'm

$$C=A_1\times A_2\times...\times A_n$$

ko'rinsinde jazıladi.

1.9-anıqlama. A\B h`a`m B\A ko`pliklerinin` birigiwine A h`a`m B ko`pliklerinin` simmetrikalıq ayırması deymiz h`a`m $A\Delta B$ dep belgileymiz yag`nıy

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Sanlı ko'plikler menen bul kurs dawamında ko'p ma'rte ushırasıwımızg'a tıwrı keledi. Sonın' ushın, to'mende olardı matematikada qabıl etilgen belgilewlerdi keltirip o'temiz:

1) $N=\{1;2;...;n;...\}$-natural sanlar;
2) $Z_0=\{0;1;2;...;n;...\}$- teris emes putin sanlar;
3) $Z=\{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$-putin sanlar;
4) $Q=\left\{\frac{m}{n}:m\in Z,\ n\in N\right\}$-ratsional sanlar;
5) *J*-irratsional sanlar;
6) $R=Q\cup J=(-\infty;+\infty)$-haqiqıy sanlar;
7) $R_0=[0;+\infty)$-teris emes haqiqıy sanlar;
8) $R^+=(0;+\infty)$ -on' haqiqıy sanlar;
9) $R^-=(-\infty;0)$-teris haqiqıy sanlar ko'plikleri.

Ko'plikler u'stindegi a'meller to'mendegi qa'siyetlerg'a iye:

1^0. *A∪B= B∪A;* 2^0. *A∩B= B∩A;*

3^0. *A∪A=A;* 4^0. *A∩A=A;* 5^0. *A∪(B∪C)=(A∪B) ∪C*

6^0. *A∩ (B∩C)=(A∩B) ∩C* Mısallar

1.1 $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$;	1.11 $A\setminus C\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$
1.2 $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$;	1.12 $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$
1.3 $C(A\setminus B)=CA\cup B$	1.13 $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\setminus(B\setminus C)$
1.4 $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$	1.14 $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
1.5 $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C$	1.15 $C(C(CA\cup B)\cup(A\cup CB))=B\setminus A$
1.6 $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$	1.16 $(A\cap B)\cup(A\cap CB)\cup(CA\cap B)=A\cup B$

Eki ko`plik ustinde a`meller

Birigiw a`meli

А ҳәм В көпликлериниң биригиўи деп берилген еки көпликтиң ең болмағанда биреўине тийисли болған элементлер жыйнағына айтамыз ҳәм $A\cup B$ деп белгилеймиз,яғный

$A\cup B=\{x, x\in A$ ямаса $x\in B\}$

Кесилисиў әмели

А ҳәм В көпликлериниң кесилисиўи деп берилген еки көпликке де тийисли болған элементлер жыйнағына айтамыз ҳәм $A\cap B$ деп белгилеймиз,яғный

$A\cap B=\{x, x\in A$ ҳәм $x\in B\}$

Алыў әмели

А көплигинен В көплигин алыў деп А көплигине тийисли ҳәм В көплигине тийисли емес элементлер жыйнағына айтамыз ҳәм A/B деп белгилеймиз, яғный

$A/B=\{x, x\in A$ ҳәм $x\notin B\}$

Dekart ko`beymesi

A h`a`m B ko`pliklerinin` dekart (tıwrı) ko`beymesi dep A h`a`m B ko`plik elementler jubinan du`zilgen ko`plikke aytamız h`a`m onı A□B dep belgileymiz,yag`nıy

A□B=$\{(x,y), x\in A$ h`a`m $y\in B\}$

Simmetrikalıq ayırma

A\B h`a`m B\A ko`pliklerinin` birigiwine A h`a`m B ko`pliklerinin` simmetrikalıq ayırması deymiz h`a`m $A\Delta B$ dep belgileymiz yag`nıy

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

2.H`aqıyqıy sanlar ko`pligi.H`aqıyqıy sannin` absolyut ma`nisi

**1^0. Salar ko`pligi.** Biz belgili, $1,2,3,...,n,...$ natural sanlar bolıp, olardı $N$ menen belgileymiz h`a`m:

$$N=\{1,2,3,...,n,...\},.$$

Usı sıyaqlı , 0, $\pm1,\pm2,\pm3,...,\pm n,...$ putin sanlar dep atalıp, olar payda etken ko`plikti $Z$ penen belgileymiz h`a`m:

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...,\pm n,...\}.$$

Eger sandı bo`lshek ko`rinisinde an`latıw mumkin bolsa (shekli yamasa sheksiz onlıq bo`lshek)

$$\frac{p}{q}: p\in Z, q\in N \qquad (1)$$

bul san ratsional san dep ataladı,h`a`mde bunday salar ko`pligin Q menen belgileymiz:

$$Q=\left\{\frac{p}{q}: p\in Z,\quad q\in N\right\}.$$

Eki ratsional sanlar qosındısı,ayırması,ko`beymesi h`a`m qatnası la`ne ratsional san boladı.

$$a+b=b+a,$$
$$ab=ba,$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a(bc)=(ab)c,$$
$$(a\pm b)c=ac\pm bc,$$

$$a+a+....+a=na,$$
$$aaa......a=a^n,$$
$$a^n a^m=a^{n+m},$$
$$a^n:a^m=a^{n-m},$$
$$(ab)^n=a^n b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Eger san (1) bo`lshek san ko`rinisinde an`latılmasa (yamasa san sheksiz periodlı emes onlı bo`lshek ko`rinisinde bolsa) bul san irratsional san dep ataladı h`a`m I menen belgilenedi:

$$I=\{\sqrt{2},\pi,e,......\}.$$

Ratsional san irratsional sang`a ten` bola almaydı.

Ratsional h`a` irratsional sanlar birgelikte h`aqıyqıy sanlar ko`pligin duzedi,h`a`m bul ko`plikti R dep belgileymiz:

$$R=(-\infty;+\infty).$$

H`ar-bir h`aqıyqıy sang`a sanlar ko`sherinde bir hoqat sa`ykes keledi h`a`m keri aytımda opınlı.

Meyli, a h`a`m b h`aqıyqıy sanlar bolıp, $a<b$ orınlı bolsın.To`mendegi sanlar ko`plikleri matematikada ko`p qollanıladı:

$$[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$$ -segment,

$$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$$ - interval,

$$[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\}$$ - yarım interval,

$$(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}$$ - yarın interval

$$(-\infty,b]=\{x\in R: \quad x\le b\},\quad [a,+\infty)=\{x\in R: x\ge a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\in R: \quad x<b\},\quad (a,+\infty)=\{x\in R: x>a\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\in R: -\infty<x<+\infty\}=R.$$

1-mısal. Berilgen

$$\sqrt{2}+7$$

sannın` irratsional san ekenligin ko`rsetin`.

◀Meyli bul san ratsional san dep oylayıq:

$$\sqrt{2}+7=r,\qquad r\in Q.$$

Bul ten`liktin` eki lag`ın kvadratqa ko`terip,to`mendegilerdi alamız:

$$2+14\sqrt{2}+49=r^2,\qquad 14\sqrt{2}=r^2-51.$$

Keyingi ten`likten

$$\sqrt{2}=\frac{r^2-51}{14}$$

kelip shıg`adı.Na`tiyjede irratsional san ($\sqrt{2}$) ratsional sang`a ( $\frac{r^2-51}{14}$ ) ten` bolıp qaladı. Bul joqarıdag`ı tastiyıg`ımızg`a qarama-qarsı. Bul qarama-qarsılıqtın` kelip shıg`ıwı $\sqrt{2}+7$ sanın ratsional san dep alg`anımızdan. Demek, $\sqrt{2}+7$ irratsional san.▶

2-mısal. 1den 1000 g`a shekemgi sanlar ishinde 3 ke eseli sanlar neshew?

◀Bizge belgili , 1 den 1000 g`a shekengi sanlar ishinde 3ke eseli bolg`an sanlar bul: birinshi ag`zası $a_1=3$ , ayırması $d=3$ h`a`mde aqırg`ı ag`zası $a_n=999$ bolg`an arifmetikalıq progressiyanı payda etedi. Onda

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

Formulag`a ko're

$$999=3+(n-1)\cdot 3$$

bolip , $n=333$ bolıwı kelip shig`adı. Demek, 1 den 1000 g`a shekemgi sanlar ishinde 3 ke eseli sanlar sanı 333 .►

2^0. H`aqıyqıy sannın` absoliyt ma`nisi. Iqtıyarıy $x \in R$ san ushın

$$|x| = \begin{cases} x, \ eger \ \ x \geq 0, \\ -x, \ eger \ \ x < 0 \end{cases}$$

Dep alıng`an $|x|$ qa, $x$ sanının` absoliyt ma`nisi deymiz.

Mısalı, $|7| = 7$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Sannın` absoliyt ma`nisi to`mendegi qasiyetlerge iye:

1) Iqtiyarıy x h`aqıyqıy san ushın

$$|x| \geq 0, \ |x| = |-x|, \ x \leq |x|, \ -x \leq |x|$$

Qatnasları orınlı,

2)eger x h`aqıyqıy sanı

$$|x| \leq a \quad (|x| < a)$$

Ten`sizlikti qanaatlandırsa, onda ol

$$-a \leq x \leq a \quad (-a < x < a)$$

Ten`sizlikti h`a`m qanaatlandıradı h`a`m keri aytımda durıs.

3) Eger x h`aqıyqıy sanı

$$|x| > a$$

Ten`sizlikti qahaatlandırsa, onda ol

$$x > a, \ x < -a$$

Ten`sizlikti h`a`m qanaatlandıradı h`a`m keri aytımda durıs.

4) Eki x h`a`m y h`aqıyqıy sanları ushın

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

b) $|x-y| \geq |x| - |y|$,

v) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

g) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

qatnasları orınlı .

5) Mına $\sqrt{x^2}=|x|$ ten`lik orınlı.

4-mısal. Eger a,b,c h`aqıyqıy sanlar ushın $a>b>c$ bolsa,

$$|a-b|+|c-a|-|b-c|$$

tabılsın.

◀ Biz bilemiz, $a>b$ bolg`anı ushın $a-b>0$ bolıp,

$$|a-b|=a-b$$

boladı. $a>c$ bolg`anı ushın $c-a<0$ bolıp,

$$|c-a|=-(c-a)=a-c$$

boladı. $b>c$ bolg`anı ushın $b-c>0$ bolıp,

$$|b-c|=b-c$$

boladı. Demek,

$$|a-b|+|c-a|-|b-c|=a-b+a-c-(b-c)=2(a-b).$$ ▶

3⁰. Qısqasha ko`beytiw formulaları.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Orta arifmetikalıq ma`nisi

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

Orta geometrikalıq ma`nisi

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}$$

Basic notions

In this introductory chapter some mathematical notions are presented rapidly, which lie at the heart of the study of Mathematical Analysis. Most should already be known to the reader, perhaps in a more thorough form than in the following presentation. Other concepts may be completely new, instead. The treatise aims at fixing much of the notation and mathematical symbols frequently used in the sequel.

1.1 Sets

We shall denote **sets** mainly by upper case letters $X, Y, \ldots$, while for the members or elements of a set lower case letters $x, y, \ldots$ will be used. When an element x is in the set X one writes $x \in X$ ('x is an element of X', or 'the element x belongs to the set X'), otherwise the symbol $x \notin X$ is used.

The majority of sets we shall consider are built starting from sets of numbers. Due to their importance, the main sets of numbers deserve special symbols, namely:

$\mathbb{N}$ = set of natural numbers
$\mathbb{Z}$ = set of integer numbers
$\mathbb{Q}$ = set of rational numbers
$\mathbb{R}$ = set of real numbers
$\mathbb{C}$ = set of complex numbers.

The definition and main properties of these sets, apart from the last one, will be briefly recalled in Sect. 1.3. Complex numbers will be dealt with separately in Sect. 8.3.

Let us fix a non-empty set X, considered as *ambient set*. A **subset** A of X is a set all of whose elements belong to X; one writes $A \subseteq X$ ('A is contained, or included, in X') if the subset A is allowed to possibly coincide with X, and $A \subset X$ ('A is properly contained in X') in case A is a *proper* subset of X, that

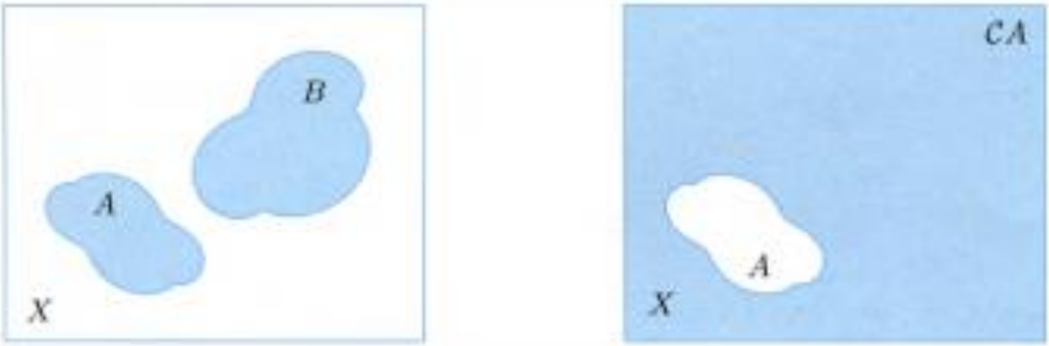


Figure 1.1. Venn diagrams (left) and complement (right)

is, if it does not exhaust the whole X. From the intuitive point of view it may be useful to represent subsets as bounded regions in the plane using the so-called *Venn diagrams* (see Fig. 1.1, left).

A subset can be described by listing the elements of X which belong to it

$$\boxed{A = \{x, y, \ldots, z\};}$$

the order in which elements appear is not essential. This clearly restricts the use of such notation to subsets with few elements. More often the notation

$$\boxed{A = \{x \in X \mid p(x)\} \qquad \text{or} \qquad A = \{x \in X \ : \ p(x)\}}$$

will be used (read 'A is the subset of elements x of X such that the condition $p(x)$ holds'); $p(x)$ denotes the *characteristic property* of the elements of the subset, i.e., the condition that is valid for the elements of the subset only, and not for other elements. For example, the subset A of natural numbers smaller or equal than 4 may be denoted

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{or} \qquad A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}.$$

The expression $p(x) =$'$x \leq 4$' is an example of *predicate*, which we will return to in the following section.

The collection of all subsets of a given set X forms the **power set** of X, and is denoted by $\mathcal{P}(X)$. Obviously $X \in \mathcal{P}(X)$. Among the subsets of X there is the **empty set**, the set containing no elements. It is usually denoted by the symbol $\emptyset$, so $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$. All other subsets of X are proper and non-empty.

Consider for instance $X = \{1, 2, 3\}$ as ambient set. Then

$$\mathcal{P}(X) = \{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}.$$

Note that X contains 3 elements (it has *cardinality* 3), while $\mathcal{P}(X)$ has $8 = 2^3$ elements, hence has cardinality 8. In general if a finite set (a set with a finite number of elements) has cardinality n, the power set of X has cardinality 2^n.

Starting from one or more subsets of X, one can define new subsets by means of set-theoretical operations. The simplest operation consists in taking the complement: if A is a subset of X, one defines the **complement** of A (in X) to be the subset

$$\boxed{\mathcal{C}A = \{x \in X \mid x \notin A\}}$$

made of all elements of X not belonging to A (Fig. 1.1, right).

Sometimes, in order to underline that complements are taken with respect to the ambient space X, one uses the more precise notation $\mathcal{C}_X A$. The following properties are immediate:

$$\mathcal{C}X = \emptyset, \qquad \mathcal{C}\emptyset = X, \qquad \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A.$$

For example, if $X = \mathbb{N}$ and A is the subset of *even* numbers (multiples of 2), then $\mathcal{C}A$ is the subset of *odd* numbers.

Given two subsets A and B of X, one defines **intersection** of A and B the subset

$$\boxed{A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ and } x \in B\}}$$

containing the elements of X that belong to both A and B, and **union** of A and B the subset

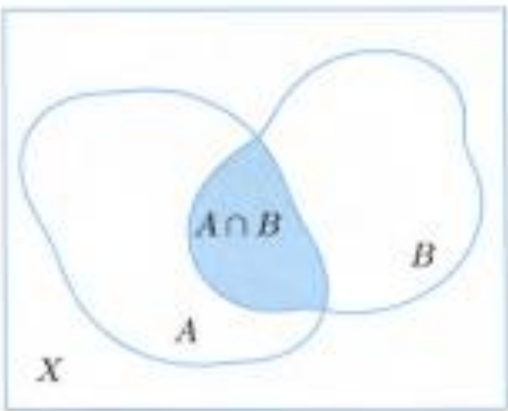
$$\boxed{A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ or } x \in B\}}$$

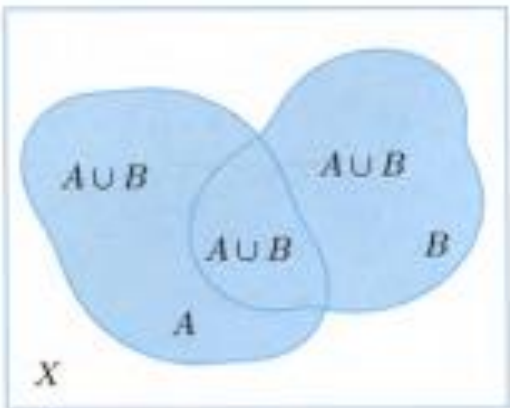
made of the elements that are either in A or in B (this is meant non-exclusively, so it includes elements of $A \cap B$), see Fig. 1.2.

We recall some properties of these operations.

i) Boolean properties:

$$A \cap \mathcal{C}A = \emptyset, \qquad A \cup \mathcal{C}A = X;$$





ii) commutative, associative and distributive properties:

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

iii) De Morgan laws:

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B, \qquad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B.$$

Notice that the condition $A \subseteq B$ is equivalent to $A \cap B = A$, or $A \cup B = B$.

There are another couple of useful operations. The first is the **difference** between a subset A and a subset B, sometimes called **relative complement of B in A**

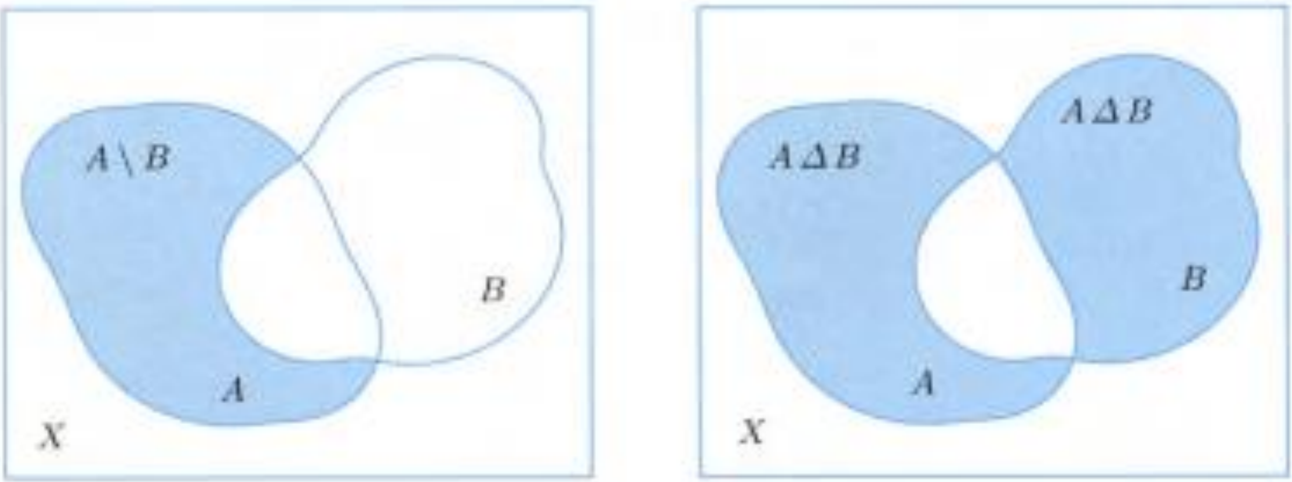
$$\boxed{A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \mathcal{C}B}$$

(read 'A minus B'), which selects the elements of A that do not belong to B. The second operation is the **symmetric difference** of the subsets A and B

$$\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),}$$

which picks out the elements belonging either to A or B, but not both (Fig. 1.3).

For example, let $X = \mathbb{N}$, A be the set of even numbers and $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ the set of natural numbers smaller or equal than 10. Then $B \setminus A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ is the set of odd numbers smaller than 10, $A \setminus B$ is the set of even numbers larger than 10, and $A \Delta B$ is the union of the latter two.



2 TEMA:

Matematikali'q logika elementleri. Ayti'mlar ha'm olar u'stinde a'meller.

Matematikalıq logika elementleri. Algoritm tu'sinigi

Matematikalıq tu'sinik

Tu'sinik-bul predmetler ha'm qubılıslardın' bazıbir a'hmiyetli belgilerine muwapıq parıqlaw yamasa ulıwmalastırıw na'tiyjesi.

Belgiler-bul predmet yamasa qubılıslardın' bir-birine uqsaslıg'ı yamasa parıqlanıwın bildiriwshi qa'siyetleri boladı.

A'hmiyetli qa'siyet dep, tek sol obektke tiyisli ha'm bul qa'siyetsiz obekt bar bola almaytug'ın qa'siyetlerge aytıladı. Obekttin' bar bolıwına ta'sir qılmaytug'ın qa'siyetler a'hmiyetli bolmag'an dep sanaladı.

Eger bazıbir obekttin' bar a'hmiyetli qa'siyetleri toplang'an bolsa, bul obekt haqqında tu'sinik bar delinedi. Tu'sinikke at qoyıladı, mazmun ha'm ko'lemge iye boladı.

Obekttin' barlıq a'hmiyetli qa'siyetleri ko'pligi tu'siniktin' mazmunın du'zedi.

Bir qıylı a'hmiyetli qa'siyetlerge iye obektler ko'pligi tu'sinik ko'lemin du'zedi.

Aytımlar ha'm olar u'stinde logikalıq a'meller

SHın yamasa jalg'an ekeni bir ma'nisli anıqlanatug'ın derek ga'p aytım delinedi. Aytımlardı latın a'lipbesinin' u'lken ha'ripleri menen A, B, C, D, ... arqalı belgileydi.

Bir waqıtta shın yamasa bir waqıtta jalg'an bolg'an aytımlar ekvivalent aytımlar delinedi. Meyli A-bazıbir aytım bolsın. A aytımnın' biykarlanıwı dep A shın bolg'anda jalg'an, jalg'an bolg'anda shın bolıwshı aytımg'a aytıladı ha'm $\bar{A}$ ko'rinisinde belgilenedi, ol «A emes», «A ekenligi jalg'an» dep oqıladı.

Mısalı: A: «$5^2=20$» bolsa, $\bar{A}$: «$5^2\neq20$».

Aytım biykarlanıwının' shınlıq kestesi to'mendegi ko'riniste boladı: $\bar{A}$

A	$\bar{A}$
SH	J
J	SH

Qa'siyeti: $\overline{\overline{A}}=A$ boladı. Aytımlar a'piwayı ha'm quramalı boladı. Quramalı aytımlardı a'piwayı aytımlarg'a ajıratıw mu'mkin boladı.

Eki a'piwayı A, B aytımlar "ha'm" so'zi menen baylanıssa, aytımlar konyunktsiyası payda boladı, «A∧B» yamasa «A\B» ko'riniste jazıladı, «A ha'm B» tu'rinde oqıladı. Aytımlar konyunktsiyası onın' quramına kirgen aytımlar shın bolg'anda g'ana shın boladı. Konyunktsiyanın' shınlıq kestesi:

A	B	A∧B
SH	SH	SH
SH	J	J
J	SH	J
J	J	J

Mısalı A: «2<7», «7<10», $A\wedge B$: «$2<7\wedge 7<10$»

Qa'siyetleri:

1. $A\wedge B=B\wedge A$ (kommutativlik)
2. $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)=A\wedge B\wedge C$ (assotsiativlik)
3. $A\wedge\bar{A}\equiv E$ ($A\wedge\bar{A}$-birdeylik jalg'an aytım)

Eki a'piwayı A, B aytımlar "yamasa" so'zi menen baylanıssa, aytımlar dizyunktsiyası payda boladı. Aytımlar dizyunktsiyası «$A\vee B$» ko'riniste jazıladı, «A yamasa B» dep oqıladı ha'm onın' quramına kirgen aytımlardın' hesh bolmag'anda birewi shın bolg'anda shın boladı. Dizyunktsiyanın' shınlıq kestesi:

A	B	$A\vee B$
SH	SH	SH
SH	J	SH
J	SH	SH
J	J	J

Qa'siyetleri:

1. $A\vee B=B\vee C$ (kommutativlik)
2. $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$ (assotsiativlik)
3. $A\vee\bar{A}=SH$ ($A\vee\bar{A}$-birdeylik shın aytım)
4. $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$-(dizyunktsiyanın' konyuktsyag'a qarata distributivligi)
5. $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$-(konyuktsiyanın' dizyunktsiyag'a qarata distributivligi)
6. $\left.\begin{array}{l}\overline{A\wedge B}=\bar{A}\vee\bar{B}\\ \overline{A\vee B}=\bar{A}\wedge\bar{B}\end{array}\right\}$ De Morgan nızamları

Eki a'piwayı A ha'm B aytımlarınan du'zilgen «Eger A bolsa, B boladı» ko'rinisindegi aytım A ha'm B aytımlarının' implikatsiyası delinedi ha'm «$A\Rightarrow B$» ko'rinisinde belgilenedi. $A\Rightarrow B$ implikatsiya tek A shın B jalg'an bolg'anda g'ana jalg'an boladı. A-implikatsiya sha'rti, B-juwmag'ı delinedi. A nı B ushın jetkilikli, B nı A ushın za'ru'rli sha'rti dep te ataydı. Implikatsiyanın' shınlıq kestesi:

A	B	$A\Rightarrow B$
SH	SH	SH
SH	J	J
J	SH	J
J	J	J

Eger $A\Rightarrow V$ implikatsiya berilgen bolsa, $B\Rightarrow A$ og'an keri, al $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}$ qarama-qarsı, $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$ qarama-qarsı keri implikatsiyalar boladı. Qa'siyetleri:

1. $A\Rightarrow V=\bar{A}\vee\bar{B}$
2. $A\Rightarrow V=\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$ (kontrapozitsiya nızamı)

A'piwayı A ha'm B aytımlarınan du'zilgen «A tek ha'm tek B bolg'anda g'ana boladı» ko'rinisindegi aytım A ha'm B nın' ekvivalentsiyası delinedi, bul «$A\Leftrightarrow B$» ko'riniste jazıladı. A ha'm B ma'nisleri bir qıylı bolg'anda shın boladı. Ekvivalentsiyanın' shınlıq kestesi:

A	B	$A\Leftrightarrow B$
		SH

SH	SH	
SH	J	J
J	SH	J
J	J	J

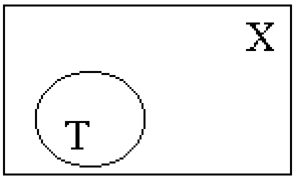
Mısalı: «279 sanı 9 g’a tek onın’ tsifrları qosındısı 9 g’a bo’linse g’ana bo’linedi».279: 9⇔(2+7+9): 9

Predikatlar ha’m olar u’stinde a’meller

O’zgeriwshi qatnasqan derek ga’p predikat delinedi. Predikatlar quramına kirgen o’zgeriwshiler sanına qarap bir orınlı, eki orınlı ha’m t.b. boladı. Biz ko’birek bir orınlı predikatlar haqqında aytamız. Onı A(x), B(y), ... ko’rinisinde belgileymiz.

Predikat quramına kirgen o’zgeriwshi qabıl etiwi mu’mkin bolg’an barlıq ma’nisler ko’pligi predikattın’ anıqlanıw oblastı delinedi.

O’zgeriwshi ornına qoyılg’anda, predikattı shın aytımg’a aylandırıwshı ma’nislerge predikattın’ shınlıq ko’pligi delinedi. A(x) predikattın’ anıqlanıw oblastı X ko’plik bolsa, shınlıq ko’pligi T_A menen belgilenedi ha’m $x\in X\wedge T_A C X$ boladı.



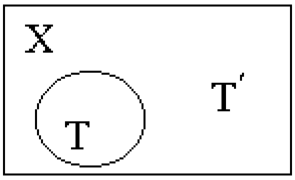
Qa’legen ten’leme ha’m ten’sizlik predikat boladı.

Predikattı aytımg’a aylandırıwdın’ ja’ne bir usılı-kvantorlardan paydalanıw bolıp tabıladı. Eki tu’rli kvantor bar bolıp, olardın’ biri «ulıwmalıq», ekinshisi - «bar bolıw» kvantorı dep ataladı.

Ulıwmalıq kvantorı «∀» belgisi menen belgilenedi ha’m «ha’r bir», «barlıq», «ha’mme» so’zleri menen an’latıladı. ∀ anglichansha «All» so’zinin’ bas ha’ribi alıng’an, «All» - ha’mme, barlıq ma’nisin bildiredi.

Bar bolıw kvantorı «∃» belgisi menen belgilenedi, ol anglichansha «Exist»- «bar bolıw» so’zinin’ bas ha’ribinen alıng’an ha’m “bar”, «bar boladı», «tabıladı» so’zleri menen an’latıladı.

X ko’plikte A(x) predikat berilgen bolsın. A(x) shın bolg’anda jalg’an, al jalg’an bolg’anda shın bolatug’ın $\overline{A(x)}$ predikat A(x) tın’ biykarlanıwı delinedi. A(x) tın’ shınlıq ko’pligi T bolsa, $\overline{A(x)}$ tın’ shınlıq ko’pligi T' boladı.



X ko’plikte eki A(x) ha’m B(x) predikatlar berilgen bolsın. A(x)∧B(x) – predikatlar konyunktsiyası delinedi. A(x) tın’ shınlıq ko’pligi T_A ha’m B(x) tın’ shınlıq ko’pligi T_V bolsa, A(x)∧B(x) predikat A(x) ha’m B(x) bir waqıtta shın bolg’anda shın boladı, yag’nıy

$$T_{A\wedge V}=T_A\cap T_V.$$

A(x)∨B(x) predikat A(x) ha’m B(x) predikatlardın’ dizyunktsiyası delinedi. Dizyunktsiya A(x) ha’m B(x) lardın’ hesh bolmag’anda birewi shın bolg’anda shın boladı. Sonın’ ushın

$$T_{A\vee V}=T_A\cap T_V$$

boladı.

A(x) ha'm B(x) predikatlarınan du'zilgen «Eger A(x) bolsa, B(x) boladı» predikat berilgen predikatlardın' implikatsiyası delinedi ha'm A(x)⇒B(x) ko'rinisinde jazıladı.

Mısalı A(x)⇒V(x) : «Eger $a \vdots 2$ bolsa, onda a – jup san».

Anıqlama. Eger $T_A \subset T_V$ bolsa, onda A(x)⇒B(x) logikalıq kelip shıg'ıw qatnası delinedi. Bul jag'dayda «B(x) predikatı A(x) dan kelip shıqtı» dep oqıladı.

Mısalı A(x)⇒B(x) : «Eger $a \vdots 4$ bolsa, onda a – jup san boladı» haqıyqatında da, $T_A \subset T_V$.

Anıqlama. Eger $T_A = T_V$ bolsa, onda A(x)⇔B(x) ten'ku'shlilik (ekvivalentlilik) qatnası delinedi.

Eger A(x)⇔B(x) ten'ku'shlilik qatnası bolsa, onda A(x) ha'm B(x) dardın' ha'r biri ekinshisi ushın za'ru'rli ha'm jetkilikli sha'rt delinedi.

Algoritm tu'sinigi ha'm onın' qa'siyetleri

Algoritm tu'sinigi fundamental matematikalıq tu'siniklerden bolıp, matematikanın' "Algoritmler teoriyası" dep atalatug'ın arnawlı bo'limnin' izertlew obekti esaplanadı.

Algoritm – bul bazıbir protsessti anıq su'wretlew ha'm onı orınlaw ushın ko'rsetpe.

"Algoritm" so'zi IX a'sirde jasag'an Orta Aziyalıq matematik Al-Xorezmiydin' atın Evropa tillerine awdarıw na'tiyjesinde kelip shıqqan. Al-Xorezmiy arifmetikalıq a'mellerdi orınlaw qag'ıydasın (algoritmin) ko'rsetip bergen.

Bul algoritmler ha'zirgi waqıtta da mektep praktikasında isletilip kelmekte. Algoritmlestiriwdin' wazıypası algoritmlerdi du'ziwge (jazıwg'a) u'yretiwden ibarat bolıp, orınlawshı (adam, robat, EVM) algoritmlerdi orınlaw qag'ıydasına muwapıq birden-bir na'tiyjege erisiwi lazım. Al bul algoritmlerdi jazıw qag'ıydasına bazıbir talaplar qoyadı. Bular to'mendegi qa'siyetler ko'rinisinde an'latıladı:

SHET EL MATERYALLARI

1.2.2 Predicates

Let us now introduce a central concept. A **predicate** is an assertion or property $p(x, \ldots)$ that depends upon one or more variables $x, \ldots$ belonging to suitable sets, and which becomes a formula (hence true or false) whenever the variables are fixed. Let us consider an example. If x is an element of the set of natural numbers, the assertion $p(x)$ = 'x is an odd number' is a predicate: $p(7)$ is true, $p(10)$ false et c. If x and y denote students of the Polytechnic of Turin, the statement $p(x, y)$ = 'x and y follow the same lectures' is a predicate.

Observe that the aforementioned logic operations can be applied to predicates as well, and give rise to new predicates (e.g., $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$ and so on). This fact, by the way, establishes a precise relation among the essential connectives $\neg, \wedge, \vee$ and the set-theoretical operations of taking complements, intersection and union. In fact, recalling the definition $A = \{x \in X \mid p(x)\}$ of subset of a given set X, the 'characteristic property' $p(x)$ of the elements of A is nothing else but a predicate, which is true precisely for the elements of A. The complement $\complement A$ is thus obtained by negating the characteristic property

$$\complement A = \{x \in X \mid \neg p(x)\},$$

while the intersection and union of A with another subset $B = \{x \in X \mid q(x)\}$ are described respectively by the conjuction and the disjunction of the corresponding characteristic properties:

$$A \cap B = \{x \in X \mid p(x) \wedge q(x)\}, \qquad A \cup B = \{x \in X \mid p(x) \vee q(x)\}.$$

The properties of the set-theoretical operations recalled in the previous section translate into similar properties enjoyed by the logic operations, which the reader can easily write down.

1.2.3 Quantifiers

Given a predicate $p(x)$, with the variable x belonging to a certain set X, one is naturally lead to ask whether $p(x)$ is true *for all* elements x, or if *there exists at least one* element x making $p(x)$ true. When posing such questions we are actually considering the formulas

$$\boxed{\forall x,\ p(x) \quad (\text{read } \textit{'for all } x,\ p(x) \textit{ holds'})}$$

and

$$\boxed{\exists x,\ p(x) \quad (\text{read } \textit{'there exists at least one } x, \textit{ such that } p(x) \textit{ holds'}).}$$

If indicating the set to which x belongs becomes necessary, one writes '$\forall x \in X,\ p(x)$' and '$\exists x \in X,\ p(x)$'. The symbol $\forall$ ('for all') is called **universal quantifier**, and the symbol $\exists$ ('there exists at least') is said **existential quantifier**. (Sometimes a third quantifier is used, $\exists!$, which means 'there exists one and only one element' or 'there exists a unique'.)

We wish to stress that putting a quantifier in front of a predicate transforms the latter in a formula, whose truth value may be then determined. The predicate $p(x)$ = 'x is strictly less than 7' for example, yields the false formula '$\forall x \in \mathbb{N},\ p(x)$' (since $p(8)$ is false, for example), while '$\exists x \in \mathbb{N},\ p(x)$' is true (e.g., $x = 6$ satisfies the assertion).

The effect of negation on a quantified predicate must be handled with attention. Suppose for instance x indicates the generic student of the Polytechnic, and let $p(x)$ = 'x is an Italian citizen'. The formula '$\forall x,\ p(x)$' ('every student of the Polytechnic has Italian citizenship') is false. Therefore its negation '$\neg(\forall x,\ p(x))$' is true, but beware: the latter does not state that all students are foreign, rather that 'there is at least one student who is not Italian'. Thus the negation of '$\forall x,\ p(x)$' is '$\exists x,\ \neg p(x)$'. We can symbolically write

$$\boxed{\neg(\forall x,\ p(x)) \iff \exists x,\ \neg p(x).}$$

Similarly, it is not hard to convince oneself of the logic equivalence

$$\boxed{\neg(\exists x,\ p(x)) \iff \forall x,\ \neg p(x).}$$

If a predicate depends upon two or more arguments, each of them may be quantified. Yet the *order* in which the quantifiers are written can be essential. Namely, two quantifiers of the same type (either universal or existential) can be swapped without modifying the truth value of the formula; in other terms

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall x\,\forall y,\ p(x,y) & \iff & \forall y\,\forall x,\ p(x,y), \\ \exists x\,\exists y,\ p(x,y) & \iff & \exists y\,\exists x,\ p(x,y). \end{array}}$$

On the contrary, exchanging the places of different quantifiers usually leads to different formulas, so one should be very careful when ordering quantifiers.

As an example, consider the predicate $p(x,y)$ = '$x \geq y$', with x, y varying in the set of natural numbers. The formula '$\forall x\,\forall y,\ p(x,y)$' means 'given any two natural numbers, each one is greater or equal than the other', clearly a false statement. The formula '$\forall x\,\exists y,\ p(x,y)$', meaning 'given any natural number x, there is a natural number y smaller or equal than x', is true, just take $y = x$ for instance. The formula '$\exists x\,\forall y,\ p(x,y)$' means 'there is a natural number x greater or equal than each natural number', and is false: each natural number x admits a successor $x+1$ which is strictly bigger than x. Eventually, '$\exists x\,\exists y,\ p(x,y)$' ('there are at least two natural numbers such that one is bigger or equal than the other') holds trivially.

№3 TEMA:

Ekinshi ta`rtipli ha`m u`shinshi ta`rtipli determinantlar, joqari' ta`rtipli determinantlar haqqinnda tu'sinik. Sızıqlı ten`lemeler sisteması. Kramer formulaları

Determinantlar. Esaplaw usılları h`a`m tiykarg`ıqa`siyetleri. *n*-ta`rtipli determinantlar.

R E J E

1. Ekinshi ta`rtipli determinantlar;
2. U`shinshi ta`rtipli determinantlar;
3. Ekinshi h`a`m u`shinshi ta`rtipli determinantlardı esaplaw;
4. Determinantlardın` qa`siyetleri;
5. Algebralıq tolıqtırıwshı h`a`m minorlar;
6. *n*-ta`rtipli determinant
7. *Shet el materyalları*

Tayanısh so`zler:

determinant, element, ag`za, determinant ta`rtibi, matritsa.

1. Ekinshi ta`rtibli determinantlar.

4 sannan to`mendegishe kecte du`zemiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Bul matematikalıq obektni 2-ta`rtibli kvadrat matritsa dep ataymız.

Anıqlama. $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$ shama (san) (1)- matritsanın` 2-ta`rtibli determinantı dep ataladı. Anıqlama boyınsha

$$\text{detA}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

dep belgilenedi. Onda, matritsa keste,determinant bolsa san. Belgilewler:

$\| \ \|$, $| \ |$, $|A|$, a_{nn} -simvolları menen h`a`m

$a_{11},a_{22},a_{21},a_{12}$ -sanları determinant elementleri delinedi. a_{11},a_{12} -1-qatar elementleri, a_{22},a_{21} - 2-qatar elementleri, a_{11},a_{21} -1- bag`ana elementleri, $a_{22},a_{12}$ - 2 – bag`ana elementleri.

a_{11},a_{22} -elementler jaylasqan dioganal ***bas dioganal*** dep, a_{21},a_{12} -elementler jaylasqan dioganal ***ekinshi dioganal*** dep ataladı.

$$a_{ij}:\begin{cases} i-qatar \quad ko`rsetkishi \\ j-bag`ana\ korsetkishi \end{cases}$$

(1.2)

Mısal: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$

2) $\begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-5) - 7\cdot 3 = 30 - 21 = 9$

2. U`shinshi ta`rtipli determinantlar

9 sannan duzilgen mına kestege

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3-ta`rtipli ***kvadrat matritsa*** delinedi. Bul matritsanın` determinantı to`mendegishe esaplanadı.

$$(1.3) \quad \det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ==$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} \ .$$

Qatar, bag`ana, bas h`am ekinshi dioganal tusinikleri 2-ta`rtipli determinanttag`ı sıyaqlı anıqlanadı.

3. U`shinshi ta`rtipli determinantlardı esaplaw

U`shmu`eshlik usılı;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

(1.4)

Bul usıl boyınsha 3-ta`rtipli determinanttı esaplaw formulasın beredi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

(1.5)

***Mısal*.**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 4\cdot 2 + (-2)\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-2) - 3\cdot 4\cdot(-1) - 5\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= -10 + 8 + 0 + 8 + 12 - 0 = 18$$

Sarrius usılı:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}. \qquad (1.6)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -1\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 4\cdot 2 + (-2)\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-2) -$$

$$-3\cdot 4\cdot(-1) - 5\cdot 0\cdot 1 = -10 + 8 + 0 + 8 + 12 - 0 = 18$$

Ixtıyariy qatar yamasa bag`ana elementleri boyinsha jiklep esaplaw:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

4. Determinanttın` qa`siyetleri

1. Determinanttın` qatar elementleri menen bag`ana elementlerin almastırıp qoysaq determinant ma`nisi o`zgermeydi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1-*Mısal*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 10 - 8 = -18$$

Demek determinantta qatar h`a`m bag`ana elementleri ten` kushli eken.

2. Determinantta qon`sı qatar(bag`ana) orınların almastırsaq, determinanttın` belgisi o`zgeredi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \text{yamasa}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{12} & a_{23} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2-*Mısal*. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12-8+10-8=-18$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \text{-10 +8+8-0+12=18}$$

3.Determinantta eki qatar(bag`ana) elementleri o`z-ara ten` bolsa, onın` ma`nisi nolge ten`.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

3-M*ısal*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2+24+15-24-2-15=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+12+15-12-1-15=0$$

4. Determinanttı bazı-bir sang`a ko`beytiw ushın onın` bazı-bir qatar(bag`ana) elementlerin usı sang`a ko`beytiriw jetkilikli.

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

4-*Mısal*.

$$3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 12\\ 3 & 9 & 27\\ 15 & 5 & 16\end{vmatrix}=3\cdot(2\cdot9\cdot16+1\cdot27\cdot15+3\cdot5\cdot12-12\cdot9\cdot15-1\cdot3\cdot16-2\cdot27\cdot5)=$$

$$=3\cdot(288+405+180-1620-48-270)=3\cdot(-1065)=-3195$$

$$\begin{vmatrix}6 & 3 & 36\\ 3 & 9 & 27\\ 15 & 5 & 16\end{vmatrix}=6\cdot9\cdot16+3\cdot27\cdot15+3\cdot5\cdot36-36\cdot9\cdot15-3\cdot3\cdot16-6\cdot27\cdot5=$$

$$=864+1215+540-4860-144-810=-3195$$

5.Determinanttın` bazı-bir qatar(bag`anara) elementleri nollerden ibarat bolsa onın` ma`nisi nolge ten`.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & a_{11} & a_{31}\\ 0 & a_{12} & a_{23}\\ 0 & a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

5-Mısal

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{vmatrix}=0\cdot2\cdot1+0\cdot3\cdot4+1\cdot5\cdot0-0\cdot2\cdot4-0\cdot1\cdot1-0\cdot3\cdot5=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot1+4\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot4-4\cdot0\cdot3-0\cdot1\cdot1-1\cdot5\cdot0=0$$

6.Determinanttın` eki qatar(bag`ana) elementleri sa`ykes proportsional bolsa, onın` ma`nisi nolge ten`.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \lambda a_{11} & a_{31}\\ a_{12} & \lambda a_{12} & a_{23}\\ a_{13} & \lambda a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

<u>6-Mısal</u>. $\begin{vmatrix}3 & 6 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{vmatrix}=3\cdot2\cdot1+6\cdot3\cdot4+1\cdot5\cdot9-9\cdot2\cdot4-6\cdot1\cdot1-3\cdot3\cdot5=$

$$=6+72+45-72-6-45=0$$

7.Determinanttın` bazı-bir qatar(bag`ana) elementleri qosındıdan yamasa ayırmadan ibarat bolsa,onda determinanttın` ma`nisi eki determinanttın` ma`nislerinin` qosındısına yamasa ayırmasısına ten` boladı.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} \pm b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} \pm b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(1.9)

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm b_1 & a_{12} \pm b_2 & a_{13} \pm b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Detrminanttın` bazı-bir qatar(bag`ana) elementlerin ıxtıyarıy sang`a ko`beytip ekinshi qatar(bag`ana) elementlerine sa`ykes qossaq(alsaq) determinant ma`nisi o`zgermeydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.10)$$

1. Matrices

Matrices allow us to operate with arrays consisting of many numbers, functions or mathematical statements, just as if we operate with several items.

Matrices have a wide application in different branches of knowledge, for instance, in mathematics, physics, computer science, and so on. Matrices allow us to solve systems of ordinary equations or sets of differential equations, to predict the values of physical quantities in quantum theory, to encrypt messages in the Internet, and so on.

In this chapter, we discuss the basic concepts of the matrix theory, introduce matrix characteristics, and study some matrix applications. The important propositions are proved and illustrated by examples.

1.1. Basic Definitions

A **matrix** is a rectangular array of numbers, algebraic symbols or mathematical functions, provided that such arrays are added and multiplied according to certain rules.

Matrices are denoted by upper case letters: A, B, C, …

The size of a matrix is given by the number of rows and the number of columns. A matrix with m rows and n columns is called an $m \times n$ matrix (pronounce m-by-n matrix). The numbers m and n are the dimensions of the matrix. Two matrices have the same size, if their dimensions are equal.

Examples:

3×2 matrix	2×3 matrix	2×2 matrix
$A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{5} & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

Members of a matrix are called its **matrix elements** or **entries**. The entry in the i-th row and the j-th column of a matrix A is denoted by $a_{i,j}$ or $A_{i,j}$. The subscripts indicate the row first and the column second.

In the examples above, the boldface elements are $a_{3,2}=4$ and $b_{1,2}=5$.

A matrix with one row is called a **row matrix**: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix}$.

2. DETERMINANTS

2.1. Permutations and Transpositions

A **permutation** of elements of a set of ordered elements is any one-to-one transformation of the set onto itself.

Let S be the ordered set of the natural numbers from 1 to n:

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

A permutation of S is the set of the same numbers arranged in a particular way:

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad \{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n\}.$$

A permutation is called a **transposition**, if the order of two elements of the set is changed but all other elements remain fixed.

Example of a permutation:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{2, 4, 1, 3\}$$

Example of a transposition:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{4}, 2, 3, \mathbf{1}\}$$

Every permutation of ordered elements can be expressed through a sequence of several transpositions. For instance, permutation $\{2, 4, 1, 3\}$ can be presented by the sequence of the following transpositions:

$$\{\mathbf{1}, 2, 3, \mathbf{4}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{2, \mathbf{3}, 1, \mathbf{4}\} \quad \Rightarrow \quad \{2, 4, 1, 3\}$$

It is said that a permutation of S contains the **inversion** of elements i_j and i_k, if

$$j < k \quad \text{and} \quad i_j > i_k.$$

The total number of inversions determines the **inversion parity** of the permutation that takes on two values: either even or odd.

A permutation is called an **even** permutation, if it contains an even number of inversions. This means that an even permutation is formed by an even number of transpositions of S.

An **odd permutation** contains an odd number of inversions.

This means that an odd permutation is a sequence of an odd number of transpositions of S.

Example: The permutation $\{2, 4, 1, 3\}$ of $\{1, 2, 3, 4\}$ is odd, since it contains three inversions:

$$2 \text{ and } 1, \qquad 4 \text{ and } 1, \qquad 4 \text{ and } 3.$$

Theorem 1
Any transposition changes the inversion parity of a permutation.

Proof: It is not difficult to see that the transposition of neighboring elements i_j and i_{j+1} changes the inversion parity of a given permutation.

