

O'ZBEKSTAN RESPUBLİKASI  
XALIQ BİLIMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ

K.Ubaydullaev atındag'ı Respublikalıq xalıq  
bilimlendiriw pedagog xızmetkerlerin qayta tayarlaw h'a'm  
qa'nigeligin arttırıw institutı

«Ta'biyiy h'a'm anıq pa'nler» kafedrası

M. Qasimov, A. Xalqnazarov, R. Gaypova

**Funktsiyalardın' grafiklerin jasawdı u'yretiw metodikasi**

(metodikalıq qollanba)

**No'kis-2015**

M. Qasimov, A. Xalqanazarov, R. Gaypova. Funktsiyalardın' grafiklerin jasawdı u'yretiw metodikası.  
(metodikalıq qollanba).

Bul qollanbada orta bilimlendiriw mekteplerinde, akedemiyalıq litseylerinde h'a'm ka'sip-o'ner kolledjlerinde matematikanın' tiykarg'ı ma'selelerinin' biri bolg'an funktsiyanın' grafiklerin jasawdı u'yretiwdin' metodikası qaralg'an bolıp, bunda quramalı funktsiyalardın' grafiklerin jasaw mashqalaları keltirilgen.

Qollanbadan orta mektep h'a'm akedemiyalıq litseydin'lerdin' oqıwshıları menen bir qatarda universitet, institut h'a'm ka'sip- o'ner kollejlerinin' talabalarında, pedagog kadrlardı qayta tayarlaw h'a'm qa'niygeligin arttırıw institutı tın'lawshılarında paydalansa boladı.

**Juwaplı redaktor:**

K.Palımbetov - filologiya ilimlerinin' kandidatı .

**Pikir bildiriwshiler:**

1. A. Abdullaev- No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı, ekonomika ilimlerinin' kandidatı, dotsent.
2. Z. Saparov - No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı, fizika-matematika ilimlerinin' kandidatı, dotsent.

K.Ubaydullaev atındag'ı RPKQT h'a'm QA institutı 2014-jıl, 30-dekabr, İlimiy Ken'esinin' «6»-sanlı protokoli menen tastıyıqlandı

### Kirisiw.

Qandayda bir qublistı xarakterlewshi eki shama, usı qublistın' barısında sonday bolıp o'zgeredi, olardıń o'zgeriwlerinin' arasında anıq baylanıs bar boladı. Bul eki o'zgeriwshi arasındag'ı baylanıs funksiionallıq baylanıs delinedi. Bul qublistag'ı bir o'zgeriwshisi ekinshisinen g'a'rezsiz bolsa, onda og'an argument, al argumenttin' shamasının' ma'nisi menen anıqlanatuǵ'ın o'zgeriwshi funksiya dep atladı.

**Anıqlama:** Eger  $X$  ko'pliktegi h'a'r bir  $x$  sanga bazıbir qag'ıyda boyınsha  $U$  ko'plikten bir  $u$  san sa'ykes kelse, onda  $X$  ko'plikte  $u$  funksiya berilgen, anıqlang'an dep ataladı h'a'm ol simvolikalıq tu'rde  $f: x \rightarrow y$  yamasa  $y = f(x)$  dep belgilenedi. Bunda  $x$ -argument yamasa erikli o'zgeriwshi,  $u$ -funksiya yamasa eriksiz o'zgeriwshi,  $f$  - xarakteristika;  $X$  ko'plik funksiyanın' anıqlanıw oblastı, onı  $D(f)$  arqalı belgileydi.  $Y = \{y: y = f(x), x \in X\}$  ko'plik bolsa  $f$ - funksiyanın' ma'nisler ko'pligi dep ataladı, onı  $E(f)$  arqalı belgileyli.

$D(f)$  ko'pliginde berilgen  $f(x)$  h'a'm  $D(g)$  ko'pliginde berilgen  $g(x)$  funksiyalardıń qosındısı dep  $D(\varphi): D(f) \cap D(g)$  ko'pliginde berilgen taza  $\varphi(x) = f(x) + g(x)$  funksiyaǵ'a aytamız.

$f(x)$  h'a'm  $g(x)$  funksiyalardıń ko'beymesi  $D(\varphi) = D(f) \cap D(g)$  ko'pliginde berilgen  $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  funksiyaǵa ayıladı.  $\frac{1}{g(x)}$  funksiya  $D(g)$  ko'pliginin'  $g(x) \neq 0$  bolg'an barlıq sanlarda anıqlang'an  $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$  funksiya  $f$  h'a'm  $g$  funksiyalardıń bo'linbesi dep ataladı, onı  $f \cdot \frac{1}{g}$  arqalı belgileydi.

Grafigi Oy ko'sherine salıstırg'anda simmetriyalı bolg'an yag'nıy o'zinin'  $D(f)$  anıqlanıw oblastında  $O(0;0)$  koordinatalar basına salıstırg'anda simmetriyalı jaylasqan  $x$  h'a'm  $-x$  noqatlarında  $f(x) = f(-x)$  qa'siyetlerge iye bolg'an  $f(x)$  funksiyanı jup funksiya dep ataydı (keri jag'dayda taq funksiya boladı).