The transposition of elements i_j and i_{j+k} can be expressed as the sequence of $(2k-1)$ transpositions. Really, by k transpositions of the element i_j with the neighboring element on the right of i_j we get the permutation $\{\cdots, i_{j+k}, i_j, \cdots\}$:

$$\overset{k \text{ transpositions}}{\{\cdots, \underbrace{i_j, \cdots, i_{j+k},}_{k \text{ elements}} \cdots\}}$$

Then, by k - 1 transpositions of the element i_{j+k} with the neighboring element on the left of i_{j+k}, we get the desired permutation $\{\cdots, i_j, \cdots, i_{j+k}, \cdots\}$:

$$\overset{k\text{-}1 \text{ transpositions}}{\{\cdots, \underbrace{\cancel{i_{j+k}}, \cdots,}_{k\text{-}1 \text{ elements}} i_{j+k}, i_j, \cdots\}}$$

The total number $k+(k-1)=2k-1$ of the transpositions is an odd number, and hence the inversion parity of the permutation is changed.

Theorem 2
Given the set $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, there are n! different permutations of S.

Proof: Consider an arbitrary permutation of S.
The first position can be displaced by any of n elements.
The second position can be displaced by any of the remaining $n-1$ elements.
The third position can be displaced by any of the remaining $n-2$ elements, and so on.
The n-th position can be displaced by the rest single element.
Therefore, there are $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ ways to get a new permutation of the elements of S.

Example:

The set $S = \{1, 2, 3\}$ consists of three elements, and so the number of different permutations is $3! = 6$:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 3, 1\}, \quad \{3, 1, 2\},$$
$$\{3, 2, 1\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{1, 3, 2\}.$$

a) The permutations

$$\{1, 2, 3\}, \ \{2, 3, 1\} \text{ and } \{3, 1, 2\}$$

are even, since each of them is a sequence of an even number of transpositions of the elements of S:

$$\{1, 2, 3\} \quad \to \quad \{3, 2, 1\} \quad \to \quad \{2, 3, 1\},$$
$$\{1, 2, 3\} \quad \to \quad \{2, 1, 3\} \quad \to \quad \{3, 1, 2\}.$$

In terms of inversions, the permutations $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ and $\{3, 1, 2\}$ are even, since each of them contains an even number of inversions of the elements. For instance, the permutation $\{2, 3, 1\}$ contains two inversions of the elements:

2 and 1, since 2 is on the left from 1, and $2 > 1$,
3 and 1, since 3 is on the left from 1, and $3 > 1$.

b) Likewise, the permutations

$$\{3, 2, 1\}, \quad \{2, 1, 3\} \quad \text{and} \quad \{1, 3, 2\}$$

are odd, since each of them is a sequence of an odd number of transpositions of the elements of S. In particular, the permutation $\{3, 2, 1\}$ is the transposition of the elements 1 and 3 of S.

In terms of inversions, the permutation $\{3, 2, 1\}$ is odd, since it contains the odd number of the inversions:

3 and 2, since 3 is on the left from 2 and $3 > 2$,
3 and 1, since 3 is on the left from 1 and $3 > 1$,
2 and 1, since 2 is on the left from 1 and $2 > 1$.

The permutation $\{2, 1, 3\}$ contains the inversion of the elements 2 and 1.

The permutation $\{1, 3, 2\}$ contains the inversion of the elements 3 and 2.

Examples:

1) Let $A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$. Find $\det A$.

Solution:

$$\det A = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2) Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Verify that $\det A = \det A^T$.

Solution:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{and} \quad \det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3) Evaluate $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Verify that $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Solution:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \det B = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\det A \cdot \det B = 110.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 5 \\ 13 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} 35 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 5(35 - 13) = 110.$$

Sızıqlı ten'lemeler sisteması

Tiykarg'ı tu'sinikler

Anıqlama. n belgisizli m ten'lemelerdin' sızıqlı sisteması dep

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

tu'rindegi sistemag'a aytıladı, bunda $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ sanları (1)-sistemanın' g`a`rezli koeffitsentleri, ten`liktin`on' jag'ındag`ı $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sanları g`a`rezsiz yag`nıy azat koeffitsentler dep ataladı.

Mına

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ ------ \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

matritsası sistemanın' tiykarg`ı matritsası delinedi.

Eger barlıq $b_i=0$ $i=1,2, \ldots, m$ bolsa, onda sistema birtekli sızıqlı sistema dep, al keminde bir $b_i \neq 0$ bolsa, onda sistema birtekli emes sızıqlı sistema dep ataladı.

Sistemag'a qoyg'anda onın' ha'r bir ten'lemesin durıs ten'likke aynaldıratug'ın n sandag'ı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sanlarının' ha'r qanday jıynag'ı sistemanın' sheshimi delinedi,h`a`m ol bir sheshim esaplanıladı. Keminde bir sheshimge iye sistema birgelikli sistema delinedi. Eger sistema sheshimge iye bolmasa, onda ol birgelikli emes dep ataladı.

Tek bir sheshimge iye birgelikli sistema anıq sistema dep, ol birden artıq sheshimlerge iye sistema birgelikli biraq anıq emes sistema dep ataladı.

Sistemanı sheshiw – bul sistema birgelikli yamasa birgelikli emes ekenligin anıqlaw, eger ol birgelikli bolsa, onda onın' barlıq sheshimlerin tabıwdan ibarat.

Gauss usılı

Sızıqlı algebralıq sistemalardı sheshiw ushın nemets matematigi K.F.Gausstın' (1777-1855) atı menen atalatug'ın metod ken'nen qollanıladı. Gauss metodı eki basqıshtan turadı.

Meyli m belgisizli m ten'lemeler sisteması berilsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \quad (3)$$

Birinshi basqısh (tuwrı ju'ris): **(3) sistema u'shmu'yeshlik tu'r dep atalatug'ın ko'riniske alıp kelinedi.**

Ekinshi basqısh (keri ju'ris): $x_1, x_2, \ldots, x_m$ belgisizler, son`g`ı x_m beligisizden baslap birinshi x_1 belgisizge deyin izbe-iz tu'rde anıqlanadı. Gauss metodı u`sh belgisiz, u`sh ten`lemeden du`zilgen sızıqlı ten`lemeler sistemasın sheshiw basqıshların qarap shıg`amız:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

Birinshi basqıshta ulıwmalıqtı sheklemey, (4) sistemadag'ı birinshi qa'demnin' jetekshi elementi sıpatında $a_{11} \neq 0$ alınadı (keri jag'dayda yag`niy eger $a_{11} = 0$ bolsa, ten'lemelerdin' ornın almastıramız yamasa belgisizlerdi qayta nomerleymiz). Birinshi qa'demde x_1 belgisizin ekinshi ten'lemeden baslap qalg'an barlıq ten'lemelerden shıg'arıp taslaymız (joq etemiz), bunın' ushın birinshi ten'lemeni $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ ge ko'beytip ekinshi ten'lemeden, birinshi ten'lemeni $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ ge ko'beytip u`shinshi ten'lemeden ag'zama-ag'za alamız . Bunnan keyin berilgen (4) sistema og'an ekvivalent bolg'an

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (5)$$

ko'rinistegi sistema menen almastırıladı, bunda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \qquad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \qquad \text{(i,j=2,3)} \qquad (6)$$

Ekinshi qa'demde usınday jol menen (5) sistemadag`ı ekinshi ten`lemeden to`menve $x_2$ – belgisizdi jog`altıp baramız,h`a`m

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} \qquad (7)$$

sistemasın alamız, bunda

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)} \qquad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} \qquad (8)$$

Berilgen sistemanı (7) u'shmu'yeshli tu'rge alıp keliw menen Gauss metodı menen sheshimdi du'ziwdin' birinshi basqıshı tamamlanadı.

Ekinshi basqısh – keri ju'ris – usı (7) u'shmu'yeshli sistemanı sheshiwden ibarat. Bul to'mendegishe ju'rgiziledi: son'g'ı ten'lemeden x_3 anıqlanadı. Bul ma'nisti 2 – ten'lemege qoyıp, onnnan x_2 ni anıqlaymız.

Bunnan keyin tabılg'an x_3 ha'm x_2 ma'nisleri boyınsha 1– ten'lemeden x_1 anıqlanadı. Usının' menen (4) sistemanın' sheshimin og'an evivalent bolg'an (7) sistema ja'rdeminde tabıw tamamlanadı.

Sızıqlı sistemanı matritsalıq formada jazg'an qolaylı boladı. Bunın' ushın

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ha'm} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

matritsa – bag'analardı kiritemiz, olar sa'ykes tu'rde vektor – sheshim ha'm bos ag'zalar vektorı delinedi. Sonda (1) sistemanı og'an ekvivalent bolg'an

Ax=b

matritsalıq ten'leme menen almastırıwg'a boladı.

Sızıqlı ten`lemeler sistemasın Kramer metodı menen sheshiw

Meyli (4) sistema berilgen bolsın. Eger

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

belgilewlerin kiritsek, onda (4) sistemanı

$$\mathrm{A}x=b \qquad (9)$$

matritsalıq tu'rde jazıwg'a boladı.

Eger (3) sistemanın' A matritsası aynımag`an (ayrıqsha emes) matritsa bolsa, yag'nıy:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta=\det A\neq 0$ bolsa, onda

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{\mathrm{A}} \qquad 10)$$

keri matritsa bar boladı, bunda Ã – bul A matritsasının` biriktirilgen matritsası dep atalatug`ın to`mendegi matritsa:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

Bul jerdegi h`a`r-bir A_{ij} $\mathbf{a_{ij}}$ elementinin` algebralıq tolıqtırıwshısı.

(9) ten'likti soldan A^{-1} matritsa ko'beytip

$$\mathbf{A^{-1}A}x=\mathbf{A^{-1}}b$$

ten'ligin alamız, bunnan

$$x=\mathbf{A^{-1}}b \qquad \textbf{(12)}$$

yag'nıy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(13)}$$

Bul son'g'ı (13) matritsalıq ten'likten

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad \textbf{(k=1,2,3)} \qquad \textbf{(14)}$$

qatnasın alamız, bunda

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Yamasa $\Delta_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + b_3 A_{3k}$ **(15)**

Solay etip, to'mendegi tastıqlawg'a kelemiz (Kramer qag'ıydası): eger (3) sızıqlı sistemanın' anıqlawıshı nolge ten' bolmasa, onda bul sistema (14) formulaları menen anıqlanatug'ın birden – bir sheshimge iye boladı. Bul (14) formulalar Kramer formulaları dep ataladı.

(15) ten'likterdin` on' jag'ı det A anıqlawıshınan bul anıqlawıshtı k – bag'ananı bos ag'zalar bag'anası menen almastırıwdan alıng'an anıqlawıshtın' k – bag'anasının' elnmentleri boyınsha jayılması ekenin an'sat ko'riwge boladı.

Yag`nıy:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}.$$

4.2. Main Definitions

Consider a system of m linear equations with n unknowns:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Here a_{ij} are numerical coefficients; b_i are constants $(i = 1,2,\cdots,m)$ and x_j are unknowns $(j = 1,2,\cdots,n)$.

A **solution of system** (1) is a set of values of the unknowns x_j that reduces all equations (1) to identities. If there exists a solution of simultaneous equations then the system is called **consistent**; otherwise, the system is **inconsistent**.

Using matrix multiplications, system of equations (1) can be represented by a single matrix equation

$$AX = B,$$

where A is the coefficient matrix consisting of a_{ij}; the column matrix $B = \| b_{i,1} \|$ is called the **non-homogeneous term**; X is the column matrix, whose elements are the unknowns x_j:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

If the non-homogeneous term B is equal to zero, then the linear system is called the **homogeneous system**:

$$AX = 0.$$

Two linear systems are called **equivalent**, if they have the same solution set.

Elementary transformations of the linear system is the process of obtaining an equivalent linear system from the given system by the following operations:

1) Interchange of two equations.
2) Multiplication of an equation by a nonzero number.
3) Addition of an equation multiplied by a constant to another equation.

Each of the above operations generates an equivalent linear system.

> Two linear systems of equations are equivalent if one of them can be obtained from another by the elementary transformations.

Applying the linear transformations we try to find an equivalent system which can be easier solved.

4.3. Gaussian Elimination

Consider the augmented matrix of system (1):

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

There is one-to-one correspondence between the elementary transformations of the linear system and linear row operations on the augmented matrix. Indeed:

- Interchanging two equations of the system corresponds to interchanging the rows of the augmented matrix.
- Multiplication of an equation by a nonzero number corresponds to multiplication of the row by that number.
- Addition of two equations of the system corresponds to addition of the rows of the matrix.

The main idea is the following.

First, transform the augmented matrix to the upper triangle form or row echelon form:

$$(A\,|\,B) \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdot & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & \cdots & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & \vdots \end{array}\right)$$

Then write down the linear system corresponding to the augmented matrix in the triangle form or reduced row echelon form. This system is equivalent to the given system but it has a simpler form.

Finally, solve the system obtained by the method of back substitution. If it is necessary, assign parametric values to some unknowns.

This systematic procedure of solving systems of linear equations by elementary row operations is known as **Gaussian elimination**.

4.3.1. Some Examples

1) Solve the system below by Gaussian elimination:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solution: Reduce the augmented matrix to a triangle form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -6 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_2 \to r_2 - r_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 6 & 21 & 15 \end{array}\right)$$

$$r_3 \to r_3 - 2r_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 43 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{r_3}{43}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

The later matrix corresponds to the system

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ \qquad 3x_2 - 11x_3 = -14 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

which is equivalent to the initial system.
Now the solution can be easily found:

$$3x_2 = -14 + 11x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1,$$
$$2x_1 = 10 + x_2 - 5x_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.$$

Thus we obtain the solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ of the given sysytem.

It is not difficult to verify the values of the unknowns satisfy all the given equations:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2\cdot 2 - (-1) + 5\cdot 1 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 + (-1) - 3\cdot 1 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 1 = 1. \end{cases}$$

2) Find all solutions of the system of equations via Gaussian elimination

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Solution: The system can be represented by the augmented matrix. Apply the linear row operations:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_1]{r_3 \to r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

The third row corresponds to the equation

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 7,$$

which evidently has no solutions.
Therefore, the given system is inconsistent.

3) Use Gaussian elimination to solve the system of equations.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Solution: By elementary transformations, the augmented matrix can be reduced to the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_1]{r_3 \to r_3 + r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

The reduced matrix has the rank 3 and corresponds to the following system of linear equations:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ \qquad -2x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

The variable x_4 is considered to be an arbitrary parameter c, regardless of the value of which the remaining values of x_1, x_2, and x_3 reduce all equations of the given system to identities.

From the last equation we find

$$x_3 = \frac{9}{2}x_4.$$

Then we obtain

$$x_2 = 2 + x_3 + 5x_4 = 2 + \frac{9}{2}x_4 + 5x_4 = 2 + \frac{19}{2}x_4,$$

$$x_1 = x_3 - x_2 + 2x_4 = \frac{9}{2}x_4 - \frac{19}{2}x_4 - 2 + 2x_4 = -2 - 3x_4.$$

The general solution of the system

$$X = \begin{pmatrix} -2-3c \\ 2+\dfrac{19}{2}c \\ \dfrac{9}{2}c \\ c \end{pmatrix}$$

depends on the arbitrary parameter c. Any particular value of c gives a particular solution of the system. Assigning, for instance, the zero values to the parameter c, we obtain a particular solution $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Setting $c = 2$ we obtain another particular solution $X_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 21 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$.

№4 TEMA:
Vektorlar ha’m olar u’stinde si’zi’qli’ a’meller. Vektorlardi’n’ si’zi’qli’ baylani’sli’li’g’i’. Tegislik ha’m ken’isliktegi bazis. Tuwri’ mu’yeshli Dekart bazisi. Vektordi’ koordinata ko’sherleri boyi’nsha payda etiwshilerge jayi’w.

Vektor. Vektorlar u`stinde a`meller

Vektorlar algebrasi. Vektor: aniqlamasi, koordinatalari, qa`siyetleri. Vektorlar u`stinde a`meller. Kollinear ha`m komplanar vektorlar.

Fizika, texnika, ximiya ha`m t.b. pa`nlerde u`yreniletug`in shamalar eki klassqa bo`linedi: skalyar ha`m vektorliq (yamasa bag`itlang`an). Skalyar shamalardi xarakterlew ushin olardin` san ma`nisin ko`rsetiw jetkilikli. Misali, ko`lem, massa, tig`izliq, temperaturi ha`m t.b. Vektorliq shamalardi xarakterlew ushin tek g`ana san ma`nisin ko`rsetip qoymay, sonin` menen birge olardin` bag`itin da ko`rsetiw za`ru`r. Misali, denege ta`sir etiwshi ku`sh, ha`reket tezligi, magnit yamasa elektr maydaninin` kwshleniwi ha`m t.b.

Aniqlama. Bag`itlang`an kesindi vektor dep ataladi.

Vektor $\overline{AB}$ (A noqatisi vektordin` basi, V noqati vektordin` aqiri delinedi) yamasa $\vec{a}$ tu`rinde belgilenedi. Vektor uzinlig`i $\left|\overline{AB}\right|, \left|\vec{a}\right|$ tu`rinde belgilenedi.

Basi ha`m aqiri betlesetug`in vektor nollik vektor dep ataladi ha`m $\vec{0}$ tu`rinde belgilenedi, $\left|\vec{0}\right| = 0$. Uzinlig`i 1 ge ten` bolg`an vektorlar birlik vektorlar dep ataladi.

Aniqlama. Bir tuwri siziqta yamasa parallel tuwri siziqlarda jatiwshi vektorlar kollinear vektorlar dep ataladi.

Kollinear vektorlar birdey bag`itlang`an yamasa qarama-qarsi bag`itlang`an boliwi mu`mkin.

Aniqlama. Kollinear, birdey bag`itlang`an ha`m uzinliqlari ten` bolg`an vektorlar ten` vektorlar dep ataladi.

Aniqlama. Bir tegislikte yamasa parallel tegisliklerde jatiwshi vektorlar komplanar vektorlar dep ataladi.

Eger komplanar vektorlardin` baslari uliwma noqatqa iye bolsa, onda olardin` bir tegislikke tiyisli bolatug`inlig`in ko`rsetiw mu`mkin.

$\overline{AB}$ ha`m $\overline{BA}$ vektorlari qarama-qarsi vektorlar dep ataladi. Eger $\overline{AB} = \overline{a}$ tu`rinde belgilense, onda $\overline{BA} = -\overline{a}$ tu`rinde jaziladi.

Vektorlar u`stinde siziqli a`meller dep vektorlardi qosiw, aliw ha`m vektorlardi sang`a ko`beytiwge aytiladi.

Vektorlardi qosiwdin` u`shmu`yeshlik qa`desi. Nolden pariqli eki $\overline{a} = \overline{AB}$ ha`m $\overline{b} = \overline{BC}$ vektorlari berilgen bolsin. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}, \overline{c} = \overline{AC}$ vektorlarin tabiw ushin birinshi qosiliwshi vektordin` basin ekinshi qosiliwshi vektordin` aqiri menen tutastiratug`in vektorg`a aytiladi.

Vektorlardi qosiwdin` parallelogram qa`desi. Bunda ta`repleri berilgen vektorlar bolatug`in parallelogramm du`ziledi, bunda vektorlar bazi bir noqatta jaylastiriladi. Sonda parallelogrammnin` ko`rsetilgen noqattan shig`iwshi diagonali berilgen eki vektor qosindisin beredi.

Vektorlardi qosiwdin` qa`siyetleri:

1. Orin almastiriw qa`siyeti $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

2. Gruppalaw qa`siyeti $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.

Vektorlardi aliw a`meli qosiwg`a kerisinshe orinlanadi.

Vektorlardi sang`a ko`beytiw. $\overline{a}\neq 0$ vektorinin` $\lambda\neq 0$ sanina ko`beymesi dep, $\overline{a}$ vektorina kollinear, uzinlig`i $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ g`a ten` bolg`an, $\lambda>0$ bolg`anda $\overline{a}$ vektori menen birdey bag`itlang`an, al $\lambda<0$ bolg`anda $\overline{a}$ vektorina qarama-qarsi bag`itlang`an $\lambda\overline{a}$ vektorina aytiladi. $\lambda\cdot\overline{a}=\overline{b}$ bolsa, onda $\overline{a}\|\overline{b}$, $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$. Tiykarg`i qa`siyetleri:

1. $\lambda\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\lambda$

2. $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a},\ (\lambda,\mu-const)$

3. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$

4. $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.

Vektor tu’sinigi. Vektorlardı qosıw ha’m alıw

Geometriyada vektor dep, uzınlıg’ı ha’m bag’ıtı boyınsha xarakterlenetug’ın shamalarg’a aytamız. Demek, vektor beriliwi ushın onın’ uzınlıg’ı ha’m bag’ıtı beriliwi kerek. Sızılmada vektor bag’ıtlang’an kesindi tu’rinde su’wretlenedi. Ekinshi jaqtan, Ha’rqanday bag’ıtlang’an kesindi o’zinin’ uzınlıg’ı ha’m bag’ıtı boyınsha xarakterlenedi. Sonlıqtan berilgen uzınlıqtag’ı ha’m bag’ıttag’ı Ha’rqanday bag’ıtlang’an kesindini vektor dep qarawg’a boladı. Bag’ıtlang’an kesindinin’ baslang’ash tochkası -vektordın’ baslang’ısh tochkası, al aqırg’ı tochkası-vektordın’ aqırg’ı tochkası dep ataladı. Baslang’ısh tochkası A, al aqırg’ı tochkası B bolg’an vektor AB dep belgilengen. A ha’m B tochkalarının’ arasındag’ı aralıq AB vektorının’ moduli yamasa uzınlıg’ı dep ataladı ha’m ol $|AB|$ dep belgilenedi. Baslang’ısh ha’m aqırg’ı tochkaları betlesetug’ın vektor nollik vektor dep ataladı ha’m ol $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ dep jazıladı. Nollik vektordın’ uzınlıg’ı nolge ten’, al bag’ıtı anıq emes boladı.

Vektorlardın’ ten’ligi to’mendegi sha’rtlerdi qanaatlandıradı:

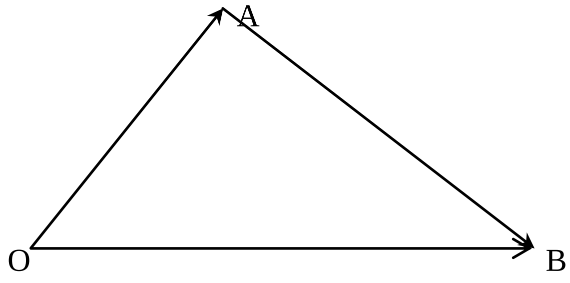
a) Ha’rqanday vektor o’z-o’zine ten’ (refleksivlik sha’rti);

b) eger $\vec{a}$ vektorı $\vec{b}$ vektorına ten’ bolsa, onda $\vec{b}$ vektorı $\vec{a}$ vektorına ten’ boladı (simmetriyalıq sha’rti);

v) eger $\vec{a}$ vektorı $\vec{b}$ vektorına, al $\vec{b}$ vektorı $\vec{c}$ vektorına ten’ bolsa, onda $\vec{a}$ vektorı $\vec{c}$ vektorına ten’ boladı (tranzitivlik qa’siyeti).

I. Vektorlardı qosıw. Meyli bizge eki $\vec{a}$ ha’m $\vec{b}$ vektorları berilgen bolsın. Erikli O tochkasınan baslap $\vec{a}=\overrightarrow{oA}$ vektorın ha’m ol vektordın’ aqırg’ı tochkası A dan baslap

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ vektorın jasaymız. Bul jasaw n1tiyjesinde alıng'an (1-su'wret) $\vec{c} = \overrightarrow{oA}$ vektorı berilgen $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarının' qosındısı dep, al $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorları qosılıwshı vektorlar dep ataladı. Bul eki vektordın' qosındısı $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ dep jazıladı. Vektorlardı qosıwdın' bul qa'desi u'shmu'yeshlik qa'desi dep ataladı, sebebi eki vektordı qosıw ushın u'shmu'yeshlik jasawg'a tuwra keledi.



1-su'wret

Eki vektordın' qosındısı o tochkasın saylap alıwg'a baylanıssız boladı. Haqıyqatında, biz o tochkasınan basqa bir o' tochkasın saylap alıp, usı o' tochkasınan baslap joqarıdag'ı jasawlardı orınlasaq, onda $\vec{c}$ vektorına ten' bolg'an $\vec{c}\,'$ vektorına iye bolamız.

U'shmu'yeshlik qa'desinnen ma'seleler sheshiwde ju'da' paydalı bolg'an to'mendegi qa'de kelip

shıg'adı` berilgen u'sh A, B, C tochkalarının' qa'legen jaylasıwında

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ten'ligi orınlı boladı.

Vektorlardı qosıw to'mendegi qa'siyetlerge iye:

1. Qa'legen eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorları ushın, ol vektorlardın' qosındısı dep atalatug'ın bir $\vec{a} + \vec{b}$ vektorı bar boladı.

2. Qa'legen eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarının' qosındısı ushın $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ten'ligi orınlı boladı (qosıwdın' kommutativlik nızamı).

3Qa'legen eki $\vec{a}, \vec{b}$ ha'm $\vec{c}$ vektorlarının' qosındısı ushın $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ten'ligi orınlı boladı (qosıwdın' assotsiativlik nızamı).

4. Qa'legen $\vec{a}$ vektorı ushın $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ ten'ligi orınlı boladı.

vektorlardı qosıwdın' assotsiativlik qa'siyeti u'sh vektordın' qosındısın anıqlawg'a mu'mkinshilik beredi. Berilgen u'sh $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarının' qosındısı dep,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{d}$$

vektorına aytamız.

II. Vektorlardı alıw. Vektorlardı alıw a'meli vektorlardı qosıw a'meline keri a'mel retinde anıqlanadı. Berilgen $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarının' ayırmasıdep, $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$ ten'ligin qanaatlandıratug'ın $\vec{x}$ vektorına aytamız. Bul $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarının' ayırması $\vec{a} - \vec{e}$ dep belgilenedi. Sonda $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, bundag'ı $\vec{a}$ vektorı azayıwshı, al $\vec{b}$ vektorı azaytıwshı vektor dep ataladı.

Egerde biz erikli bir O tochkasının' baslap, berilgen $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorların, yag'nıy $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ha'm $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ vektorların jasasaq, onda $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ yamasa $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$. Demek $\overrightarrow{BA}$ vektorı berilgen $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarının' ayırmasına ten' boladı.

Vektorlardı sang'a ko'beytiw

Nollik vektordan o'zgeshe bolg'an $\vec{a}$ vektorının' $\lambda \neq 0$ sanına ko'beymesi dep, to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlandıratug'ın $\vec{b}$ vektorına aytamız`

a) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda||\vec{a}|$, bunda $|\lambda| - \lambda$ sanının' moduli~

b) eger $\lambda > 0$ bolsa, $\vec{e}$ ha'm $\vec{a}$ vektorları bir bag'ıtlas, al $\lambda < 0$ bolsa qarama-qarsı bag'ıtlas.

Bul $\vec{a}$ vektorının' λ sanına ko'beymesi $\lambda\vec{a}$ yamasa $\vec{a}\lambda$ dep belgilenedi, demek $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Joqarıdag'ı anıqlamadan nollik vektordın' qa'legen sang'a yamasa erikli vektordın' O sanına ko'beymesi nollik vektor bolatug'ın kelip shıg'adı.

Qa'legen λ_1, λ_2 sanları ha'm qa'legen $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları ushın vektordı sang'a ko'beytiwdin' to'mendegi qa'siyetleri orınlı boladı`

a) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ (-1)\vec{a} = -\vec{a},$ bunda $-\vec{a}$ vektorı $\vec{a}$ vektorına qarama-qarsı vektor.

b) $\lambda_1(\lambda_2\,\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\,\vec{a}$ v) $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\,\vec{a}$

g) $\lambda_1(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$

Ko'sher. Vektordın' ko'sherdegi koordinatası

Egerde tuwrının' u'stinde o'lshew birligi berilip, ha'm ol tuwrının' u'stindegi eki bag'ıttın' birewi on' bag'ıt ushın qabıl etilse, onda bul tuwrı ko'sher dep ataladı. KO'sherdin' u'stindegi uzınlıg'ı birge ten', on' bag'ıttag'ı Ha'rqanday vektor birlik vektor dep ataladı.

Ko'sherdegi qa'legen $\vec{a}$ vektorının' usı ko'sherdin' birlik vektorına qatnası $\vec{a}$ vektorının' algebralıq ma'nisi yamasa usı ko'sherdegi $\vec{a}$ vektorının' koordinatası dep ataladı. $\overrightarrow{AB}$ vektorının' algebralıq ma'nisi (AB) dep belgilenedi. Bul anıqlamadan to'mendegiler kelip shıg'adı`

1. Birlik vektordın' koordinatası 1 ge ten'.

2. Berilgen ko'sherdegi o'z-ara ten' vektorlardın' koordinataları da o'z-ara ten' boladı ha'm kerisinshe eki vektordın' koordinataları o'z-ara ten' boladı ha'm kerisinshe eki vektordın' koordinataları o'z-ara ten' bolsa, onda ol vektorlardın' o'zleri de o'z-ara ten' boladı.

3. Eger ko'sherdegi eki vektordın' uzınlıqları o'z-ara ten', al bag'ıtları qarama-qarsı bolsa, onda olardın' algebralıq ma'nislerinin' modulleri ten', al belgileri qarama-qarsı boladı, yag'nıy

$$(AB)+(BA)=0$$

4. (Jal lemması). Kosherdegi A, B, C tochkalarının' erikli jaylasıwında

$$(AB)+(BC)=(AC)$$

sanlı ten'ligi orınlı boladı.

Da'lilleniwi. Egerde A, B, C tochkalarının' ekewi, mısalı A ha'm B, yamasa A ha'm C betlesse, onda

$$(AB)+(BC)=(AC)$$

ten'ligi $(AC)=(AC)$ yamasa $(AB)+(BA)=0$ birdeyligine keledi. Sonlıqtan A, B, C tochkaları o'z-ara betlespeydi dep qabıl eteyik. Bul jag'dayda olardın' birewi qalg'an ekewinin' arasında jaylasadı. Eger B tochkası A ha'm C tochkalarının' arasında jaylassa, onda $|(AB)|+|(BC)|=|(AC)|$ ha'm $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}$ vektorları bir bag'ıtlas. Sonlıqtan olardın' algebralıq ma'nislerinin' belgileri birdey, yag'nıy (AC) sanı $(AB)+(BC)$ qosındısına ten' boladı.

Egerde C tochkası A ha'm B tochkalarının' arasında jaylassa, onda joqarıdag'ı da'lillengen boyınsha

$$(AC)+(CB)=(AB)$$

yag'nıy

$$(AC)=(AB)-(CB)$$

$-(CB)=(BC)$ bolg'anlıqtan joqarıdag'ı ten'lik to'mendegi tu'rge keledi

$$(AC)=(AB)+(BC)$$

A tochkası B ha'm C tochkalarının' arasında jatatug'ın u'shinshi jag'day da usıg'an uqsas da'lillenedi.

Vektorlardin` skalyar, vektorliq ha`m aralas ko`beymesi

Ken`isliktegi vektorlardin` skalyar, vektorliq ha`m aralas ko`beymeleri. Vektorlardin` arasindag`i mu`yesh. Vektorlardin` komplanarliq sha`rti.

Aniqlama. Eki $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$ ha`m $\overline{b}=(b_x;b_y;b_z)$ vektordin` skalyar ko`beymesi dep, bul vektorlar uzinliqlari ha`m olardin` arasindag`i φ mu`yesh kosinusinin` ko`beymesine ten` bolg`an skalyarg`a (sang`a) aytiladi ha`m $\overline{a}\cdot\overline{b}$ tu`rinde belgilenedi.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Qa`siyetleri: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a};\ (\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b});\ \overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$,

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2,\ |\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2};\ |\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};\ \cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}};$$

$$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

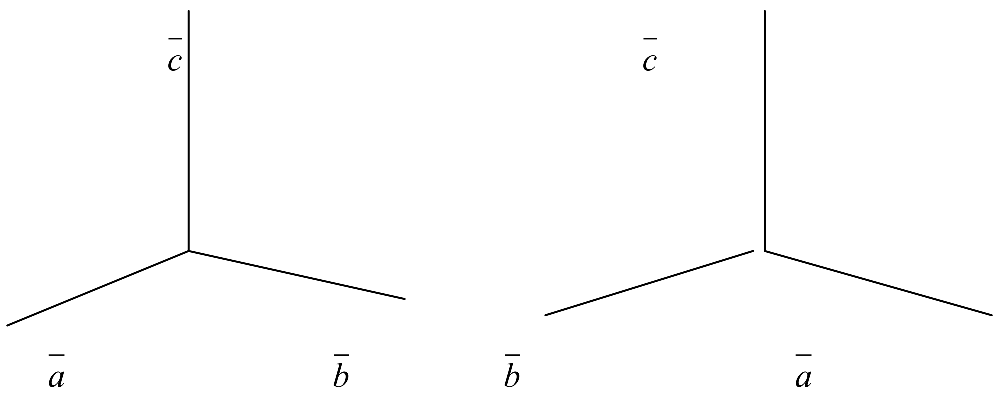
U`sh vektordan turatug`in sistema belgili bir ta`rtipte berilgen, yag`niy olardin` qaysisi birinshi, qaysisi ekinshi ha`m qaysisi u`shinshi ekenligi ko`rsetilgen bolsa, onda bul vektorlar sistemasi ta`rtiplengen dep ataladi. Ta`rtiplengen vektorlar u`shligin bir uliwma baslaniw noqatina keltiremiz. Komplanar bolmag`an ta`rtiplengen vektorlar u`lshiginde u`shinshi vektor ushinan qarag`anda birinshi vektor ekinshi vektorg`a en` qisqa bolg`an aralig`i saat tilinin` aynaliw bag`itina qarama-qarsi bag`it bolsa, onda olar on u`shlik dep ataladi. Keri jag`dayda vektorlar u`shligi shep u`shlik dep ataladi.

Aniqlama. $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\overline{b}=(b_x;b_y;b_z)$ vektorlarinin` vektorliq ko`beymesi dep to`mendegi sha`rtlerdi qanaatlandiratug`in $\overline{c}$ vektorina aytiladi ($\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ tu`rinde belgilenedi):

a) $\overline{c}$ vektori $\overline{a}$ ha`m $\overline{b}$ vektorlarina perpendikulyar;

b) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorlari on` u`shlik du`zedi;

v) $\overline{c}$ vektorinin` uzinlig`i $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$ sanina ten` ($\varphi$ - bunda $\overline{a}$ ha`m $\overline{b}$ vektorlarinin` arasindag`i mu`yesh), yag`niy $\overline{c}$ vektorinin` moduli $\overline{a}$ ha`m $\overline{b}$ vektorlarinan jasalg`an parallelogrammnin` maydanina ten`.



on` u`shlik shep u`shlik

Qa`siyetleri:

$$\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a};\ \ (\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\lambda(\overline{a}\times\overline{b});\ \overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c};$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

<u>Aniqlama.</u> $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$ ko`beyme vektorlardin` aralas ko`beymesi dep ataladi ($\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ tu`rinde belgilenedi) ha`m ol moduli boyinsha o`lshemleri sol vektorlar bolg`an parallelipedtin` ko`lemine ten` boladi: $V=\pm\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

Qa`siyetleri:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}=\bar{a}\left(\bar{b}\times\bar{c}\right);\quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b};\quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c};$$

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$; $\bar{a}$, $\bar{b}$ ha`m $\bar{c}$ vektorlarinin` komplanarliq sha`rti $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$.

5. Vectors

5.1. Basic Definitions

A **three-dimensional vector** in some coordinate system is an ordered triplet of numbers that obeys certain rules of addition and multiplication, and that are transformed under rotation of a coordinate system just as the coordinates of a point.

The members of the triplet are called the **coordinates of the vector**.

Likewise, one can define an n-dimensional vector.

Usually, vectors are denoted by boldface letters: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, …. The notation

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

means that the numbers a_1, a_2 and a_3 are the coordinates of the vector $\mathbf{a}$ in a three-dimensional coordinate system.

Two vectors, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ and $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, are equal, if their coordinates are respectively equal, that is,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

Note that a vector equality is equivalent to the system of three scalar equalities for the coordinates of the vector.

Linear vector operations include the multiplication of a vector by a scalar quantity and the addition of vectors.

If a vector $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ is multiplied by a scalar λ, then $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ is the vector such that

$$\begin{cases} b_1 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda a_2, \\ b_3 = \lambda a_3. \end{cases}$$

The **sum** of two vectors $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ and $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ is the vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}.$$

The **difference** between two vectors is defined in terms of addition:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Therefore,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2, \quad c_3 = a_3 - b_3.$$

5.2. Geometric Interpretation

5.2.1. Vectors in Three-Dimensional Space

Consider a rectangular coordinate system.

Let $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ be a given vector, and P_1 and P_2 be two points with the coordinates (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2), respectively.

The points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ and $P_2(x_2, y_2, z_2)$ can be selected so as to satisfy conditions

$$a_1 = x_2 - x_1, \qquad a_2 = y_2 - y_1, \qquad a_3 = z_2 - z_1.$$

Therefore, vector $\boldsymbol{a}$ can be interpreted as the directed line segment $\overrightarrow{P_1P_2}$ from P_1 to P_2:

The coordinates of $\overrightarrow{P_1P_2}$ are equal to the differences between the corresponding coordinates of the points $P_2(x_2, y_2, z_2)$ and $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

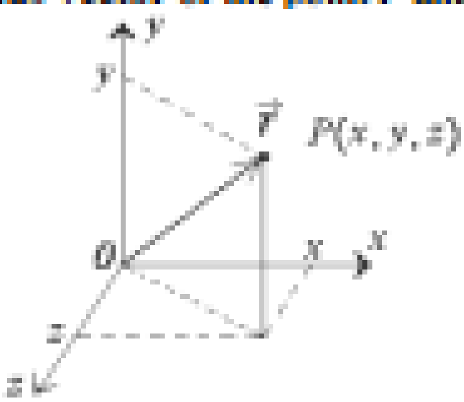
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

The point P_1 is the base of $\overrightarrow{P_1P_2}$ and P_2 is the head. The base of a vector is also called the vector tail or the origin of the vector.

The length of a vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ is defined as the length of the line segment joining P_1 and P_2.

Note that a vector is a quantity possessing both magnitude and direction at once. The boldface letter $\boldsymbol{a}$ represents a vector quantity, while $a = |\boldsymbol{a}|$ is the magnitude of the vector $\boldsymbol{a}$, that is, a is a scalar quantity entirely defined by a numerical value.

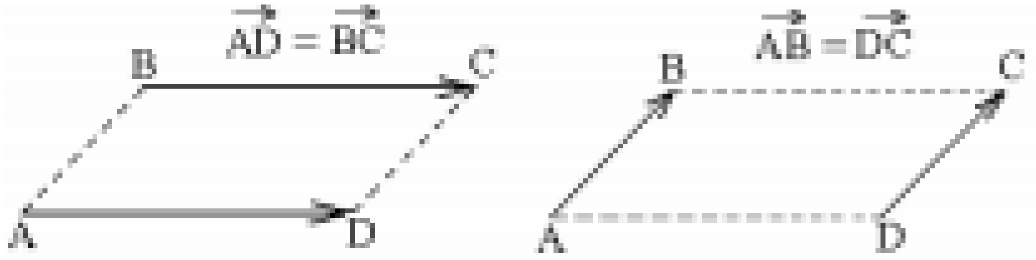
If a vector joins the origin of the coordinate system with a point $P(x, y, z)$, then it is called the **radius-vector** of the point P and denoted as $\boldsymbol{r}$.



5.2.2. Linear Vector Operations

Equality of Vectors

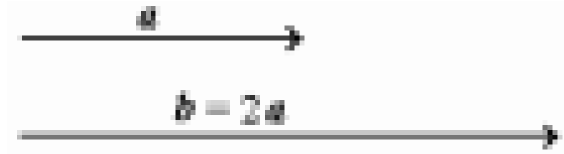
By parallel translation, equal vectors should coincide with each other:



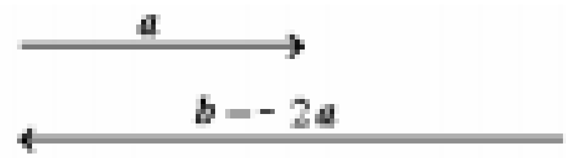
Scalar Multiplication

The length of the vector $\boldsymbol{b} = \lambda\, \boldsymbol{a}$ is $b = |\lambda|\, a$.

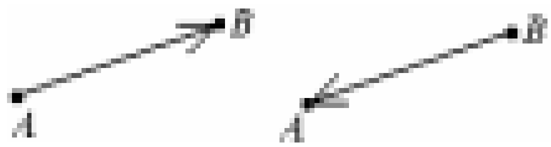
If $\lambda > 0$ then $\boldsymbol{b}$ is a vector of the same direction as $\boldsymbol{a}$:



If $\lambda < 0$ then vector $\boldsymbol{b} = \lambda\, \boldsymbol{a}$ has the opposite direction with respect to $\boldsymbol{a}$:

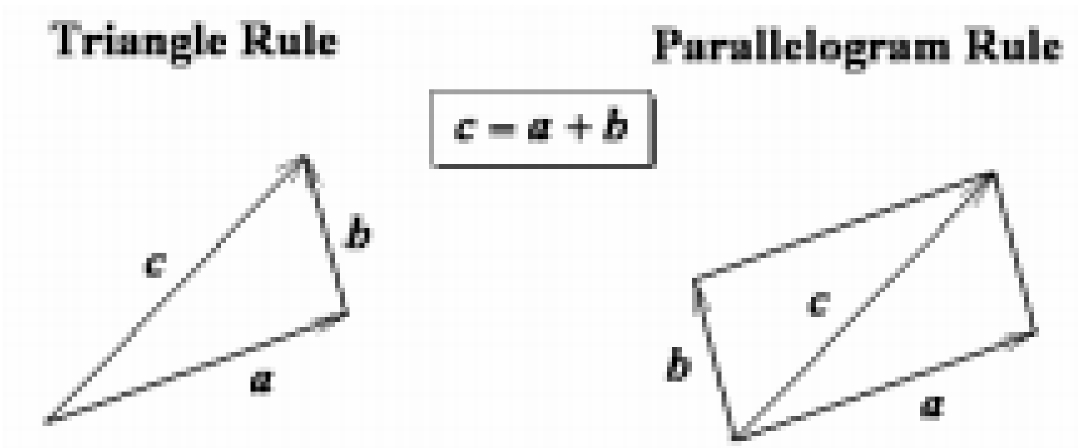


The opposite vector of $\overrightarrow{AB}$ is the vector $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



The length of a unit vector equals unity. If $\boldsymbol{a}$ is a non-zero vector then $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$ is the unit vector in the direction of $\boldsymbol{a}$.

The Sum of Two Vectors

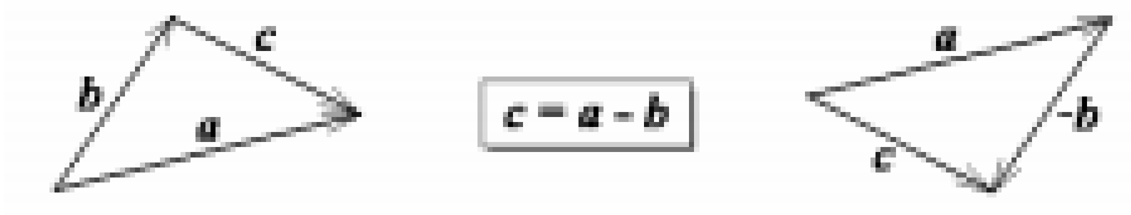


The Difference Between Two Vectors

In order to subtract a vector $\boldsymbol{b}$ from $\boldsymbol{a}$, add the opposite of $\boldsymbol{b}$ to $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Thus, the difference between two vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ is the vector $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ such that $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

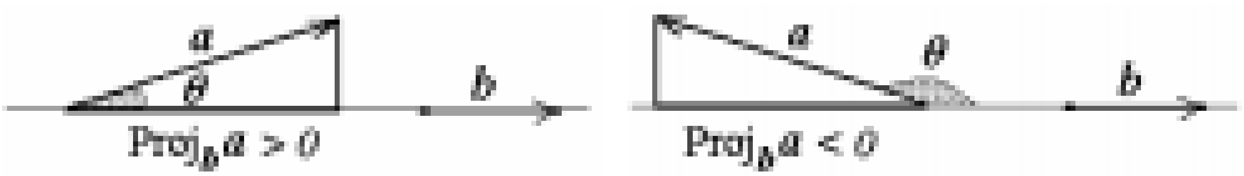


5.2.3. Projection of a Vector in a Given Direction

Let θ be an angle between two vectors, $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.
The quantity

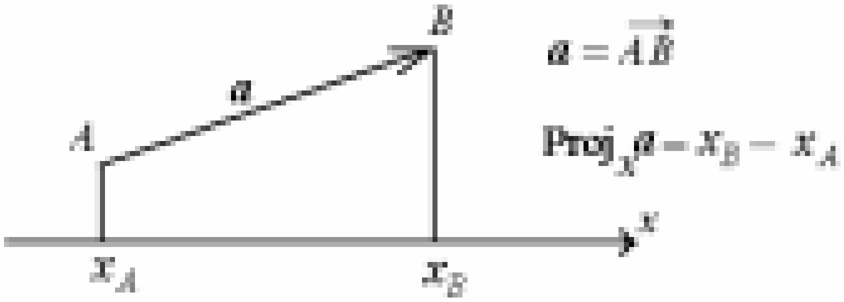
$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = a\cos\theta \qquad (1)$$

is called the **projection of $\boldsymbol{a}$ on $\boldsymbol{b}$**.
If θ is an acute angle then the projection is positive.
If θ is an obtuse angle then the projection is negative.



One can easily prove that

If the direction is determined by the x-axis, then the projection of $\boldsymbol{a}$ onto the x-axis equals the difference between the coordinates of the endpoints of the vector:

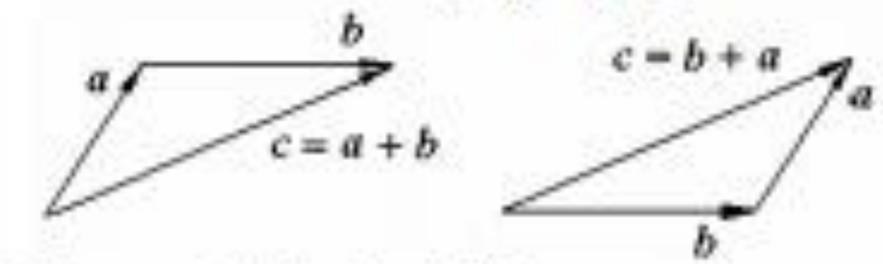


5.2.4. Properties of Linear Vector Operations

All the below formulated properties are based on the properties of real numbers, and they are result of the definitions of linear vector operations. Proofs can be easily performed by the reader.

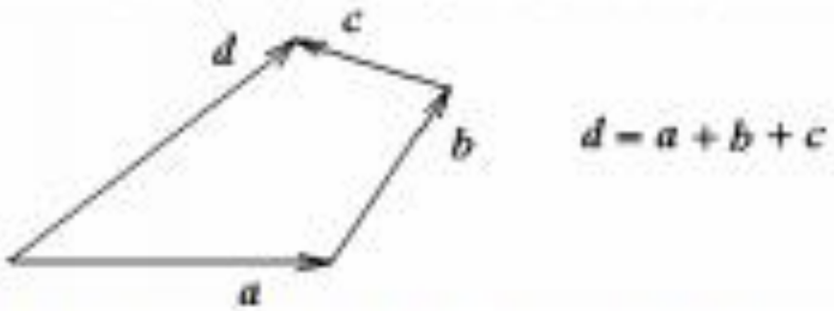
1) The commutative law for addition:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$



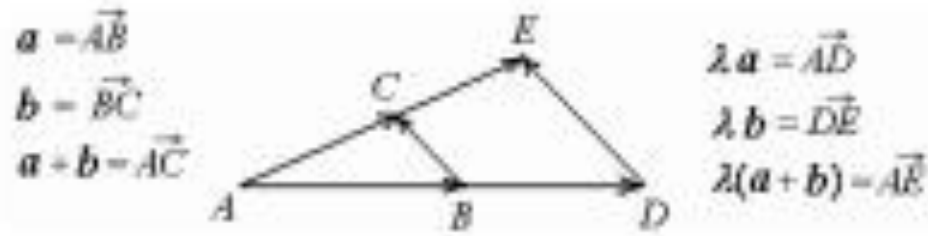
2) The associative law for addition:

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$



3) The distributive laws for multiplication over addition:

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b}\,, \qquad (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{a}\,.$$



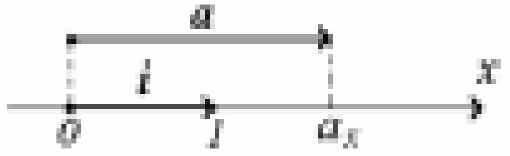
5.3. Decomposition of Vectors into Components

5.3.1. Rectangular Orthogonal Basis

1) Let $\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$ be the unit vector in the positive direction of the x-axis. Any vector $\boldsymbol{a} = \{a_x, 0, 0\}$ can be expressed as

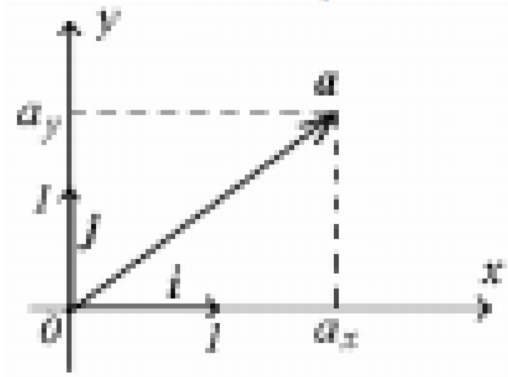
$$\boldsymbol{a} = \{a_x, 0, 0\} = a_x\{1, 0, 0\} = a_x\,\boldsymbol{i}\,.$$

The vector $\boldsymbol{i}$ is said to be a basis in an one-dimensional space of vectors.



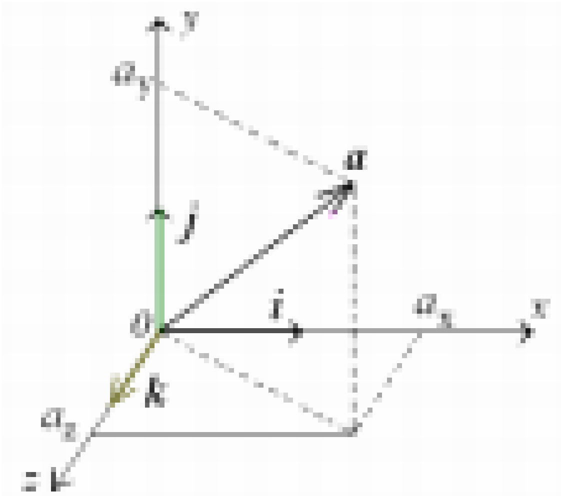
2) Let $i = \{1, 0, 0\}$ and $j = \{0, 1, 0\}$ be two unit vectors in the positive directions of the x-axis and y-axis, respectively.
Any vector $a = \{a_x, a_y, 0\}$ can be expressed as

$$a = \{a_x, a_y, 0\} = a_x\{1,0,0\} + a_y\{0,1,0\} = a_x i + a_y j.$$



They say that i and j are the basis vectors in a two-dimensional space of vectors.

3) Let $i = \{1, 0, 0\}$, $j = \{0, 1, 0\}$, and $k = \{0, 0, 1\}$ be three mutually orthogonal unit vectors in the positive directions of the Cartesian coordinate axes.



Any vector $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ can be expressed as the linear combination of the vectors i, j and k:

$$a = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\{1,0,0\} + a_y\{0,1,0\} + a_z\{0,0,1\}.$$

Therefore, we obtain the resolution of an arbitrary vector a

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \qquad (2)$$

over the orthogonal basis of vectors, where quantities a_x, a_y and a_z are called the coordinates of the vector a with respect to this basis.

№5 TEMA:

Matritsa haqqi'nda tu'sinik. Matritsalardi'n' ten'ligi. Matritsalar u'stinde a'meller. Keri matritsalar. Birinshi da`rejeli ten`lemeler sistemasının` matritsalıq jazılıwı ha`m matritsalıq sheshimi.. Matritsa rangi.

MATRITSA. TIPLERI. MATRITSA U`STINDE A`MELLER. QA`SIYETLERI.

R E J E

1.Matritsa tu`sinigi,tu`rleri.

2.Qatar, bag`ana , elementler h`a`m o`lshemi.

3.Matritsa u`stinde a`meller,qa`siyetleri.

Tayanısh so`zler:

Tuwrımu`eyshli, kvadrat matritsa, matritsa-qatar, matritas-bag`ana, nollik, birlik matritsa,trasponerlew.

1^0.Matritsalar birinshi ret matematikag'a 1857 – jılı kiritilgen. Matritsalıq belgilewler ha'r qıylı sızıqlı tu'rlendiriwler orınlang'anda qolaylı ha'm og'ada paydalı. Matritsalıq operatsiyalardı an'sat a'melge asıratug'ın ha'zirgi zaman esaplaw mashinalarının' rawajlanıwı bilimlerdin' ha'r qıylı tarawlarında matritsalardı ken'inen paydalanıwg'a qosımsha tu'rtki jasadı.

m x n - o'lshemli A matritsası dep m qatardan ha'm n bag'anadan ibarat keste(tablitsa) tu'rinde jaylastırılg'an mxn haqıyqıy sanlardın' jıynag'ına aytıladı. Matritsalar latın alfavitinin` bas h`a`ripleri menen belgilenedi: A, B, C, D, Q, E.

Qısqasha bılayda jazıladı:

$$A=\left(a_{ij}\right),\quad i=\overline{1...m},\quad j=\overline{1...n}\;,\quad A=\left\| a_{ij}\right\|,\quad i=\overline{1...m},\quad j=\overline{1...n}\,.$$

Tolıq jazılıwı:

$$\mathrm{A}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ ------ \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn}\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ ------ \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn}\end{pmatrix} = \left\|a_{ij}\right\| = \left(a_{ij}\right) \quad i=1,2,...,\mathrm{m}, \quad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{n}$$

Matritsanı du'ziwshi sanlar – matritsanın' elemetleri dep ataladı. Eger m≠n bolsa, onda A matritsası tuwrımu'yeshli dep, al eger m=n bolsa, onda ol n- ta'rtipli kvadrat matritsa delinedi.

Matritsanın' joqarıdag'ı belgileniwinde indeks i– qatar nomerin, al j – bag'ana nomerin an'latadı. m x 1 o'lshemli

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots\cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

tu'rindegi matritsa matritsa - bag'ana yamasa vektor – bag'ana dep, al $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sanları onın' koordinataları delinedi. Tap usıg'an uqsas 1 x n o'lshemli bir qatardan turg'an matritsa matritsa – qatar yamasa vektor – qatar delinedi ha'm

$$A = \left\| a_1, a_2 \ldots a_n \right\| = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

tu'rinde belgilenedi.

Barlıq elementleri $a_{ij}=0$ bolg'an matritsa nollik matritsa delinedi. Mına

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ - - - & - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadratlıq matritsada $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elementleri bas diagonaldı,

$a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n-1\,2}, \ldots a_{n1}$ elementleri ekinshi diagonaldı du'zedi.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \ldots 0 \\ - - - & - - - \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_n \end{pmatrix}$$

tu'rindegi kvadratlıq matritsa diagonallıq matritsa delinedi ha'm

D=diag($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) tu'rinde belgilenedi. Eger bunda $\lambda_1=\lambda_2= \ldots=\lambda_n=1$ bolsa, onda bul kvadratlıq matritsa birlik matritsa delinedi ha'm ol E arqalı belgilenedi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Matritsalar u'stinde a`meller

Eki matritsanı qosıw ushın bul matritsalardın' birdey o'lshemlerge iye bolıwı za'ru'rli. Eki $A=(a_{ij})$ ha'm $B=(b_{ij})$ matritsalarının' qosındısı dep sonday $C=(c_{ij})$ matritsasına aytıladı, bunda $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots, m$, $j=1,2,\ldots, n$. Eki matritsanın' qosındısı $A+B$ tu'rinde belgilenedi.

Matritsalardı qosıw to'mendegi qa'siyetlerge iye

1. $A+B=B+A$ (kommutativlik qa'siyeti)

2. $(A+B)+C= A+(B+C)$ (assotsiativlik qa'siyeti)

Qa'legen birdey o'lshemli eki matritsa ushın $A+X=B$ bolatug'ın birden bir X matritsası mudamı bar boladı. Sonda X matritsası B ha'm A matritsalarının' ayırması dep ataladı. Bul jag'dayda $X=B-A=(b_{ij}-a_{ij})$ tu'rinde jazadı. O – nollik matritsa bolg'anda $A+X=O$ ten'lemesi $X=O-A$ sheshimge iye boladı, ol A matritsag'a qarama-qarsı matritsa dep ataladı ha'm $-A$ arqalı belgilenedi $-A=-(a_{ij})$ ekeni ko'rinip tur.

Bul qa'siyetlerdin' orınlı ekeni haqıyqıy sanlardın' sa'ykes qa'siyetlerinen kelip shıg'adı.

$A=(a_{ij})$ matritsasının' $\beta\in R=(-\infty,\infty)$ sanına ko'beymesi dep

$$\beta A=(\beta a_{ij})$$

matritsasına aytıladı.

A ha'm B matritsaların α ha'm β haqıyqıy sanlarına ko'beytiw to'mendegi qa'siyetlerge iye:

1) $1\cdot A=A$; $(-1)\cdot A=-A$; $0\cdot A=0$, sonın' menen birge son'g'ı ten'likte sol jaqtag'ı 0 – san, al on' jaqtag'ı 0 – nollik matritsa.

2) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ – sanlarg'a qarata distributivlik qa'siyeti

3) $\alpha(A+B)= \alpha A+\alpha B$ – matritsalarg'a qarata distributivlik qa'siyeti.

A ha'm B matritsalarg'a kelisilgen matritsalar delinedi, eger A

matritsasının' bag'analar sanı B matritsasının' qatarlar sanına ten' bolsa.

m x n o'lshemli $A=(a_{ij})$ matritsasının' n x p o'lshemli $B=(b_{ij})$ matritsasına ko'beymesi dep sonday m x p o'lshemli $C=AB$ matritsasına aytıladı, bunda c_{ik} element to'mendegi formula boyınsha anıqlanadı

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Solay etip, C matritsasının' c_{ik} elementi A matritsasının' i – qatarının' elementlerinin' B matritsasının' j – bag'anasının' sa'ykes elementlerinin' ko'beymelerinin' qosındısına ten'.

Eger A·B=B·A ten'ligi orınlansa, onda A ha'm B matritsaları kommutativ matritsalar delinedi, ulıwma jag`dayda

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Matritsalardın' ko'beymesinin' anıqlamasınan

$$\mathbf{A\cdot E=E\cdot A=A; \qquad A\cdot O=O\cdot A=O}$$

ten'likleri kelip shıg'adı.

Eger A – kvadrat matritsa bolsa, onda $A\cdot A\cdot \ldots \cdot A=A^n$ ko'beymesi A matritsasının' n – da'rejesi delinedi.

Matritsalardın' ko'beymesi ushın to'mendegi qa'siyetleri orınlı

1.(AB)C=A(BC) – assotsiativlik qa'siyeti

2.(A+B)C=AC+BC; A(B+C)=AB+AC – distributivlik qa'siyeti.

A matritsasınan onın' qatarların sa'ykes bag'anaları menen almastırıwdan payda bolg'an A^T matritsası A g'a qatnası boyınsha transponirlengen matritsa delinedi

$$A^T = (a_{ij})^T = (a^T_{ij}) = (a_{ji})$$

Eger $A=A^T$ bolsa, onda A matritsası simmetriyalı matritsa delinedi.

A±O=A±O=A **A+B=B+A** **(A+B)+C=A+(B+C)** **1·A=A·1=A** **A·0=0·A=O** **(α±β)·A=α·A±β·A** **α·(A±B)α·A±α·B** **A·B≠B·A** **(A·B)·C=A·(B·C)** **A·E=E·A=A** **(A±B)·C=A·C±B·C**	

M a t r i ts a. Matritsalar ustida chizikli amallar. Teskari matritsa. Matritsaning rangi.

1. Matritsalar.

m ta satrli va n ta ustunli ushbu $A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1i} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2i} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mi} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ twg`ri burchakli jadvalga $mxn$ wlchamli twg`ri burchakli matritsa deb ataladi. Bu erda a_{ij} - sonlar matritsaning elementlari.

Matritsalar lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi. A, B, C, D, Q, E

Qisqacha quyidagicha yoziladi $A=\left(a_{ij}\right)$, $i=\overline{1...m}$, $j=\overline{1...n}$, $A=\left\| a_{ij} \right\|$, $i=\overline{1...m}$, $j=\overline{1...n}$.

Agar n=1 bwlsa, $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ..... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ustun matritsa deyiladi.

Agar $m=1$ bwlsa, $A=\left(a_{11}\ \ a_{12}...a_{1n}\right)$ satr matritsa deyiladi.

Agar $m=n$ bwlsa, $A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1i}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2i}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}...a_{ni}...a_{nn} \end{pmatrix}$ n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi..

A kvadrat matritsa uchun detA ni hisoblash mumkin.

Agar $\det A \neq 0$ bwlsa, A kvadrat matritsa xosmas yoki maxsusmas matritsa deyiladi.

Agar $\det A = 0$ bwlsa, A matritsa xos yoki maxsus matritsa deyiladi.

Maxsus matritsa uchun echim yuk .

$\left(a_{11}\ a_{22}...a_{nn}\right)$- bosh dioganal deyiladi. $(a_{1n},\ a_{2n-1},...,a_{n1})$ -yordamchi dioganal deyiladi.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga dioganal matritsa deyiladi. $\det A = a_{11}\cdot a_{22}......a_{nn}$ bwladi.

$A=\begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix}$ ga skalyar matritsa deyiladi. $\det A = a^n$ bwladi.

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ ga birlik matritsa deyiladi. $\det E = 1$ bwladi.

$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ ga nol matritsa deyiladi. $\det Q = 0$ bwladi.

A matritsaning mos satrlari, uning mos ustunlari bilan almashtirish natijasida hosil bwlgan matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi va A^T deb belgilanadi.

Agar A matritsa kvadrat matritsa bwlsa, u holda $\det A = \det A^T$ bwladi.

Agar $A = A^T$ shart bajarilsa, u holda A kvadrat matritsa simmetrik matritsa deyiladi.

Misol . $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bwlsa, u holda $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bwladi.

2. Matritsalar ustida amallar.

Agar $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarning mos elementlar teng bwlsa, ya`ni $(a_{ij}) = (b_{ij})$, bu matritsalar teng matritsalar deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

Matritsalarni qwshish, ayirish, songa kwpaytirish, bir-biriga kwpaytirish mumkin.

1) $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarning yig`indisi deb $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi, bunda $(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$, $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ A+V=S kabi belgilanadi.

2) $A = (a_{ij})$matritsaning λ soniga kwpaytmasi deb shunday $C = (c_{ij}) = \lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij})$ matritsaga aytiladiki, bunda $(c_{ij}) = \lambda \cdot (a_{ij})$.

Matritsalarni qwshish ayirish va songa kwpaytirish chiziqli amallardir

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ va V=$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2A-V=? 2A-V=$\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

2) λ son va A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$berilgan A-$\lambda$E=? A-$\lambda$E=$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$

Matritsalarni kwpaytirish.

$m \times k$ wlchamli A=(a_{ij}) matritsaning $k \times n$ wlchamli V=(b_{ij}) matritsaga kwpaytmasi deb $m \times n$ wlchamli shunday S=(c_{ij}) matritsaga aytildiki, uning c_{ij} elementi A matritsa satr elementlarini V matritsaning mos ustun elementlariga kwpaytmalari yig`indisiga teng, ya`ni S $c_{ij}\, a\quad c_{ij} a_{ij} b_{ij} + a_{j2} b_{2j} + b$ u holda kabi belgilanadi S $\neq$ V A

Misol .A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ A V $\neq$ V A har doim bajarilmaydi. V E=E V

Matritsalarni kwpaytirishning asosiy xossalari .

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, **2)** (A +B)$\cdot$C=A$\cdot$C+B$\cdot$C, **3)** $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$, **4)** $A \cdot E = E \cdot A = A$

5) A$\cdot$Q=Q$\cdot$A=Q, **6)** $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$, **7)** det(A$\cdot$B)=detA$\cdot$detB .

3. Teskari matritsa.

Ushbu A kvadrat matritsani qaraymiz: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1i}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2i}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{ni}...a_{nn} \end{pmatrix}$.

Agar A·B=B·A=E bwlsa, V matritsa A matritsa uchun teskari matritsa deb ataladi va u A^{-1} kabi belgilanadi.

Teorema:

Agar A matritsa xosmas, ya\`ni $\det A \neq 0$ bwlsa, u holda uning uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud.

1) A kvadrat matritsa uchun teskari matritsa mavjud.

2) $\det A \neq 0$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}...A_{k1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32}...A_{k2} \\ .... \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n}...A_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaga A matritsaga biriktirilgan matritsa deyiladi.

Bu erda A_{ij} lar a_{ij} elementlarning algebraik twldiruvchilari.

$$B=A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaga A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Misol 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, detA=$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=8-3=5$\neq 0$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4,\quad A_{12}=(-1)^{3}\cdot 3=-3,\quad A_{21}=(-1)^{3}\cdot=-1,\quad A_{22}=(-1)^{4}\cdot 2=2.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tekshiramiz.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 8-3 & 4-4 \\ -6+6 & -3+9 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot A$$

Teskari matritsaning xossalari:

1) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, 2) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

4. Matritsaning rangi.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 79 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 79 & 34 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 79 & 34 \end{pmatrix}. \qquad \text{rang}A=3.$$

18 ta 2 - tartibli minori, 4 ta 3 - tartibli minori mavjud.

A matritsadan 2 ta satr 2 ta ustun ajratamiz satr ustunlarining kesishmasida 2-tartibli matritsa xosil bulib uning determinanti matritsaning 2 tartibli minori deyiladi.

Agar $\begin{matrix} M_k \neq 0 \\ M_k = 0 \end{matrix}$ bulib

Xammasi u xolda rang A=K

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} M_1 = (1) \\ M_1 = (7) \ldots\ldots\ldots M_{12} = (5) \end{matrix}$$

Birinchi tartibli minorlari .

Matritsaning rangi deb uning noldan farkli eng kata minorining tartibiga aytiladi **Matritsada elementar almashtirishlar**.

A) nollardan iborat qatorlarni wchirish .

B) ikkita parallel katorlarni wrnini almashtirish .

V) Bir katorni barcha elementlarini biror songa kupaytirib boshka katorning mos elementlariga kushish .

G) katorning barcha elementlarini noldan farkli bir xil songa kupaytirish

Bu almashtirishlar natijasida ekvivalent matritsalar xosil buladi Matritsaning rangi uzgarmaydi

Teorema Matritsalar ustida elementar almashtirishlar natijasida uning rangi uzgarmaydi .

Misol . $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. rang$A$=2.

1. Matrices

Matrices allow us to operate with arrays consisting of many numbers, functions or mathematical statements, just as if we operate with several items.
Matrices have a wide application in different branches of knowledge, for instance, in mathematics, physics, computer science, and so on. Matrices allow us to solve systems of ordinary equations or sets of differential equations, to predict the values of physical quantities in quantum theory, to encrypt messages in the Internet, and so on.
In this chapter, we discuss the basic concepts of the matrix theory, introduce matrix characteristics, and study some matrix applications. The important propositions are proved and illustrated by examples.

1.1. Basic Definitions

> A matrix is a rectangular array of numbers, algebraic symbols or mathematical functions, provided that such arrays are added and multiplied according to certain rules.

Matrices are denoted by upper case letters: $A, B, C, \ldots$
The size of a matrix is given by the number of rows and the number of columns. A matrix with m rows and n columns is called an $m \times n$ matrix (pronounce m-by-n matrix). The numbers m and n are the dimensions of the matrix. Two matrices have the same size, if their dimensions are equal.

Examples:

3×2 matrix	2×3 matrix	2×2 matrix
$A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{5} & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

Members of a matrix are called its matrix elements or entries. The entry in the i-th row and the j-th column of a matrix A is denoted by $a_{i,j}$ or $A_{i,j}$. The subscripts indicate the row first and the column second.

In the examples above, the boldface elements are $a_{3,2} = 4$ and $b_{1,2} = 5$.

A matrix with one row is called a row matrix: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \end{pmatrix}$.

A matrix with one column is called a column matrix: $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \cdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$.

In the general form, a matrix is written as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A short form of this equality is $A = \| a_{i,j} \|$.

A square matrix has as many rows as columns, the number of which determines the order of the matrix, that is, an $n \times n$ matrix is the matrix of the n-th order.

1.2. Matrix Operations

Equality of Matrices

Two matrices, $A = \| a_{i,j} \|$ and $B = \| b_{i,j} \|$, are equal, if they have the same sizes and their elements are equal by pairs, that is,

$$\boxed{\begin{gathered} A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{i,j} = b_{i,j} \\ \text{for each pair of indexes } \{i, j\}. \end{gathered}}$$

Scalar Multiplication

Any matrix A may be multiplied on the right or left by a scalar quantity λ. The product is the matrix $B = \lambda A$ (of the same size as A) such that

$$b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

for each $\{i, j\}$.

> To multiply a matrix by a scalar, multiply every matrix element by that scalar.

Example: Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Then $5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 0 \\ 5 & 20 & -5 \end{pmatrix}$.

The Sum of Matrices

If $A = \| a_{i,j} \|$ and $B = \| b_{i,j} \|$ are matrices of the same size, then the sum, $A + B$, is the matrix $C = \| c_{i,j} \|$ such that

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

for each pair (i, j).

> To add matrices, add the corresponding matrix elements.

Example: Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Then

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplication of a Row by a Column

Let A be a row matrix having as many elements as a column matrix B.

In order to multiply A by B, it is necessary to multiply the corresponding elements of the matrices and to add up the products. Symbolically,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \cdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,1}$$

Thus, multiplying a row matrix by a column matrix we obtain a number. Later we will show that any number can be considered as an 1×1 matrix.

To multiply a two-row matrix $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \end{pmatrix}$ by the column matrix $B = (B_1) = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix}$, we multiply each row of A by the column of B. In this case, the product AB is the following 2×1 matrix:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1) = \begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + \ldots + a_{2,n}b_{n,1} \end{pmatrix}.$$

Similarly, the multiplication of an m-row matrix by an n-column matrix generates the $m \times n$ matrix.

Matrix Multiplication

The product of two matrices, A and B, is defined, if and only if the number of elements in a row of A equals the number of ones in a column of B.
Let A be an $m \times l$ matrix and B be an $l \times n$ matrix. Then the product AB is the $m \times n$ matrix such that its entry in the i-th row and the j-th column is equal to the product of the i-th row of A and the j-th column of B. If we denote the rows of A by $A_1, A_2, \dots$ and the columns of B by $B_1, B_2, \dots$, then

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_n \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_n \end{pmatrix}$$

To find the element $c_{i,j}$ in the i-th row and the j-th column of the matrix $C = AB$, multiply the i-th row of A by the j-th column of B:

$$c_{i,j} = A_iB_j = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} b_{k,j} \, .$$

Note 1: The symbolic notation A^2 means the product of two equal square matrices: $A^2 = A \cdot A$.

Similarly, $A^3 = A \cdot A \cdot A$,

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}.$$

Note 2: In general, the product of matrices is not commutative: $AB \neq BA$.

Examples:

1) For each of the following matrices,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ and } F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1-1 & 2+1 \end{pmatrix},$$

determine whether it equals the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ or not.

Solution: The dimensions of both matrices, C and D, differ from ones of A. Therefore, $A \neq C$ and $A \neq D$.
There are two matrices, B and F, which consist of the same elements as A and have the same order. However, the corresponding entries of A and B are not equal in pairs, and so $A \neq B$.
The matrix F satisfies all conditions of matrix equality, that is, $A = F$.

2) Let $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 5 & 15\end{pmatrix}$.

Solve for X the matrix equation

$$X+4A=B.$$

Solution:

$$X=B-4A=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 5 & 15\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 5 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -12\\ -8 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 31\end{pmatrix}.$$

3) Given two matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 0\end{pmatrix}$, find the matrix products AB and BA.

Solution:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 0\end{pmatrix}=1\cdot 5+2\cdot(-4)+3\cdot 0=-3,$$

$$BA=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3\\ -4\cdot 1 & -4\cdot 2 & -4\cdot 3\\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\ -4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4) Let $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$. Find the difference between matrix products AB and BA.

Solution:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+1\cdot 4 & 2\cdot 5+1\cdot(-1)\\ 0\cdot 3+3\cdot 4 & 0\cdot 5+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot 1+5\cdot 3\\ 4\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 4 & -4\end{pmatrix}.$$

№6 TEMA:

Sızıqlı ten`lemeler sistemasınıń` ulıwma teoriyası. R^n ken`islik haqqında tu`sinik. E^n ken`islik haqqında tu`sinik.Kroneker Kapelli toereması. Si'zi'qli' sa'wlelendiriwler.

Ko`pag`zalı. Joqari ta`rtipli $\left(n=2,3,4\right)$ ten`lemeler.

Kardano formulasi. Ten`lemelerdi sheshiw

Joqarg`i ta`rtipli siziqli algebraliq ten`lemeler (n=2; 3; 4) ha`m olardin` sheshimlerin tabiw usillari:kvadrat, kub, bikvadrat ten`lemeler. Tiykarg`i teoremalar: algebranin` tiykarg`i teoremasi, Bezu, Viet teoremasi (n=2; 3). Kardano formulasi. Ten`lemelerdi sheshiw usillari ha`m olardin`algoritmi.

n - ta`rtipli ko`pag`zalını yamasa polinomdı qarastıramız:

$$P_n\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+......+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad (1)$$

bunda $n\geq 0$ - pu`tin san, $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ haqıyqıy yamasa kompleks sanları ko`pag`zalınıń` koefficentleri dep ataladı.Bul jerde a_n bas koefficent,h`a`m a_nx^n bas ag`za,al $a_0$ saltan` ag`za delinedi.Bas ag`zanıń` da`reje ko`rsetkishi ko`pag`zalınıń` da`rejesin an`latadı. Ko`pag`zalınıń` (1)-ko`riniste jazılıwı, ko`pag`zalınıń` kononikalıq tu`ri dep ataladı.Mısalı:

$P_2(x)=ax^2+bx+c$ kvadrat u`sh ag`zalı;

$P_4(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ to`rtinshi da`rejeli ko`pag`zalı.

Teorema (BEZU). $P_n\left(x\right)$ ko`pag`zalini $x-\alpha$ eki ag`zalısına bo`lgende shiqqan qaldiq $P_n\left(x\right)$ ko`pag`zalinin` $x=\alpha$ degi ma`nisine ten`.

$$P_n(x)=(x+\alpha)\cdot P_{n-1}(x)+R,$$

$$P_n(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+.....+a_1\alpha+a_0=R$$

Anıqlama: Ko`pag`zalınıń` kononikalıq jazılıwında o`zgeriwshi x-tıń` bazı bir α-ma`nisinde, ko`pag`zalınıń` ma`nisi nolge ten` bolsa, onda o`zgeriwshinin` bul ma`nisi ko`pag`zalınıń` koreni(sheshimi) dep ataladı,yag`nıy

$$P_n\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$P_n(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+.....+a_1\alpha+a_0=0$$

Algebranin` tiykarg`i teoreması. Ha`r qanday $n$ - da`rejeli ko`pag`zali keminde bir korenge iye boladı.

n-da`rejeli $P_n(x)$ ko`pag`zali $x-\alpha$ tu`rindegi n dana siziqli ko`beytiwshige ajiraladi, yag`niy

$$P_n(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).....(x-\alpha_n).$$

Eger haqiyqiy koefficientli $P_n(x)$ ko`pag`zali $\alpha=\gamma+i\delta$ kompleks korenge iye bolsa, onda ol usı sannın` tu`yinlesi $\overline{\alpha}=\gamma-i\delta$ korenge de iye boladi.

Eger $P_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x-\alpha_m)^{k_m}$ bolsa, onda $k_1+k_2+...+k_m=n$.

Ha`r qanday n-da`rejeli $P_n(x)$=0 ten`lemesi keminde bir korenge iye ha`m n danadan artiq korenge iye bola almaydi.Bul tastıyıqlawlardın` durıslıg`ın kvadrat u`s hag`zalını qarap shıg`ıwdan baslaymız.Kvadrat u`s hag`zalının` korenin tabıw ushın, kvadrat ten`lemeni sheshiw kerek,yag`nıy:

$$ax^2+bx+c=0,$$

$$D=b^2-4ac$$

Kvadrat ten`lemenin` korenlerinin` birew yamasa ekew bolıwı, diskriminant dep atalıwshı D- anlatpasının` ma`nisine baylanıslı.Eger D≠0 bolsa eki korenge, h`a`m D=0 bolsa bir korenge iye boladı, olardı to`mendegi formulalar menen tabamız:

$$Eger\ \ D\neq 0\ bolsa\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

$$Eger\ \ D=0\ bolsa\ \ x=\frac{-b}{2a}$$

Bul jerde D>0 bolsa h`a`r eki koren h`aqıyqıy,al D<0 bolsa h`a`r eki koren kompleks.

Viet teoreması.Eger x_1, x_2 sanları kvadrat ten`lemenin` korenleri bolsa , onda

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ten`likleri orınlı.

$x_1,\ x_2$ sanları kvadrat ten`lemenin` korenleri bolsa,onda kvadrat u`sh ag`zalını jiklep jaza alamız,yag`nıy:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

tu`rindegi ten`leme kub ten`leme dep ataladi, bunda $a, b,\ c$ - berilgen turaqli sanlar.

(2) ten`lemede $x=z-\dfrac{a}{3}$ an`latpası ja`rdeminde o`zgeriwshilerdi almastirsaq,

$$z^3+pz+q=0 \tag{3}$$

ten`lemesin alamız. (3) ten`lemenin` korenlerin Kardano formulasinan paydalanip tabiw mu`mkin:

$$z=u+v;$$
$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}};$$
$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

Eger $\Delta>0$ bolsa, onda $z_1=u_1+v_1,\ z_{2,3}=-\dfrac{u_1+v_1}{2}\pm\dfrac{u_1-v_1}{2}i\sqrt{3}$, bunda u_1, v_1 arqali u, v korenlerinin` haqiyqiy bo`lekleri belgilengen;

Eger $\Delta=0$ bolsa, onda $z_1=\dfrac{3p}{q},\ z_2=z_3=-\dfrac{z_1}{2}$

Eger $\Delta<0$ bolsa, onda

$$z_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\ z_{2,3}=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\pm120^0\right),\text{ bunda } \cos\varphi=-\frac{q}{2}\Big/\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

Viet teoremasi. Eger x_1, x_2, x_3 sanlari (2) ten`lemenin` korenleri bolsa, onda

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0 \quad \text{ha`m} \quad \begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_3); \\ b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3; \\ c=-x_1x_2x_3. \end{cases}$$

№7 TEMA:

Tegisliktegi ha`m ken`isliktegi tuwrı mu`yeshli koordinatalar sistemaları. Tegislikte, ken`islikte eki tochka arasındag`ı aralıq. Polyar koordinatalar. Dekart ha`m polyar koordinataları arasındag`ı baylanıs.

Reje:

1.Tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi.
2.Eki tochka arasindag`i araliq.
3.Kesindini berilgen qatnasta bo`liw.
4. Tuwrı sızıq ha`m onın` ten`lemeleri.
5. Eki tuwrı sızıqtın` parallellik ha`m perpendikulyarlıq sha`rtleri.

Matematikanin` geometriyaliq ma`selelerdi algebraliq usillardi paydalanip sheshetug`in bo`limi analitikaliq geometriya dep ataladi. Analitikaliq geometriyanin` tiykarinda koordinatalar usili bolip, oni XVII a`sirde frantsuz matematigi ha`m filosofi Rene DEKART kirgizdi ha`m bul usildi ko`plegen ma`selelerge qollandi. Koordinatalar usili noqatinin` halin koordinatalar sistemasin payda etiwshi bazibir siziqlarg`a salistirmali qarawg`a tiykarlang`an.

Tuwridag`i Dekart koordinatalar sistemasi (n=1 o`lshemli ken`islik $E^1$). Qa`legen tuwri siziqta baslang`ish O naqati, «$\rightarrow$« belgisi menen on` bag`it ha`m uzinliq birligi (masshtab) tan`lap alinadi. Payda etilgen bir o`lshemli koordinatalar sistemasi menen haqiyqiy sanlar ko`pligi arasinda bir ma`nisli sa`ykeslik ornatiw mu`mkin. Qa`legen bir M noqatsinin` tuwridag`i orinina sa`ykes keliwshi x sani (1-su`wret) onin` koordinatasi dep ataladi ha`m $M(x)$ tu`rinde belgilenedi.

1-su`wret.

Eki $A(x_1)$ ha`m $B(x_2)$ noqatlari arasindag`i d araliq

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} .$$

Ko`o`sherdegi (algebraliq) bag`itlang`an kesindinin` shamasi $AB = x_2 - x_1$, bunda $A(x_1)$ ha`m $B(x_2)$.

Tegisliktegi Dekart koordinatalar sistemasi (n=2 o`lshemli ken`islik E^2). Tegisliktegi qa`legen O noqati (bul noqat koordinata basi dep ataladi) arqali o`z-ara perpendikulyar eki ko`sher Ox (abstsissa) ha`m Ou (ordinata) o`tkiziledi ha`m bul ko`sherlerde ten`dey masshtab birligi tan`lap alinadi. Ox ha`m Ou ko`sherleri jaylasqan tegislik Oxu koordinatalar tegisligi dep ataladi.Tegisliktegi noqatinin` koordinatalari dep noqatinin` usi tegisliktegi orinin aniqlaytug`in sanlar jubinaNoqatinin` shereklerdegi koordinatalarinin` belgileri:

	I	II	III	IV
X	+	-	-	+
U	+	+	-	-

Tegisliktegi eki $A(x_1;y_1)$ ha`m $B(x_2;y_2)$ noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Ushlari $A(x_1,y_1)$ ha`m $B(x_2,y_2)$ noqatlarinda bolg`an kesindini berilgen λ qatnasta bo`liw, yag`niy $AN:NB=\lambda$ ten`ligin qanaatlandiratug`in AV kesindisinin` $N(x,y)$ noqatsi koordinatalarin

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

formulasi boyinsha tabiw mu`mkin. Dara jag`dayda, AV kesindisinin` ortasinin` koordinatalari

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ .$$

To`beleri $A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2),\ A_3(x_3,y_3),\ \dots,A_n(x_n,y_n)$ noqatlarinda bolg`an du`n`ki ko`pmu`yeshliktin` maydani $S=\frac{1}{2}\left|\left[\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right]\right|$.

To`beleri $A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2),\ A_3(x_3,y_3)$ noqatlarinda bolg`an u`shmu`yeshliktin` maydani $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ formulasi boyinsha tabiladi.

U`sh $A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2),\ A_3(x_3,y_3)$ noqatlarinin` bir tuwrig`a tiyisli boliw sha`rti

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0\,.$$

Ken`isliktegi Dekart koordinatalar sistemasi (n=3 o`lshemli ken`islik $E^3$). Bir O noqatsinda kesilisetug`in ha`m birdey masshtab birligine iye bolg`an u`sh o`z-ara perpendikulyar Ox, Ou ha`m Oz ko`sherleri ken`islikte tuwri mu`yeshli Oxuz Dekart koordinatalar sistemasin aniqlaydi. Bunda Ox - abstsissa, Ou - ordinata ha`m Oz - applikata ko`sheri dep ataladi. Koordinatalari menen ken`isliktegi noqat $M(x;y;z)$ tu`rinde jaziladi.Ken`islikti Oxu, Oxz, Ouz koordinata tegislikleri segiz oktantqa bo`ledi. Noqatinin` oktantalardag`i koordinatalarinin` belgileri:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	-	-	+	+	-	-	+
U	+	+	-	-	+	+	-	-
Z	+	+	+	+	-	-	-	-

n-o`lshemli Dekart koordinatalar sistemasi $(E^n)$. Qa`legen M noqatsin koordinatalari menen $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ tu`rinde jaziw mu`mkin. Eki $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ ha`m $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

formulasi boyinsha esaplanadi.

Tegislikte Oxu tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang`an bolsin. Tegisliktegi figuralardi uliwma $F(x, y) = 0$ tu`rindegi ten`leme menen analitikaliq an`latiw mu`mkin, bunda G`-berilgen funktsiya.

Tuwri tu`sinigi aniqlanbaytug`in matematikanin` da`slepki tu`siniklerinin` biri, sonliqtan og`an aniqlama joq.

1. Tuwrinin` uliwma ten`lemesi birinshi ta`rtipli eki o`zgeriwshili siziqli ten`leme:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

bunda A, V, S - turaqlilar. Dara jag`daylari:

a) $A = 0,\ B \neq 0;\ By + C = 0,\ y = -C / B$ - bul Ox ko`sherine parallel tuwri ten`lemesi;

b) $A = 0,\ B \neq 0;\ C = 0; By = 0,\ y = 0$ - bul Ox ko`sherinin` ten`lemesi;

v) $A \neq 0,\ B = 0;\ Ax + C = 0,\ x = -C / A$ - bul Ou ko`sherine parallel tuwri ten`lemesi;

g) $A \neq 0,\ B = 0;\ C = 0;\ Ax = 0,\ x = 0$ - bul Ou ko`sherinin` ten`lemesi;

d) $C = 0;\ Ax + By = 0,\ y = -Ax / B$ - bul koordinata basi O(0,0) noqatisi arqali o`tetug`in tuwri ten`lemesi.

2.Tuwrinin` mu`yeshlik koeffitsientli ten`lemesi. u=kx+b, bunda $k = tg\alpha$-tuwrinin` mu`yeshlik koeffitsienti, $\alpha$-tuwrinin` Ox ko`sherinin` on` bag`iti menen payda etetug`in mu`yeshi, b-parametri da`slepki ordinata dep ataladi.

3. Tuwrinin` kesindilerdegi ten`lemesi. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, bunda a ha`m b parametrleri tuwrinin` sa`ykes Ox ha`m Ou ko`sherlerinen kesip etetug`in kesindilerinin` uzinliqlari

4. Tuwrinin` normal` ten`lemesi. $x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$, bunda r-koordinata basinan tuwrig`a tu`sirilgen perpendikulyar (normaldin`) uzinlig`i, $\beta$-usi perpendikulyardin` Ox ko`sheri menen payda etetug`in mu`yeshi.

$Ax + By + C = 0$ tu`rindegi ten`lemeni normal tu`rdegi tuwri ten`lemesine alip keliw ushin ol ten`lemenin` eki jag`in da normallastiriwshi ko`beytiwshi $M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ shamasina ko`beytiw za`ru`r, bunda $\pm$ belgisinen S saltan` ag`za bbelgisine qarama qarsi tan`lap alinadi.

5. Tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi.

$A_1(x_1, y_1)$ noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Eki $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ tuwrinin` kesilisiw noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi: $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

Eger $\alpha=1$ bolsa, onda da`stede ekinshi tuwri bolmaydi.

6. Berilgen noqatlar arqali o`tetug`in tuwrilar.

$A_1(x_1,y_1)$ noqati arqili o`tetug`in tuwrilar da`stesin $y-y_1=k(x-x_1)$ ten`lemesi menen an`latiladi, bunda $k-$qa`legen parametr.

$A_1(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$ noqatlari arqali tek bir g`ana tuwri o`tkeriw mu`mkin:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Berilgen $A_1(x_1,y_1)$ noqatinan tuwrig`a shekemgi d araliq:

$$d=|x_1\cos\beta+y_1\sin\beta-p|=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

7. Eki $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ tuwrinin` o`z-ara jaylasiwi.

7.1. Eger $\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0$ bolsa, onda bul tuwrilar parallel boladi ha`m

a) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ - betlesedi,

b) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$ - kesilispeydi.

7.2. Eger $\Delta\neq 0$ bolsa, onda bul tuwrilar bir (x, u) noqatda kesilisedi

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\Delta}.$$

8. Eki $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ (yamasa $y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2$) tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh

$$tg\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Bul formuladan eki tuwrinin`:

8.1. $A_1/A_2=B_1/B_2;\ k_1=k_2$-parallellik sha`rtin,

8.2. $A_1A_2=B_1B_2;\ k_1=-1/k_2$-perpendikulyarliq sha`rtin alamiz.

8.3. Eki $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh bissektrisasinin` ten`lemesi $\dfrac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\dfrac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

6. Straight Lines

6.1. Equations of Lines

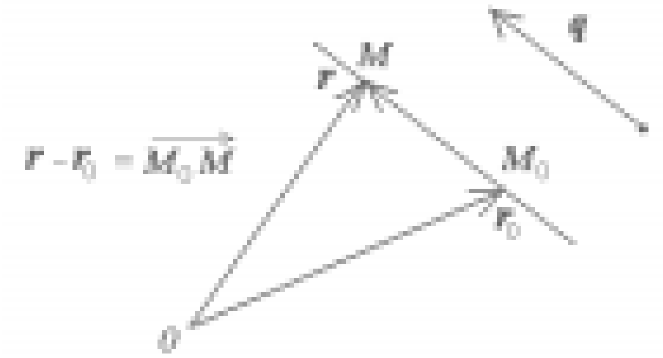
A direction vector of a straight line is a vector parallel to the line.
According to the postulates of geometry, a point M_0 and a direction vector $\mathbf{q}$ determine the straight line L.
Let M be an arbitrary point on the line. The difference $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ between the radius-vectors of the points M and M_0 is a vector in the line, that is,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{q} .$$

Two parallel vectors are proportional:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\,\mathbf{q} \qquad (1)$$

This vector equality is called the **vector equation of the line.** An arbitrary number t is said to be a parameter.



Assume that a rectangular Cartesian coordinate system is chosen. Then equation (1) can be written in the coordinate form as the system of three linear equations

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x\, t \\ y = y_0 + q_y\, t \\ z = z_0 + q_z\, t \end{cases} \qquad (2)$$

where x, y and z are running coordinates of a point on the line. Vectors $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ and $\mathbf{q}$ are represented by their coordinates:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \{x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0\} ,$$

$$\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\} .$$

Equations of a line in coordinate form (2) are called the **parametric equations of a line.**

Solving system (2) by elimination of the parameter t, we obtain the **canonical equations of a line:**

$$\boxed{\frac{x-x_0}{q_x}=\frac{y-y_0}{q_y}=\frac{z-z_0}{q_z}. \qquad (3)}$$

If $M_0(x_0, y_0, z_0)$ and $M_1(x_1, y_1, z_1)$ are two given points on a line then the vector

$$q=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$$

joining these points serves as a direction vector of the line.
Therefore, we get the following equations of a line passing through two given points:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \qquad (4)}$$

Examples:

1) Let L be a line passing through the points $M_1(1,0,2)$ and $M_2(3,1,-2)$.
   Check whether the point $A(7,3,10)$ lie on the line L.

Solution: Using (4) we get the equations of L:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-4}.$$

The coordinates of the point A satisfy the equation:

$$\frac{7-1}{2}=\frac{3}{1}=\frac{-10-2}{-4},$$

and so A is a point of the line L.

2) Write down the canonical equations of the line passing through the point $A(2,3,4)$ and being parallel to the vector $q=\{5,0,-1\}$.

Solution: By equation (3), we obtain

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{-1}.$$

Note that a symbolical notation $\frac{y-3}{0}$ means the equation $y=3$.

6.2. Lines in a Plane

On the x, y–plane, a line is described by the linear equation

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5)$$

If $M_0(x_0, y_0)$ is a point on the line then

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (6)$$

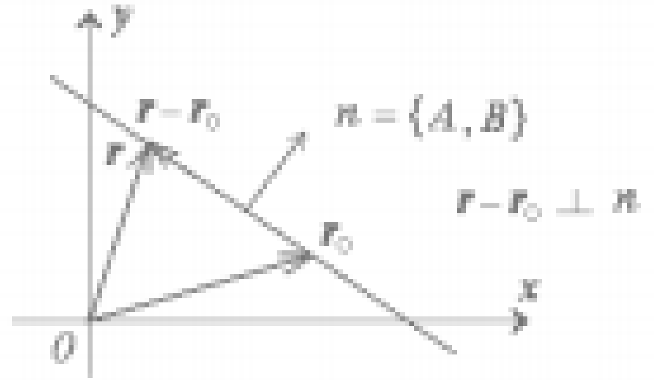
Subtracting identity (6) from equation (5) we obtain the equation of a line passing through the point $M_0(x_0, y_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (6a)$$

The expression on the left hand side has a form of the scalar product of the vectors $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$ and $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0\}$:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

Therefore, the coefficients A and B can be interpreted geometrically as the coordinates of a vector in the x, y–plane, being perpendicular to the line.



The canonical equation of a line in the x, y–plane has a form

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y},$$

where $\boldsymbol{q} = \{q_x, q_y\}$ is a direction vector of the line.

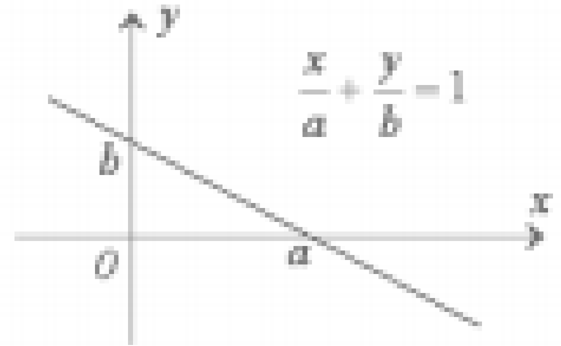
In the x, y–plane, an equation of a line passing through two given points, $M_0(x_0, y_0)$ and $M_1(x_1, y_1)$, is written as follows

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Sometimes it is helpful to express a straight-line equation in the x, y–plane as

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (7)$$

In this case, $y = 0$ implies $x = a$, and $x = 0$ implies $y = b$.



Therefore, the quantities a and b are, respectively, the x-intercept and the y-intercept of a graph of the line. Equation (7) is called an equation of a line in the intercept form.

A line on the x,y–plane may be also given by the equation in the slope-intercept form

$$y = kx + b,$$

where b is the y-intercept of a graph of the line, and k is the slope of the line.

If $M_0(x_0, y_0)$ is a point on the line, that is, $y_0 = kx_0 + b$, then the point–slope equation of the line is

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Examples:

1) A line on the x, y–plane is given by the equation

$$2x - 3y + 24 = 0.$$

Find: (i) any two points on the line; (ii) the slope of the line; (iii) the x– and y–intercepts.

Solution:

(i) Setting $x = 0$ we obtain $y = 8$.
If $x = 3$ then $y = 10$.
Therefore, the points $P(0, 8)$ and $Q(3, 10)$ lie on the line.

(ii) $2x - 3y + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + 8,$
Therefore, the slope of the line is $k = 2/3$.

(iii) The y–intercept equals 8. The x–intercept is the solution of the equation $y = 0$, that is, $x = -12$.

2) In the x, y–plane, find the equation of the line passing through the point $M_1(5, 3)$ and being perpendicular to the vector $N = \{2, -1\}$.

Solution: Using equation (6a) we obtain

$$2(x - 5) - (y - 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x - 7.$$

№8 TEMA:

Tuwrı sızıq ha`m onın` ten`lemeleri. Eki tuwrı sızıq parallelligi ha`m perpendikulyarlıg`ı sha`rti. Tochkadan tuwrı sızıqqa shekem bolg`an aralıq.

Reje:

1. Tegislik ha`m onın` ten`lemeleri.
2. Tegislikler arasındag`ı mu`yesh.
3. Eki tegisliktin` parallellik ha`m perpendikulyarlıq sha`rtleri.
4. Tochkadan tegislikke shekemgi aralıq.
5. Kenisliktegi tuwrı sızıq tenlemesi.
6. Eki tochka arqalı o`tiwshi tuwrı sızıq ten`lemesi.

Ken`islikte Oxuz tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang`an bolsin. Ken`isliktegi figuralardi uliwma $F(x,y,z)=0$ tu`rindegi ten`leme menen analitikaliq an`latiw mu`mkin, bunda F berilgen funktsiya.

Birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebraliq ten`leme u`sh o`lshemli ken`islikte tegislikti an`latpaydi. Tegisliktin` uliwma ten`lemesi:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

bunda A, B, C, D koeffitsientlerdin` keminde birewi nolden o`zgeshe qa`legen sanlar dep uyg`ariladi.

$M(x_0;y_0;z_0)$ noqatsi arqali o`tetug`in ha`m $\overline{n}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$ vektorina perpendikulyar tegislikti $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ten`lemesi menen aniqlaw mu`mkin.

Kesindilerdegi tegisliktin` ten`lemesi:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

bunda a,b,c - tegisliktin` sa`ykes Ox, Ou, Oz ko`sherlerinen kesip alg`an kesindilerinin` uzinliqlari.