$X$  ko'plikte o'siwshi yamasa kemeyiwshi funksiyaǵa monoton funksiyaǵa dep ataladı.

Sonday  $M$  sanı bar bolıp,  $X$  ko'pliginde  $f(x) \geq M$  (sa'ykes  $f(x) \leq M$ ) ten'sizligi orınlansa, onda  $f(x)$  funksiya  $X$  ko'pliginde to'mennen (joqarıdan) shegaralang'an dep ataladı.

Eger  $b = f(a)$  ten'likti qanaatlandırıwshı  $(a; b)$  jubı,  $a = f(\varphi)$  ten'likte qanaatlandırsa, onda olar o'z-ara keri funksiyaǵa boladı. Bul eki funksiyaǵa birewin tuwrı, al ekinshisin keri funksiya dep qabıl etiw mu'mkin.  $f$  funksiyaǵa keri funksiyanı  $f^{-1}$  arqalı belgileydi.  $f^{-1}(x) = g(x)$  h'a'm  $g^{-1}(x) = f(x)$ . Biz bul jerde funksiya h'aqqında qısqaşa toqtap o'ttik.

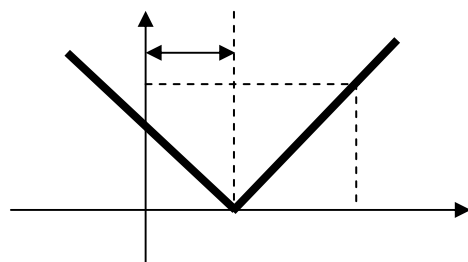
## §1. Sızıqlı funksiyanın' grafigi.

Sızıqlı funksiylardıń grafigin jasawdı mısalları ja'rdeminde tu'sindiremiz.

1.  $y = |x - 2|$

1-usıl.

Berilgen  $y = |x|$  funksiyanın' grafigin jısaymız. Koordinatalar ko'sherin aldın ala shtrix sızıqlarda sızamız. Keyin,  $y$  ko'sherin  $(-2)$  ge qozg'aymız.  $x$  ko'sheri ornında qaladı (1-sızılma).



1-sızılma

2-usıl.

Grafikti eki shaqadan turatug'ın h'a'm h'a'r qaysısı o'zinin' analitikalıq an'latpasına iye dep qarastıramız.

a)  $x - 2 \geq 0$  bolg'anda  $y = x - 2$

b)  $x - 2 \leq 0$  bolg'anda  $y = -x + 2$ .

Bul eki shaqada tuwrı sızıqtı beredi. Olardıń h'a'r birin, eki noqat boyınsha jasaw mu'mkin. Grafiktin' eki shaqasında  $y = 0$  bolg'anda ulıwma bir noqatqa iye; usı noqattın' abstsissasını esaplaymız.

$$y = |x - 2| = 0;$$

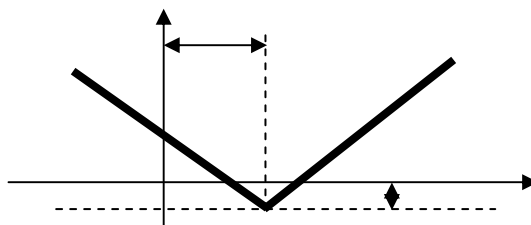
$$x = 2$$

Grafiktin' eki shaqası ushın ulıwma  $(2; 0)$  noqatqa iye boldıq. Ha'r bir shaqa ushın ja'ne bir noqattın' koordinatın tabamız:

On' shaqa ushın  $x = 5$ ;  $y = 5 - 2 = 3$ ;  $(5; 3)$  noqat

Shep shaqa ushın  $x = 0$ ;  $y = 0 + 2 = 2$ ;  $(0; 2)$  noqat

2.  $y = |-x + 3| - 1$



1-usıl.

Berilgen funksiyanın' grafigin jasaw ushın, onı to'mendegishe tu'rlendiremiz.  $(-1)$  belgini qawıstın' sırtına shıg'aramız:

$$y = -|x - 3| - 1$$

Berilgen  $y = |-x| = |x|$  grafikti shtrixlang'an koordinatalar ko'sherine jaylastıramız. Keyin,  $y$  ko'sherin  $(-3)$  ke ko'shiremiz h'a'm  $x$  ko'sherin  $[ -(-1) ]$  ge yag'nıy  $(+1)$ .

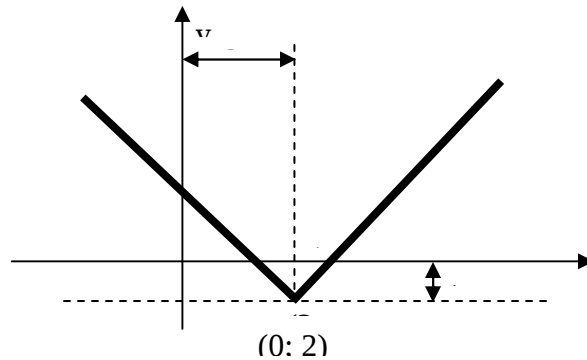
2-usıl.