Meyli α_1 ha`m $\alpha_2$ tegislikleri $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ten`lemeleri menen berilgen bolsin. Bul tegisliklerdin` arasindag`i φ mu`yesh olarg`a normal $\overline{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ ha`m $\overline{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ vektorlarinin` arasindag`i mu`yesh retinde aniqlanadi, yag`niy

$$cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Eger normal vektorlari kollinear bolsa, onda olarg`a sa`ykes keliwshi tegislikler parallel boladi $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ ha`m eger normal vektorlari perpendikulyar bolsa, onda sa`ykes tegislikler de perpendikulyar boladi $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ noqatsinan Ax+Vu+Sz+D=0 tegisligine shekemgi qashiqliq

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Berilgen eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i arqili o`tetug`in barliq tegislikler da`stesinin` ten`lemesi:

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$$

bunda $\alpha=1$ dep alip da`steden ekinshi tegislikti shig`arip taslaw mu`mkin.

Ken`isliktegi tuwrini birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebraliq ten`lemelerdin` sistemasi menen, yag`niy eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i sipatinda an`latiw mu`mkin:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Bul tuwrinin` bag`itlawshi vektorin (yag`niy tuwrig`a yamasa og`an parallel tuwrig`a tiyisli vektor) tegisliklerdin` normal vektorlarinin` vektorliq ko`beymesi tu`rinde aniqlanadi.

Meyli tuwri $M_0(x_0,y_0,z_0)$ noqatsi ha`m $\bar{s}=(l;m;p)$ bag`itlawshi vektori menen berilgen bolsin. $M(x;y;z)$ - usi tuwrinin` qa`legen bir noqatsi dep uyg`aramiz. Onda, tuwrinin`

vektorliq ten`lemesi $\bar{r}=\bar{r_0}+t\bar{s}$;

parametrlik ten`lemesi $x=x_0+nt,\ y=y_0+mt;\ z=z_0+pt;$

kanonikaliq ten`lemesi $\dfrac{x-x_0}{n}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}.$

Eki tuwrinin` bir tegislikte jaylasiw sha`rti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ n & m & p \\ n_1 & m_1 & p_1 \end{vmatrix}=0.$$

Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh:

$$\sin\varphi=\frac{|An+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{n^2+m^2+p^2}},$$

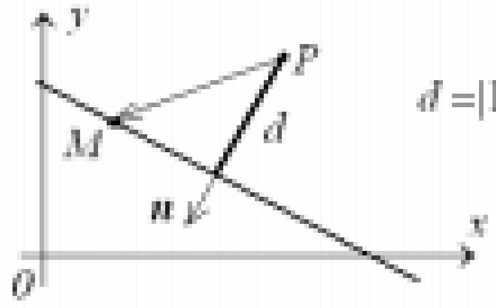
parallellik sha`rti: $An+Bm+Cp=0$;

perpendikulyarliq sha`rti: $\dfrac{A}{n}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{p}.$

6.4. Distance From a Point to a Line

Consider a line in the x, y-plane.

Let n be a normal vector to the line and $M(x_0, y_0)$ be any point on the line. Then the distance d from a point P not on the line is equal to the absolute value of the projection of $\overrightarrow{PM}$ on n:



$$d = |\mathrm{Proj}_n \overrightarrow{PM}| = \left| \frac{\overrightarrow{PM} \cdot n}{|n|} \right|$$

In particular, if the line is given by the equation

$$Ax + By + C = 0,$$

and the coordinates of the point P are x_1 and y_1, that is,

$$n = \{A, B\} \quad \text{and} \quad \overrightarrow{PM} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\},$$

then the distance from the point $P(x_1, y_1)$ to the line is calculated according to the following formula:

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Since $M(x_0, y_0)$ is a point on the line,

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Therefore, we obtain

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Example: Let ABC be a triangle in x, y-plane with the vertices at the points $A = \{2, -1\}$, $B = \{4, 4\}$ and $C = \{9, 7\}$.

Find the altitude from the vertex A.

Solution: The altitude from the vertex A equals the distance d from the point A to the line passing through the points B and C.

Find the equation of the line BC:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad 5x - 2y - 12 = 0.$$

Therefore, a normal vector to the line BC is $n = \{5, -2\}$.

Since $\vec{AC} = \{7, 8\}$, we finally obtain

$$d = \left|\frac{\vec{AC} \cdot n}{|n|}\right| = \frac{7 \cdot 5 + 8 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{19}{\sqrt{29}} = \frac{19}{29}\sqrt{29}.$$

6.5. Relative Position of Lines

Let two lines, L_1 and L_2, be given by their equations, e.g., in the canonical form:

$$L_1: \qquad \frac{x - x_1}{p_x} = \frac{y - y_1}{p_y} = \frac{z - z_1}{p_z},$$

$$L_2: \qquad \frac{x - x_2}{q_x} = \frac{y - y_2}{q_y} = \frac{z - z_2}{q_z},$$

where $\{p_x, p_y, p_z\} = p$ and $\{q_x, q_y, q_z\} = q$ are direction vectors of the lines.

In order to determine the relative position of the lines, it is necessary to consider the equations of both lines as a system of linear equations. Each lines is described by two linear equations, and so we have the following system of four linear equations with three unknowns x, y and z:

$$\begin{cases} (x - x_1)/p_x = (y - y_1)/p_y \\ (x - x_1)/p_x = (z - z_1)/p_z \\ (x - x_2)/q_x = (y - y_2)/q_y \\ (x - x_2)/q_x = (z - z_2)/q_z \end{cases} \qquad (1)$$

Let us analyze all possible cases.

1) Assume that system (1) is inconsistent. Then the lines are either parallel or skew. If the coordinates of the direction vectors p and q are proportional, that is,

$$\frac{p_x}{q_x} = \frac{p_y}{q_y} = \frac{p_z}{q_z}$$

then the lines are parallel; otherwise, they are skew.

2) Suppose that system (1) is consistent, and the rank of the coefficient matrix equals 3. Then L_1 and L_2 are intersecting lines, that is, they have exactly one point of intersection.

3) If system (1) is consistent, and the rank of the coefficient matrix equals 2, then the lines coincide with each other.

7.1. General Equation of a Plane

A normal vector to a plane is a perpendicular vector to the plane.
According to geometrical postulates,

- A point and a vector determine a plane.
- Three points determine a plane.

The general equation of a plane in a rectangular Cartesian coordinate system has the following form:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

where x, y and z are running coordinates of a point in the plane.

Let $M_1(x_1, y_1, z_1)$ be a point in the plane, that is,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \qquad (2)$$

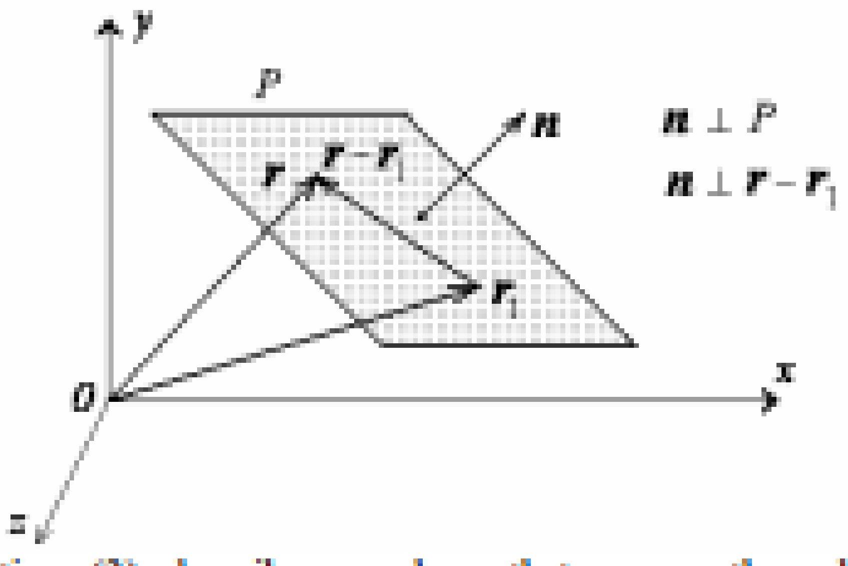
Subtracting identity (2) from equation (1) we obtain another form of the general equation of a plane:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (3)$$

Assume that A, B and C are the coordinates of some vector $\boldsymbol{n}$.
Then the left hand side of equation (3) is the scalar product of the vectors $\boldsymbol{n}$ and $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0. \qquad (3a)$$

By the properties of the scalar product this equality implies that the vector $\boldsymbol{n}$ is perpendicular to the vector $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$. Since $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ is an arbitrary vector in the plane P, $\boldsymbol{n}$ is a normal vector to the plane P.



Thus, equation (3) describes a plane that passes through the point $M_1(x_1, y_1, z_1)$. The coefficients A, B and C can be interpreted as the coordinates of a normal vector to the plane.
Consider a few particular cases of equation (1).

1) If $D = 0$ then the plane

$$Ax + By + Cz = 0$$

passes through the origin.

2) If $C = 0$ then the plane

$$Ax + By + D = 0$$

is parallel to the z–axis, that is, it extends along the z-axis.

3) If $B = 0$ then the plane

$$Ax + Cz + D = 0$$

is parallel to the y–axis.

4) If $A = 0$ then the plane

$$By + Cz + D = 0$$

is parallel to the x–axis.

5) If $A = B = 0$ then the plane

$$Cz + D = 0$$

is parallel to the x, y–plane, that is, the plane is perpendicular to the z–axis.

Examples:

1) Let $M_1(1, -2, 3)$ be a point in a plane, and $n = \{4, 5, -6\}$ be a normal vector to the plane. Then the plane is described by the following equation

$4(x-1) + 5(y+2) - 6(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 5y - 6z + 24 = 0.$

2) A plane is given by the equation

$$x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

Find a unit normal vector u to the plane and find any two points in the plane.

Solution: Since $n = \{1, -2, 3\}$ and $|n| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, then

$$u = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(i - 2j + 3k).$$

Setting $x = y = 0$, we obtain $z = 2$.

Likewise, if $x = z = 0$, then $y = -3$.

Therefore, $M_1(0, 0, 2)$ and $M_2(0, -3, 0)$ are the points in the given plane.

№9 TEMA:

Ekinshi ta'rtipli iymek si'zi'qti'n' ani'qlamasi'. Shen'ber, Ellifs, Giperbola, Parabola. Shen'ber, Ellifs, giperbola, parabola, konus kesimlari sipatinda. Ekinshi ta`rtipli iymek sızıqtın` ten`lemesin a`piwayılastırıw

Tegisliktegi ekinshi ta`rtipli siziqlar ha`m olardin` kanonikaliq tu`rleri: Shen`ber. Ellips. Giperbola. Parabola. Olardin` ten`lemesi, qa`siyetleri, elementleri, direktrisalari, diametrleri ha`m urinbalari. U`shinshi ha`m joqari ta`rtipli algebraliq, transtsent iymeklikler.

x ha`m u koordinatalarg`a qarata ekinshi ta`rtipli ten`leme menen aniqlang`an siziq ekinshi ta`rtipli siziq dep ataladi. Eger iymek siziqtin` noqatlari bazibir noqatg`a qarata simmetriyali bolsa, bul iymek siziq orayliq siziq dep, noqat - iymek siziqtin` orayi dep ataladi.

Ekinshi ta`rtipli iymek siziqlardin` kanonikaliq ten`lemelerin, yag`niy bul iymek siziqtin` orayi yamasa ushin koordinatalar basinda, simmetriya ko`sherleri koordinata menen betlesetug`in jag`daydi qarastiramiz.

Birneshe o`zgeriwshinin` birtekli ekinshi ta`rtipli ko`pag`zalisi bul o`zgeriwshilerdin` kvadratliq formasi dep ataladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

(1) ten`leme kooffitsientlerinen eki aniqlawshini $\delta$ - u`lken ag`zalarinin` diskriminanti ha`m $\Delta$ - ten`leme diskriminantin du`zemiz:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

δ ha`m $\Delta$ ma`nislerine qarata (1) ten`leme aniqlaytug`in geometriyaliq obrazdi biliw mu`mkin:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips	Noqat
$\delta < 0$	Giperbola	Kesilisiwshi tuwrilar
$\delta = 0$	Parabola	Parallel tuwrilar

1. Shen`ber.

Orayi $C(a;b)$ noqatisinan R (R>0) qashiqliqta jaylasqan tegisliktin` barliq noqatlarinin` geometriyaliq orini shen`ber dep ataladi ha`m ol $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ten`lemesi menen analitikaliq an`latiladi. Orayi koordinata basi O(0,0) noqatinda jaylasqan, radiusi R-ge ten` bolg`an shen`ber $x^2 + y^2 = R^2$ ten`lemesine iye boladi. Shen`ber to`mende aniqlanatin ellipstin` dara jag`dayi bolip tabiladi.

2. Ellips.

Aniqlama. Ellips dep tegisliktegi sonday noqatlardin` ko`pligine aytiladi, bul noqatlardin` ha`r birinen usi tegisliktin` fokuslari dep ataliwshi eki $F_1, F_2$ noqatlarina shekemgi bolg`an qashiqliqlardin` qosindisi turaqli shama bolsa. M(x, u) ellipstin` qa`legen bir noqati bolsa, onda $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, bunda a-qa`legen turaqli san.

Ellipstin` kanonikaliq ten`lemesi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

bunda a ha`m b - belgili turaqlilar. Ellips noqatlari koordinata basina qarata simmetriyali. Koordinatalar basi (2) ellipstin` simmetriya orayi, koordinata ko`sherleri onin` simmetriya ko`sherleri boladi. Ellips ordinata ko`sherin $B_1(0;\, b)$ ha`m $B_2(0;-b)$ noqatlarinda, abstsissa ko`sherin $A_1(a;0)$ ha`m $A_2(-a;0)$ noqatlarinda kesip o`tedi. Ellipstin` simmetriya ko`sherleri menen kesilisiw noqatlari ushlari dep ataladi. Ellipstin` ushlarinin` arasindag`i araliq $|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b$ ellips ko`sherleri delinedi. Ko`sherlerden u`lkeni - ellipstin` u`lken ko`sheri dep, ekinshisi - ellipstin` kishi ko`sheri dep, a ha`m b parametrleri yarim ko`sherler dep ataladi.

x ha`m u koordinatalarinin` o`zgeriw oblasti: $-a \le x \le a, -b \le y \le b$. Ellips simmetriyali bolg`anliqtan oni tek g`ana birinshi sherekte tekseriw jetkilikli. Birinshi sherektegi ellipstin` ten`lemesi:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

$a > b$ bolsin. $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ dep belgileymiz. $F_1(c;0)$ ha`m $F_2(-c;0)$ noqatlari ellipstin` fokuslari dep ataladi. $|F_1F_2| = 2c$ - ellipstin` fokus aralig`i delinedi. Ellipstin` fokuslari jaylasqan u`lken ko`sher fokal ko`sher dep, $r_1 = |MF_1|$ ha`m $r_2 = |MF_2|$ shamalari fokal radiuslar dep, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ shamasi ellipstin` ekstsentrisiteti dep ataladi.

$x = a/\varepsilon$ ha`m $x = -a/\varepsilon$ tuwri siziqlari ellipstin` direktrisalari delinedi.

Ellipstin` qa`legen M noqatinan F_1 (yamasa F_2) fokusina shekemgi bolg`an araliq penen direkstrisag`a shekemgi d_1 (yamasa d_2) araliq qatnasi turaqli shama ε g`a ten` boladi: $\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$.

3. Giperbola.

Aniqlama. Giperbola dep tegisliktegi sonday noqatlardin` ko`pligine aytiladi, bul noqatlardin` ha`r birinen usi tegisliktin` fokuslari dep ataliwshi eki $F_1, F_2$ noqatlarina shekemgi bolg`an qashiqliqlardin` ayirmasinin` absolyut shamasi turaqli shama 2a g`a ten` bolsa. M(x, u) ellipstin` qa`legen bir noqati bolsa, onda

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a$$

bunda a- qa`legen turaqli san.

Giperbolanin` kanonikaliq ten`lemesi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

Koordinata ko`sherleri giperbolanin` simmetriya ko`sherleri, koordinatalar basi simmetriya orayi boladi.

Giperbola Ou ordinatalar ko`sheri menen kesilispeydi. $B_1(0;b)$ ha`m $B_2(0;-b)$ noqatlari giperbolanin` jormal ushlari dep, $|B_1B_2| = 2b$ kesindisi jormal ko`sheri dep, b - jormal yarim ko`sheri dep ataladi.

Giperbola Ox abstsissalar ko`sheri menen $A_1(a;0)$ ha`m $A_2(-a;0)$ noqatlarinda kesilisedi. Bul noqatlar giperbolanin` haqiyqiy ushlari dep, $|A_1A_2| = 2a$ kesindisi haqiyqiy ko`sheri dep, a - haqiyqiy yarim ko`sheri dep ataladi.

Giperbolani

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$$

ten`lemesi menen de jaziw mu`mkin. Giperbola shegaralanbag`an siziq bolip, ol x=a ha`m x=-a tuwri siziqlar menen shegaralanbag`an oblasttin` sirtinda jaylasqan ja`ne eki tarmaqqa iye.

Giperbolanin` haqiyqiy ko`sherinde $F_1(c;0)$ ha`m $F_2(-c;0)$ fokuslari jaylasqan, bunda $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. $|F_1F_2| = 2c$ - giperbolanin` fokus aralig`i delinedi. Giperbolanin` fokuslari jaylasqan u`lken ko`sher fokal ko`sher dep, $r_1 = |MF_1|$ ha`m $r_2 = |MF_2|$ shamalari fokal radiuslar dep, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(1 < \varepsilon)$ shamasi giperbolanin` ekstsentrisiteti dep ataladi.

$x = a/\varepsilon$ ha`m $x = -a/\varepsilon$ tuwri siziqlari giperbolanin` direktrisalari delinedi.

Giperbolanin` qa`legen M noqatinan F_1 (yamasa F_2) fokusina shekemgi bolg`an araliq penen direkstrisag`a shekemgi d_1 (yamasa d_2) araliq qatnasi turaqli shama ε g`a ten` boladi: $\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$.

$y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ tuwrilari giperbolanin` assimptotalari dep ataladi.

4. Parabola.

Aniqlama. Parabola dep tegisliktin` fokus dep ataliwshi berilgen G` noqattan ha`m direktrissa dep ataliwshi berilgen tuwri siziqtan ten`dey uzaqliqta jaylasqan barliq noqatlardin` ko`pligine (geometriyaliq orinina) aytiladi.

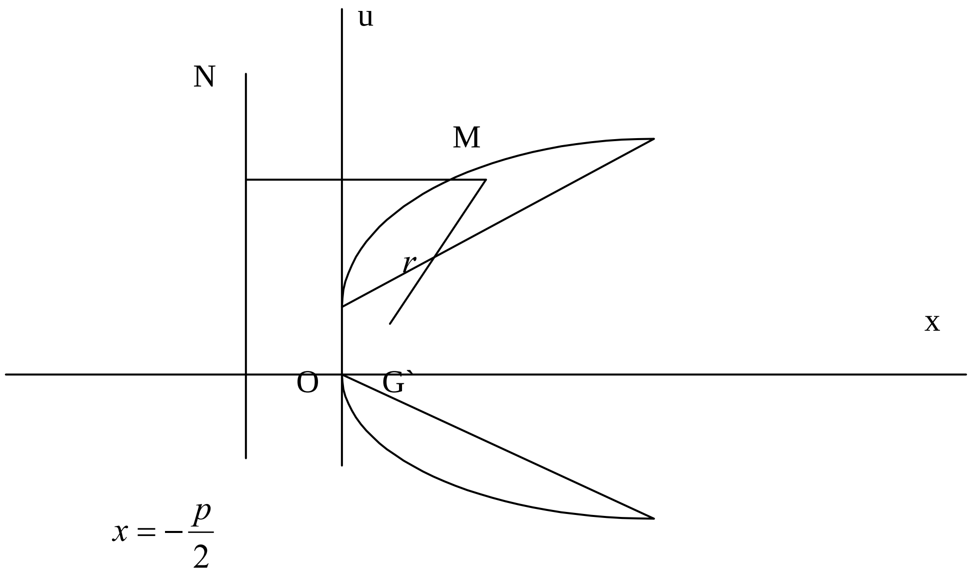
Parabolanin` kanonikaliq ten`lemesi:

$$y^2 = 2px \tag{4}$$

bunda r-berilgen turaqli haqiyqiy parametr. Ko`binese $p > 0,\ x > 0$ dep uyg`ariladi.

Parabolani $y = \pm\sqrt{2px}$ ten`lemesi menen de jazip ko`rsetiw mu`mkin.

Ox ko`sheri parabolanin` simmetriya ko`sheri dep, O(0, 0) noqati parabolanin` to`besi dep ataladi. Parabola shegaralanbag`an siziq, ol asimptotalarg`a iye emes.



$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ noqati parabolanin` fokusi dep, $x = -\frac{p}{2}$ tuwri sizig`i direktrisasi dep, $r = |MF|$ ha`m $d = |MN|$ sanlari parabolanin` qa`legen M noqatinan sa`ykes fokusqa ha`m direktrissag`a shekemgi araqashiqliq dep ataladi, bunda $r = d$. Parabola ekstsentisiteti: $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Eger parabolanin` fokal ko`sheri sipatinda Ou ko`sheri alinsa, onda parabolanin` ten`lemesin $x^2 = 2py$ tu`rinde jaziw mu`mkin.

Eger ellips, giperbola ha`m parabolanin` fokusin polyar koordinatalar sistemasinin` polyusi retinde, fokal` simmetriya ko`sherin polyar ko`sher retinde alsaq, onda bul u`sh iymek siziqti bir ten`leme menen jaziw mu`mkin:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

bunda ε-ekstsentrisitet, r-parametr. Ellips ha`m giperbola ushin $p = \frac{b^2}{a}$.

8.1. Circles

A circle is a set of points in a plane that are equidistant from a fixed point. The fixed point is called the center. A line segment that joins the center with any point of the circle is called the radius.

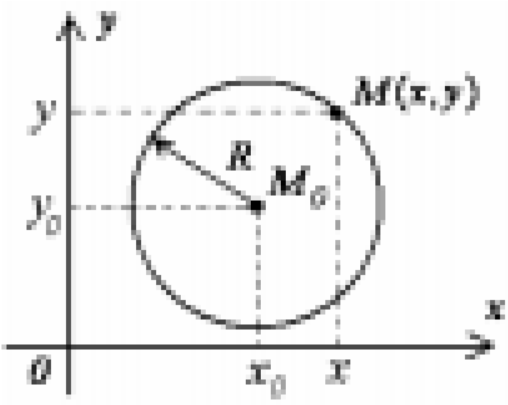
In the x,y–plane, the distance between two points $M(x,y)$ and $M_0(x_0,y_0)$ equals

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

and so the circle is described by the equation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \tag{1}$$

where x_0 and y_0 are the coordinates of the center, and R is the radius.



Equation of a circle centered at the origin

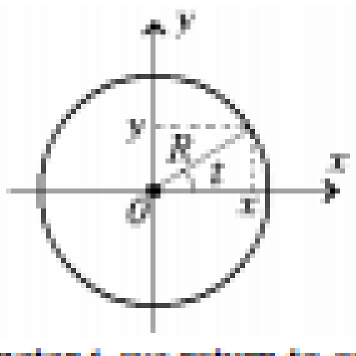
$$x^2+y^2=R^2 \tag{2}$$

is known as the canonical equation of the circle.

If t is a real parameter, then

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$$

are the parametric equations of the circle centered at the origin with radius R.



By elimination of the parameter t, we return to canonical equation (2):

$$\begin{cases} x^2 = R^2\cos^2 t \\ y^2 = R^2\sin^2 t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Likewise,

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$$

are the parametric equations of the circle centered at the point $M_0(x_0, y_0)$ with radius R.

Examples:

1) The circle is given by the equation

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12.$$

Find the radius and the coordinates of the center.

Solution: Transform the quadratic polynomial on the left-hand side of the equation by adding and subtracting the corresponding constants to complete the perfect squares:

$$x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x-2)^2 - 4$$
$$y^2 + 6y = (y^2 + 6y + 9) - 9 = (y+3)^2 - 9.$$

Then the given equation is reduced to the form

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2,$$

which describes the circle centered at the point $M_0(2,-3)$ with radius 5.

2) Let

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + 17 = 0.$$

Find the canonical equation of the circle.

Solution:

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + 17 = 0 \;\Rightarrow\; (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) = 0 \;\Rightarrow$$
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 0.$$

The radius of the circle equals zero, that means the given equation corresponds to a null point circle.

3) The equation

$$x^2 + 2x + y^2 + 5 = 0$$

can be reduced to the form

$$(x+1)^2 + y^2 = -4,$$

which has no solutions. In this case they say that the equation describes an imaginary circle.

8.2. Ellipses

An **ellipse** is a plane curve, which is represented by the equation

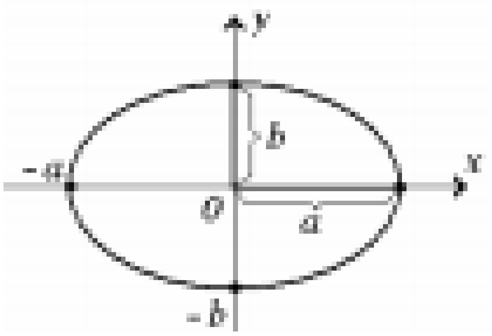
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

in some Cartesian coordinate system.

Equation (3) is called the **canonical equation of an ellipse**, or the equation of an ellipse in the canonical system of coordinates. The positive quantities $2a$ and $2b$ are called the axes of the ellipse. One of them is said to be the major axis, while the other is the minor axis.

In the canonical system, the coordinate axes are the axes of symmetry, that means if a point (x,y) belongs to the ellipse, then the points $(-x,y)$, $(x,-y)$ and $(-x,-y)$ also belong to the ellipse.

The intersection points of the ellipse with the axes of symmetry are called the **vertices** of the ellipse. Hence, the points $(\pm a,0)$ and $(0,\pm b)$ are the vertices of ellipse (3).



If $a=b=R$ then equation (3) is reduced to equation (2) of a circle. Thus, one can consider a circle as a specific ellipse.

The parametric equations of the ellipse have the following form:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

One can easily eliminate the parameter t to obtain the canonical equation of the ellipse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=\cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2 t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

The equation

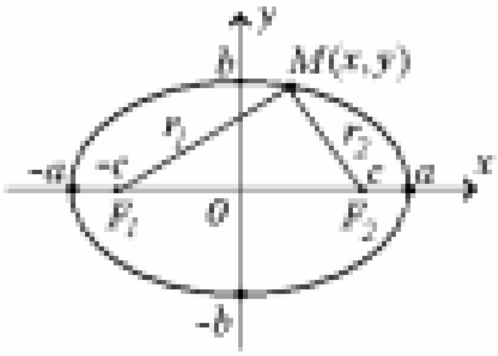
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

corresponds to the ellipse with the center at the point $M_0(x_0, y_0)$. The axes of symmetry of this ellipse pass through M_0, being parallel to the coordinate axes.

8.2.1. Properties of Ellipses

Consider an ellipse, which is given by equation (3) with the major axis $2a$. Two fixed points, $F_1(-c,0)$ and $F_2(c,0)$, are called the **focuses** of the ellipse, if equality $c^2 = a^2 - b^2$ is satisfied.
Correspondingly, the distances r_1 and r_2 from any point $M(x, y)$ of the ellipse to the points F_1 and F_2 are called the **focal distances**.

The ratio $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ is called the **eccentricity** of ellipse.
Note that $0 < \varepsilon < 1$.



1) Let x be the abscissa of a point of ellipse (3). Then the focal distances of the point can be expressed as follows:

$$r_1 = a + x\varepsilon, \qquad (4a)$$

$$r_2 = a - x\varepsilon. \qquad (4b)$$

Proof: By the definition, the distance between two points, $M(x, y)$ and $F_1(-c,0)$, is

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Consider the expression under the sign of the radical.
By substituting

$$y^2 = (a^2 - x^2)\frac{b^2}{a^2},$$

$$c = a\varepsilon \quad \text{and} \quad b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

in r_1^2, we obtain

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$
$$= x^2 + 2ax\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + (a^2 - x^2)(1-\varepsilon^2),$$

which results in

$$r_1^2 = a^2 + 2a\,x\,\varepsilon + x^2\varepsilon^2 = (a + x\,\varepsilon)^2 .$$

Likewise,

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = a^2 - 2a\,x\,\varepsilon + x^2\varepsilon^2 = (a - x\,\varepsilon)^2 .$$

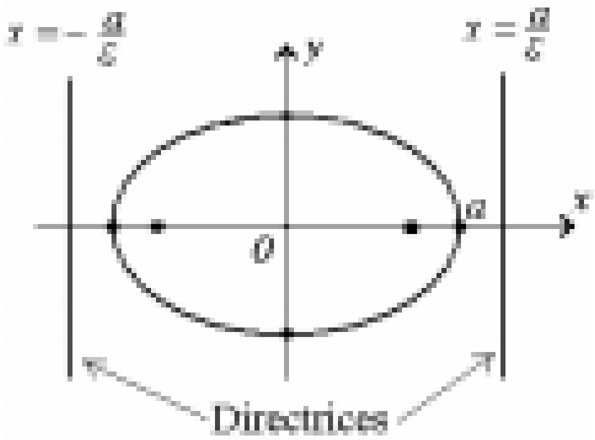
Since $a \pm x\,\varepsilon > 0$, the above formulas give the desired statement.

2) For any point of ellipse (3), the sum of the focal distances is the constant quantity $2a$:

$$r_1 + r_2 = 2a . \qquad (5)$$

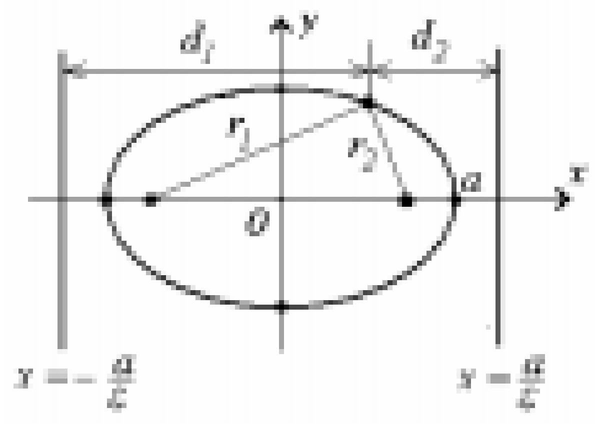
This property follows from formulas (4a) and (4b).

Two symmetric lines passing at the distance $\frac{a}{\varepsilon}$ from the center of an ellipse and being perpendicular to the major axis are called the **directrices**.



3) For any point of ellipse (3), the ratio of the focal distance to the distance from the corresponding directrix is equal to the eccentricity of the ellipse:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (6)$$



Proof: By Property 1 and in view of the fact that which results in

$$r_1^2 = a^2 + 2a\,x\,\varepsilon + x^2\varepsilon^2 = (a + x\,\varepsilon)^2 .$$

Likewise,

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad\Rightarrow\quad r_2^2 = a^2 - 2a\,x\,\varepsilon + x^2\varepsilon^2 = (a - x\,\varepsilon)^2 .$$

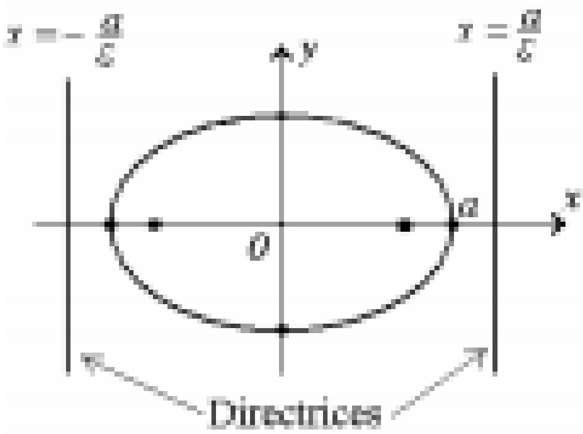
Since $a \pm x\,\varepsilon > 0$, the above formulas give the desired statement.

2) For any point of ellipse (3), the sum of the focal distances is the constant quantity $2a$:

$$r_1 + r_2 = 2a . \qquad (5)$$

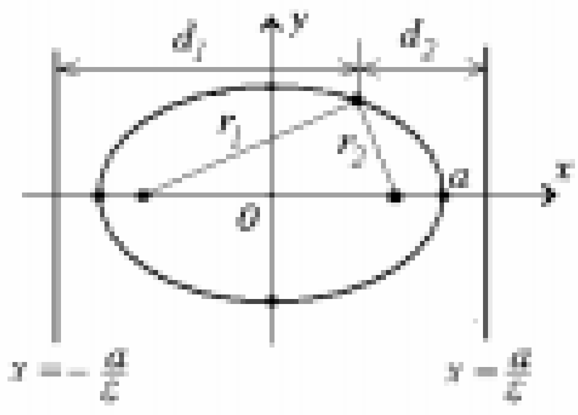
This property follows from formulas (4a) and (4b).

Two symmetric lines passing at the distance $\dfrac{a}{\varepsilon}$ from the center of an ellipse and being perpendicular to the major axis are called the **directrices**.



3) For any point of ellipse (3), the ratio of the focal distance to the distance from the corresponding directrix is equal to the eccentricity of the ellipse:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (6)$$

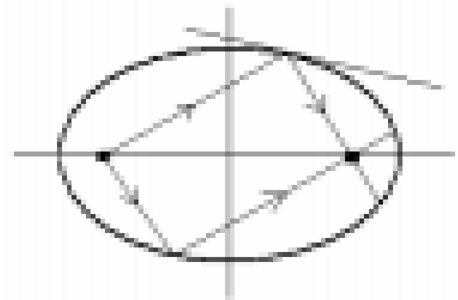


Proof: By Property 1 and in view of the fact that

$$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} + x \quad \text{and} \quad d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x,$$

we obtain the desired results.

4) Assume that the curve of an ellipse has the mirror reflection property. If a point light source is located at a focus of the ellipse, then rays of light meet at the other focus after being reflected.



In other words, at any point of an ellipse, the tangent line forms equal angles with the focal radiuses.

5) The orbital path of a planet around the sun is an ellipse such that the sun is located at a focus.

Example: Reduce the equation

$$2x^2 + 4x + 3y^2 - 12y = 1$$

to the canonical form. Give the detailed description of the curve.

Solution: Complete the perfect squares.

$$2x^2 + 4x + 3y^2 - 12y = 1 \quad \Rightarrow$$

$$2(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 - 4y + 4) = 15 \quad \Rightarrow$$

$$2(x+1)^2 + 3(y-2)^2 = 15 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2}{15/2} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1.$$

Thus, the given equation describes the ellipse with the center at the point $(-1, 2)$.

The major semi-axis equals $\sqrt{15/2}$, and the minor semi-axis is $\sqrt{5}$. The focuses are located on the horizontal line $y = 2$. The distance between each focus and the center is

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{15}{2} - 5} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

The eccentricity equals

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

№10 TEMA:

Betlik. Tegislik ha`m onın` ten`lemeleri. Tegislikler arasındag`ı mu`yesh. Eki tegislik parallelligi ha`m perpendikulyarlıg`ı sha`rtleri. U`sh tegisliktin` kesilisiw sha`rtleri. Tochkadan tegislikke shekemgi bolg`an aralıq. Ken`isliktegi tuwrı sızıq ten`lemesi. Eki tochka arqalı o`tiwshi tuwrı sızıq ten`lemesi .

Tuwridag`i Dekart koordinatalar sistemasi (n=1 o`lshemli ken`islik $E^1$). Qa`legen tuwri siziqta baslang`ish O naqati, «$\rightarrow$« belgisi menen on` bag`it ha`m uzinliq birligi (masshtab) tan`lap alinadi. Payda etilgen bir o`lshemli koordinatalar sistemasi menen haqiyqiy sanlar ko`pligi arasinda bir ma`nisli sa`ykeslik ornatiw mu`mkin. Qa`legen bir M noqatsinin` tuwridag`i orinina sa`ykes keliwshi x sani (1-su`wret) onin` koordinatasi dep ataladi ha`m $M(x)$ tu`rinde belgilenedi.

M x

O 1 x

1-su`wret.

Eki $A(x_1)$ ha`m $B(x_2)$ noqatlari arasindag`i d araliq

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \, .$$

Ko`o`sherdegi (algebraliq) bag`itlang`an kesindinin` shamasi $AB = x_2 - x_1$, bunda $A(x_1)$ ha`m $B(x_2)$.

Tegisliktegi eki $A(x_1; y_1)$ ha`m $B(x_2; y_2)$ noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \, .$$

n-o`lshemli Dekart koordinatalar sistemasi $(E^n)$. Qa`legen M noqatsin koordinatalari menen $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tu`rinde jaziw mu`mkin. Eki $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ha`m $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

formulasi boyinsha esaplanadi.

1. Tuwrinin` uliwma ten`lemesi birinshi ta`rtipli eki o`zgeriwshili siziqli ten`leme:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

bunda A, V, S - turaqlilar. Dara jag`daylari:

a) $A = 0,\ B \neq 0;\ By + C = 0,\ y = -C/B$ - bul Ox ko`sherine parallel tuwri ten`lemesi;

b) $A = 0,\ B \neq 0;\ C = 0; By = 0,\ y = 0$ - bul Ox ko`sherinin` ten`lemesi;

v) $A \neq 0,\ B = 0;\ Ax + C = 0,\ x = -C/A$ - bul Ou ko`sherine parallel tuwri ten`lemesi;

g) $A \neq 0,\ B=0;\ C=0;\ Ax=0,\ x=0$ - bul Ou ko`sherinin` ten`lemesi;

d) $C=0;\ Ax+By=0,\ y=-Ax/B$ - bul koordinata basi O(0,0) noqatisi arqali o`tetug`in tuwri ten`lemesi.

2.Tuwrinin` mu`yeshlik koeffitsientli ten`lemesi. u=kx+b, bunda $k=tg\alpha$-tuwrinin` mu`yeshlik koeffitsienti, $\alpha$-tuwrinin` Ox ko`sherinin` on` bag`iti menen payda etetug`in mu`yeshi, b-parametri da`slepki ordinata dep ataladi.

3. Tuwrinin` kesindilerdegi ten`lemesi. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, bunda a ha`m b parametrleri tuwrinin` sa`ykes Ox ha`m Ou ko`sherlerinen kesip etetug`in kesindilerinin` uzinliqlari

7.1. General Equation of a Plane

A **normal vector** to a plane is a perpendicular vector to the plane.
According to geometrical postulates,

- A point and a vector determine a plane.
- Three points determine a plane.

The general equation of a plane in a rectangular Cartesian coordinate system has the following form:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

where x, y and z are running coordinates of a point in the plane.

Let $M_1(x_1, y_1, z_1)$ be a point in the plane, that is,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \qquad (2)$$

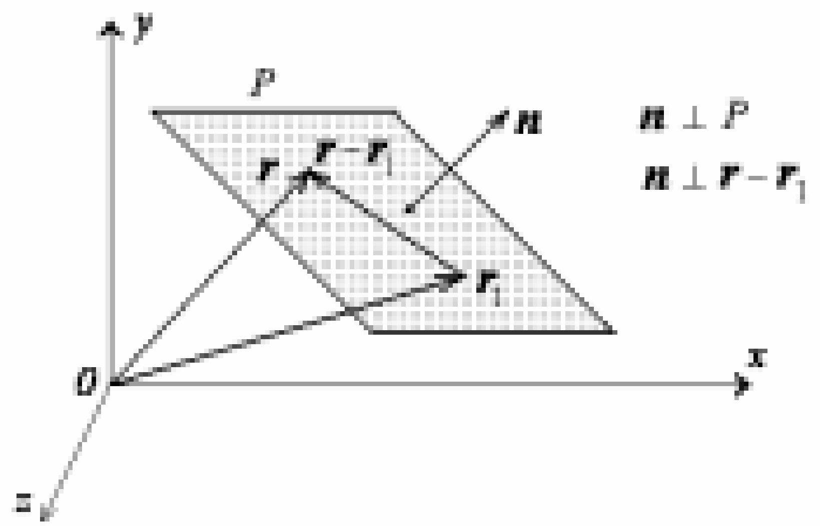
Subtracting identity (2) from equation (1) we obtain another form of the general equation of a plane:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (3)$$

Assume that A, B and C are the coordinates of some vector $\mathbf{n}$.
Then the left hand side of equation (3) is the scalar product of the vectors $\mathbf{n}$ and $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (3a)$$

By the properties of the scalar product this equality implies that the vector $\mathbf{n}$ is perpendicular to the vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. Since $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ is an arbitrary vector in the plane P, $\mathbf{n}$ is a normal vector to the plane P.



Thus, equation (3) describes a plane that passes through the point $M_1(x_1, y_1, z_1)$. The coefficients A, B and C can be interpreted as the coordinates of a normal vector to the plane.
Consider a few particular cases of equation (1).

1) If $D=0$ then the plane
$$Ax+By+Cz=0$$
passes through the origin.

2) If $C=0$ then the plane
$$Ax+By+D=0$$
is parallel to the z-axis, that is, it extends along the z-axis.

3) If $B=0$ then the plane
$$Ax+Cz+D=0$$
is parallel to the y-axis.

4) If $A=0$ then the plane
$$By+Cz+D=0$$
is parallel to the x-axis.

5) If $A=B=0$ then the plane
$$Cz+D=0$$
is parallel to the x, y-plane, that is, the plane is perpendicular to the z-axis.

Examples:

1) Let $M_1(1,-2,3)$ be a point in a plane, and $n=\{4,5,-6\}$ be a normal vector to the plane. Then the plane is described by the following equation
$$4(x-1)+5(y+2)-6(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad 4x+5y-6z+24=0.$$

2) A plane is given by the equation
$$x-2y+3z-6=0.$$
Find a unit normal vector u to the plane and find any two points in the plane.

Solution: Since $n=\{1,-2,3\}$ and $|n|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$, then
$$u=\frac{n}{|n|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(i-2j+3k).$$

Setting $x=y=0$, we obtain $z=2$.

Likewise, if $x=z=0$, then $y=-3$.

Therefore, $M_1(0,0,2)$ and $M_2(0,-3,0)$ are the points in the given plane.

Let $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ and $M_3(x_3, y_3, z_3)$ be three given points in a plane P, and $M(x, y, z)$ be an arbitrary point in P.

Consider three vectors,

$$\overrightarrow{M_1M} = r - r_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = r_2 - r_1 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

and

$$\overrightarrow{M_1M_3} = r_3 - r_1 = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}.$$

They all lie in the plane P, and so their scalar triple product is equal to zero:

$$(r - r_1)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Equation (4) describes a plane passing through three given points.

Example: Let $M_1(2, 5, -1)$, $M_2(2, -3, 3)$ and $M_3(4, 5, 0)$ be points in a plane.
Find an equation of that plane.

Solution: By equation (4), we have

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 5 & z + 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 5 & z + 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2(x - 2) - 2(y - 5) - 4(z + 1) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$2x - 2y - 4z + 2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$x - y - 2z + 1 = 0.$$

7.3. Other Forms of Equations of a Plane

1) Let $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ and $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ be two vectors that are parallel to a plane P, and $M_1(x_1, y_1, z_1)$ be a point in P.

If $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ is the radius-vector of an arbitrary point in the plane P, then three vectors, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$, are coplanar, and so the scalar triple product is equal to zero:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{p}\,\mathbf{q} = 0.$$

This equality expresses an equation of a plane in the vector form. It can also be written in the coordinate form as follows:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

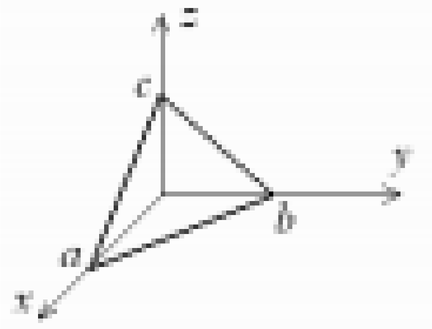
2) Assume that the general equation of a plane is expressed in the form of the following equality:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6)$$

Then

$$\begin{aligned} y = z = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = a, \\ x = z = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = b, \\ x = y = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = c. \end{aligned}$$

Therefore, the quantities a, b and c are, respectively, the x-intercept, y-intercept and z-intercept of the plane.



Equation (6) is called the equation of a plane in the intercept form.

For instance, the equation

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{4} = 1$$

describes the plane with the x–, y–, z–intercepts equal 2, –5 and 4, respectively.

№11 TEMA:

Ekinshi ta`rtipli betliktin` anıqlaması. Sfera. Ellipsoid. Giperboloid. Paraboloid.

Ken`isliktegi analitik geometriya. Ken`isliktegi noqat, tuwri ha`m tegislik tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasindag`i tuwri menen tegisliktin` ten`lemeleri, olardin` o`z-ara jaylasiwi. Noqattan tuwrig`a ha`m tegislikke shekemgi qashiqliq.

Ken`islikte Oxuz tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang`an bolsin. Ken`isliktegi figuralardi uliwma $F(x, y, z)=0$ tu`rindegi ten`leme menen analitikaliq an`latiw mu`mkin, bunda F berilgen funktsiya.

Birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebraliq ten`leme u`sh o`lshemli ken`islikte tegislikti an`latpaydi. Tegisliktin` uliwma ten`lemesi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

bunda A, B, C, D koeffitsientlerdin` keminde birewi nolden o`zgeshe qa`legen sanlar dep uyg`ariladi.

$M(x_0; y_0; z_0)$ noqatsi arqali o`tetug`in ha`m $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ vektorina perpendikulyar tegislikti $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ten`lemesi menen aniqlaw mu`mkin.

Kesindilerdegi tegisliktin` ten`lemesi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

bunda a, b, c - tegisliktin` sa`ykes Ox, Ou, Oz ko`sherlerinen kesip alg`an kesindilerinin` uzinliqlari.

Meyli α_1 ha`m $\alpha_2$ tegislikleri $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ten`lemeleri menen berilgen bolsin. Bul tegisliklerdin` arasindag`i φ mu`yesh olarg`a normal $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ ha`m $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ vektorlarinin` arasindag`i mu`yesh retinde aniqlanadi, yag`niy

$$cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Eger normal vektorlari kollinear bolsa, onda olarg`a sa`ykes keliwshi tegislikler parallel boladi $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ha`m eger normal vektorlari perpendikulyar bolsa, onda sa`ykes tegislikler de perpendikulyar boladi $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ noqatsinan Ax+Vu+Sz+D=0 tegisligine shekemgi qashiqliq

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Berilgen eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i arqili o`tetug`in barliq tegislikler da`stesinin` ten`lemesi:

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$$

bunda $\alpha=1$ dep alip da`steden ekinshi tegislikti shig`arip taslaw mu`mkin.

Ken`isliktegi tuwrini birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebraliq ten`lemelerdin` sistemasi menen, yag`niy eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i sipatinda an`latiw mu`mkin:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Bul tuwrinin` bag`itlawshi vektorin (yag`niy tuwrig`a yamasa og`an parallel tuwrig`a tiyisli vektor) tegisliklerdin` normal vektorlarinin` vektorliq ko`beymesi tu`rinde aniqlanadi.

Meyli tuwri $M_0(x_0,y_0,z_0)$ noqatsi ha`m $\bar{s}=(l;m;p)$ bag`itlawshi vektori menen berilgen bolsin. $M(x;y;z)$ - usi tuwrinin` qa`legen bir noqatsi dep uyg`aramiz. Onda, tuwrinin`

vektorliq ten`lemesi $\bar{r}=\overline{r_0}+t\bar{s}$;

parametrlik ten`lemesi $x=x_0+nt,\ y=y_0+mt;\ z=z_0+pt$;

kanonikaliq ten`lemesi $\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$.

Eki tuwrinin` bir tegislikte jaylasiw sha`rti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ n & m & p \\ n_1 & m_1 & p_1 \end{vmatrix}=0.$$

Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh:

$$\sin\varphi=\frac{|An+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{n^2+m^2+p^2}},$$

parallellik sha`rti: $An+Bm+Cp=0$;

perpendikulyarliq sha`rti: $\frac{A}{n}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$.

<u>Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar.</u>

1. Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh.

2. U`sh tegisliktin` kesilisiwi jag`daylari: bir tuwrida, bir noqatta.

3. Analitikaliq tu`rde berilgen tuwri ha`m tegisliktin` kesilisiw noqatsin tabiw.

Ken`isliktegi ekinshi ta`rtipli betler

Ken`isliktegi ekinshi ta`rtipli ten`lemeler. Kvadratliq forma. Ekinshi ta`rtipli betlerdin` kanonikaliq ten`lemeleri sfera, tsilindrler, aynaliw betleri (ellipsoid, giperboloid, paraboloid). Konusliq betler.

Ken`isliktegi bet u`sh o`zgeriwshini x, u ha`m z lerdi baylanistiratug`in ten`leme menen aniqlanadi. x, u ha`m z lerge qarata ekinshi ta`rtipli algebraliq ten`leme menen aniqlang`an bet ekinshi ta`rtipli bet dep ataladi. Uliwma ten`lemesi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

bunda A, B, C, D, E, G` koeffitsientlerdin` keminde birewi nolden o`zgeshe dep uyg`ariladi. A, B, C, D, E, G`, a, b, c, d koeffitsientlerdin` baylanisli bul ten`lemeler tu`rli betlerdi aniqlawi mu`mkin.

Sfera. (1) ten`lemede $A = B = C = 1,\ D = E = F = a = b = c = 0,\ d = -R^2$ tu`rinde alinsa, onda orayi koordinata basinda bolg`an R radiusli sferanin` $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ten`lemesine iye bolamiz.

Aniqlama. Orayi $C(x_0; y_0; z_0)$ noqatisinan $R\ (R > 0)$ qashiqliqta jaylasqan ken`isliktin` barliq noqatlarinin` geometriyaliq orini sfera dep ataladi ha`m ol $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ ten`lemesi menen analitikaliq an`latiladi.

Bul ten`leme (1) ten`lemeden

$$A = B = C = 1,\ D = E = F = 0;\ a = -2x_0;\ b = -2y_0;\ c = -2z_0;\ d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$$

tu`rinde alinsa kelip shig`adi.

Sfera to`mende aniqlanatug`in ellipsoidtin` dara jag`dayi bolip tabiladi.

1. Jasawshilari koordinata ko`sherlerinin` birine parallel bolg`an betler. Bazi bir siziqti kesip o`tiwshi siziqtin` usi siziqti boylap ha`m berilgen bag`itqa parallel ha`reketinen payda bolg`an bet tsilindrlik bet delinedi. Ha`reketleniwshi tuwri siziq jasawshi dep, berilgen siziq bag`itlawshi dep ataladi.

z koordinatani o`z ishine almaytug`in ha`m ken`islikte qarastirilatug`in $F(x; y) = 0$ ten`leme menen jasawshilari Oz ko`sherine parallel ha`m bag`itlawshisi Oxu tegisliginde berilgen ten`leme menen sipatlanatug`in tsilindrlik betti aniqlaydi. Usig`an uqsas

$F(x; z) = 0$ ha`m $F(y; z) = 0$

ten`lemeleri jasawshilari sa`ykes Ou ha`m Ox ko`sherlerine parallel bolg`an tsilindrlik betlerdi aniqlaydi.

Misali,

1) Do`n`gelek tsilindr. $x^2 + z^2 = R^2$ ten`lemesi menen an`latiladi. Onin` simmetriya ko`sheri Ou, al Oxz tegisligindegi bag`itlawshisi shen`ber boladi;

2) Ellipslik tsilindr $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jasawshilari Oz ko`sherine parallel, Oxu tegisligindegi bag`itlawshisi - ellips;

3) Giperbolaliq tsilindr $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Jasawshilari Oz ko`sherine parallel, Oxu tegisligindegi bag`itlawshisi - giperbola;

4) Parabolaliq tsilindr $y^2=2z$. Jasawshilari Ox ko`sherine parallel, Oxz tegisligindegi bag`itlawshisi - parabola.

2. Aynaliw betleri: a) Ouz tegisliginde $F(y,z)=0$ ten`lemesi menen berilgen L sizig`in Ou ko`sher do`gereginde aynaldirilg`anda payda bolg`an bet ten`lemesin aliw ushin bul siziq ten`lemesindegi z o`zgeriwshisin $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ qa o`zgertip, u ti o`zgerissiz qaldiramiz.

b) Oxz tegisligindegi siziqti Ox ko`sheri do`gereginde aynaldiriwdan payda bolg`an bet ten`lemesin aliw ushin z ti $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ qa o`zgertip, x ti o`zgerissiz qaldiramiz.

v) Oxz tegisligindegi siziqti Oz ko`sheri do`gereginde aynaldiriwdan payda bolg`an bet ten`lemesin aliw ushin $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ qa o`zgertip, z ti o`zgerissiz qaldiramiz.

g) Ouz tegisligindegi siziqti Oz ko`sheri do`gereginde aynaldiriwdan payda bolg`an bet ten`lemesi aliw ushin u ti $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ qa o`zgertip, z ti o`zgerissiz qaldiramiz.

Bulardi uliwmalastirip tablitsada ko`rsetiw mu`mkin:

Iymekliktin` ten`lemesi	Aylaniw ko`sheri	Aynaliw betinin` ten`lemesi
$F(x;y)=0$	Ox	$F\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
$z=0$	Ou	$F\left(\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$
$F(x;z)=0$	Ox	$F\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
$y=0$	Oz	$F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$
$F(y;z)=0$	Ou	$F\left(y,\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$
$x=0$	Oz	$F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

Misali,

1) Aynaliw ellipsoidi. Oz do`gereginde $Oxz$ tegisligindegi ellipsti aynaldirsaq kelip shig`adi: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

Uliwma ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2) Giperboloid. Ouz tegisligindegi $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperbolani:

Oz ko`sheri do`gereginde aynaldirsaq, bir pa`lleli $\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperboloidi kelip shig`adi. Uliwma tu`ri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ou ko`sheri do`gereginde aynaldirsaq eki pa`lleli $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$ giperboloidi kelip shig`adi. Uliwma tu`ri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

3) Paraboloid. Ouz tegisligindegi $y^2 = 2pz$ parabolani Oz ko`sheri do`gereginde aynaldirip aynaliw $x^2 + y^2 = 2pz$ paraboloidin aliw mu`mkin.

Elliptik paraboloid: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \ (pz > 0)$.

Giperbolik paraboloid: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.

3. Konusliq betler.

4. Siziqli betler. Tuwri siziqtin` ha`reketleniwinen payda bolg`an bet siziqli bet dep, onda jatatug`in tuwri siziqlar jasawshilar dep ataladi.

Ekinshi ta`rtipli tsilindrlik ha`m konusliq betler, giperbloloidlar siziqli betlerdin` misali bolip tabiladi.

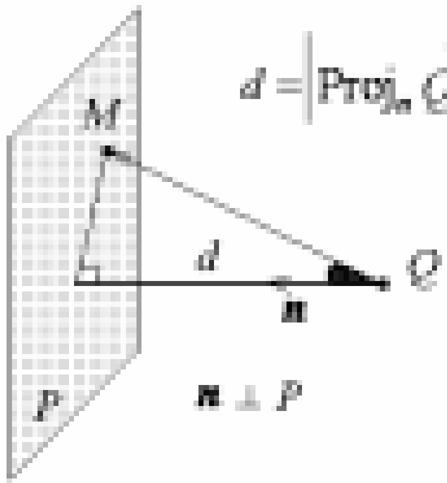
7.5. Distance From a Point To a Plane

Assume that a plane P is determined by the equation in the general form:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (9)$$

Let $Q(x_1, y_1, z_1)$ be a given point not in the plane, and $M(x, y, z)$ be an arbitrary point in P. Then the distance d between the point Q and the plane P is equal to the absolute value of the projection of $\vec{QM}$ on $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

$$d = \left|\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\vec{QM}\right| = \frac{\left|\vec{QM}\cdot\mathbf{n}\right|}{|\mathbf{n}|}$$



Therefore,

$$d = \left|\frac{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

By equality (9),

$$Ax + By + Cz = -D,$$

and so the distance between point $Q(x_1, y_1, z_1)$ and plane (9) is given by the following formula:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (9)$$

Example: Let the plane be given by the equation

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0.$$

The distance from the point $Q(8, -7, 1)$ to the plane is

$$d = \left|\frac{2\cdot 8 + 3\cdot(-7) - 4\cdot 1 + 5}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4}{29}\sqrt{29}.$$

7.6. Relative Position of Planes

Let two planes, P_1 and P_2, be given by their general equations

$$P_1: \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_1: \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Consider the system of two linear equations

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

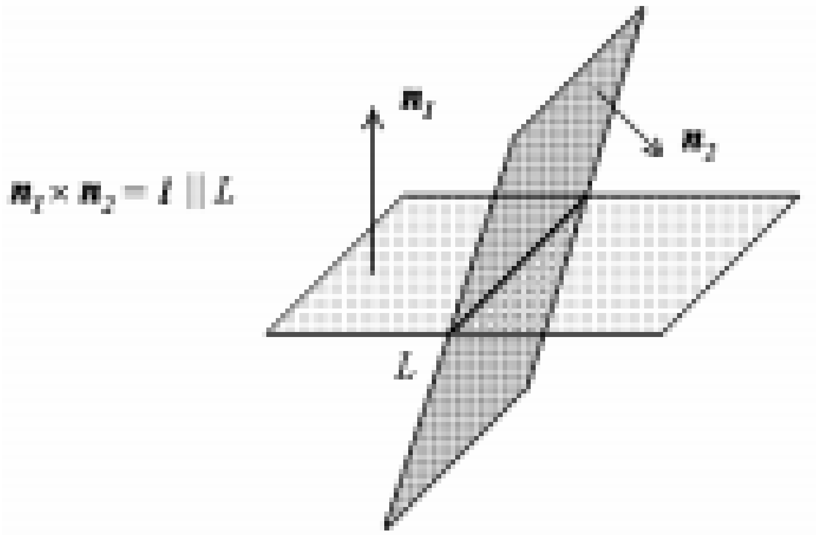
1) If system (10) is inconsistent, then the planes are parallel, and so the coordinates of the normal vectors $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ and $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ are proportional:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

2) If system (10) is consistent and the equations are proportional to each other, then P_1 is just the same plane as P_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

3) If system (10) is consistent, and the rank of the coefficient matrix equals 2, then P_1 and P_2 are intersecting planes. The locus of these distinct intersecting planes is exactly one line L. The vector product of normal vectors to the planes P_1 and P_2 is the vector, which is perpendicular to the normal vectors, and so it lies in both planes. Therefore, $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ is a direction vector $\boldsymbol{l}$ of the intersection line L:



In a similar way we can consider the relative position of any number of planes. The only difference is the number of possible cases.

7.7. Relative Position of a Plane and a Line

Let a plane P be given by the equation in the general form

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

and a line L be determined by the system of two linear equations

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

To investigate the relative positions of the line and the plane, consider the integrated system of equations:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

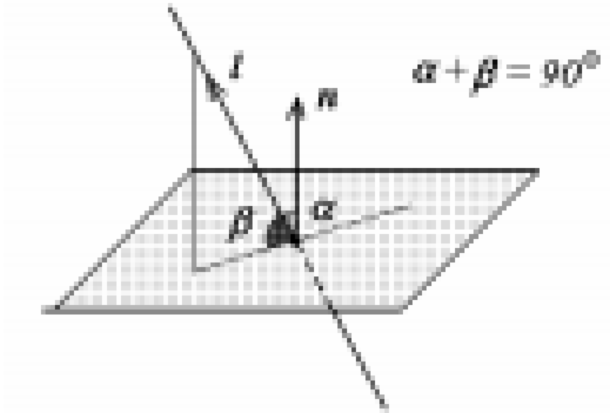
There are three possible cases.

1) If the rank of the coefficient matrix equals 3, then the system is consistent and has a unique solution $\{x_0, y_0, z_0\}$. It means that $M_0(x_0, y_0, z_0)$ is the point of intersection of the plane and the line.
2) If system (11) is consistent, and the rank of the coefficient matrix equals 2, then the line L lies in the plane P.
3) If system (11) is inconsistent then the line L is parallel to the plane P.

7.8. The Angle Between a Plane and a Line

Let α be the angle between a normal vectors $\mathbf{n}$ to a plane and a direction vector $\mathbf{l}$ of a line, and β be the angle between the plane and the line.

Then α and β are complementary angles shown in the figure below.



Therefore,

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{l}|}.$$

№12 TEMA:

Funktsiya tu`sinigi, beriliw usılları, funktsiyalar klassifikatsiyası. Monoton, keri, periodlı funktsiyalar. Quramalı funktsiya. Funktsiyalar u`stinde arifmetikalıq a`meller.Sanlı izbe-izlik ha`m onın` limiti. Funktsiyanın` limiti.

Funkciya tu`sinigi

Turaqlı shama dep tek bir ma`nisti qabıl etetug`ın shamag`a aytamız.Turaqlı shamalardı latin alfavitinin` da`slepki jazba ha`ripleri menen belgileymiz yag`nıy a,b,c,d…. Eger shama bazı bir waqıtlarda(jag`daylarda) g`ana turaqlı bolıp qalsa, onı parametr dep ataymız. Ha`r qıylı san ma`nislerdi qabıl etetug`ın shamanı o`zgeriwshishamalar dep ataymız ha`m olardı latin alfavitinin` aqırg`ı jazba ha`ripleri menen belgileymiz yag`nıy x, y, z….

Eki X ha`m Y ko`plikleri berilgen bolsın,x∈X ha`m y∈Y.

Anıqlama. *X* ko`pliginin` ha`r bir $x(x \in X)$ elementine bazı bir qag`ıyda yamasa nızam boyınsha *Y* ko`pliginin` anıq bir $y(y \in Y)$ elementi sa`ykes qoyılg`an bolsa, *X* ko`pliginde funkciya berilgen dep ataladı ha`m ol

$$y = f(x)$$

sıyaqlıbelgilenedi.

BundaXko`pligifunkciyanin`anıqlanıwoblastıdepataladı ha`mD(y)=Xbelgilenedi, alYko`pligifunkciyanin` ma`nislerko`pligidepataladıha`mE(y)=Ydepbelgilenedi,*x*g`a`rezsizo`zgeriwshiyamasafunkciyaargumenti,*y*g`a`rezlio`zgeriwshiyamasaxo`zgeriwshisinin` funkciyasıdepataladı, *f*sa`ykeslikqag`ıydanı,nızamınko`rsetiwshibelgi.

Mısal:X=(-∞;+∞) ha`r-birhaqıyqıysang`aonın` kvadratınsa`ykesqoyayıqyag`nıy $y = x^2$.BulmısaldaD(y)= (-∞;+∞),E(y)=[0;+∞).

Funkciyalardın` beriliwusılları

Funkciyabirnesheusıldaberiliwimu`mkin:

1. Analitikalıqusıl.xo`zgeriwshinin` ha`rbirma`nisinesa`ykeskeliwshiy-tin` ma`nislerixo`zgeriwshisiustindeanalitikalıqa`mellerdiorınlawna`tiyjesiko`rinisideyag`nıyform ulaja`rdemindeberiliwineanalitikalıqusıldiymiz. Bulusılmatematikadaa`meliyesaplardı islewdeko`pushıraydı.

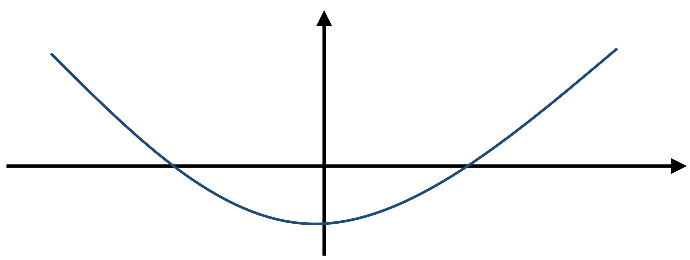
Mısalı: $y = \dfrac{x^2 - 2}{x}$, $y = \sqrt{2x+8}$

2. Grafikalıqusıl.Bunda $y = f(x)$funkciyası tegisliktegi (*x*,*y*) noqatlarko`pligigrafigiarqalı beriledi, *x*argumentlerdin` ma`nislerihoqattın` abscissası, *y*funkciyanın` ma`nislerisa`ykesnoqatordinatası.

Mısalı:y

O

x



3. Tablicalıq usılda. Bunda x argumentinin` ma`nislerine sa`ykes y funkciyanın` ma`nisleri tablitsa tu`rinde beriledi.

***Mısalı*:** Qon`ırat-Tashkent jolawshı poezdinin` basıp o`tken jolının` waqıtqa qarata o`zgeriw kestesi:

t(waqıt,s)	1	3	6	9	12	15	18
S(jol,km)	60	180	360	540	720	900	1080

.

4. So`z benen beriliw usılı.

***Mısalı*:**Jol haqı 600 sum: $f(x)=\begin{cases}600\, sum,\ eger\ \ a\neq b\ bolsa;\\ 0\ sum, eger\ \ a=b\ bolsa.\end{cases}$

Funkciyanın` tiykarg`ı qa`siyetleri

1. ***Jup ha`m taqlıg`ı.***

Anıqlama: Eger ∀x∈X ushın

$$f(-x)=f(x)$$

ten`likorınlı bolsaf(x)- funkciyajupfunkciyadepataladı.

Mısalı: $y=x^2,\quad y=|x|,\ \ y=\cos x$ funkciyaları jupfunkciyalar,

sebebi $(-x)^2=x^2,\ |-x|=|x|,\ \cos(-x)=\cos x$

Jupfunkciyalardın` grafigiordinateko`sherineqaratasimmetriyalı jaylasqanboladı(1-su`wret).

Anıqlama: Eger ∀x∈X ushın

$$f(-x)=-f(x)$$

ten`likorınlı bolsaf(x)- funkciyataqfunkciyadepataladı.

Mısalı: $y=x^3,\quad y=2x,\ \ y=tgx$ funkciyaları taqfunkciyalar,

sebebi $(-x)^3=-x^3,\ \ 2(-x)=-2x,\ \ tg(-x)=-tgx$

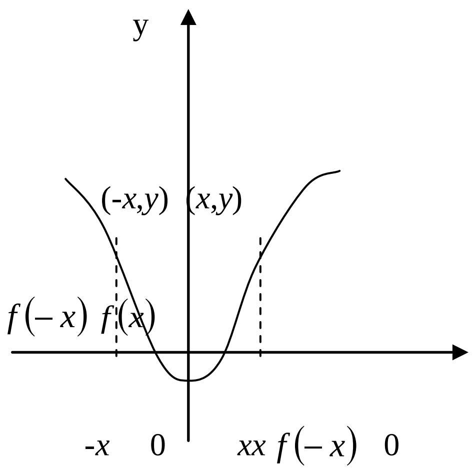
Taqfunkciyanın` grafigikoordinatabasınaqaratasimmetriyalı jaylasqanboladı(2-su`wret).

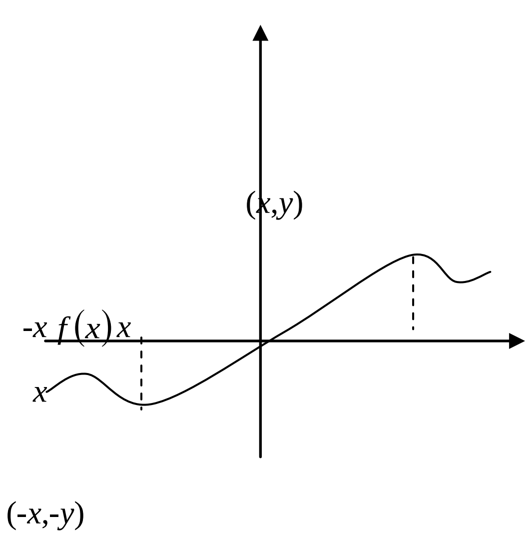
Joqarıdag`ı ekianıqlamanin`daten`likleriorınlanbaytug`ınfunkciyalarjuptaemes,taqtaemesfunkciyalardepataladı yag`niy $y=f(x)$ funkciyası

juptaemes,taqtaemesegerde $f(-x)\neq\begin{cases}f(x)\\ -f(x)\end{cases}$ bolsa.

Mısalı: $y=x^2+3x-2,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=2x^3-x^2$ funkciyaları juptaemes,taqtaemesfunkciyalar.

***Mısal*:** 1-su`wrette funcsiyanın` grafigi (x,y) kordinatalı noqatı menen birge (-x,y) koordinatalı noqatınandao`tedi. Ol jup funkciya. 2-su`wrette funkciya grafigi A(x,y) noqattan ha`m B(-$x$,-$y$) noqattan o`tedi. Bul taq funkciya.





$f(x)$-jup funkciya

1- su`wret.

$f(x)$-taq funkciya

2-suwret.

2. *Monoton funkciylar.* Meyli $y=f(x)$ funkciya berilgen bolsın.

Anıqlama: Anıqlanıw oblastınan alıng`an $x_1\in X, x_2\in X$ *ushın* $x_1<x_2$ *bolıwınan* $f(x_1)\le f(x_2)$ ten`sizligi kelip shıqsa, $y=f(x)$ funkciyası X aralıqta o`siwshi funkciya dep ataladı.

Mısalı: $y=3x-5$ funkciya X=(-∞;+∞) aralıg`ında o`siwshi funkcuya.

$x_1=2<x_2=3$ ushın $y_1=3\cdot2-5=1<y_2=3\cdot3-5=4$.

Anıqlama: Anıqlanıw oblastınan alıng`an $x_1\in X, x_2\in X$ *ushın* $x_1<x_2$ *bolıwınan* $f(x_1)\ge f(x_2)$ ten`sizligi kelip shıqsa, $y=f(x)$ funkciyası X aralıqta kemeyiwshi funkciya dep ataladı.

Mısalı: $y=-3x+5$ funkciya X=(-∞;+∞) aralıg`ında kemeyiwshi funkcuya.

$x_1=2<x_2=3$ ushın $y_1=-3\cdot2+5=-1>y_2=-3\cdot3+5=-4$.

O`siwshi ha`m kemeyiwshi funkciyalar monoton funkciyalar dep ataladı.

3. *Shegaralang`anlıg`ı.* Bazı bir X aralıg`ında qandayda bir $M$>0 sanı bar bolıp, $\forall x \in X$ ushın $f(x) \le M$, $(f(x) \ge M)$ ten`sizligi orınlansa, $y = f(x)$funkciyası X aralıqta joqarıdanshegaralang`an(to`mennen shegaralang`an)dep ataladı. Qarama-qarsı jag`dayda,yag`nıy onday M sanı bar bolmasa shegaralanbag`an dep ataladı.

Mısalı: $y = x^2 + 5$ funkciya X=(-∞;+∞) aralıg`ında to`mennen shegeralang`an funkcuya, sebebi ∀x∈(-∞;+∞) ushın $y = x^2 + 5 \ge 5$.

**4. *Periodlılıg`ı.*** Egerde bazı bir $T \ne 0$ ushın $x \in X, (x+T) \in X$ bolg`anda $f(x+T) = f(x)$ ten`ligi orınlı bolsa, $y = f(x)$funkciyası T periodqa iye periodlıfunkciya dep ataladı.

Mısalı: y=sin$x$funkciyası T=2π periodqa iye periodlı funkciya, sebebi qa`legen x ushın sin(x+2π)=sin$x$.

Funkciyalardın` klassifikatsiyası

Egerde funkciya on` jag`ında g`a`rezli o`zgeriwshi bolmag`an formula ja`rdeminde berilse onda ol anıq funkciya dep ataladı.

Mısalı: $y = x^2 + 5x + 1$ anıq funkciya.

x argumentinin` $y$funkciyası, g`a`rezli o`zgeriwshige qarata anıqlanbag`an $F(x;y)=0$ tu`rinde berilse, onda ol funkciyaanıq emes funkciya dep ataladı.

Mısalı: $x^3 + y^2 + 2yx - x = 0$ anıq emes funkciya.

Keri funkciya.Meyli $y = f(x)$, ma`nisler ko`pligi Y bolg`an ha`m X ko`pliginde anıqlang`an, x g`a`rezsiz o`zgeriwshinin` funkciyası bolsın. $f(x) = y$ bolg`anda, ha`rbir $y \in Y$ ke birden bir $x \in X$ tı sa`ykeslendiremiz. Onda payda bolg`an $x = \varphi(y)$, ma`nisler ko`pligi X bolg`an, $Y$ ko`pliginde anıqlang`an keri funkciya dep ataladı, ha`m onı $x = f^{-1}(y)$ ko`rinisinde belgileymiz.

Mısalı: $y = x^2$ funkciyasına $x = \sqrt{y}$ keri funkciya boladı.

Qa`legen qatan` monoton funkciya ushın keri funkciya bar bolatug`ınlıg`ın da`lillewge boladı.

O`zara keri funkciyalardın` grafikleri birinshi ha`m u`shinshi koordinata mu`yeshlerinin` bissektrisasına simmetriyalı boladı.

Mısalı: $y = a^x$ ha`m $x = \log_a y$, yamasa $y = \log_a x$ o`zara keri funkciyalar. $(a > 1)$,

Quramalı funkciya.Meyli $y = f(u)$ ma`nisler oblastı $Y$ bolg`an U ko`pliginde anıqlang`an u o`zgeriwshisinin` funkciyası bolıp, al o`zgeriwshi $u$ o`z gezeginde, ma`nisler oblastı $U$ bolg`an X ko`pliginde anıqlang`an x o`zgeriwshisinin` $u = \varphi(x)$ funkciyası bolsın. Onda X ko`pliginde berilgen $y = f[\varphi(x)]$ funkciyası quramalı funkciya dep ataladı.

Mısalı: 1) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ quramalı funkciya, bunda $u = x^2 - 2x - 3$, $y = \sqrt{u}$

2) $y = \lg\sqrt[3]{x}$, $u = \sqrt[3]{x}$, $y = \lg u$ quramalı funkciya ha`m t.b.

Elementar funkciyalar.

Elementar funkciyalar algebralıq ha`m transtsendentlik bolıp bo`linedi.

Algebralıq dep argument u`stinen shekli sandag`ı algebralıq a`meller orınlanatug`ın funkciyalarg`a aytamız. Algebralıq funkciyaılarg`a:

- pu`tin ratsional funkciya (ko`pag`zanın` yamasa polinom):

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n;$$

- bo`lshek ratsional funkciya-eki ko`p ag`zalıqtın` qatnası;

- irrotsianal funkciya (eger a`meller ishinde argumentten koren shıg`arıw a`meli bar bolsa) funkciyalar jatadı.

Basqa qa`legen algebralıq emes funkciya transtsendentlik boladı, olarg`a: ko`rsetkishli, logarifmlik, trigonometriyalıq, keri trigonometriyalıq funkciyalar jatadı.

Mektep kursınan belgili tiykarg`ı elementar funkciyalardı keltirip o`temiz.

1. Sızıqlı funkciyalar.

$$y = kx + b$$

en` ko`p taralg`an funkciya bolıp esaplanadı. Bul sızıqlı programmalastırıwda ko`plep qollanıladı.

2. Da`rejeli funkciya.

$$y = x^n, \quad n \neq 0,$$

n nin` natural ma`nislerinde yag`nıy $n \in N$ bolg`anda bul funkciya barlıq sanlar ko`sherinde anıqlang`an.

3. Ko`rsetkishli funkciya.

$$y = a^x, \ \forall a > 0, \ a \neq 0$$

Anıqlanıw oblastı $x \in (-\infty;+\infty)$, al ma`nisler ko`pligi $y \in (0;+\infty)$. Eger $a > 1$ bolsa, funkciya monoton o`sedi, eger $0 < a < 1$ bolsa, monoton kemiydi.

4. Logarifmlik funkciya.

$$y = \log_a x, \ \forall a > 0, \ a \neq 1.$$

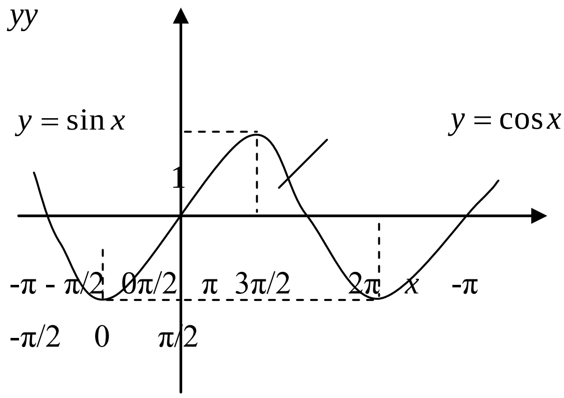
Bulfunkciyako`rsetkishlifunkciyag`aqaratakerifunkciya.

Sonlıqtanda $x \in (0;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$. Bunın` grafigi $y = a^x$ funkciyasının` grafigimeneny=xtuwrısınaqaratasimmetriyalı boladı. Sonın` menenbirgeqa`legen a tiykarı ushın $\log_a 1 = 0$ sha`rtiorınlanadı, sonlıqtandaqa`legenlogarifmlikfunkutsiyanın` grafigi (1;0) noqatınano`tedi.

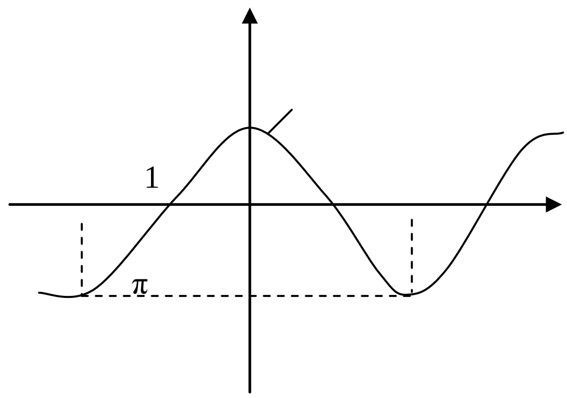
5. Trigonometriyalıq funkciyalar.

$$y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = tgx, y = ctgx.$$

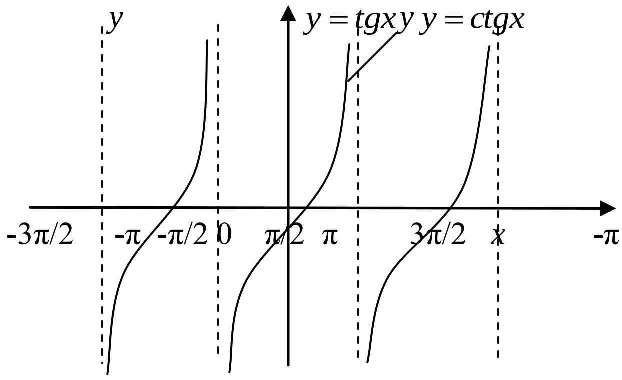
$y=\sin x$ ha`m $y=\cos x$ funkciyaları barlıq sanlı tuwrıda anıqlang`an ha`m ma`nisleri ko`pligi $[-1;1]$ aralıg`ı boladı. $y=tgx$ funkciyasıx tın` $x=\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in N$ ma`nislerinen basqa barlıq ma`nislerinde anıqlang`an ha`m anıqlanıw oblastının` ha`r bir intervalında monoton o`seddi. Tangens ha`m kotangenslerdin` ma`nisler ko`pligi $(-\infty;+\infty)$ boladı.



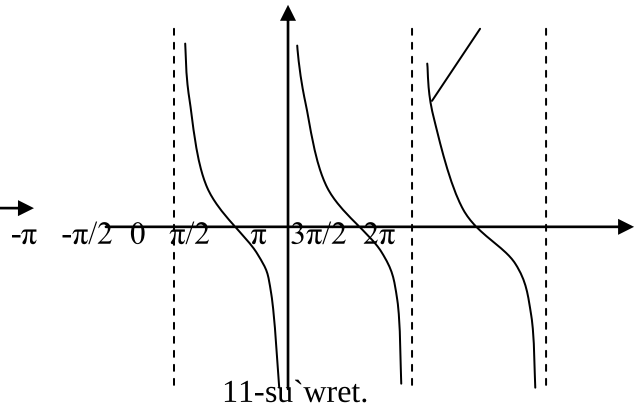
8-su`wret



9-su`wret



10-su`wret.



11-su`wret.

$y=\sin x,\ y=tgx,\ y=ctgx$ funkciyaılarıtaqha`molardın` grafiklerikoordinatabasınasimmetriya (8, 10, 11-su`wretler). Al $y=\cos x$ funkciyası jup, sonlıqtandaonın` grafigi*Oy*ko`sherinesimmetriyalı (9-su`wret).

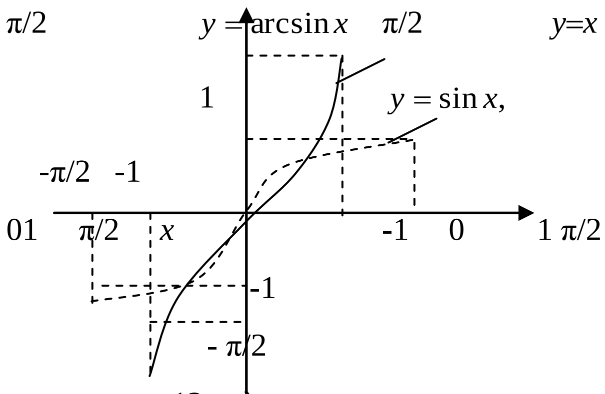
$y=\sin x$ ha`m $y=\cos x$ funkciyalarının`, periodı 2π, al $y=tgx$ ha`m $y=ctgx$ funkciyalarının` periodı π ge ten`.

6.Keri trigonometriyalık funkciyalar.

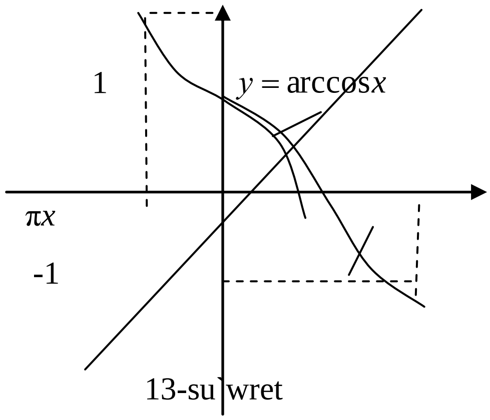
$$1)\ y=\arcsin x,\qquad x\in[-1;1],\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

funkciya $y=\sin x$ funkciyasına keri funkciya. Sonlıqtan da bul funkciyanın` grafigi $y=\sin x$ funkciyanın` grafigine *y=x* tuwrısına qarata simmetriyalı (12-su`wret).

yy



12-su`wret



13-su`wret

2) $y = \arccos x, \quad x \in [-1;1], \;\; y = [0;\pi)$

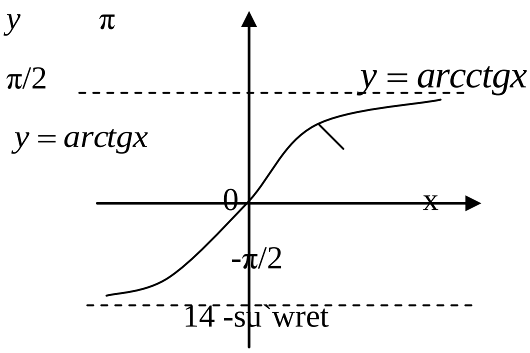
funkciyası $y = \cos x$ funkciyasına keri funkciya. Sonlıqtanda onın` grafigi $y$=$x$ tuwrısına qarata $y = \cos x$ funkciyasının` grafigine simmetriyalı (13-su`wret).

3) $y = arctgx, \;\; x \in (-\infty;+\infty), \; y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

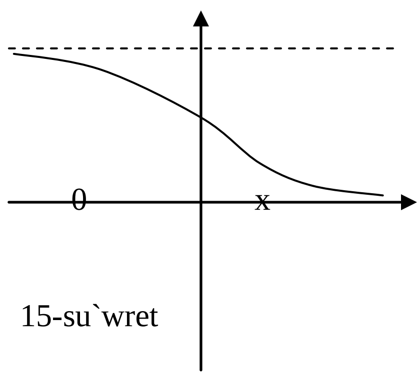
funkciyası $y = tgx$ funkciyasına keri funkciya. Onın` grafigi $y$=$x$ tuwrısına qarata $y = tgx$ funkciyasının` grafigine simmetriyalı. (14-su`wret).

4) $y = arcctgx, \; x \in (-\infty;+\infty), \;\; y \in (0;\pi)$

funkciyası $y = ctgx$ funkciyasına keri funkciya. Onın` grafigi $y = x$ tuwrısına qarata $y = ctgx$ funkciyasının` grafigine simmetriyalı (15-su`wret).



14 -su`wret



15-su`wret

Sanlı izbe-izlikler ha`m olardın` shegi

Anıqlama. Bazı bir nızam menen ha`r bir natural $n$ sanına tolıq anıqlang`an a_n sanı sa`ykes keltirilgen bolsa, onda $\{a_n\}$ sanlı izbe-izligi berilgen dep ataladı ha`m to`mendegishe jazıladı:

$\{a_n\}: a_1, a_2, ..., a_n, ...$ bunda $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sanlı izbe izliktin` ag`zaları dep ataladı.

Qısqasha aytqanda sanlı izbe-izlik bul natural argumenttin` $a_n = f(n)$ funkciyası boladı.

Mısalı: 1. $a_n = \frac{1}{n}$; Bul sanlar izbe-izligi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ... \frac{1}{n}$ boladı.

2. $a_n = n^2$; Bunday sanlar izbe-izligi 1, 4, 9, 16. . .n^2ko`riniste boladı.

Anıqlama. Egerde qa`legenshe kishi $\varepsilon > 0$ sanı ushın $N$ sanı tabılıp, izbe-izliktin` barlıq $n > N$ nomerlerge iye ag`zaları ushın $|a_n - A| < \varepsilon$ ten`sizligi orınlansa, A sanı $\{a_n\}$ izbe-izliktin` shegi dep ataladı ha`m onı

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ tu`rinde jazamız.}$$

Mısalı. 1. $a_n = \frac{6n-5}{2n}$ bolsa, $\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{13}{6}, ...,$ izbe izliktin` shegin tabıw kerek.

Sheshiliwi.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-5}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} = 3 - \frac{5}{\infty} = 3 - 0 = 3$$

2. $a_n = n^2$ sanlar izbe-izligi 1, 4, 9, 16. . .n^2ko`riniste ha`m onın` shegi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty^2 = \infty \text{ boladı.}$$

3. $a_n = (-1)^n$ sanlar izbe-izligi -1, 1, -1, 1. . .$(-1)^n$. . ko`riniste ha`m onın` shegi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ boladı.

Ahıqlama: Egerde izbe-izlik shekli shekke iye bolsa, onda ol jıynaqlı, al shegi sheksizlik yamasa ulıwma shekke iye bolmasa tarqalıwshı dep ataladı.

1-mısaldag`ı uzbe-izlik jıynaqlı,al 2-3-mısaldag`ı izbe-izlikler tarqalıwshı boladı.

Sheksiz kishi ha`m sheksiz u`lken shamalar

Anıqlama 1. $\alpha(x)$ funkciyası ushın $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ ten`ligi orınlansa, onda $\alpha(x),\ x \to a$ da sheksiz kishi dep ataladı.

Eki sheksiz kishi shamanın` qosındısı (ayırması) ha`m ko`beymesi de sheksiz kishi shama boladı.

Eki sheksiz kishi shamanın` qatnası tuwralı ulıwma tastıyıqlaw aytıwg`a bolmaydı, sebebi ol shamalardın` xarakterine baylanıslı ha`r qıylı bolıw mu`mkin.

Mısalı. $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) = 0$

***<u>Sheksiz kishi shamalardın` qa`siyetleri</u>*:**

1. Shekli sandag`ı sheksiz kishi shamalardın` algebralıq qosındısıda sheksiz kishi shama boladı.
2. Sheksiz kishi shamanın` sheklengen funkciyag`a (turaqlıg`a, basqa sheksiz kishi shamag`a) ko`beymeside sheksiz kishi shama boladı.
3. Sheksiz kishi shamanı, shegi nolden o`zgeshe funkciyag`a bo`lgendegi tiyindiside sheksiz kishi shama boladı.

Anıqlama 2. Qa`legenshe u`lken on` $M$>0 sanı ushın, $\delta$>0 ($M$ nen g`a`rezli, $\delta=\delta(M)$) on` sanı tabılıp, x_0 g`a ten` bolmag`an barlıq $x$ ushın $|x-x_0|<\delta$ ten`sizligi orınlang`anda $|f(x)|>M$ bolsa, $f(x)$ funkciyası $x\to x_0$ sheksiz u`lken shama delinedi,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Mısal ushın, $y=tgx$ funkciyası $x\to\frac{\pi}{2}$ de sheksiz u`lken, $y=\sqrt{5x-7}$, $x\to\infty$ da sheksiz u`lken boladı. Sheksiz u`lken shama $x\to x_0$ ($x\to\infty$) da sheklenbegen funkciya ekenin aytıp o`tiw kerek. Sonın` menen birge sheklenbegen funkciyanın` sheksiz u`lken bolıwı sha`rt emes.

<u>Sheksiz u`lken shamalardın` qa`siyetleri:</u>

1. Sheksiz u`lken shamanın`, shegi nolden o`zgeshe funkciyag`a ko`beymesi sheksiz u`lken shama.
2. Sheksiz u`lken shama menen sheklengen funkciyanın` qosındısı sheksiz u`lken shama.
3. Sheksiz u`lken shamanı, shekke iye funkciyag`a bo`lgendegi tiyindi sheksiz u`lken shama.

Funkciyanın` shegi

***<u>Funkciyanın` sheksizliktegi shegi</u>.*** $a_n=f(n)$ sanlı izbe-izliktin` shegi menen $y=f(x)$ funkciyasının` sheksizliktegi shegi tıg`ız baylanıslı. Sanlı izbe-izlikte n o`siwshi ha`m tek pu`tin ma`nislerdi alatug`ın bolsa, funkciyada o`zgeriwshi x qa`legen ma`nis aladı.

Anıqlama 1. Qa`legenshe kishi on` ε>0 sanı ushın bazı bir on` $S$>0 ($\varepsilon$g`a g`a`rezli) $S=S(\varepsilon)$ sanı tabılıp $|x|>S$ bolg`an barlıq x ushın

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

ten`sizligi orınlansa, $A$ sanı $x$ tın` sheksizlikke umtılg`andag`ı $y=f(x)$ funkciyasının` shegi dep ataladı ha`m ol

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ dep belgilenedi.

Funkciyanın` noqatdag`ı shegi. Eger $y=f(x)$ funkciyası $x_0$noqatının` do`gereginde anıqlang`an bolsın, bazı birde $x_0$ noqatnın` o`zinde de beriliwi mu`mkin.

Anıqlama 2. $y = f(x)$funkciyası berilip, qa`legenshe kishi $\varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta > 0(\delta = \delta(\varepsilon))$ sanı bar bolıp, $x$ tın` x_0 g`a ten` bolmag`an qa`legen ma`nisinde $|x - x_0| < \delta$ ten`sizligi orınlang`anda $|f(x) - A| < \varepsilon$ ten`sizligi orınlansa, A sanı x tın` $x_0$ g`a umtılg`andag`ı (yamasa $x_0$noqatındag`ı) $f(x)$funkciyasının` shegi dep ataladı ha`m ol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$dep jazıladı.

1-Eskertiw. Shektin` anıqlaması funkciyanın` $x_0$noqatının` o`zinde bar bolıwı talap etilmeydi, sebebi $x_0$noqatının` bazı bir do`geregindegi $x \neq x_0$ ma`nisin qaraydı. Basqasha aytqanda, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tı qaray otırıp, biz $x$, $x_0$ g`a umtıladı, al funkciyanın` $x_0$noqatındag`ı ma`nisine baylanıslı emes dep esaplaymız.

2-Eskertiw. x, x_0 g`a umtılg`anda, x o`zgeriwshisi tek $x_0$ dan kishi ma`nis yamasa kerisinshe tek x_0 dan u`lken ma`nis alatug`ın bolsa, sonın` menen birge $f(x)$ funkciyası bazı bir A sanına umtılsa, $f(x)$ funkciyasının` bir ta`repli shegi tuwralı so`z etiledi ha`m sa`ykes shepten $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ ha`m on`nan $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ umtıladı delinedi.

Eger $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ bolsa, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ bolatug`ını ko`rinip tur.

Sheksiz kishi shama menen funkciya sheginin` baylanısı.

Teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da A g`a ten` shekke iye bolsa, onda onı A sanı ha`m $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ dag`ı sheksiz kishi shama $\alpha(x)$ tın` qosındısı tu`rinde ko`rsetiwge boladı:

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

Teoremanın` keriside durıs.

Teorema. Egerde $f(x)$ funkciyasın A sanı ha`m $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da sheksiz kishi $\alpha(x)$ shamasının` qosındısı tu`rinde ko`rsetiw mu`mkin bolsa, $A$ sanı funkciyanın` $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ dag`ı shegi boladı, yag`nıy $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$

Shekler haqqında tiykarg`ı teoremalar

Qaralatug`ın ha`rbir teoremada funkciya bazı bir ulıwma X ko`pliginde anıqlang`an ha`m x_0 shek noqatı dep esaplaymız.

Meyli bizge $y = f(x)$ ha`m $y = \varphi(x)$ funkciyaları berilip, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$ shekleri bar bolsın:

1. Funkciya tek g`ana bir shekke iye boladı; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \text{ ha`m } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B \Leftrightarrow A = B$,

2. Shekli sandag`ı funkciyalardın` algebralıq qosınıdısının` shegi olardın` sheklerinin` algebralıq qosındısına ten`:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm\phi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\phi(x)=A\pm B.$$

3. Shekli sandag`ı funkciyalardın` ko`beymesinin` shegi usı funkciyalarının` sheklerinin` ko`beymesine ten`. Dara jag`dayda turaqlı sandı shektin` sırtına shıg`arıwg`a boladı:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\phi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\phi(x),\quad \lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Saldar. Egerde $f(x)$ funkciyası $x\to x_0$ da shekke iye bolsa, onda onın` on` da`rejesinin` $x\to x_0$ dag`ı shegi, bul funkciyanın` sheginin` da`rejesine ten`, yag`nıy

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^n,\qquad (n\text{-natural san}).$$

4. Eki funkciyanın` qatnasının` shegi sol funkciyalardın` sheklerinin` qatnasına ten`:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)}=\frac{A}{B},\quad B\neq 0.$$

5. Eger $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A,\ u=\varphi(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ bolsa, quramalı funkciyanın` shegi, $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\phi(x)\right]=A$ boladı.

6. x_0 noqatının` bazı bir do`geregiнde $f(x)<\varphi(x)$ bolsa,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}\phi(x)\quad \text{boladı.}$$

Biz u`shinshi teoremanı, eki funkciya ushın da`lilleyik. Meyli $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$ bolsın. Onda $f(x)=A+\alpha(x)$, $\varphi(x)=B+\beta(x)$ boladı, bunda $\alpha(x)$ ha`m $\beta(x)$ lar $x\to x_0$ da $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to 0$. Sonda $f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B+\gamma(x)$, bunda $\gamma(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$, demek $x\to x_0$ da $\gamma(x)\to 0$, bunnan $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=A\cdot B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, teorema da`lillendi. Qalg`an teoremalar usıg`an uqsas da`llenedi.

***Shektin` bar bolıw belgisi***. Shektin` bar bolıwın biliw ushın joqarıdag`ı shektin` anıqlamasın qollanıw, barlıq waqıtta qolaylı bola bermeydi.

Onı shektin` bar bolıw belgisi arqalı iske asırıw ma`qsetke muwapıq boladı.

Teorema 1. Egerde $\{a_n\}$ sanlı izbe-izlik monoton ha`m sheklengen bolsa, ol shekke iye boladı.

Eki jag`day bolıwı mu`mkin:

a) izbe izlik kemeyiwshi emes ha`m joqarıdan shegaralang`an $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le\ldots\le M$.

b) izbe izlik o`siwshi emes ha`m to`mennen shegaralang`an $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \geq M$.

Teorema 2. Egerde $x_0$noqatının` bazı bir do`gereginde (yamasa xtın` jeterli u`lken ma`nisinde) $f(x)$ funkciyası $x \to 0$ (yamasa $x \to \propto$) da birdey $A$ shekke iye bolg`an $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyalarının` arasında jatsa, onda $f(x)$ funkciyasıda A shekke iye boladı.

***Da`lillew***. Meyli $x \to 0$ da $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$ bolsın. Bul qa`legen ε>0 ushın, barlıq $x \neq x_0$ ma`nisi ushın $|x - x_0| < \delta$ sha`rti orınlanatug`ın δ>0 shaması tabıladı ha`m bir waqıtta

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon, \ |\psi(x) - A| < \varepsilon$$

ten`sizliklerіorınlanatug`ınlıg`ınbildiredi, yamasa

$$A\text{-}\varepsilon < \varphi(x) < A+\varepsilon, \quad A\text{-}\varepsilon < \psi(x) < A+\varepsilon.$$

Sha`rtboyınsha$f(x)$ ekifunkciyanın` arasındajaylasqan, yag`nıy$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, demekjoqarıdag`ı ten`sizliklerden:

$$A\text{-}\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon, \text{ yag`nıy } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Bul $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ekenligin bildiredi.

Functions

Functions crop up regularly in everyday life (for instance: each student of the Polytechnic of Turin has a unique identification number), in physics (to each point of a region in space occupied by a fluid we may associate the velocity of the particle passing through that point at a given moment), in economy (each working day at Milan's stock exchange is tagged with the Mibtel index), and so on.

The mathematical notion of a function subsumes all these situations.

2.1 Definitions and first examples

Let X and Y be two sets. A **function** f **defined on** X **with values in** Y is a correspondence associating to each element $x \in X$ *at most* one element $y \in Y$. This is often shortened to 'a function from X to Y'. A synonym for function is **map**. The set of $x \in X$ to which f associates an element in Y is the **domain** of f; the domain is a subset of X, indicated by $\operatorname{dom} f$. One writes

$$\boxed{f : \operatorname{dom} f \subseteq X \to Y.}$$

If $\operatorname{dom} f = X$, one says that f is defined **on** X and writes simply $f : X \to Y$.

The element $y \in Y$ associated to an element $x \in \operatorname{dom} f$ is called the **image of** x **by** or **under** f and denoted $y = f(x)$. Sometimes one writes

$$f : x \mapsto f(x).$$

The set of images $y = f(x)$ of all points in the domain constitutes the **range of** f, a subset of Y indicated by $\operatorname{im} f$.

The **graph** of f is the subset $\Gamma(f)$ of the Cartesian product $X \times Y$ made of pairs $(x, f(x))$ when x varies in the domain of f, i.e.,

$$\boxed{\Gamma(f) = \big\{(x, f(x)) \in X \times Y \ : \ x \in \operatorname{dom} f\big\}.} \qquad (2.1)$$

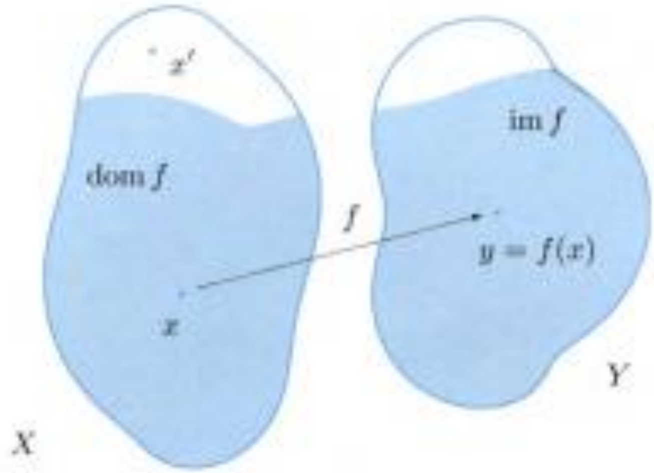


Figure 2.1. Naive representation of a function using Venn diagrams

In the sequel we shall consider maps between sets of numbers most of the time. If $Y = \mathbb{R}$, the function f is said **real** or **real-valued**. If $X = \mathbb{R}$, the function is of **one real variable**. Therefore the graph of a real function is a subset of the Cartesian plane $\mathbb{R}^2$.

A remarkable special case of map arises when $X = \mathbb{N}$ and the domain contains a set of the type $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0\}$ for a certain natural number $n_0 \geq 0$. Such a function is called **sequence**. Usually, indicating by a the sequence, it is preferable to denote the image of the natural number n by the symbol a_n rather than $a(n)$; thus we shall write $a : n \mapsto a_n$. A common way to denote sequences is $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ (ignoring possible terms with $n < n_0$) or even $\{a_n\}$.

Examples 2.1

Let us consider examples of real functions of real variable.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ (a, b real coefficients), whose graph is a straight line (Fig. 2.2, top left).

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, whose graph is a parabola (Fig. 2.2, top right).

iii) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, has a rectangular hyperbola in the coordinate system of its asymptotes as graph (Fig. 2.2, bottom left).

iv) A real function of a real variable can be defined by multiple expressions on different intervals, in which case is it called a **piecewise function**. An example is given by $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x & \text{if } 1 < x \leq 2, \\ x - 1 & \text{if } 2 < x \leq 3, \end{cases} \tag{2.2}$$

drawn in Fig. 2.2, bottom right.

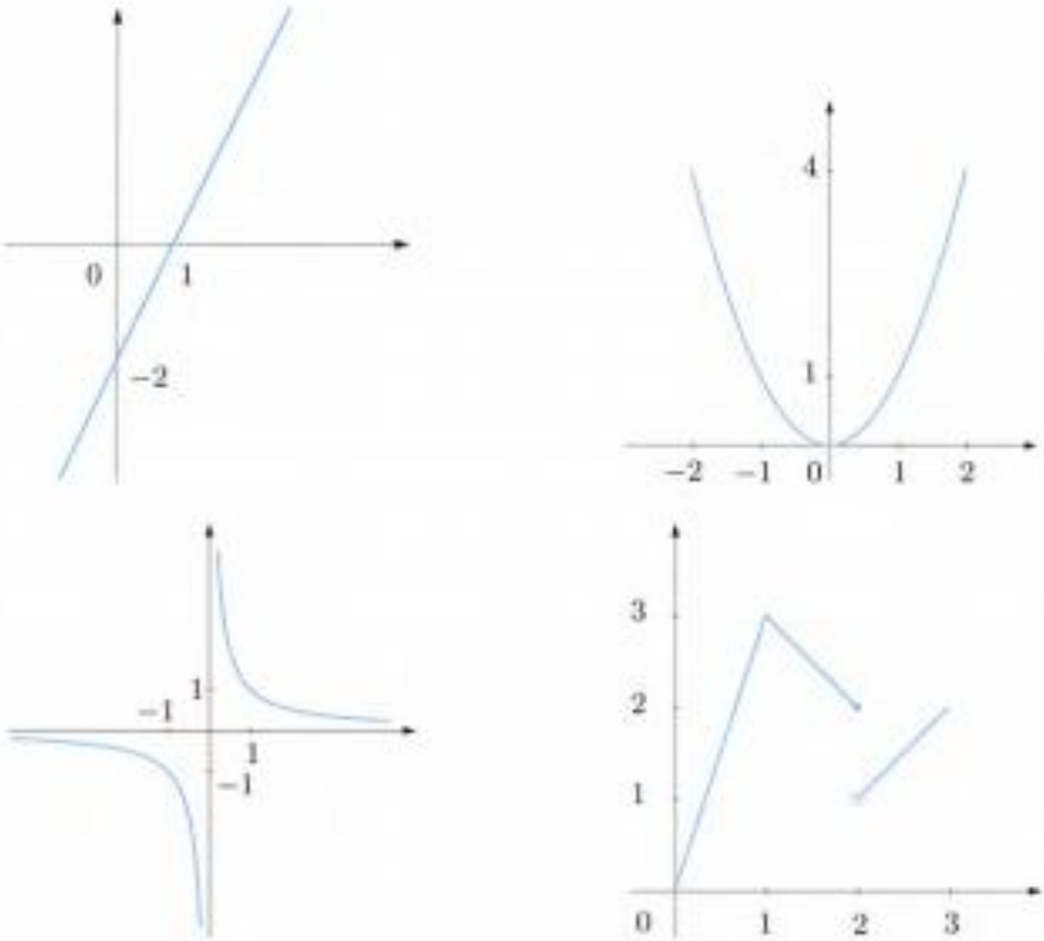


Figure 2.2. Graphs of the maps $f(x) = 2x - 2$ (top left), $f(x) = x^2$ (top right), $f(x) = \frac{1}{x}$ (bottom left) and of the piecewise function (2.2) (bottom right)

Among piecewise functions, the following are particularly important:

v) the **absolute value** (Fig. 2.3, top left)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0, \\ -x & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

vi) the **sign** (Fig. 2.3, top right)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ -1 & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

vii) the **integer part** (Fig. 2.3, bottom left), also known as **floor function**,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x] = \text{ the greatest integer } \leq x$$

(for example, $[4] = 4$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1] = -1$, $[-\frac{3}{2}] = -2$); notice that

$$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

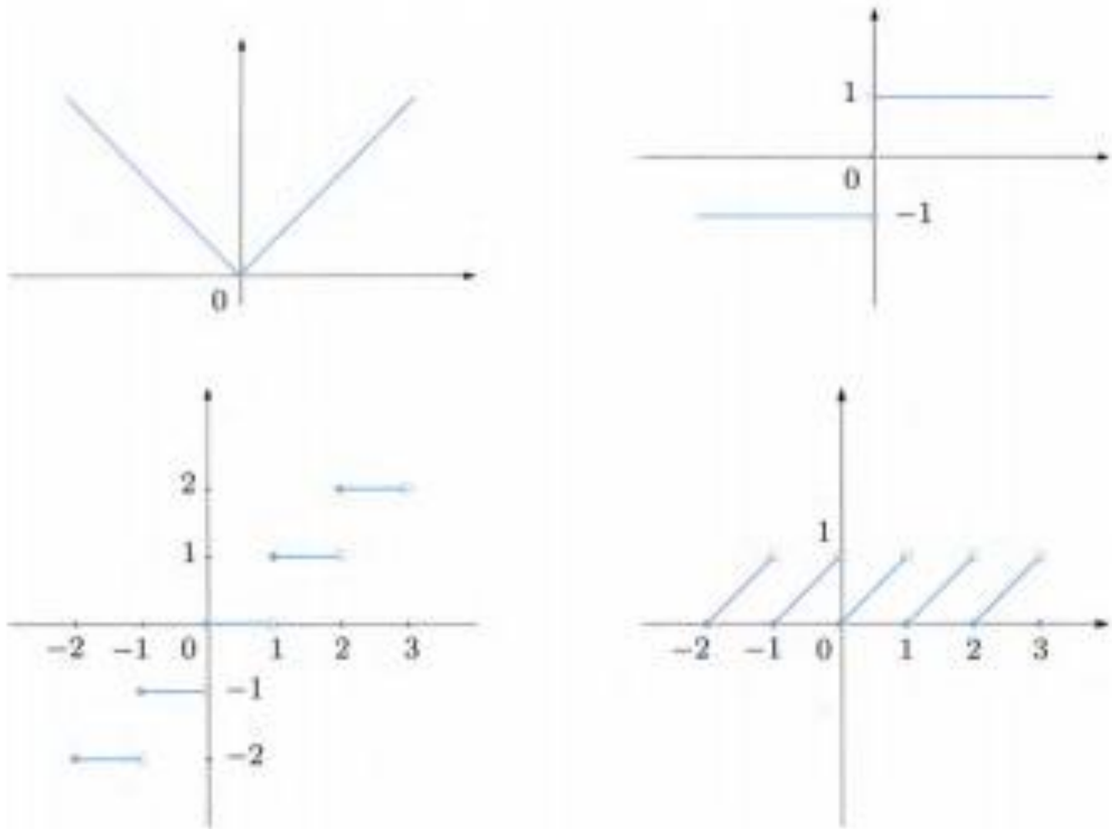


Figure 2.3. Clockwise from top left: graphs of the functions: absolute value, sign, mantissa and integer part

viii) the **mantissa** (Fig. 2.3, bottom right)

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = M(x) = x - \lfloor x \rfloor}$$

(the property of the floor function implies $0 \leq M(x) < 1$).

Let us give some examples of sequences now.

ix) The sequence

$$a_n = \frac{n}{n+1} \tag{2.3}$$

is defined for all $n \geq 0$. The first few terms read

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = \frac{1}{2} = 0.5\,, \quad a_2 = \frac{2}{3} = 0.\bar{6}\,, \quad a_3 = \frac{3}{4} = 0.75\,.$$

Its graph is shown in Fig. 2.4 (top left).

x) The sequence

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.4}$$

is defined for $n \geq 1$. The first terms are

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = \frac{9}{4} = 2.25\,, \quad a_3 = \frac{64}{27} = 2.37\overline{037}\,, \quad a_4 = \frac{625}{256} = 2.44140625\,.$$

Fig. 2.4 (top right) shows the graph of such sequence.

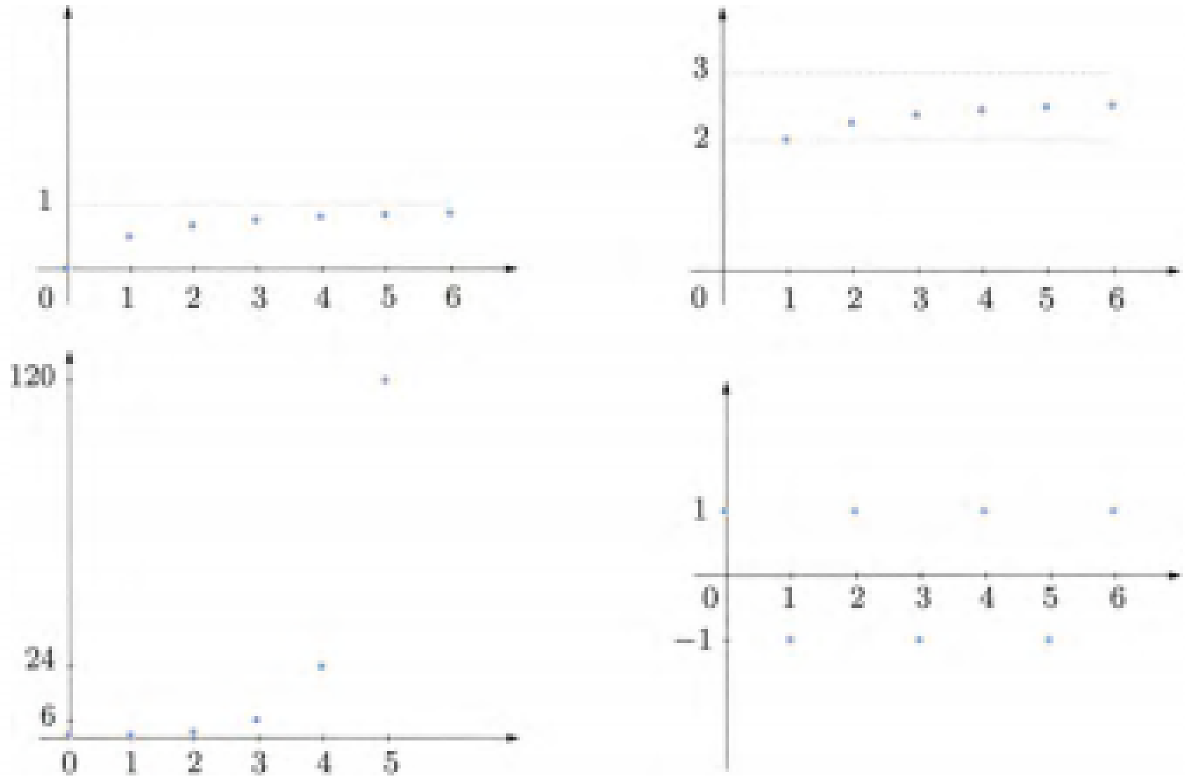


Figure 2.4. Clockwise: graphs of the sequences (2.3), (2.4), (2.6), (2.5)

xi) The sequence

$$a_n = n! \tag{2.5}$$

associates to each natural number its factorial, defined in (1.9). The graph of this sequence is shown in Fig. 2.4 (bottom left); as the values of the sequence grow rapidly as n increases, we used different scalings on the coordinate axes.

xii) The sequence

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{if } n \text{ is even,} \\ -1 & \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases} \qquad (n \geq 0) \tag{2.6}$$

has alternating values $+1$ and -1, according to the parity of n. The graph of the sequence is shown in Fig. 2.4 (bottom right).

At last, here are two maps defined on $\mathbb{R}^2$ (functions of *two real variables*).

xiii) The function

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

maps a generic point P of the plane with coordinates (x, y) to its distance from the origin.

xiv) The map

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$$

associates to a point P the point P' symmetric to P with respect to the bisectrix of the first and third quadrants. □

№13 TEMA:

Funktsiyanın` u`zliksizligi. Kesindide u`zliksiz funktsiya qa`siyetleri. Quramalı ha`m keri funktsiya u`zliksizligi. Tiykarg`ı elementar funktsiyalardın` u`zliksizligi.

Funkciyanın` u`zliksizligi

Funkciyanın` u`zliksizligitu`sinigimatematikalqanalizdin` tiykarg`ı tu`siniklerinin` biri.

Anıqlama1. Egerde $f(x)$ funkciyası berilipto`mendegisha`rtlerdiqanaatlandırsa:

1. $x_0$noqatında anıqlang`an, (yag`nıy $f(x_0)$ bar);
2. $x \to x_0$ da shekli shekke iye;

Bulshekfunkciyanın` usı noqatdag`ı ma`nisineten`.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\quad y = f(x)$ funkciyası $x_0$noqatında u`zliksiz delinedi.

Anılama2. Egerde $y = f(x)$ funkciyası x_0 noqatındaanıqlang`anbolıpargumenttin` sheksizkishio`siminefunkciyanın` sheksizkishio`simisa`ykeskelse, yag`nıy $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x)\right] = 0$ bolsa, $y = f(x)$ funkciyası $x_0$ noqatındau`zliksizdelinedi.

Egerde $y = f(x)$ funkciyası $x_0$noqatdau`zliksizbolmasa, ondausı noqatdau`ziliskeiyedelinedi, $x_0$noqatı u`zilisnoqatı depataladı. U`zilisnoqatlarbirinshiha`mekinshitiplibolıpbo`linedi.
Egerde$x_0$noqatında $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ ayırması sheklibolsa, u`zilisnoqatbirinshitipli, qarsı jag`daydaekinshitipliu`zilisnoqatı depataladı.

Noqatda u`zliksiz funkciyalardın` qa`siyetleri:

1^0. Egerde$f(x)$ ha`m$g(x)$ funkciyaları $x_0$noqatındau`zliksizbolsa, ondaolardın` qosındısı $f(x)+g(x)$, ko`beymesi$f(x)\cdot g(x)$, tiyindisi $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$), $x_0$noqatındau`zliksizfunkciyalarboladı.

2^0. Egerde$y=f(x)$ funkciyası $x_0$noqatındau`zliksizha`m$f(x_0)>0$ bolsa, $f(x)>0$ bolatug`ın$x_0$noqatının` do`geregitabıladı.

3^0. Eger$y=f(u)$ funkciyası $u_0$noqatındau`zliksizlikbolsa, al$u=\varphi(x)$ funkciyası $x_0$noqatındau`zliksizha`m$u_0=\varphi(x_0)$ bolsa, onda $y = f[\varphi(x)]$quramalı funkciyası $x_0$noqatındau`zliksiz.

Kesindide u`zliksiz funkciyalardın` qa`siyetleri:

1^0. Eger$y=f(x)$ funkciyası $[a,b]$ kesindisindeu`zliksizbolsa, ondaolusı kesindidesheklengen.

2^0. Egerde$y=f(x)$ funkciyası $[a,b]$ kesindisindeu`zliksizbolsa, ondaolbulkesindideen` kishima`nisi$m$ha`men` u`lkenma`nisi$M$geiyeboladı (Veyershtrassteoreması)

3^0. Egerde$y=f(x)$ funkciyası $[a,b]$ kesindisindeu`zliksizha`monın` ushlarındag`ı ma`nisleri$f(a)$ ha`m$f(b)$ qarama-qarsı belgigeiyebolsa, kesindinin` ishinen$f(\xi)=0$ bolatug`ın$\xi\in(a,b)$ noqatı tabıladı. (Boltsano-Koshiteoreması).

2.2 Range and pre-image

Let A be a subset of X. The **image of A under f** is the set

$$\boxed{f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\} \subseteq \operatorname{im} f}$$

of all the images of elements of A. Notice that $f(A)$ is empty if and only if A contains no elements of the domain of f. The image $f(X)$ of the whole set X is the range of f, already denoted by $\operatorname{im} f$.

Let y be any element of Y; the **pre-image of y by f** is the set

$$\boxed{f^{-1}(y) = \{x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x) = y\}}$$

of elements in X whose image is y. This set is empty precisely when y does not belong to the range of f. If B is a subset of Y, the **pre-image of B under f** is defined as the set

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x) \in B\},}$$

union of all pre-images of elements of B.

It is easy to check that $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ for any subset A of $\operatorname{dom} f$, and $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{im} f \subseteq B$ for any subset B of Y.

Example 2.2

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. The image under f of the interval $A = [1, 2]$ is the interval $B = [1, 4]$. Yet the pre-image of B under f is the union of the intervals $[-2, -1]$ and $[1, 2]$, namely, the set

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \le |x| \le 2\}$$

(see Fig. 2.5). □

The notions of infimum, supremum, maximum and minimum, introduced in Sect. 1.3.1, specialise in the case of images of functions.

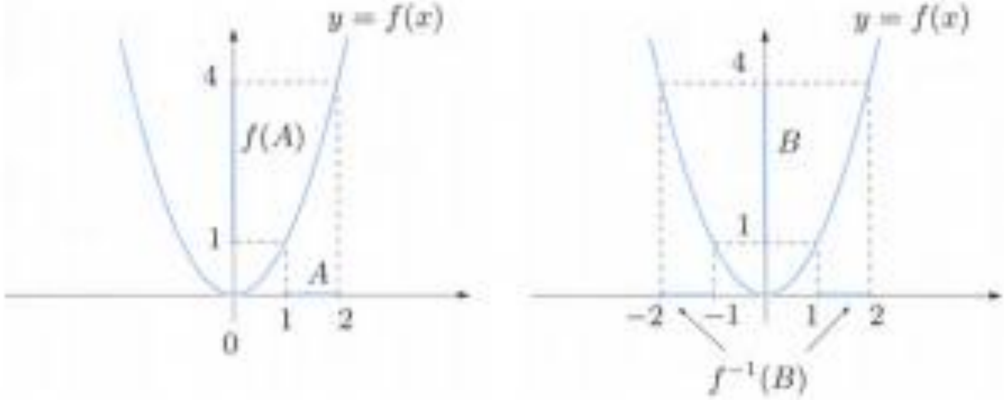


Figure 2.5. Image (left) and pre-image (right) of an interval relative to the function $f(x) = x^2$

Definition 2.3 *Let f be a real map and A a subset of* dom f. *One calls* **supremum of** f **on** A *(or* **in** A*) the supremum of the image of A under f*

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Then f is **bounded from above on** A *if the set $f(A)$ is bounded from above, or equivalently, if* $\sup\limits_{x\in A} f(x) < +\infty$.
If $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ *is finite and belongs to $f(A)$, then it is the maximum of this set. This number is the* **maximum value** *(or simply, the* **maximum***)* **of** f **on** A *and is denoted by* $\max\limits_{x\in A} f(x)$.
The concepts of **infimum** *and of* **minimum** *of f on A are defined similarly. Eventually, f is said* **bounded on** A *if the set $f(A)$ is bounded.*

At times, the shorthand notations $\sup_A f$, $\max_A f$, et c. are used.
The maximum value $M = \max_A f$ of f on the set A is characterised by the conditions:

i) M is a value assumed by the function on A, i.e.,

$$\text{there exists } x_M \in A \text{ such that } f(x_M) = M;$$

ii) M is greater or equal than any other value of the map on A, so

$$\text{for any } x \in A,\ f(x) \le M.$$

Example 2.4

Consider the function $f(x)$ defined in (2.2). One verifies easily

$$\max_{x\in[0,2]} f(x) = 3, \quad \min_{x\in[0,2]} f(x) = 0, \quad \max_{x\in[1,3]} f(x) = 3, \quad \inf_{x\in[1,3]} f(x) = 1.$$

The map does not assume the value 1 anywhere in the interval $[1,3]$, so there is no minimum on that set. □

2.3 Surjective and injective functions; inverse function

A map with values in Y is called **onto** if $\operatorname{im} f = Y$. This means that each $y \in Y$ is the image of one element $x \in X$ at least. The term **surjective** (**on** Y) has the same meaning. For instance, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ with $a \neq 0$ is surjective on $\mathbb{R}$, or onto: the real number y is the image of $x = \frac{y-b}{a}$. On the contrary, the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ is not onto, because its range coincides with the interval $[0, +\infty)$.

A function f is called **one-to-one** (or **1-1**) if every $y \in \operatorname{im} f$ is the image of a unique element $x \in \operatorname{dom} f$. Otherwise put, if $y = f(x_1) = f(x_2)$ for some elements x_1, x_2 in the domain of f, then necessarily $x_1 = x_2$. This, in turn, is equivalent to

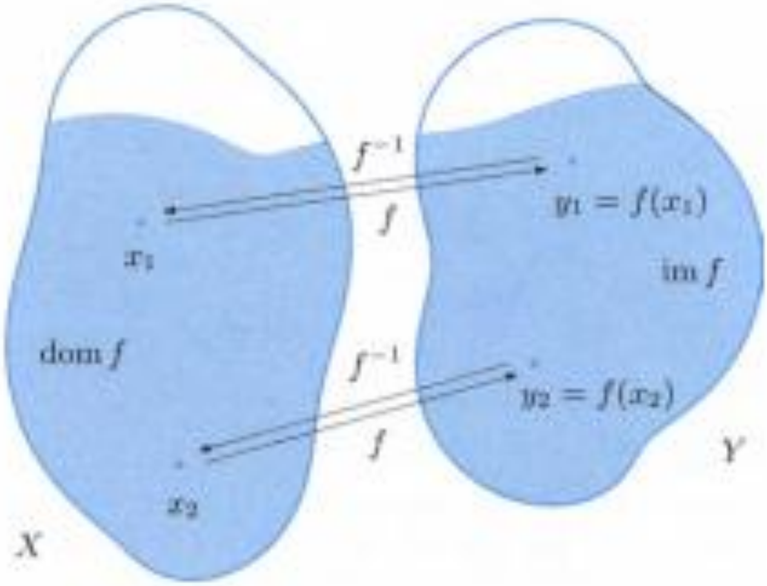
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

for all $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ (see Fig. 2.6). Again, the term **injective** may be used. If a map f is one-to-one, we can associate to each element y in the range the unique x in the domain with $f(x) = y$. Such correspondence determines a function defined on Y and with values in X, called **inverse function** of f and denoted by the symbol f^{-1}. Thus

$$x = f^{-1}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)$$

(the notation mixes up deliberately the pre-image of y under f with the unique element this set contains). The inverse function f^{-1} has the image of f as its domain, and the domain of f as range:

$$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f, \qquad \operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f.$$



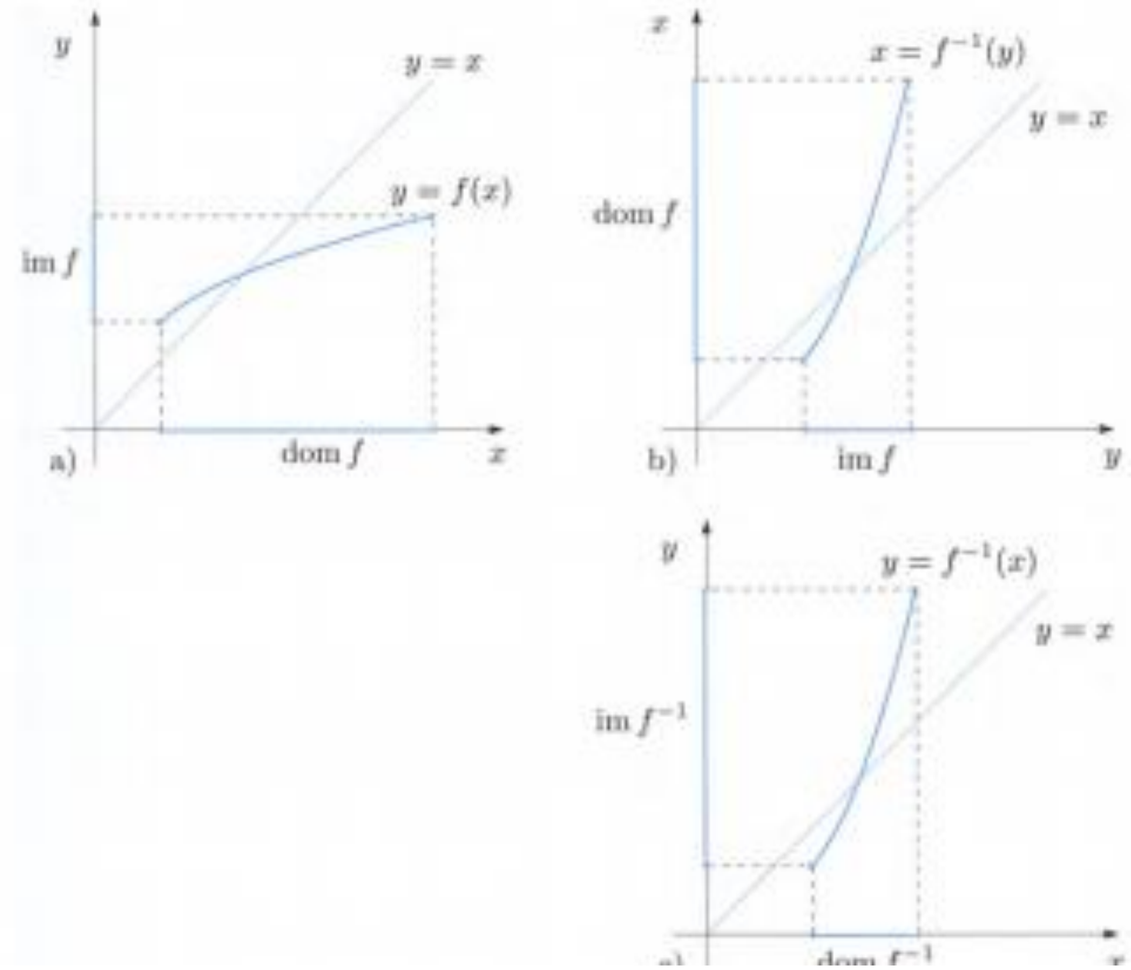
A one-to-one map is therefore **invertible**; the two notions (injectivity and invertibility) coincide.

What is the link between the graphs of f, defined in (2.1), and of the inverse function f^{-1}? One has

$$\begin{aligned}\Gamma(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y)) \in Y \times X \ : \ y \in \operatorname{dom} f^{-1}\} \\ &= \{(f(x), x) \in Y \times X \ : \ x \in \operatorname{dom} f\}.\end{aligned}$$

Therefore, the graph of the inverse map may be obtained from the graph of f by *swapping* the components in each pair. For real functions of one real variable, this corresponds to a reflection in the Cartesian plane with respect to the bisectrix $y = x$ (see Fig. 2.7: a) is reflected into b)). On the other hand, finding the explicit expression $x = f^{-1}(y)$ of the inverse function could be hard, if possible at all.

Provided that the inverse map in the form $x = f^{-1}(y)$ can be determined, often one prefers to denote the independent variable (of f^{-1}) by x, and the dependent variable by y, thus obtaining the expression $y = f^{-1}(x)$. This is merely a change of notation (see the remark at the end of Sect. 2.1). The procedure allows to draw the graph of the inverse function in the same frame system of f (see Fig. 2.7, from b) to c)).



№14 TEMA

Bir o`zgeriwshili funktsiyanın` differentsial esabı. Tuwındı tu`sinigine alıp keletug`ın ma`seleler. Tuwındı anıqlaması. Onın` geometriyalıq, mexanikalıq ma`nisi.

Bir o`zgeriwshili funktsiyanin` differentsial esabi

Bir o`zgeriwshi funktsiyasinin` tuwindisi ha`m onin` geometriyaliq, mexanikaliq mag`inalari. Tuwindig`a iye bolg`an funktsiyalardin` qa`siyetleri: Tuwindag`a iye emes funktsiyalar: $\sin x,\ x = k\pi;\ k \in Z;\ |x|, x = 0$. *Tuwinlar tablitsasi. Aniq emes funktsiyani differentsiallaw.*

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $(a;b)$ intervalinda aniqlang`an bolsin. Qa`legen $x_0,\ x_0 + \Delta x \in (a;b)$ noqatlarin alamiz. $y = f(x)$ funktsiyasinin` $f(x_0)$ ha`m $f(x_0 + \Delta x)$ o`simlerin du`zemiz, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ qatnasi argument Δx qa o`zgergendegi funktsiyanin` ortasha o`zgeriwi dep ataladi.

<u>Aniqlama.</u> Funktsiya o`simi $\Delta y$ tin` Δx qa qatnasinin` $\Delta x$ nolge umtilg`andag`i shegi $y = f(x)$ funktsiyanin` x_0 noqatdag`i tuwindisi dep ataladi ha`m $y',\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ y'\big|_{x=x_0}$ belgilerinin` biri menen jaziladi.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

<u>Aniqlama.</u> Eger $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda sheksiz tuwindig`a iye dep ataladi.

<u>Aniqlama.</u> Eger $f'_{+0}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda on` jaq tuwindig`a iye dep ataladi.

<u>Aniqlama.</u> Eger $f'_{-0}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda shep jaq tuwindig`a iye dep ataladi.

Tuwindinin` geometriyaliq mag`inasi: $y = f(x)$ funktsiyasinin` $x_0$ noqatdag`i tuwindisi iymek siziqqa x_0 abstsissali noqatta ju`rgizilgen urinbanin` Ox ko`sherinin` on` bag`iti menen payda etken mu`yeshinin` tangensine ten`.

Tuwindinin` mexanikaliq mag`inasi. Materialliq noqattin` tezligi onin` qozg`alis nizaminan (joldan) aling`an tuwindig`a ten`.

Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatinda shekli tuwindig`a iye, yag`niy $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shekli san bolsa, onda bul funktsiya usi noqatta tuwindig`a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya (a,b) intervaldin` ha`r bir noqatinda tuwindig`a iye bolsa, onda bul funktsiya usi intervalda tuwindig`a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesindinin` ha`r bir ishki noqatinda differentsiallaniwshi ha`m shekli bir ta`repleme $f'_{+0}(a)$ ha`m $f'_{-0}(b)$ tuwindilari bar bolsa, onda bul funktsiya usi kesindide tuwindig`a iye delinedi.

Tuwindig`a iye bolg`an funktsiyalardin` qa`siyetleri:

1. Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatinda differentsiallaniwshi bolsa, onda ol usi noqatta u`zliksiz dep ataladi.

Keri uyg`arim uliwma alg`anda duris emes: bazi bir noqatta u`zliksiz biraq sol noqatta tuwindig`a iye bolmag`an funktsiyalar bar.

Misali, $|\sin x|$ funktsiyasi $x = k\pi$, $k \in Z$ noqatlarinda; $|x|$ funktsiyasi x=0 noqatinda u`zliksiz, biraq tuwindig`a iye emes. Haqiyqatinda da,

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

funktsiyasi x=0 noqatinda u`zliksiz, al x=0 noqatindag`i shep jaq ha`m on` jaq tuwindilari ten` emes: $f'_-(0) = tg135^0 = -1$, $f'_+(0) = tg45^0 = 1$, $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, yag`niy bul funktsiya x=0 noqatinda tuwindig`a iye emes.

2. Turaqlinin` tuwindisi nolge ten`: $C' = 0$.

3. Eger $u = u(x)$ ha`m $v = v(x)$ funktsiyalari $x_0$ noqatinda differentsiallaniwshi bolsa, onda olardin` algebraliq qosindisi, ko`beymesi ha`m bo`lindisi (bo`limi nolge ten` bolmag`an jag`dayda) usi noqatta differentsiallaniwshi boladi:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \ (u \cdot v)' = u'v + uv'; \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3.1. (Saldari). Turaqli ko`beytiwshini tuwindi belgisinin` aldina shig`ariw mu`mkin.

4. (Quramali funktsiya tuwindisi). Eger $y = f(u)$ ha`m $u = \varphi(x)$ differentsiallaniwshi funktsiyalar bolsin. Quramali $y = f(u)$ funktsiyanin` g`a`rezsiz o`zgeriwshi x boyinsha tuwindisi usi funktsiyanin` araliq argument boyinsha tuwindisinin` araliq argumenttin` g`a`rezsiz o`zgeriwshi x boyinsha tuwindisina ko`beymesine ten`, yag`niy $y'_x = y'_u(u) u'_x(x)$.

5. (Keri funktsiya tuwindisi). Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqattin` bazi bir do`gereginde monotonli, u`zliksiz, differentsiallaniwshi ha`m $f(x_0) \neq 0$ bolsa, onda og`an keri $x = \varphi(y)$ funktsiya $y_0 = f(x_0)$ noqatta differentsiallaniwshi, yag`niy $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ tuwindig`a iye boladi.

6. (Parametrlik ko`riniste berilgen funktsiya tuwindisi). Eger funktsiya $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ parametrlik ko`rinisinde berilgen bolsa, onda onin` tuwindisi $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ formulasi menen tabiladi.

№15 TEMA:
Urınbanın` ha`m normaldın` ten`lemeleri. Quramalı funktsiyanın` tuwındısı. Tiykarg`ı elementar funktsiyalardın` tuwındıları. Tuwındılar tablitsası

Meyli $y=f(u)$, bunda $u=\varphi(x)$ quramalı funktsiyası $y=f[\varphi(x)]$ berilgen bolsın.

Teorema. Egerde $y=f(u)$ ha`m $u=\varphi(x)$ differentsiallanıwshı funktsiyalar bolsa, onda quramalı funktsiyanın` tuwındısı bar boladı ha`m ol sol funktsiyanın` aralıq argument boyınsha alıng`an tuwındısı menen, aralıq argumentten g`a`rezsiz o`zgeriwshi boyınsha alıng`an tuwındısının` ko`beymesine ten`, yag`nıy

$$y'=f'(u)\cdot u' \tag{6.7}$$

Mısal: $y=(\sqrt{x}+5)^3$ funktsiyasının` tuwındısın tabın`.

Sheshiliwi: $u=\sqrt{x}+5$ dep alsaq, $y=u^3$; (6.7)-formula boyınsha

$$y'=3u^2\cdot u'=3\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)'=\frac{3\left(\sqrt{x}+5\right)^2}{2\sqrt{x}}.$$

Meyli $y=f(x)$ differentsiallanıwshı ha`m bazıbir $X$ aralıqta qatan` monoton funktsiya bolsın. Eger o`zgeriwshi $y$ ti argument dep, o`zgeriwshi x tı funktsiya dep esaplasaq $x=\varphi(y)$ funktsiyasına iye bolamız. Bul funktsiya berilgen funktsiyag`a keri funktsiya boladı.

Teorema. Tuwındısı nolge ten` bolmag`an differentsiallanıwshı funktsiyag`a keri funktsiyanın` tuwındısı berilgen funktsiyanın` tuwındısının` keri shamasına ten`.

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \tag{6.8}$$

***Da`lillew.*** Sha`rt boyınsha $y'(x)=f'(x)\neq 0$.

Meyli $\Delta y\neq 0$-g`a`rezsiz o`zgeriwshi $y$ tin` o`simi, $\Delta x$-og`an keri $x=\varphi(y)$ funktsiyanın` o`simi bolsın. Onda

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y/\Delta x} \tag{6.9}$$

Bunnan shekke o`tsek

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \text{ bunnan } x'_y=\frac{1}{y'_x} \text{ kelip shıg`adı.}$$

Elementar, keri ha`m quramalı funktsiyalardın` tuwındılarının` tablitsası

1. $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$; $\quad \left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u\ln a}u'$; $\quad (\ln u)'=\frac{1}{u}u'$.

2. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$; $\quad \left(e^x\right)'=e^x$; $\quad \left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$.

3. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$; $\quad \left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$.

4. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$; $\quad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$.

5. $(\sin x)'=\cos x$; $\quad (\sin u)'=u'\cdot\cos u$.

6. $(\cos x)'=-\sin x$; $\quad (\cos u)'=-u'\sin u$.

7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; $\quad (ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad (\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

10. $(ar\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad (\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

11. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$; $\quad (arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

12 $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$ $\quad (arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'\cdot$

13. $u=\varphi(x)$, $\quad y=f(u)=f[\varphi(x)]$ bolsa, $y'_x=f'_u\cdot u'_x$ boladı.

Mısal. $y=e^{x^2+3}$ bolsa, $y'=e^{x^2+3}\left(x^2+3\right)'=2x\cdot e^{x^2+3}$

***Joqarı ta`rtipli tuwındılar***. Usı waqıtqa shekem biz $f(x)$ funktsiyasınan alıng`an $f'(x)$ birinshi ta`rtipli tuwındılardı qarap o`ttik. Biraq $f'(x)$ tuwındısı funktsiya bolıp, ol da tuwındıg`a iye bolıwı mu`mkin. n-shi ta`rtipli tuwındı dep ($n$-1) shi tuwındıdan alıng`an tuwındıg`a aytamız ha`m ol $f^{(n)}(x)$ dep belgilenedi.

Tuwındılardı to`mendegishe belgileymiz:

$f''(x)$-ekinshi ta`rtipli (yamasa ekinshi tuwındı),

$f'''(x)$-u`shinshi ta`rtipli (yamasa u`shinshi tuwındı).

Bunnan joqarı ta`rtipli tuwındılarda belgilewde qawsırmada arab tsifrları qollanıladı yamasa rim tsifrları.

Mısalı: $f^{(4)}(x),..., f^{(n)}(x)$ yamasa $f^{IV}(x)$ ha`m t.b.

1-mısal. $y = x^3$ funktsiyasının` tuwındısın tabın`.

Sheshiliwi: $y' = 3x^2$ $y'' = 6x$ $y''' = 6.$

Bul funktsiyanın` bunnan joqarı tuwındıları nolge ten`.

2-mısal. $y = 2^x$ funktsiyasının` joqarı ta`rtipli tuwındıların tabın`.

Sheshiliwi: $y' = 2^x \ln 2$ $y'' = 2^x(\ln 2)^2$ tap usınday $y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$.

№16 TEMA:

Fuktsiyanın` differentsiyalı, onın` geometriyalıq mag`anası. Differentsial formasının` invariantlıg`ı. Parametrlik ha`m keri funktsiyalardın` tuwındıları. Joqarı ta`rtipli tuwındılar ha`m diferentsiallar. Differentsial esabının` tiykarg`ı teoremaları. Lopital qa`desi.

Biz differentsial esabının` tiykarg`ı teoremaların da`lillewsiz keltirip o`temiz. Tuwındının` en` a`hmiyetli qollanıwların qarawdan burın bir neshe tiykarg`ı teoremalardı qarap o`temiz.

Ferma teoreması. Egerde y=f(x) funkciyası X ko`pliginde differenciyallanıwshı bolıp, usı ko`pliktin` ishki $x_0$ noqatında en` u`lken yamasa en` kishi ma`nisine erisse, onda usı noqatdag`ı funkciyanın` tuwındısı nolge ten`, yag`nıy $f'(x_0) = 0$

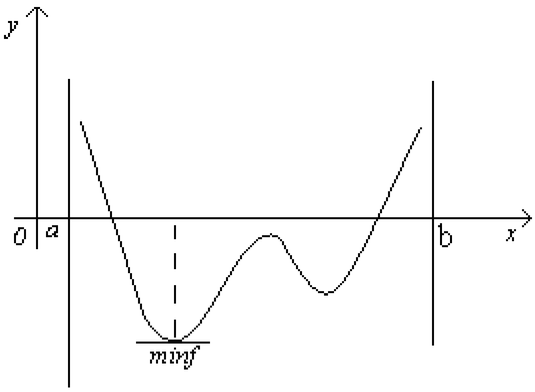
Roll teoreması. y=f(x) funkciyası:

1. $[a,b]$-segmentinde u`zliksiz;

2. (a,b)-intervalında differenciyallanıwshı;

3. Kesindinin` aqırlarındag`ı ma`nisleri o`zara ten`, yag`nıy f(a)=f(b) sha`rtlerdi qanaatlandırsa, onda $[a,b]$ segmentinde sonday bir $\xi \in (a,b)$ noqatı tabılıp $f'(\xi) = 0$ boladı.

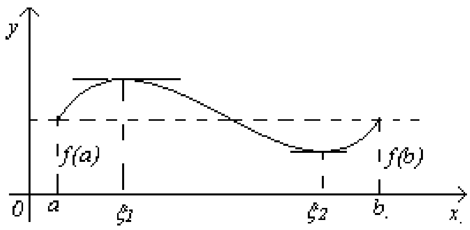
Ferma teoremasının` geometriyalıq mag`anası ko`rinip tur: $X$ aralıg`nın` ishinde en` u`lken yamasa en` kishi ma`nisine erisetug`ın noqatda, funkciya grafigine ju`rgizilgen urınba abstsissa ko`sherine parallel (1-su`wret)



1-su`wret

Roll teoremasının` geometriyalıq mag`anası: kesindinin` ishinde en` keminde bir noqat tabılıp sol noqatdan funkciyanın` grafigine ju`rgizilgen urınba abstsissa ko`sherine paralel boladı. 2-su`wret

Bulnoqatdafunkciyanın` tuwındısıdanolgeten` boladı. Grafikte $\xi_1$ha`m $\xi_2$noqatları



2-su`wret

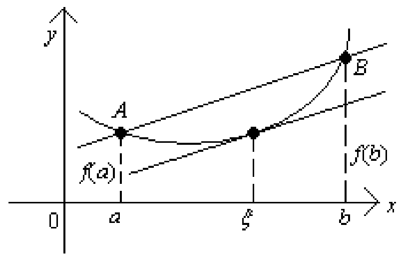
Lagranj teoreması. $y=f(x)$ funkciyası:

1. $[a,b]-$segmentinde u`zliksiz;

2. $(a,b)-$intervalında differenciyallanıwshı sha`rtlerdi qanaatlandırsa, $[a,b]-$segmentinde sonday bir $\zeta \in (a,b)$ noqatı tabılıp

$f'(\zeta)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, yamasa $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\zeta)$ ten`ligi orınlı boladı.

Lagranj teoremasının` geometriyalıq talqılanıwı 3-su`wrette ko`rsetilgen. Eger AB



3-su`wret

kesindisin o`zinin` da`slepki jaylasıwına parallel jılıstırsaq, onın` $f(x)$ tın` grafigine urınatug`ın en` keminde bir $\xi \in (a,b)$noqatı tabıladı ha`m AB dugasının` aqırlarınan ju`rgizilgen AB xordası, og`an parallel (sebebi: eki noqatdan o`tiwshi tuwrının` mu`yeshlik koeffitsientinin` formulası boyınsha $k_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, al urınba ushın $k = f'(\xi)$).

Saldar. Eger bazı bir X aralıg`ında $f(x)$ funkciyasının` tuwındısı nolge ten` bolsa, onda funkciya bul aralıqta birdeylik turaqlı.

Meyli X aralıqta $[a,x]$ kesindisin alayıq. Lagranj teoreması boyınsha $f(x)$-$f(a)=f'(\xi)(x-a)$, bunda $a<\xi<x$. Sha`rt boyınsha $f'(\xi)=0$, demek $f(x)$-$f(a)=0$, yag`nıy $f(x)=f(a)=Const$.

Lopital qag`ıydası.*** Tuwındı ja`rdeminde funkciyalardın` qatnasının` shegi $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *yamasa* $\dfrac{\infty}{\infty}$ tu`rindegi anıq emeslik bolg`an jag`daydag`ı shekler esaplanadı. Bul ***Lopital qag`ıydası dep ataladı.

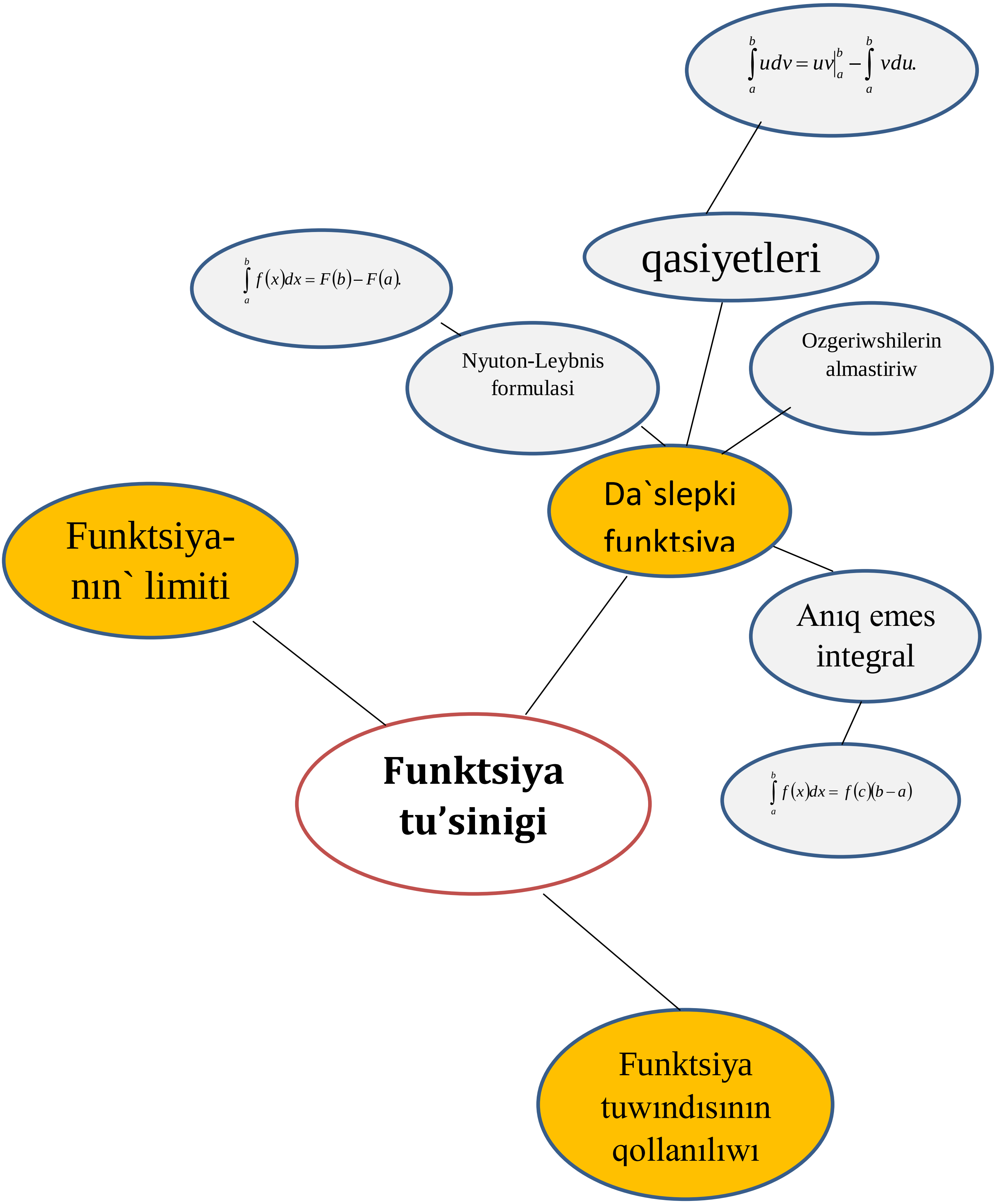
Eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ (yamasa $\pm\infty$) ha`m $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (yamasa $\pm\infty$) bolıp $x\to a$ da funkciyalarının` (shekli yamasa sheksiz) $f'(x)$ ha`m $g'(x)$ tuwındıları bar bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ten`ligi orınlı boladı.

1-mısal. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$

2-mısal. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x - e^{-x})'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$

Kalaster


Aniqlamasi?
Aniqlaniw , ma’nisler oblisti?
FUNKTSIYA TU’SINIGI
Funktsiya qa’siyetleri?
Funktsiya tuwindisi?



$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$
qasiyetleri
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$
Nyuton-Leybnis formulasi
Ozgeriwshilerin almastiriw
Da`slepki funktsiya
Funktsiya-nın` limiti
Anıq emes integral
$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$
Funktsiya tu'sinigi
Funktsiya tuwındısının qollanılıwı

Toparlarg'a bo`liniw ushun kartochkalar:

do`slar	Biradarlar	Do'retiwshiler
pikirlesler	sherikler	

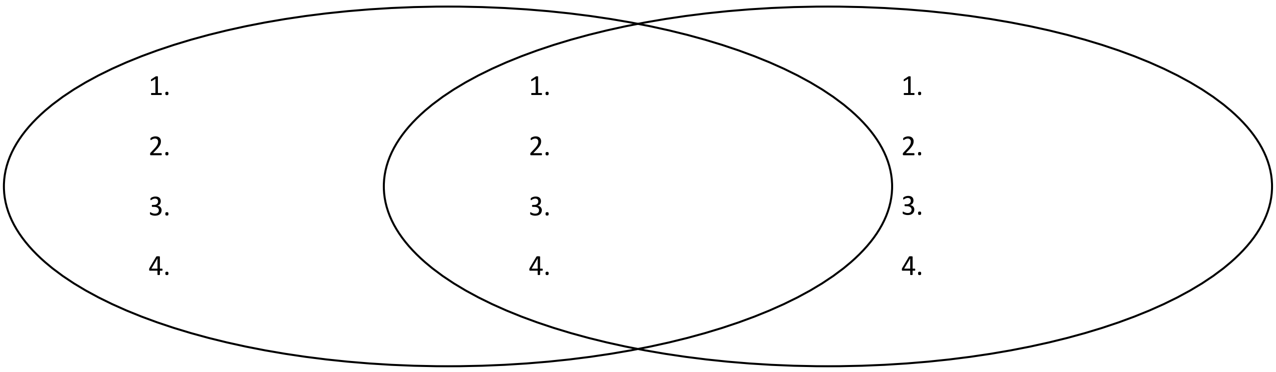
1-ilava

Venna diagrammasi

Bunda tariyxiy ha'm arxeologiyaliq dawirlestiriwdin' parqlari ha'mde uqsas ta'replerin jazadi.

Funktsiya qa'siyetleri

Funktsiyanin' beriliw usillari



PIKIRLEW XU'JIMI TEXNIKASI.

№	Sorawlar	Juwaplar (Studentler pikiri)
1	Funksiya ha`m onın` beriliw usılları	
2	tiykarg`ı elementar funksiyalar	
3	Funktsiyalardın`jup-taqlıg`ı, eriodlılıg`ı, grafigi.	
4	Funktsiyanın` limiti, limitler haqqında teoremalar.	
5	Funksiya tuwındısının` anıqlaması	

Toparlar kestesi:

Shinig'iw dawaminda aling'an bilimleringizge tayang'an halda **"** Funktsiyanın` tochkada, kesindide u`zliksizligi, u`zliksiz funktsiyalar u`stinde a`meller.**"** temasinda mısallar islew,. Funktsiyanın` tochkada, kesindide u`zliksizligin da'lillep korsetin'? Berilgen funktsiyalardin' uizilis noqatlarin ko'rsetip beriwge ha'reket qilin'.

№17 TEMA:

Teylor formulası. Funktsiyanın` o`siwi, kemeywi, estrumları.Funktsiyanın` aralıqtag`ı n` u`lken ha`m en` kishi ma`nisleri. Funktsiyanın` grafiginin` oyıqlıg`ı ha`m do`n`esligi, bu`giliw noqatları, asimtotaları.Funktsiyanı tolıq tekseriw

Funkciyanın` o`siwi ha`m kemeyiwi

Biz o`tkende (5-bap. §2.2) $y=f(x)$ funkciyası $X$ aralıg`ında qa`legen $x_1$, $x_2 \in X$, $x_2>x_1$ ushın $f(x_2)>f(x_1)$, ( $f(x_2)<f(x_1)$) bolsa o`siwshi (kemeyiwshi) bolatug`ınlıg`ın ko`rip o`ttik.

1-Teorema. (Funkciyanın` o`siwinin` jeterli sha`rti). Egerde differenciyallanatug`ın funkciyanın` tuwındısı bazı bir X aralıqtın` ishinde on` bolsa, onda ol usı aralıqta o`sedi.

***Da`lillew***. $X$ aralıg`ında argumenttin` $x_1$ ha`m x_2 ma`nislerdi qaraymız. Meyli $x_2>x_1$ bolsa, $x_1$, $x_2 \in X$. $f(x_2)>f(x_1)$ bolatug`ınlıg`ın da`lilleymiz.

$[x_1,\ x_2]$ kesindisinde $f(x)$ funkciyası ushın Lagranj teoreması sha`rtleri orınlanadı. Sonlıqtan

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \tag{6.4}$$

bunda $x_1<\xi<x_2$, yag`nıy $\xi$, tuwındı on` bolatug`ın aralıqqa tiyisli, sonlıqtan $f'(\xi)>0$ ha`m (6.4) ten`liktin` on` jag`ı on`, demek $f(x_2)-f(x_1)>0$ ha`m $f(x_2)>f(x_1)$. Kelesi teoremada tap usınday da`lillenedi.

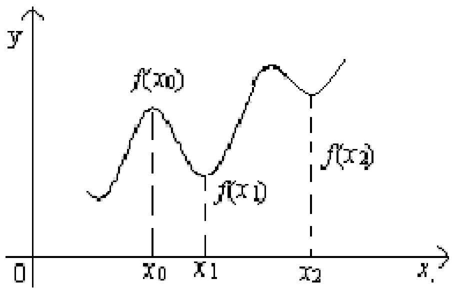
2-Teorema. (Funkciyanın` kemeyiwinin` jeterli sha`rti). Egerde bazı bir $X$ aralıqtın` ishinde, differenciyallanıwshı funkciyanın` tuwındısı teris bolsa, onda funkciya usı aralıqta kemeyiwshi boladı.

Funkciyanın` ekstremumları

1.Anıqlama.x_0 noqatının` bazı bir do`gereginde $f(x) \le f(x_0)$, $(x \ne x_0)$ ten`sizligi orınlansa onda $x_0$ noqatı $f(x)$ funkciyasının` maksimum noqatı dep ataladı.

2.Anıqlama.x_1 noqatının` bazı bir do`gereginde $f(x) \ge f(x_1)$, $(x \ne x_1)$ ten`sizligi orınlansa, onda $x_1$ noqatı $f(x)$ funkciyasının` minimum noqatı dep ataladı.

Funkciyanın` maksimum ha`m minimumı birgelikte funkciyanın` ekstremumı dep ataladı.



4-su`wret

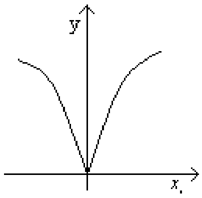
Funkciyanın` ekstremumın ko`binese lokal ekstremum dep ataydı, sebebi ekstremum tu`sinigi $x_0$ noqatının` tek g`ana jeterli kishi do`geregi menen baylanıslı. Bir aralıqta funkciya bir neshe ekstremumg`a iye bolıwı mu`mkin ha`mde bir noqatdag`ı minimum basqa noqatdag`ı maksimumnan u`lken bolıwıda mu`mkin. Mısal ushın 4-su`wrette $f_{\min}(x_2) \ge f_{\max}(x_0) X$

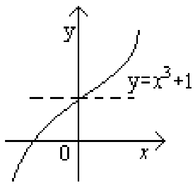
aralıg`ının` ayırım noqatlarında funkciyanın` maksimumı (yamasa minimumı) bar bolıwı, ulıwma aytqanda usı aralıqtın` usı noqatında $f(x)$ funkciyası en` u`lken (en` kishi) global maksimum (minimum) ma`niske iye degendi an`latpaydı.

Ekstremumnın` kereklisha`rti. Egerde$f(x)$ funkciyası x_0 noqatındadifferenciyallanıwshı ha`mekstremumg`aiyebolsa, ondausı noqatnın` bazı birdo`geregindeFermateoreması orınlı, demekbulnoqatdag`ı funkciyanın` tuwındısı nolgeten`, yag`nıy $f'(x_0)=0$. Biraqfunkciyadifferenciyallanbaytug`ınnoqatdadaekstremumg`aiyebolıwı mu`mkin.

Mısalı: $y=\sqrt[3]{x^2}$ funkciyası $x=0$ noqatdaminimumg`aiye, biraqbulnoqatdag`atuındısı sheksizlik. (5-su`wret).

$$y=\sqrt[3]{x^2} \quad , \quad y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad y'(0)=\infty$$





5-su`wret 6-su`wret

Sonlıqtandaekstremumnın` kereklisha`rtito`mendegisheaytılıwı mu`mkin.

$y=f(x)$ funkciyasıx_0 noqatındaekstremumg`aiyebolıwushınusı noqatdag`ı tuwındısı nolgeten` bolıwı $(f'(x_0)=0)$ yamasausı noqatdatuwındısı bolmawı kerek.

Ekstremumnın` kereklisha`rtiorınlanatug`ınnoqatkritikalıq (yamasastatsionarlıq) depataladı.

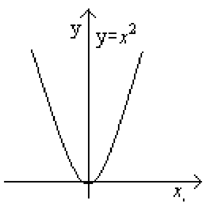
Solayetipqandaydabirnoqatdaekstremumg`aiyebolsa, olkritikalıqnoqatboladı. Biraqkritikalıqnoqatnın` ekstremumnoqatbolıwı sha`rtemes.

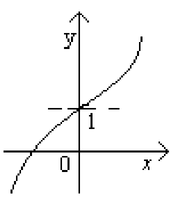
Mısalı: Funkciyalardın` kritikalıqnoqatıntabın`, bulnoqatdaekstremumnın` barlıg`ınyamasajoqlıg`ınko`rsetin`.

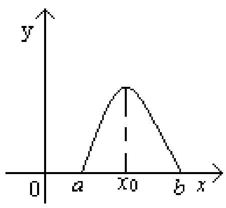
a) $y=x^2$; b) $y=x^3+1$.

Sheshiliwi: $y'=(x^2)'=2x$, $x=0$ noqatda$y'(0)=0$ ha`mshınındadabulfunkciya$x=0$ noqatdaekstremumg`aiye.

b) $y=x^3+1$funkciyasıbarlıqsanko`sherindeo`siwshi, $x=0$ noqatda $y'=3x^2$, $y'(0)=0$ biraq$x=0$ noqatdaekstremumg`aiyeemes. (6-su`wret).







7-su`wret 8-su`wret 9-su`wret

Ekstremumnın` birinshijeterlisha`rti.

Teorema. Differenciyallanatug`ın $y = f(x)$ funktsisının` tuwındısı x_0 noqatınano`tkendeo`zinin` belgisinon`nanteriskeo`zgertse, onda$x_0$maksimum, alteristenon`g`ao`zgertse$x_0$minimumnoqatı boladı.

***Da`lillew.*** Meylituwındı o`zinin` belgisinon`nanteriskeo`zgertsinyag`nıybazı bir (a,x_0) intervalındatuwındı on` $(f'(x) > 0)$, albazıbir $(x_0,b)$ intervalında$(f'(x) < 0)$. Onda monotonlıq sha`rti boyınsha $y = f(x)$ funkciyası (a,x_0) intervalında o`sedi, al $(x_0,b)$ intervalında kemeyedi. (9-su`wret).

O`siwshi funkciyanın` anıqlaması boyınsha barlıq $x \in (a, x_0)$ ushın $f(x) < f(x_0)$, al kemeyiwshi funkciyanın` anıqlaması boyınsha $x \in (x_0, b)$ ushın $f(x) \le f(x_0)$, yag`nıy barlıq $x \in (a;b)$ ushın $f(x_0) \ge f(x)$, demek x_0 noqatı barlıq $x \in (a,b)$ ushın $y = f(x)$ funkciyasının` maksimum noqatı.

Tuwındı belgisin teristen on`g`a o`zgertken jag`daydı usınday da`lillenedi.

Ekstremumnın` ekinshi jeterli sha`rti.

Teorema. Eki ret differenciyallanıwshı funkciyalıq birinshi tuwındısı $f'(x)$ bazı bir x_0 noqatında nol ge ten`, al usı noqatdag`ı ekinshi tuwındısı $f''(x_o)$ on` bolsa, $x_0$, $f'(x)$ funkciyasının` minimum noqatı, al $f''(x_0)$ teris bolsa x_0 maksimum noqatı boladı.

***Da`lillew.*** Meyli $f'(x_0) = 0$, al $f''(x_0) > 0$ bolsın. Bul $x_0$ dın` bazı bir do`gereginde $f''(x) = (f'(x))' > 0$ ekenligin ha`m $f'(x)$, x_0 dı o`z ishine alıwshı bazı bir $(a$,b) intervalında o`siwshi ekenligin ko`rsetedi. Biraq $f'(x) = 0$, demek $(a,x_0)$ intervalında $f'(x) < 0$, al $(x_0,b)$ intervalında $f'(x) > 0$, yag`nıy x_0 noqatınan o`tkende $f'(x)$ o`zinin` belgisin teristen on`g`a o`zgertedi, demek x_0 minimum noqatı.

Tap usınday etip $f'(x_0) = 0$ ha`m $f''(x_0) < 0$ bolg`an jag`dayda da`lillenedi.

Funkciyanı izertlew ha`m onın` grafigin qurıw

Funkciyanı izertlewde ha`m onın` grafigin qurıwda to`mendegi sxemanı qollanıw usınıs etiledi:

1^0. Funkciyanın` anıqlanıw oblastın tabıw.

2^0. Funkciyanın` juplıg`ı-taqlıg`ına izertlew.

3^0. Vertikal asimptotikaların tabıw.

4^0.Funkciyanın` sheksizliktegi betalısına izertlew, gorizontal ha`m qıyalag`an assimptotaların tabıw.

5^0. Funkciyanın` ekstremumların ha`m monotonlıq intervalların tabıw.

6^0. Funkciyanın` do`n`eslik intervalın ha`m iyiliw noqatın tabıw.

7^0. Grafikti anıqlaw ushın, koordinatalar menen kesilisiw noqatların ha`m basqa qosımsha noqatlardı tabıw.

Mısal: $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ funkciyasın izertlen` ha`m grafigin qurın`.

Sheshiliwi: 1^0 Anıqlanıw oblastı $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, yag`nıy $x\neq\pm1$.

2^0 Funkciya jup, sebebi: $f(-x)=f(x)$ ha`m onın` grafigi ordinata ko`sherne qarata simmetriyalı.

3^0 Vertikal assimptotaları abtsissa ko`sherin $x=\pm1$ noqatında kesip o`tiwi mu`mkin. Sebebi: funkciyanın` shekleri $x\to1-0$ (shepten) ha`m $x\to1+0$ (on`nan) sheksiz, yag`nıy

$\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\infty$ demek vertikal assimptotaları $x=\pm1$ tuwrıları.

4^0. Funkciyanın` sheksizliktegi betalısı.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$. Funkciyanın` juplıg`ınan $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$ boladı, yag`nıy y=-1 tuwrısı gorizantal assimptotası boladı.

5^0. Ekstremumları ha`m monotonlıq intervalı. Tuwındısın tabamız.

$y'=\dfrac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$; x=0 bolg`anda $y'$=0; $x=\pm1$ bolg`anda y'-bolmaydı.

Kritikalıq noqatı x_1=0 (sebebi $x=\pm1$ ma`nisi funkciyanın` anıqlanıw oblastına kirmeydi). $x<0$ bolg`anda, $f'(x)<0$ al $x>0$ bolg`anda $f'(x)>0$ bolg`anlıqtan, $x$=0 minimum noqatı ha`m $f_{\min}=f(0)=1$ funkciyanın` minimumı. Funkciya $(-\infty;-1)$ ha`m (-1;0) intervallarında kemeyedi, (0;1) ha`m $(1;\infty)$ intervallarında o`sedi.

6^0.Do`n`eslik intervalı ha`m iyiliw noqatı. $y''=\dfrac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$ tuwındısın tabamız. (-1;1) intervalında $y''>0$ ekenligi ha`m bul intervalda funkciya to`menge do`n`es ekenligi ko`rinip tur. $(-\infty;-1),(1;\infty)$ intervallarında $y''<0$ ha`m bul intervallarda funkciya joqarı qarata do`n`es. iyiliw noqatı joq.

7^0. Ko`sherler menen kesilisiw noqatı. $f(0)=1$, yag`nıy ordinata ko`sheri menen kesilisiw noqatı (0;1). $f(x)=0$ ten`lemesi sheshimge iye emes, demek funkciyanın` grafigi abstsissa ko`sheri menen kesilispeydi.

Tuwındı tu`siniginin` qollanıwı

Biz §2 de shıg`arılg`an o`nim ko`lemi $u(t)$ dep, waqıt boyınsha alıng`an tuwındı usı momenttegi miynet o`nimdarlıg`ın ko`rsetetug`ınlıg`ın ko`rip o`ttik.

Tuwındının` ekonomikalıq mag`anasın ko`rsetiwshi tag`ı bir mısal qarap o`temiz.

Meyli o`ndirislik shıg`ın y ti shıg`arılg`an o`nimler sanı $x$ tın` funkciyası dep esaplayıq.

Meyli Δx-o`nim sanının` o`simi, $\Delta y$-shıg`ın mug`darının` o`simi ha`m $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bir birlik o`nim ushın shıg`ınnın` ortasha o`simi bolsın. $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o`ndiristin` sheklik shıg`ının ko`rsetedi ha`m qosımsha bir birlik o`nim shıg`arıw ushın jumsalatug`ın qosımsha shıg`ındı juwıq xarakterleydi. Usıg`an uqsas sheklik da`ramat, sheklik o`nim, sheklik paydalılıq, sheklik o`nimdarlıq ha`m t.b. sheklik shamalardı anıqlawg`a boladı.

Ekonomikalıq ob`ektler ha`m protsesslerdi usı sheklik shamalardı anıqlaw tiykarında izertlewge differentsial esabın qollanıw *sheklik analiz* dep ataladı. Sheklik shamalar ekonomikalıq ob`ekttin` jag`dayın xarakterlemey (summalıq yamasa ortasha shama) onın` o`zgeriw protsessin xarakterleydi.

Solay etip tuwındı bazıbir ekonomikalıq ob`ekttin` (protsesstin`) yamasa izertlenip atırg`an faktorlardın` birewinin` basqasına qarata waqıt boyınsha o`zgeriw tezligi retinde iske tu`sedi. Biraq ekonomika ha`mme uaqıtta sheklik shamalardan paydalanıwg`a mu`mkinshilik bermeydi. Sebebi, ko`pshilik ob`ektlerdin` ekonomikalıq esaplawlarda bo`linbeytug`ınlıg`ı, ekonomikalıq ko`rsetkishlerdin` waqıt boyınsha u`zilisligi (diskretligi), (mısal ushın jıllıq, kvartallıq, aylıq ha`m t.b.)

Mısal retinde monopoliyalıq ha`m ba`sekelik bazar sharayatında ortasha ha`m sheklik da`ramat arasındag`ı qatnastı qarayıq. O`nimdi satıwdan alınatug`ın summalıq da`ramattı (tu`sim) $r$ di birlik o`nim bahası p nin`, o`nim sanı q g`a ko`beymesi retinde tabıw mu`mkin, yag`nıy $r=p\cdot q$.

Monopoliya sharayatında bir yamasa bir neshshe firma bazı bir o`nimge usınıstı tolıq qadag`alawı mu`mkin, demek bahanıda qadag`alaydı. Bul talap iymekligi tuwrı sızıqlı jag`dayında o`tedi dep esaplayıq, yag`nıy $p(q)$ tuwrı sızıqlı kemeyiwshi funkciya $p=aq+b$, bunda $a<0$, $b>0$.

Onda o`nimdi satıwdan alınatug`ın da`ramat:

$$r=(aq+b)q=aq^2+bq.$$

Bul jag`dayda bir birlik o`nimge ortasha da`ramat $r_{op} = \frac{r}{q} = aq + b$, al sheklik da`ramat, yag`nıy qosımsha birlik o`nimdi satıwdan alınatug`ın qosımsha da`ramat $r'_q = 2aq + b$ (11-su`wret).

Demek monopoliyalıq bazar sharayatında satılg`an o`nim sanının` o`siwi menen sheklik da`ramat kemeyedi, ol ortasha da`ramattın` azayıwına (az tezlik penen) alıp keledi.

Jetilisken ba`seke jag`dayında, bazarg`a qatnasıwshılar ko`p ha`m ha`rbir firma bahanı qadag`alay almaydı, bazardag`ı en` ko`p taralg`an baha mısalı, $p=b$ menen o`nimler satıladı. Bul jag`dayda summalıq da`ramat $r=bq$ ha`m sa`ykes ortasha da`ramat $r_{or} = \frac{r}{q} = b$, al sheklik da`ramat $r'_q = b$ Ekonomikalıq protsesslerdi izertlewde ha`m basqada a`meliy ma`seleler sheshkende ko`binese funkciyanın` elastikligi tu`sinigi qollanıladı.

Anıqlama. Funkciyanın` elastikligi $E_x(y)$ dep funkciya $y$ tin` salıstırmalı o`siminin` argument x tın` salıstırmalı o`simine qatnasının` $\Delta x \to 0$ degi shegine aytamız:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (6.10)$$

Funkciyanın` elastikligi, g`a`rezsiz o`zgeriwshi x 1% ke o`zgergende $y=f(x)$ funkciyası neshe protsentke o`zgeretug`ınlıg`ın juwıq ko`rsetedi.

Bul formula boyınsha qa`legen o`ndirislik funkciyanın` elastikligin esaplaw mu`mkin.

Funkciyanın` en` u`lken ha`m en` kishi ma`nisleri

Bazı bir tuyıq ko`plikte u`zliksiz birneshshe o`zgermeli funkciyanın` en` u`lken ha`m en` kishi ma`nislerin (yag`nıy global maksimum ha`m minimum) tabıwda, bul ma`nislerdin` ekstremum noqatlarda yamasa ko`pliktin` shegarasında bolatug`ının esapqa alıw kerek.

Mısal: $z=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}$ funkciyasının` orayı koordinata basında, radiusı 1 ge ten` bolg`an do`n`gelektegi en` u`lken ha`m en` kishi ma`nislerin tabın`.

Sheshiliwi: 1. Funkciyanın` dara tuwındıların tabamız.

$$z'_x=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\quad z'_y=-\frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}$$

2. $z'_x=0, z'_y=0$ sistemasınsheshiwarqalı kritikalıqnoqatıntabamız. Bulfunkciya (0;0) birkritikalıqnoqatg`aiye.

3. Funkciyanın` $x^2+y^2=1$ ten`lemesimenenberilgenoblasttın` shegarasındag`ı kritikalıqnoqatıntabamız.

$y^2=1-x^2$ tı $z=z(x,y)$ funkciyası ten`lemesineqoysaqbiro`zgermelifunkciyag`aiyebolamız.

$$z=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2-x^2}=\frac{3}{2+x^2-x^4},\ \text{bunda}\ x\in[-1;1].$$

Tuwındısın tabamız ha`m nolge ten`eymiz.

$$z'=\frac{2x\left(2x^2-1\right)}{\left(2+x^2-x^4\right)}=0$$

Sondabizoblastın` shegarasındag`ı kritikalıqnoqatg`aiyebolamız: $x_1=0\ \ x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

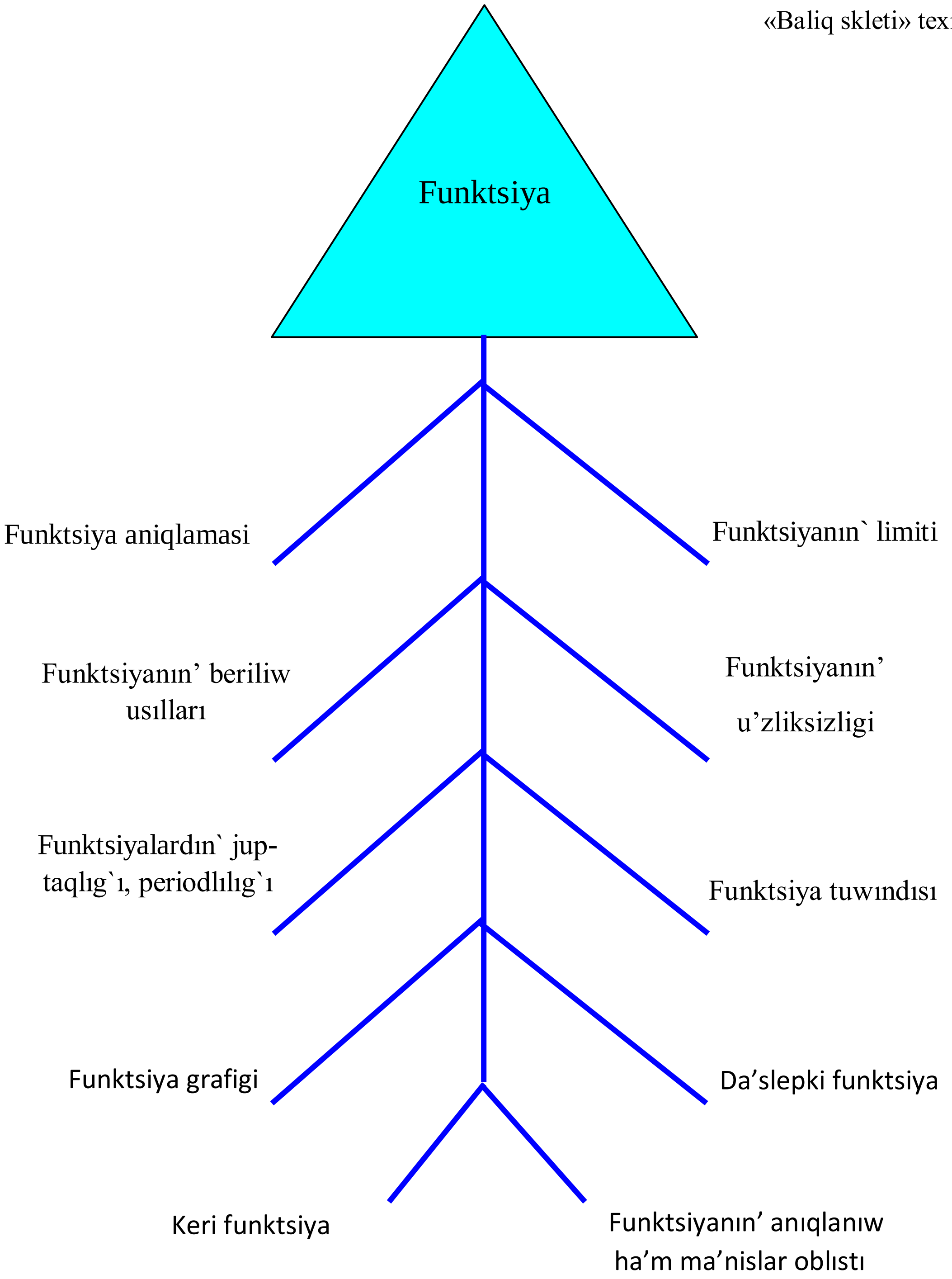
4. $z=f(x,y)$funkciyanın` anıqlanıwoblastının` ishindegikritikalıqnoqatdag`ı $z(0,0)=2$ ha`monın` shegarasındag`ı kritikalıqnoqatlardag`ı ma`nislerintabamız.

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3},$$

ha`mde $[-1;1]$ kesindisinin` aqırlarındag`ı ma`nisleri $z(-1)=z(1)=\frac{3}{2}$ ha`m bulardın` ishinen en` u`lken ha`m en` kishisin taqlap alamız. Demek, $z_{\text{en` kishi}}$=z(0;0)=2 ha`m

$z_{\text{en`u`lken}}=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3}.$

«Baliq skleti» texnikası.



Vizual material.

Funksiya ha`m onın` beriliw usılları, tiykarg`ı elementar funksiyalar, funktsiyalardın` jup-taqlıg`ı, periodlılıg`ı, grafigi.

↓

Funktsiyanın` limiti, limitler haqqında teoremalar. Funktsiyanın` tochkada, kesindide u`zliksizligi, u`zliksiz funktsiyalar u`stinde a`meller.

↓

Funksiya tuwındısının` anıqlaması, onın` geometriyalıq ha`m mexanikalıq mag`anaları. Funktsiya tuwındısının` qollanılıwı. Da`slepki funktsiya

«Insert» usuli

Blits-soraw soraw-juwap

№	Ko'rgizbeden paydalaniw	V	+	-	?
1	Funktsiyanın` qasiyetleri				
2	Uzliksiz funktsiyalardin` qa`siyetleri				
3	Funktsiya limitin esaplaw				
4	Funktsiya limitine baylanisli teoremalar				
5	$y = arctg\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$ funktsiyanın` tuwındısın tabın`.				

1	Funktsiya tuwindisinin` aniqlamalari	
2	Funktsiya tuwindisinin` geometriyaliq ha`mde mexanikaliq ma`nisleri	
3	Da`slepki funktsiya	
4	Kvadrat funktsiya grafigin jasaw	
5	Keri funktsiyan ın’ ma’nisler oblistin tabiw	
6	Funktsiyanin’ osiwi ha’m kemiwi	

SA’WBET SORAWLARI:

1. Funktsiyanın` qasiyetleri.

2.Tiykarg`ı elementar funktsiyalar.

3.Funktsiya limitin esaplaw.

4.Funktsiya limitine baylanisli teoremalar.

5. Uzliksiz funktsiyalardin` qa`siyetleri.

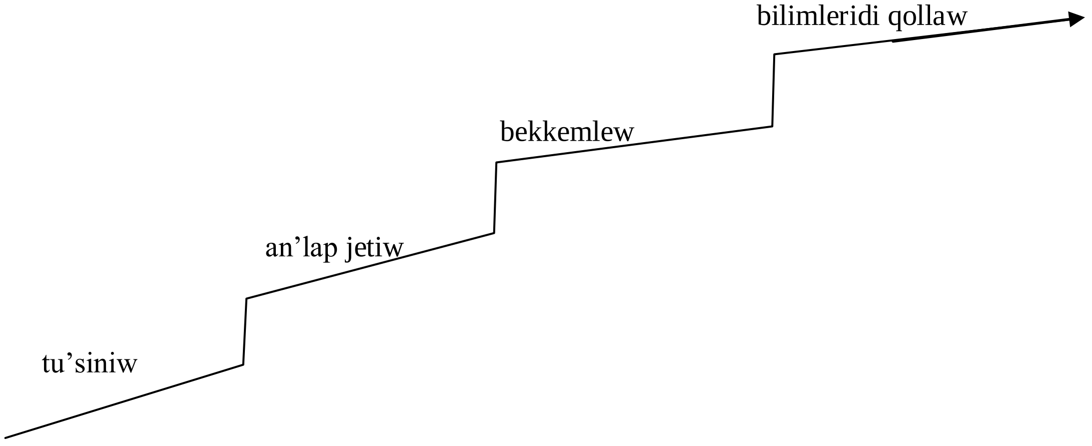
6. Funktsiya tuwindisinin` aniqlamalari.

7. Funktsiya tuwindisinin` geometriyaliq ha`mde mexanikaliq ma`nisleri.

8. Da`slepki funktsiya.

Studentler tema a’hmiyetinen kelip shig’iw, do’retiwshilik ta’repinen jandasqan halda “G’a’rezsizlik jillarinda Wo’zbekstan” temasinda shig’arma jazadi”

ilimlerdi iyelew basqishlari



№18 TEMA:

Anıq emes integral, onın` qa`siyetleri. Integrallawdın` tiykarg`ı usılları: o`zgeriwshilerdi almastırıw, bo`leklep integrallaw.

Aniq emes integral

Da`slepki funkciya ha`m anıq emes integral

Differentsial esabı ha`r bir funkciya ushın onın` tuwındısın tabıwg`a arnalg`an. Biz ma`seleni kerisinshe qarayıq. Berilgen $f(x)$ funkciyası ushın tuwındısı $f(x)$ bolatug`ın $F(x)$ funkciyasın tabıw kerek. Bul $F(x)$ funkciyası $f(x)$ funkciyası ushın da`slepki funkciya boladı.

1-Anıqlama.Egerde bazı bir X aralıg`ının` x noqatında $F'(x)=f(x)$ ten`ligi orınlansa, onda $F(x)$ funkciyası $f(x)$ funkciyasının` X aralıg`ındag`ı da`slepki funkciyası dep ataladı.

Mısalı. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ funkciyası $f(x)=x^2$ funkciyasının` da`slepki funkciyası boladı.

Sebebi: $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2.$

Teorema.Egerde $F_1(x)$ ha`m $F_2(x)$ funkciyaları $f(x)$ funkciyasının` da`slepki funkciyaları bolsa, onda olar tek g`ana bazı bir C turaqlısı menen ayrıladı. Yag`nıy $F_2(x)=F_1(x)+C$ ten`ligi durıs boladı.

***Da`lillew.*** $(F_2(x)-F_1(x))'=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$ bolg`anlıqtan Logranj teoremasının` saldarı boyınsha sonday bir $C$ sanı tabılıp $F_2(x)-F_1(x)=C$ dep jazıwg`a boladı. $(C'=0)$. Demek $F_2(x)=F_1(x)+C$.

2-Anıqlama. X aralıg`ındag`ı $f(x)$ funkciyasının` barlıq da`slepki funkciyalarının` jıynag`ı $f(x)$ funkciyasının` anıq emes integralı dep ataladı ha`m $\int f(x)dx$ dep belgilenedi, bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ - integral astı funkciyası, $f(x)dx$- integral astı an`latpası. Solay etip:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{8.1}$$

bunda $F(x)$, $f(x)$ tın` bazı bir da`slepki funkciyası, C-qa`legen turaqlı san.

Mısalı: $\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$, sebebi $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, $f(x)=x^2$ funkciyasının` da`slepki funkciyası.

Anıq emes integraldın` tiykarg`ı qa`siyetleri

1. Integraldan alıng`an tuwındı, integralastı funkciyag`a ten`, $(\int f(x)dx)'=f(x)$.

2. Anıq emes integraldın` differentsialı, integral astı an`latpasına ten`, $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

3. Bazı bir funkciyanın` differentsialınan alıng`an anıq emes integral sol funkciyanın` o`zine ten`, $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. Integral astındag`ı turaqlı sandı integral sırtına shıg`arıwg`a boladı, $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

5. Summanın` anıq emes integralı sol funkciyalardın` integrallarının` summasına ten`, $\int \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\int f_i(x) dx \right].$

6. Eki funkciyanın` algebralıq qosındısının` integralı, olardın` integrallarının` algebralıq qosındısına ten`, $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Bul qa`siyetlerdi anıq emes integraldın` anıqlamasınan paydalanıp da`lillewge boladı.

Mısalı: 1 qa`siyetti da`lilleyik. Egerde $F(x)$ funkciyası $f(x)$ tın` da`slepki funkciyası bolsa $\int f(x)dx = F(x) + C.$ boladı. Bunnan $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Elementar funkciyalardın` anıq emes integrallar tablitsası

1. $\int 0dx = C.$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$ $a > 0,\ a \neq 0.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C,\ -a < x < a,\ a > 0.$

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C, \ a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

A\`meliy jumıs ushın berilgen barlıq mısallar bazı bir o\`zgertiwler na\`tiyjesinde usı tablitsalıq integrallardın\` birewine alıp kelinedi.

1-mısal. $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$

2-mısal. $\int 2^{3x-1}dx = \int \frac{1}{2}\left(2^3\right)^x dx = \int \frac{1}{2}8^x dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{8^x}{\ln 8} + C.$

Integralawdın\` tiykarg\`ı usılları

O\`zgeriwshini almastırıw (ornına qoyıw) usılı

Integrallawdın\` tiykarg\`ı usıllarının\` biri o\`zgeriwshini almastırıw (ornına qoyıw) usılı bolıp esaplanadı. Ol to\`mendegi formula menen ko\`rsetiledi:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{8.2}$$

Bunda $x = \varphi(t)$ qaralıp atırg\`an aralıqta differenciyallanatug\`ın funkciya. O\`zgeriwshini almastırıw arqalı berilgen integral a\`piwayı integralg\`a, bazı birde tablitsalıq integralg\`a alıp keledi.

1-mısal. $\int \frac{dx}{1-2x}$ integralın tabıw kerek.

Sheshiliwi: $t = 1-2x$ dep belgileymiz, sonda $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \ dx = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = -\frac{1}{2}dt.$ bul ma\`nisti berilgen integralg\`a qoysaq:

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{(-1/2)dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

2-mısal. $\int \cos(3x+2)dx.,\ t = 3x+2$ dep belgileymiz, sonda $dt = 3dx,\ dx = \frac{1}{3}dt$ ha\`m

$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C.$

Bo`leklep integrallaw

Meyli $u = u(x)$ ha`m $\vartheta = \vartheta(x)$ -differenciyallanatug`ın funkciyalar bolsın. Onda differentsialdın` qa`siyeti boyınsha $d(u\vartheta) = \vartheta du + ud\vartheta,$ bunnan $ud\vartheta = d(u\vartheta) - \vartheta du.$

Bul ten`liktin` eki jag`ınan integral alıw na`tiyjesinde:

$$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du \tag{8.3}$$

ten`ligine iye bolamız. Bul formula bo`leklep integrallaw formulası dep ataladı. Bul formulanı qollanıw ushın, berilgen integral astındag`ı an`latpanı eki ko`beymege ajıratamız ( $u$ ha`m $d\vartheta$) ha`m (8.3) ten`liktin` on` jag`ına o`tiw ushın ko`beymenin` birinshisinen differentsial alamız $(du = u'dx)$, ekinshisinen integral alamız ($\vartheta = \int d\vartheta + C$).

3-mısal. $\int xe^{-2x}dx$ integralın tabıw kerek.

Sheshiliwi: $u = x,\ d\vartheta = e^{-2x}dx$ dep belgileymiz ha`m $du = dx$ ha`m $\int d\vartheta = \int e^{-2x}dx,\ \vartheta = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ tabamız.

Endi (8.3) formulanı qollanamız.

$$\int xe^{-2x}dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + Cx + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - Cx + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1.$$

4-mısal. $\int x^2 \sin xdx.$ integralıntabın`.

Sheshiliwi. $u = x^2$, $\sin xdx = d\vartheta$ depbelgileymiz,
sonda $du = 2xdx.$ $\vartheta = \int \sin xdx = -\cos x.$ Bunnan $\int x^2 \sin xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx.$,
ekinshiqosılıwshı ushınbo`leklepintegrallawformulasınpaydalanamız:

$u = x,\ \cos xdx = d\vartheta.\ du = dx\ \vartheta = \sin x.$

Demek $\int x^2 \sin xdu = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin xdx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

№19 TEMA:

Anıq integral tu`sinigine keltiriletug`ın ma`seleler. Anıq integral anıqlaması, qasiyetleri. Integrallanıwshı funktsiyalar klassı. N`yuton-Leybnits formulası. Anıq integraldın` o`zgeriwshisin almastırıw, bo`leklep integrallaw.

I-tip menshik integral.2-tip menshik integral. Anıq integraldın` qollanıwları.

Anıq integral

Anıq integral tu`sinigi

Meyli $f(x)$ berilgen $[a;b]$ kesindisinde u`zliksiz bolsın, bunda $a<b$ yamasa $a>b$ ha`m $F(x)$- onın` bazı bir da`slepki funkciyası bolsın, yag`nıy $F'(x)=f(x),\ x\in[a;b]$

Anıqlama.Berilgen $[a;b]$ kesindisinde u`zliksiz $f(x)$ funkciyasının` anıq integralı

$$\int_a^b f(x)dx \tag{9.1}$$

dep, onın` da`slepki funkciyasının` sa`ykes o`simin tu`sinemiz.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \tag{9.2}$$

bul N yuton- Leybnits formulası dep ataladı. (9.1) an`latpadag`ı *a* ha`m *b* sanları integrallawdın` sa`ykes to`mengi ha`m joqarg`ı shekleri dep ataladı. (9.2) formulanı to`mendegi qag`iyda tu`rinde keltiriw mu`mkin: anıq integral, integral astındag`ı funkciyanın` da`slepki funkciyasının`, integrallawdın`, joqarg`ı ha`m to`mengi sheklerindegi ma`nislerinin` ayırmasına ten`. Bul ayırmanı

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

dep belgilesek, onda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \tag{9.3}$$

1- mısal: $\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

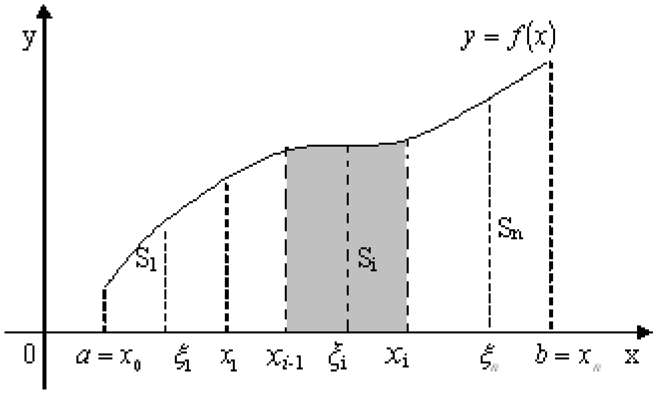
Anıq integraldın` geometriyalıq ha`m ekonomikalıq mag`anası

Anıqintegraltu`sinigito`mendegishekiritilgen, $y=f(x)$funkciyası $[a;b]$kesindisindeterisemesbolg`anda, $\int_a^b f(x)dx$integralının` sanma`nisi$[a;b]$kesindisinde, bunda$a<b$, $y=f(x)$iymekliginin` to`menindejatqan, *OX*ko`sheriha`m*x*=*a*, *x*=*b*tuwrıları

menenshegaralang`an$S$maydanınaten`, (Siymeksızıqlı trapetsiyanın` maydanı). $[a;b]$kesindisin$n$ bo`lekke bo`lsek $S=S_1+S_2+ \ldots +S_n$, $S_i=f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, sonda

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

bulanıqintegraldın` geometriyalıqmag`anası boladı (1-su`wret).



1-su`wret

Anıq integraldın` ekonomikalıq mag`anası.

Meyli, $y = f(x)$funkciyası bazı bir o`ndiristin`, waqıttın` o`tiwi menen miynet o`nimdarlıg`ının` o`zgeriwin su`wretleytug`ın bolsın. Bazı bir $[0,T]$ waqıt aralıg`ındag`ı o`nim ko`lemi u dı tabayıq.

$[0,T]$kesindisinnoqatlar arqalı waqıt aralıqlarına bo`lemiz. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ waqıttın` $[t_{i-1}, t_i]$ aralıg`ındag`ı o`nım ko`lemi $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$ bunda $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,\ldots,n$

Bunnan:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

bulintegralsummadepataladı. Demek $u = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$

Anıqintegraldın` anıqlaması boyınsha $u = \int_0^T f(t)dt$ g`aiyebolamız, yag`nıyeger $f(t)$, $t$momenttegimiyneto`nimdarlıg`ı bolsa, $\int_0^T f(t)dt$, $[0;T]$waqıtaralıg`ı ushınshıg`arılg`ano`nimko`lemiboladı.

Bulma`seleniiymeksızıqlı trapetsiyanın` maydanı ma`selesimenen (joqarıdaaytılg`an) salıstırsaq, bazı bir$[0,T]$waqıtaralıg`ındag`ı shıg`arılg`ano`nimko`lemi$u$dın` shamasının` sanma`nisi, waqıttın` o`tiwimenen$[0,T]$waqıtaralıg`ındag`ı miyneto`nimdarlıg`ının` o`zgeriwinko`rsetiwshi $x = f(t)$ funkciyasının` grafigiastındag`ı maydang`aten` eken, yamasa $u = \int_0^T f(t)dt$.

Anıq integraldın` tiykarg`ı qa`siyetleri

1^0. Integrallawshekleribirdeybolg`ananıqintegralnolgeten`, yag`nıy $\int_a^a f(x)dx = 0$. Bulqa`siyetanıqintegraldın` anıqlamasınankelipshıg`adı. Biraq bunı Nyuton – Leybnits formulası ja`rdeminde de alıw mu`mkin:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

2^0. Anıqintegraldın` ma`nisio`zgeriwshilerdiqalaybelgilewgebaylanıslı emes, yag`nıy:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \qquad (9.4)$$

Bul $F(x)\Big|_a^b = F(t)\Big|_a^b$ ekenliginen kelip shıg`adı.

3^0. Turaqlı ko`beyiwshini anıq integraldın` sırtnına shıg`arıwg`a boladı:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.5)$$

Eger, $f(x)$ tın` $F(x)$ da`slepki funkciyası bolsa, onda $kf(x)$ tın` da`slepki funkciyası $kF(x)$ boladı.

(9.2) ha`m (9.3) formulalardı qollasaq

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)dx$$

4^0. Shekli sandag`ı funkciyalardın` algebralıq qosındısının` anıq integralı bul funkciyalardın` anıq integrallarının` algebralıq qosındısına ten`:

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (9.6)$$

5^0. Integrallaw kesindisin bazı bir bo`leklerge bo`lsek, ulıwma kesindi boyınsha anıq integral, onın` bo`leklerindegi anıq integraldın` qosındısına ten`:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx,\ c \in [a;b] \qquad (9.7)$$

6^0. Integrallawsheklerinin` orınlarınalmastırsaqanıqintegraldın` belgisikerigeo`zgeredi:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (9.8)$$

7^0. (ortashatuwralı teorema).U`zliksizfunkciyanın` anıqintegralı integrallawkesindisinin` uzınlıg`ı menen, integralastındag`ı funkciyanın` usı kesindinin` bazı birishkinoqatındag`ı ma`nisinin` ko`beymesineten`:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),\ a < \xi < b \qquad (9.9)$$

8^0. Egerdeintegrallawsheklerinin` joqarg`ısı to`mendegidenu`lken (*a*<*b*) bolsaha`mintegralastındag`ı funkciyaterisemesbolsa, ondaanıqintegraldaterisemesyag`nıy, eger $f(x) \geq 0$, bolsa $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, eger $f(x) > 0$, bolsa $\int_a^b f(x)dx > 0$ boladı.

9^0. Egerdeintegrallawsheklerinin` joqarg`ısı to`mengisinenu`lken (*a*<*b*) ha`m $f(x)$ ha`m $g(x)$ u`zliksizfunkciyalarbolıp, $f(x) \geq g(x)$ bolsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad (9.10)$$

boladı. Tap usınday $f(x) \leq g(x)$ bolsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (9.11)$$

boladı.

Anıq integral joqarg`ı sheginin` funkciyası sıpatında

Eger y=*f*(*x*) funkciyası [*a*,*b*] kesindisinde integrallanıwshı bolsa, onda ol [*a*,*b*] kesindisinde jatqan qa`legen [*a*,*x*], $a \leq x \leq b$ kesindisindede integrallanıwshı boladı.

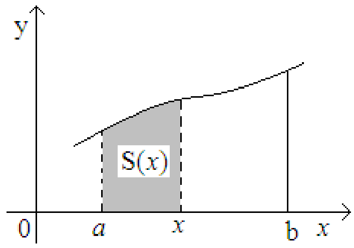
Meyli anıqlama boyınsha

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt \qquad (9.12)$$

bolsın, bunda $x \in [a,b]$, al $\Phi(x)$ funkciyası joqarg`ı shegi o`zgeriwshi bolg`an integral dep ataladı.

Eger $[a,b]$ kesindisinde $f(t)\geq 0$ bolsa, $\Phi(x)$ funkciyasının` $x$noqatındag`ı ma`nisi, $y=f(x)$ funkciyasının` $[a,x]$ kesindisinde sa`ykes grafigi astındag`ı $S(x)$ maydanın ko`rsetedi.

Bul joqarg`ı shegi o`zgermeli bolg`an integraldın` geometriyalıq mag`ınası boladı.



2-su`wret

Anıq integraldı esaplaw usılları

***Bo`leklep integrallaw usılı.*** Anıq emes integraldı bo`leklep integrallaw formulasın shıg`arg`anda $udv=d(uv)-vdu$ ten`ligi alıng`an edi. Bul ten`likti $a$ dan $b$ g`a shekem shekte integrallasaq ha`m anıq integraldın` 4-qa`siyetin esapqa alsaq

$$\int_a^b udv=\int_a^b d(uv)-\int_a^b vdu$$

ten`ligine iye bolamız. Bunnan

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (9.13)$$

anıq integraldı bo`leklep integrallaw formulasına iye bolamız.

1-mısal. $\int_0^{2\pi} x\cos xdx$, integraldı esaplaw kerek.

Sheshiliwi: $u=x$, $dv=\cos xdx=d(\sin x)$ dep alamız.

Sonda $du=dx$, $v=\sin x$ kelip shıg`adı. (9.12) formulanı qollansaq.

$$\int_0^{2\pi} x\cos xdx=x\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin xdx=2\pi\sin 2\pi-0\cdot\sin 0+\cos x\Big|_0^{2\pi}=\cos 2\pi-\cos 0=1-1=0.$$

***O`zgeriwshilerin almastırıw usılı.*** Meyli $\int_a^b f(x)dx$ anıq integralı berilgen bolsın, bunda $f(x)$, $[a,b]$ kesindisinde u`zliksiz funkciya. Meyli integrallawdı a`piwaylastırıw ushın bizge x penen

$$x=\varphi(t), \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

qatnası menen baylanısatug`ın $t$ jan`a o`zgeriwshisin kirgiziw maqsetke muwapıq bolsın, bunda $\varphi(t)$, $[\alpha,\beta]$ kesindisinde u`zliksiz differenciyallanatug`ın funkciya bolsın.

Egerde: 1) t o`zgeriwshisi $\alpha$ dan $\beta$ g`a shekem o`zgergende $x$, $a$ dan $b$ g`a shekem o`zgerse yag`nıy $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ bolsa, ha`m 2) $f\ [\varphi(t)]$ quramalı funkciya $[\alpha,\beta]$ kesindisinde u`zliksiz bolsa, to`mendegi formula durıs boladı.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{9.14}$$

Bul anıq integraldın` o`zgeriwshilerin almastırıp esaplaw formulası boladı.

2-mısal: $I=\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$ integralın esaplaw kerek bolsın.

Sheshiliwi: $t=x^2-16$ dep belgileymiz, bunnan $dt=2xdx,\ xdx=\frac{1}{2}dt$, $x=4$ bolg`anda $t=16-16=0$, $x=5$ bolg`anda $t=25-16=9$, bunnan integral

$$I=\int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int_0^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^9=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot\sqrt{9}=9$$

SHET EL MATERYALLARI

DEFINITION AND EXISTENCE OF THE INTEGRAL

6.1 Definition Let $[a, b]$ be a given interval. By a *partition* P of $[a, b]$ we mean a finite set of points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, where

$$a=x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b.$$

We write

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Now suppose f is a bounded real function defined on $[a, b]$. Corresponding to each partition P of $[a, b]$ we put

$$M_i = \sup f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$
$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$
$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i,$$
$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i,$$

and finally

$$\overline{\int_a^b} f \, dx = \inf U(P, f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, dx = \sup L(P, f), \tag{2}$$

where the inf and the sup are taken over all partitions P of $[a, b]$. The left members of (1) and (2) are called the *upper* and *lower Riemann integrals* of f over $[a, b]$, respectively.

If the upper and lower integrals are equal, we say that f is *Riemann-integrable* on $[a, b]$, we write $f \in \mathscr{R}$ (that is, $\mathscr{R}$ denotes the set of Riemann-integrable functions), and we denote the common value of (1) and (2) by

$$\int_a^b f \, dx, \tag{3}$$

or by

$$\int_a^b f(x) \, dx. \tag{4}$$

This is the *Riemann integral* of f over $[a, b]$. Since f is bounded, there exist two numbers, m and M, such that

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (a \leq x \leq b).$$

Hence, for every P,

$$m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a),$$

so that the numbers $L(P, f)$ and $U(P, f)$ form a bounded set. This shows that *the upper and lower integrals are defined* for *every* bounded function f. The question of their equality, and hence the question of the integrability of f, is a more delicate one. Instead of investigating it separately for the Riemann integral, we shall immediately consider a more general situation.

6.2 Definition Let α be a monotonically increasing function on $[a, b]$ (since $\alpha(a)$ and $\alpha(b)$ are finite, it follows that α is bounded on $[a, b]$). Corresponding to each partition P of $[a, b]$, we write

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

It is clear that $\Delta\alpha_i \geq 0$. For any real function f which is bounded on $[a, b]$ we put

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i,$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i,$$

where M_i, m_i have the same meaning as in Definition 6.1, and we define

(5) $$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf U(P, f, \alpha),$$

(6) $$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup L(P, f, \alpha),$$

the inf and sup again being taken over all partitions.

If the left members of (5) and (6) are equal, we denote their common value by

(7) $$\int_a^b f \, d\alpha$$

or sometimes by

(8) $$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

This is the *Riemann-Stieltjes integral* (or simply the *Stieltjes integral*) of f with respect to α, over $[a, b]$.

If (7) exists, i.e., if (5) and (6) are equal, we say that f is integrable with respect to α, in the Riemann sense, and write $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

By taking $\alpha(x) = x$, the Riemann integral is seen to be a special case of the Riemann-Stieltjes integral. Let us mention explicitly, however, that in the general case α need not even be continuous.

A few words should be said about the notation. We prefer (7) to (8), since the letter x which appears in (8) adds nothing to the content of (7). It is immaterial which letter we use to represent the so-called "variable of integration." For instance, (8) is the same as

The integral depends on f, α, a and b, but not on the variable of integration, which may as well be omitted.

The role played by the variable of integration is quite analogous to that of the index of summation: The two symbols

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

mean the same thing, since each means $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Of course, no harm is done by inserting the variable of integration, and in many cases it is actually convenient to do so.

We shall now investigate the existence of the integral (7). Without saying so every time, f will be assumed real and bounded, and α monotonically increasing on $[a, b]$; and, when there can be no misunderstanding, we shall write $\int$ in place of $\int_a^b$.

6.3 Definition We say that the partition P^* is a *refinement* of P if $P^* \supset P$ (that is, if every point of P is a point of P^*). Given two partitions, P_1 and P_2, we say that P^* is their *common refinement* if $P^* = P_1 \cup P_2$.

6.4 Theorem *If P^* is a refinement of P, then*

$$L(P, f, \alpha) \le L(P^*, f, \alpha) \tag{9}$$

and

$$U(P^*, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha). \tag{10}$$

Proof To prove (9), suppose first that P^* contains just one point more than P. Let this extra point be x^*, and suppose $x_{i-1} < x^* < x_i$, where x_{i-1} and x_i are two consecutive points of P. Put

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \le x \le x_i).$$

Clearly $w_1 \ge m_i$ and $w_2 \ge m_i$, where, as before,

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i).$$

Hence

$$\begin{aligned} &L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\ &\quad = w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad = (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \ge 0. \end{aligned}$$

If P^* contains k points more than P, we repeat this reasoning k times, and arrive at (9). The proof of (10) is analogous.

6.5 Theorem $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha.$

Proof Let P^* be the common refinement of two partitions P_1 and P_2. By Theorem 6.4,

$$L(P_1, f, \alpha) \le L(P^*, f, \alpha) \le U(P^*, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha).$$

Hence

$$L(P_1, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha). \tag{11}$$

If P_2 is fixed and the sup is taken over all P_1, (11) gives

$$\underline{\int} f\,d\alpha \le U(P_2, f, \alpha). \tag{12}$$

The theorem follows by taking the inf over all P_2 in (12).

6.6 Theorem *$f \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a, b]$ if and only if for every $\varepsilon > 0$ there exists a partition P such that*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{13}$$

Proof For every P we have

$$L(P, f, \alpha) \le \underline{\int} f\,d\alpha \le \overline{\int} f\,d\alpha \le U(P, f, \alpha).$$

Thus (13) implies

$$0 \le \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon.$$

Hence, if (13) can be satisfied for every $\varepsilon > 0$, we have

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha,$$

that is, $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Conversely, suppose $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, and let $\varepsilon > 0$ be given. Then there exist partitions P_1 and P_2 such that

$$U(P_2, f, \alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

$$\int f\,d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

We choose P to be the common refinement of P_1 and P_2. Then Theorem 6.4, together with (14) and (15), shows that

$$U(P, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha) < \int f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \le L(P, f, \alpha) + \varepsilon,$$

so that (13) holds for this partition P.

Theorem 6.6 furnishes a convenient criterion for integrability. Before we apply it, we state some closely related facts.

6.7 Theorem

(a) *If* (13) *holds for some P and some ε, then* (13) *holds* (*with the same ε*) *for every refinement of P.*

(b) *If* (13) *holds for $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ and if s_i, t_i are arbitrary points in $[x_{i-1}, x_i]$, then*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\ \Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(c) *If $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ and the hypotheses of* (b) *hold, then*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f\ d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Proof Theorem 6.4 implies (a). Under the assumptions made in (b), both $f(s_i)$ and $f(t_i)$ lie in $[m_i, M_i]$, so that $|f(s_i) - f(t_i)| \le M_i - m_i$. Thus

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\ \Delta\alpha_i \le U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

which proves (b). The obvious inequalities

$$L(P, f, \alpha) \le \sum f(t_i)\, \Delta\alpha_i \le U(P, f, \alpha)$$

and

$$L(P, f, \alpha) \le \int f\, d\alpha \le U(P, f, \alpha)$$

prove (c).

6.8 Theorem *If f is continuous on $[a, b]$ then $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a, b]$.*

Proof Let $\varepsilon > 0$ be given. Choose $\eta > 0$ so that

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon.$$

Since f is uniformly continuous on $[a, b]$ (Theorem 4.19), there exists a $\delta > 0$ such that

(16) $$|f(x) - f(t)| < \eta$$

Remove the segments (u_j, v_j) from $[a, b]$. The remaining set K is compact. Hence f is uniformly continuous on K, and there exists $\delta > 0$ such that $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ if $s \in K$, $t \in K$, $|s - t| < \delta$.

Now form a partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ of $[a, b]$, as follows: Each u_j occurs in P. Each v_j occurs in P. No point of any segment (u_j, v_j) occurs in P. If x_{i-1} is not one of the u_j, then $\Delta x_i < \delta$.

Note that $M_i - m_i \le 2M$ for every i, and that $M_i - m_i \le \varepsilon$ unless x_{i-1} is one of the u_j. Hence, as in the proof of Theorem 6.8,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \le [\alpha(b) - \alpha(a)]\varepsilon + 2M\varepsilon.$$

Since ε is arbitrary, Theorem 6.6 shows that $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Note: If f and α have a common point of discontinuity, then f need not be in $\mathscr{R}(\alpha)$. Exercise 3 shows this.

6.11 Theorem *Suppose $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a, b]$, $m \le f \le M$, ϕ is continuous on $[m, M]$, and $h(x) = \phi(f(x))$ on $[a, b]$. Then $h \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a, b]$.*

Proof Choose $\varepsilon > 0$. Since ϕ is uniformly continuous on $[m, M]$, there exists $\delta > 0$ such that $\delta < \varepsilon$ and $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ if $|s - t| \le \delta$ and $s, t \in [m, M]$.

Since $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, there is a partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ of $[a, b]$ such that

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2. \tag{18}$$

Let M_i, m_i have the same meaning as in Definition 6.1, and let M_i^*, m_i^* be the analogous numbers for h. Divide the numbers $1, \ldots, n$ into two classes: $i \in A$ if $M_i - m_i < \delta$, $i \in B$ if $M_i - m_i \ge \delta$.

For $i \in A$, our choice of δ shows that $M_i^* - m_i^* \le \varepsilon$.

For $i \in B$, $M_i^* - m_i^* \le 2K$, where $K = \sup|\phi(t)|$, $m \le t \le M$. By (18), we have

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \le \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{19}$$

so that $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. It follows that

$$\begin{aligned} U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i \\ &\le \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]. \end{aligned}$$

Since ε was arbitrary, Theorem 6.6 implies that $h \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Remark: This theorem suggests the question: Just what functions are Riemann-integrable? The answer is given by Theorem 11.33(*b*).

PROPERTIES OF THE INTEGRAL

6.12 Theorem

(*a*) *If* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *and* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *on* $[a, b]$, *then*

$$f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha),$$

$cf \in \mathscr{R}(\alpha)$ *for every constant* c, *and*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha,$$

$$\int_a^b cf\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*b*) *If* $f_1(x) \le f_2(x)$ *on* $[a, b]$, *then*

$$\int_a^b f_1\, d\alpha \le \int_a^b f_2\, d\alpha.$$

(*c*) *If* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *on* $[a, b]$ *and if* $a < c < b$, *then* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *on* $[a, c]$ *and on* $[c, b]$, *and*

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*d*) *If* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *on* $[a, b]$ *and if* $|f(x)| \le M$ *on* $[a, b]$, *then*

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \le M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(*e*) *If* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ *and* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$, *then* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *and*

$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2\ ;$$

if $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *and* c *is a positive constant, then* $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ *and*

$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

Proof If $f = f_1 + f_2$ and P is any partition of $[a, b]$, we have

(20) $$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \le L(P, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha) \le U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha).$$

If $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ and $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, let $\varepsilon > 0$ be given. There are partitions P_j $(j = 1, 2)$ such that

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon.$$

These inequalities persist if P_1 and P_2 are replaced by their common refinement P. Then (20) implies

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon,$$

which proves that $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

With this same P we have

$$U(P, f_j, \alpha) < \int f_j \, d\alpha + \varepsilon \qquad (j = 1, 2);$$

hence (20) implies

$$\int f \, d\alpha \le U(P, f, \alpha) < \int f_1 \, d\alpha + \int f_2 \, d\alpha + 2\varepsilon.$$

Since ε was arbitrary, we conclude that

(21) $$\int f \, d\alpha \le \int f_1 \, d\alpha + \int f_2 \, d\alpha.$$

If we replace f_1 and f_2 in (21) by $-f_1$ and $-f_2$, the inequality is reversed, and the equality is proved.

The proofs of the other assertions of Theorem 6.12 are so similar that we omit the details. In part (*c*) the point is that (by passing to refinements) we may restrict ourselves to partitions which contain the point c, in approximating $\int f \, d\alpha$.

6.13 Theorem *If $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ and $g \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a, b]$, then*

(*a*) $fg \in \mathscr{R}(\alpha)$;

(*b*) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *and* $\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \le \int_a^b |f| \, d\alpha.$

Proof If we take $\phi(t) = t^2$, Theorem 6.11 shows that $f^2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ if $f \in \mathscr{R}(\alpha)$. The identity

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

completes the proof of (*a*).

If we take $\phi(t) = |t|$, Theorem 6.11 shows similarly that $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$. Choose $c = \pm 1$, so that

$$c \int f \, d\alpha \ge 0.$$

Then

$$\left| \int f \, d\alpha \right| = c \int f \, d\alpha = \int cf \, d\alpha \le \int |f| \, d\alpha,$$

since $cf \le |f|$.

6.14 Definition The *unit step function* I is defined by

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

6.15 Theorem *If $a < s < b$, f is bounded on $[a, b]$, f is continuous at s, and $\alpha(x) = I(x - s)$, then*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s).$$

Proof Consider partitions $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, where $x_0 = a$, and $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Then

$$U(P, f, \alpha) = M_2, \qquad L(P, f, \alpha) = m_2.$$

Since f is continuous at s, we see that M_2 and m_2 converge to $f(s)$ as $x_2 \to s$.

6.16 Theorem *Suppose $c_n \geq 0$ for $1, 2, 3, \ldots$, Σc_n converges, $\{s_n\}$ is a sequence of distinct points in (a, b), and*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n). \tag{22}$$

Let f be continuous on $[a, b]$. Then

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{23}$$

Proof The comparison test shows that the series (22) converges for every x. Its sum $\alpha(x)$ is evidently monotonic, and $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = \Sigma c_n$. (This is the type of function that occurred in Remark 4.31.)

Let $\varepsilon > 0$ be given, and choose N so that

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

Put

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n), \qquad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

By Theorems 6.12 and 6.15,

$$\int_a^b f\,d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{24}$$

Since $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$,

INTEGRATION AND DIFFERENTIATION

We still confine ourselves to real functions in this section. We shall show that integration and differentiation are, in a certain sense, inverse operations.

6.20 Theorem *Let $f \in \mathscr{R}$ on $[a, b]$. For $a \le x \le b$, put*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Then F is continuous on $[a, b]$; furthermore, if f is continuous at a point x_0 of $[a, b]$, then F is differentiable at x_0, and

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Proof Since $f \in \mathscr{R}$, f is bounded. Suppose $|f(t)| \le M$ for $a \le t \le b$. If $a \le x < y \le b$, then

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \le M(y - x),$$

by Theorem 6.12(c) and (d). Given $\varepsilon > 0$, we see that

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

9.1 Indefinite Integral

865. $\int f(x)dx = F(x) + C$ if $F'(x) = f(x)$.

866. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

867. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

868. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

869. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

870. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

871. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

872. $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)+C$

873. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

874. Method of Substitution
$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$ if $x = u(t)$.

875. Integration by Parts
$\int u dv = uv - \int v du$,
where $u(x)$, $v(x)$ are differentiable functions.

9.2 Integrals of Rational Functions

876. $\int a dx = ax + C$

877. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

878. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

879. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$.

880. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,\ n \neq -1.$

881. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

882. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

883. $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

884. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C,\ a \neq b.$

885. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|) + C$

886. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$

887. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

888. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

889. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right) + C$

890. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx|-\frac{a^2}{a+bx}\right)+C$

891. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)}+\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

892. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

893. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

894. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

895. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

896. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

897. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$

898. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)+C$

899. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C,\ ab>0.$

900. $$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|x^2+\frac{a}{b}\right| + C$$

901. $$\int \frac{dx}{x\left(a+bx^2\right)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right| + C$$

902. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| + C$$

903. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C,$$

$b^2-4ac>0$.

904. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,$$

$b^2-4ac<0$.

9.3 Integrals of Irrational Functions

905. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$$

906. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + C$$

907. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C$$

908. $$\int x\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{3/2}+C$$

909. $$\int\frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right|+C,$$
$b-ac>0$.

910. $$\int\frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{ac-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}+C,$$
$b-ac<0$.

911. $$\int\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx=\frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$$
$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\ln\left|\sqrt{a(cx+d)}+\sqrt{c(ax+b)}\right|+C,\ a>0.$$

912. $$\int\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx=\frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$$
$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\arctan\sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}}+C,\ (a<0,\ c>0).$$

913. $$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)}{105b^3}\sqrt{(a+bx)^3}+C$$

914. $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C$$

915. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C,\ a>0.$$

916. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan\left|\frac{a+bx}{-a}\right| + C,\ a<0.$

917. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$

918. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$

919. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

920. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

921. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} +$

$+\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

922. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right| + C,$
$a>0.$

923. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{b^2-4ac} + C,\ a<0.$

924. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

925. $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{3}\left(x^2+a^2\right)^{3/2}+C$$

926. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}\left(2x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-$$
$$-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

927. $$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

928. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

929. $$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$$

930. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C$$

931. $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

932. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$$

933. $$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

934. $$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}+C$$

935. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}+a\arcsin\frac{a}{x}+C$

936. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

937. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

938. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+C$

939. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

940. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$

941. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+C$

942. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+C$

943. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

944. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

945. $\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

946. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

947. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+C$

948. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

949. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$

950. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}+C$

951. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

952. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin\frac{x}{a}+C$

953. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}+C$

954. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

955. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + C$

956. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$

957. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C,\ b > a.$

958. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2+bx} \right| + C,$
$b < a.$

959. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C$

960. $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$

961. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

9.4 Integrals of Trigonometric Functions

962. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

963. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

964. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

965. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

966. $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$

967. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$

968. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

969. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

970. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

971. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

972. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \csc^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

973. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \sec^3 x\,dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

974. $\int \sin x \cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

975. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

976. $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

977. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

978. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

979. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$

980. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C$

981. $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$

982. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

983. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\csc x + C$

984. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \cos x + C$

985. $\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C$

986. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln|\tan x| + C$

987. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

988. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

989. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C$

990. $\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$

$m^2 \neq n^2.$

991. $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,$

$m^2 \neq n^2.$

992. $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$

$m^2 \neq n^2.$

993. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

994. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

995. $\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$

996. $\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$

997. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

998. $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

999. $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

1000. $\int \operatorname{arccot} x\,dx = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

9.5 Integrals of Hyperbolic Functions

1001. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

1002. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

1003. $\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x + C$

1004. $\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$

1005. $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$

1006. $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$

1007. $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$

1008. $\int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + C$

9.6 Integrals of Exponential and Logarithmic Functions

1009. $\int e^x\, dx = e^x + C$

1010. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

1011. $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

1012. $\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

1013. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

1014. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$

1015. $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

1016. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$

1017. $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$$

9.7 Reduction Formulas

1018. $$\int x^n e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}x^n e^{mx} - \frac{n}{m}\int x^{n-1}e^{mx}\,dx$$

1019. $$\int \frac{e^{mx}}{x^n}\,dx = -\frac{e^{mx}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{m}{n-1}\int \frac{e^{mx}}{x^{n-1}}\,dx,\ n \ne 1.$$

1020. $$\int \sinh^n x\,dx = \frac{1}{n}\sinh^{n-1}x\cosh x - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2}x\,dx$$

1021. $$\int \frac{dx}{\sinh^n x} = -\frac{\cosh x}{(n-1)\sinh^{n-1}x} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sinh^{n-2}x},\ n \ne 1.$$

1022. $$\int \cosh^n x\,dx = \frac{1}{n}\sinh x\cosh^{n-1}x\cosh x + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2}x\,dx$$

1023. $$\int \frac{dx}{\cosh^n x} = -\frac{\sinh x}{(n-1)\cosh^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cosh^{n-2}x},\ n \ne 1.$$

1024. $$\int \sinh^n x\cosh^m x\,dx = \frac{\sinh^{n+1}x\cosh^{m-1}x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sinh^n x\cosh^{m-2}x\,dx$$

1025. $$\int \sinh^n x\cosh^m x\,dx = \frac{\sinh^{n-1}x\cosh^{m+1}x}{n+m}$$

$$-\frac{n-1}{n+m}\int \sinh^{n-2} x \cosh^{m} x dx$$

1026. $\int \tanh^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\tanh^{n-1} x + \int \tanh^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1027. $\int \coth^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\coth^{n-1} x + \int \coth^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1028. $\int \operatorname{sech}^{n} x dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1029. $\int \sin^{n} x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

1030. $\int \frac{dx}{\sin^{n} x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x},\ n \neq 1.$

1031. $\int \cos^{n} x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

1032. $\int \frac{dx}{\cos^{n} x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},\ n \neq 1.$

1033. $\int \sin^{n} x \cos^{m} x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m}$

$$+\frac{m-1}{n+m}\int \sin^{n} x \cos^{m-2} x dx$$

1034. $\int \sin^{n} x \cos^{m} x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m}$

$$+\frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} x \cos^{m} x dx$$

1035. $\int \tan^{n} x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1036. $\int \cot^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1037. $\int \sec^{n} x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx,\ n \neq 1$

1038. $\int \csc^{n} x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx,\ n \neq$

1039. $\int x^{n} \ln^{m} x dx = \frac{x^{n+1} \ln^{m} x}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^{n} \ln^{m-1} x dx$

1040. $\int \frac{\ln^{m} x}{x^{n}} dx = -\frac{\ln^{m} x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{m}{n-1}\int \frac{\ln^{m-1} x}{x^{n}} dx,\ n \neq 1.$

1041. $\int \ln^{n} x dx = x \ln^{n} x - n\int \ln^{n-1} x dx$

1042. $\int x^{n} \sinh x dx = x^{n} \cosh x - n\int x^{n-1} \cosh x dx$

1043. $\int x^{n} \cosh x dx = x^{n} \sinh x - n\int x^{n-1} \sinh x dx$

1044. $\int x^{n} \sin x dx = -x^{n} \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx$

1045. $\int x^{n} \cos x dx = x^{n} \sin x - n\int x^{n-1} \sin x dx$

1046. $\int x^n \sin^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1047. $\int x^n \cos^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} x + \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1048. $\int x^n \tan^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$

1049. $\int \frac{x^n dx}{ax^n + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{ax^n + b}$

1050. $\int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n} = \frac{-2ax - b}{(n-1)\left(b^2 - 4ac\right)\left(ax^2 + bx + c\right)^{n-1}}$

$$- \frac{2(2n-3)a}{(n-1)\left(b^2 - 4ac\right)}\int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^{n-1}},\ n \neq 1.$$

1051. $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}},$
$n \neq 1$.

1052. $\int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^n} = -\frac{x}{2(n-1)a^2\left(x^2 - a^2\right)^{n-1}}$

$$- \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^{n-1}},\ n \neq 1.$$

9.8 Definite Integral

Definite integral of a function: $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, ...

Riemann sum: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Small changes: Δx_i

Antiderivatives: $F(x)$, $G(x)$

Limits of integrations: a, b, c, d

1053. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

where $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

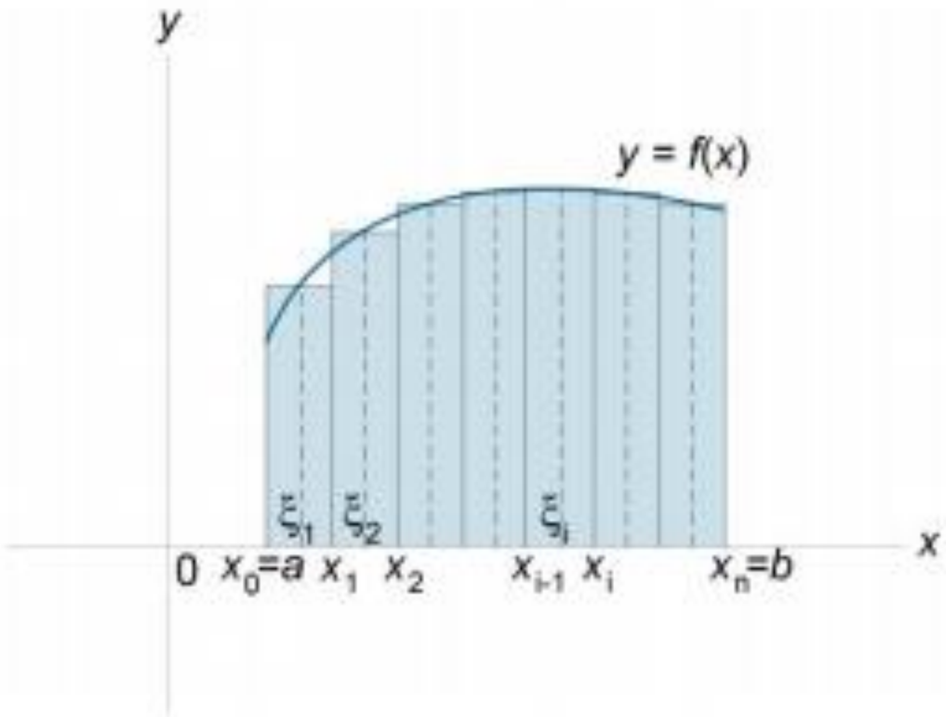


Figure 179.

1054. $\int_a^b 1dx = b - a$

1055. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

1056. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

1057. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

1058. $\int_a^a f(x)dx = 0$

1059. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

1060. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ for $a < c < b$.

1061. $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ if $f(x) \ge 0$ on $[a,b]$.

1062. $\int_a^b f(x)dx \le 0$ if $f(x) \le 0$ on $[a,b]$.

1063. **Fundamental Theorem of Calculus**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ if } F'(x) = f(x).$$

1064. **Method of Substitution**

If $x = g(t)$, then

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt,$$

where

$c = g^{-1}(a)$, $d = g^{-1}(b)$.

1065. **Integration by Parts**

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

1066. **Trapezoidal Rule**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

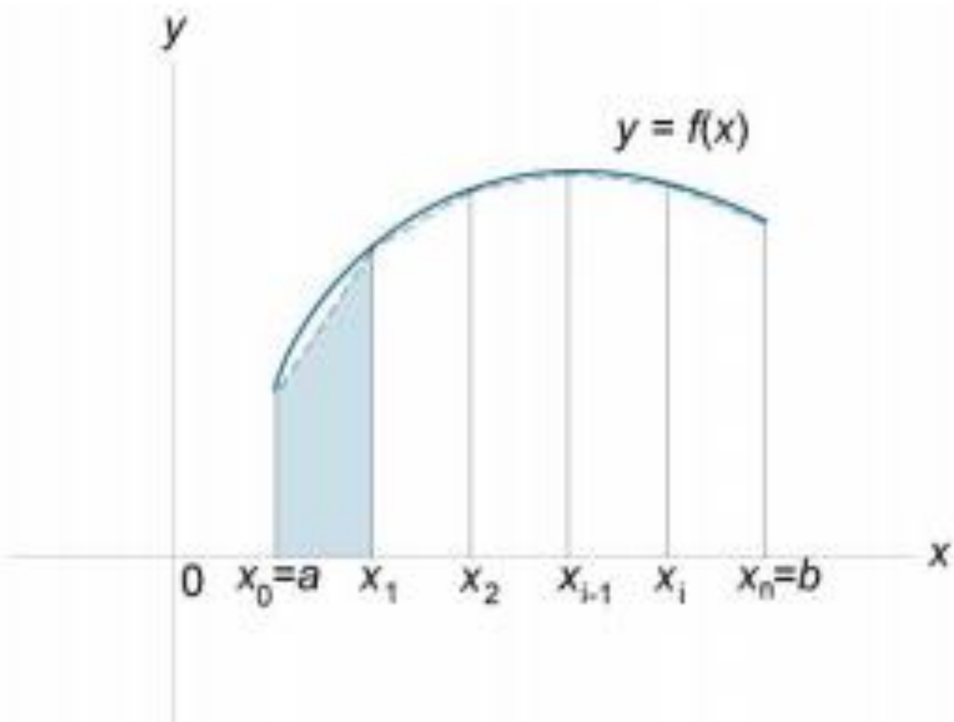


Figure 180.

1067. Simpson's Rule

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\right.$$
$$\left.+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right],$$

where

$$x_i = a+\frac{b-a}{n}i,\ i=0,1,2,\ldots,n.$$

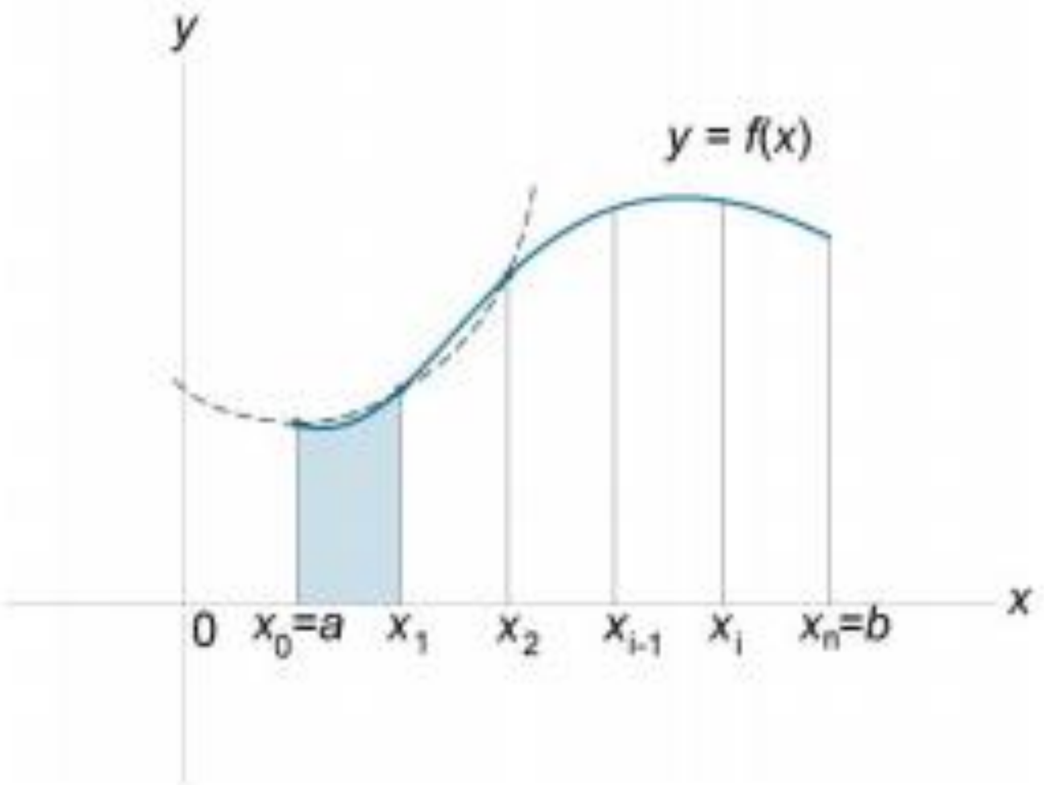


Figure 181.

1068. **Area Under a Curve**

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

where $F'(x) = f(x)$.

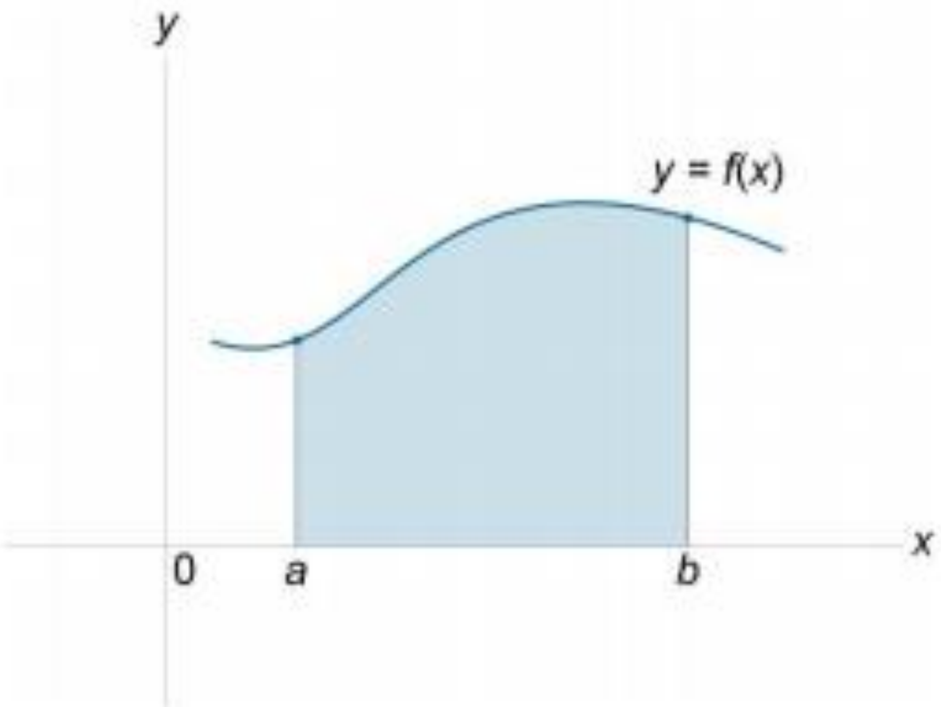


Figure 182.

1069. Area Between Two Curves

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = F(b)-G(b)-F(a)+G(a),$$

where $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$.

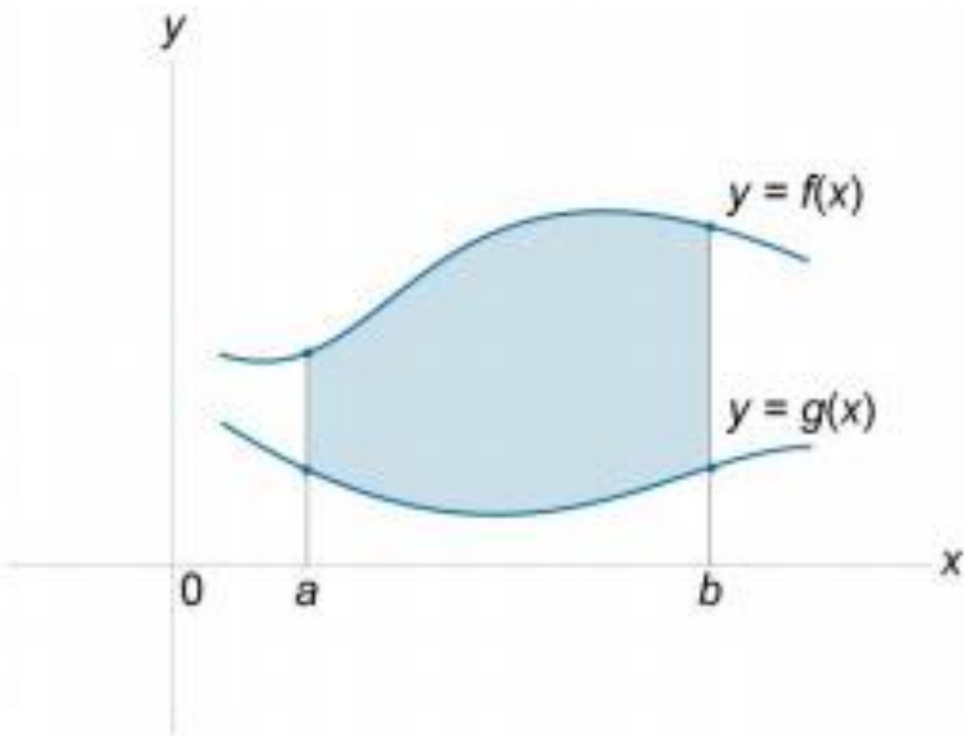


Figure 183.

9.9 Improper Integral

1070. The definite integral $\int_a^b f(x)dx$ is called an improper integral if

- a or b is infinite,
- $f(x)$ has one or more points of discontinuity in the interval $[a,b]$.

1071. If $f(x)$ is a continuous function on $[a,\infty)$, then

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)dx.$$

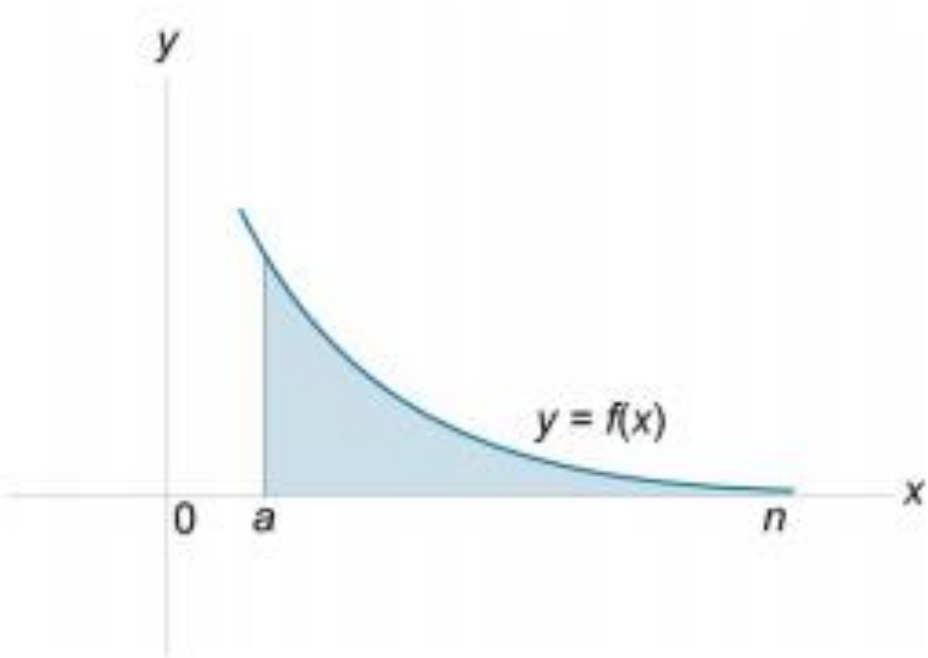


Figure 184.

1072. If $f(x)$ is a continuous function on $(-\infty,b]$, then

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to-\infty}\int_{n}^{b} f(x)dx.$$

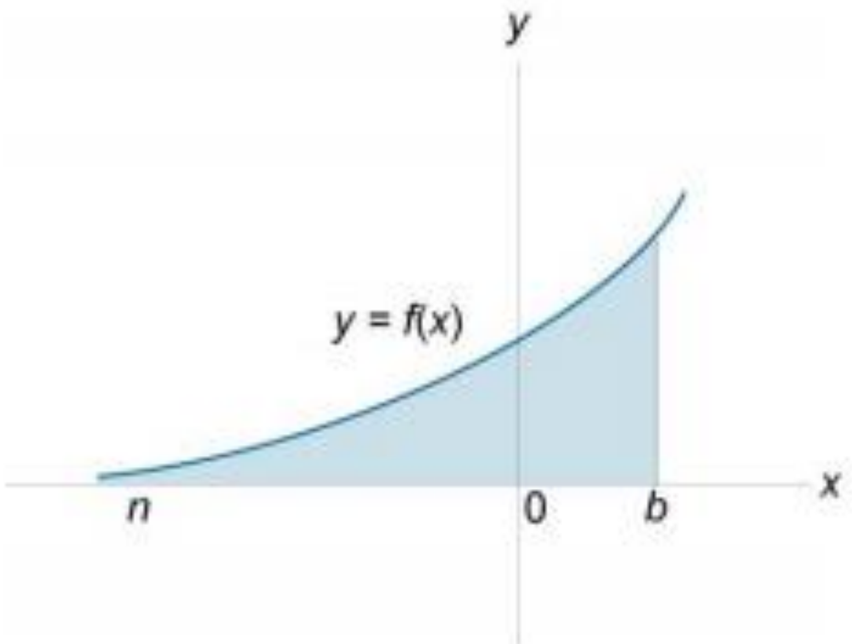


Figure 185.

Note : The improper integrals in 1071, 1072 are convergent if the limits exist and are finite; otherwise the integrals are divergent.

1073. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$

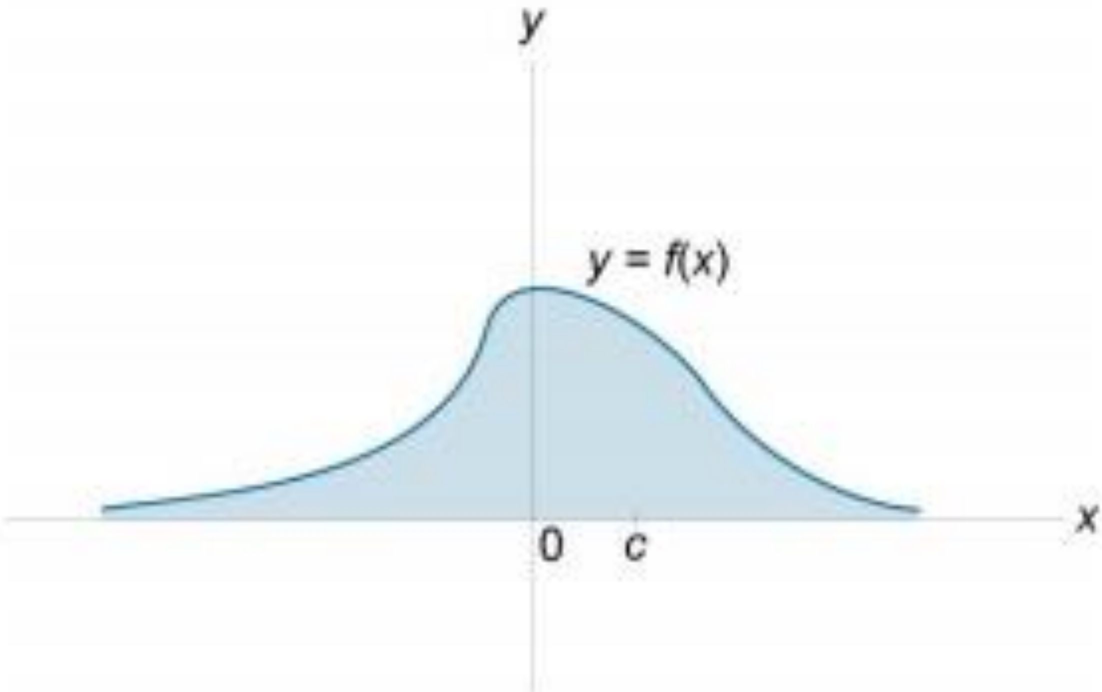


Figure 186.

If for some real number c, both of the integrals in the right side are convergent, then the integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ is also convergent; otherwise it is divergent.

1074. Comparison Theorems

Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous functions on the closed interval $[a,\infty)$. Suppose that $0 \le g(x) \le f(x)$ for all x in $[a,\infty)$.

Paydalang’an a`debiyatlar dizimi

Tiykarg`ı a`debiyatlar

1. Yorqulov R., Jumaev M. ”Oliy matematika”,T.: 2008y.
2. Jo`raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-q,. 2-q. T.: «O`zbekiston». 1999. 303b.
3. Hamedova N.A. va bosh. ”Matematika”. OO`Yu uchun darslik, T.: Turon iqbol, 2007y.
4. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. ”Matematika” – Gumanitar yo`nalishlar talabalari uchun o`quv qo`llanma. T.: ”Jahon-Print” 2007y.
5. Rasulov A.S., Raimova G.M., Sarimsakova X.K. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: 2006.-272 b.
6. Fayzullayeva S.F. Ehtimollar nazariyasidan masalalar to’plami. T.: 2006.-112 b.
7. Gmurman V.E. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika M.: Vısshaya shkola, 1999 g.-474s.
8. Zubkov A.M., Sevast`yanov B.A., Chistyakov. Sbornik zadach po teorii veroyatnostey. M.: Nauka. 1999

Qosımsha a`debiyatlar

1. Soatov Yo.O.“Oliy matematika” I , II qism,Toshkent, 1994 y.
2. Nazarov R.N., Toshpo`latov B.T., Dusumbetov A.F. “Algebra va sonlar nazariyasi”. T., O`qituvchi. I qism 1993., II qism 1995y.
3. Minorskiy V. “Oliy matematikadan masalalar to`plami”. T.: “O`qituvchi”, 1988y.
4. Tadjieva Z.G. “Matematikadan tarixiy materiallardan foydalanish”. T.: 2003y.
5. Azlarov T.A., Mansurov X. “Matematik analiz” 1-2 qism. T.: “O`qituvchi”, 1994y.
6. Shipachev V.S., «Matematicheskiy analiz» Ucheb posobie dlya vuzov /Shipachev V.S. – M.: «Vısshaya shkola». 2002. – 176 s.
7. Tojiev Sh. Oliy matematikadan masalalar echish. 1-q. T.: O`zbekiston. 2002.-509b.

İnternet ham Ziyonet saytları

1. www. tdpu. uz
2. www. pedagog. uz
3. www. Ziyonet. uz
4. www. edu. uz
5. tdpu-INTRANET. Ped