Grafik eki shaqag'a h'a'm olardın' h'a'r biri o'zinin' ten'lemelerine iye.

a)  $-x+3 \geq 0$  bolg'anda, yag'nıy  $x \leq 3$  bolg'anda  $y = -x+3-1$  yamasa  $y = -x+2$

b)  $-x+3 \leq 0$  bolg'anda, yag'nıy  $x \geq 3$  bolg'anda  $y = (-x+3)-1 = x-3-1$  yamasa  $y = x-4$ .

Bul yarım tuwrılardın' ulıwma noqtanın' koordinataların tabamız:



2-sızılma

$$-x+2 = x-4, \quad 2x = 6, \quad x = 3; \quad y = -1$$

Ulıwma noqtat (3;-1)

Ha'r bir yarım tuwrı ushın qosımsha noqtatlar:

On' shaqa ushın  $x = 4$ ;  $y = 4-4 = 0$ ; (4;0) noqtat

Shep shaqa ushın  $x = 0$ ;  $y = 0+2 = 2$ ; (0;2) noqtat.

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an mısallar

1.  $y = |x-1|$

2.  $y = |x+3| - 1$

3.  $y = |x-3|$

4.  $y = 2x+3$

5.  $x = \frac{5}{4}y$

6.  $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$

7.  $y = 4$

8.  $x = -5$

9.  $3x-6y-2=0$

10.  $2 = 4x-y$

11.  $y = |-x-4| - 1$

12.  $y = |x+1|$

13.  $y = |x+3|$

14.  $y = 2x$

15.  $y = \frac{1}{2}x$

16.  $y = -x$

17.  $y = x+1$

18.  $y = x-1$

19.  $y = x+2$

20.  $y = (x-3) - (3x-4)$

## § 2. Kvadrat funktsiyanın' grafigi

Kvadrat u'sh ag'zalınnı' ulıwma ko'rini :

$$y = ax^2 + bx + c,$$

bunda  $a, b$  h'a'm  $c$  qa'legen h'aqıyqıy sanlar (on', teris, ratsional h'a'm irratsional).

Kvadrat u'sh ag'zalınnı' grafiklerin izertlew ushın eki usıldı qarastıramız.

1) Toliq kvadratqa ajratıw usılı h'a'm grafikti keyingi qurıwında jasalma usıldı qollanamız.

2) Kvadrat u'sh ag'zalıqtın' grafigin arnawlı izzertlewge tiykarlanıp jasaymız.

1-usıl.

a) on' jag'ındag'ı u'sh ag'zalıqtı eki ag'zag'a ajıratamız h'a'm birinshi  $a$  koeffitsent qawsırmanın' sırtına shıg'arıladı, yag'nıy

$$y = (ax^2 + bx) + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

b) Qawsırmanın' ishindegi an'latpanı kvadrat eki ag'zalı dep qarastırıw mu'mkin.

$x^2$  h'a'm  $\frac{b}{a}x = 2x \cdot \frac{b}{2a}$ . Bunnan ko'rinip turıptı, ekinshi ag'za  $\frac{b}{2a}$  boladı, al onın' kvadratı

$$\frac{b^2}{4a^2}.$$

Onda

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

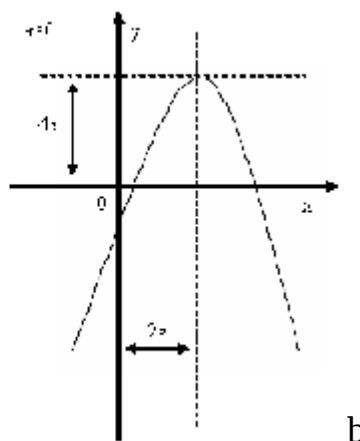
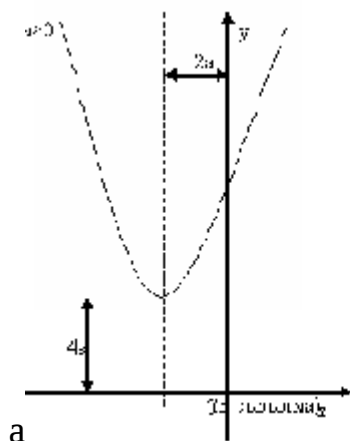
$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

v) Tu'rlendirilgen kvadrat u'sh ag'zalıqtın' grafigin jasaw ushın, berilgen grafikti:

1).  $a > 0$  bolg'anda funksiyanın' grafigi  $y = x^2$

2).  $a < 0$  bolg'anda funksiyanın' grafigi  $y = -x^2$



3-sızılma

3-sızılımda berilgen grafiktin' koordinata ko'sherleri h'a'm grafik shtrix sızılımlarda ko'rsetilgen. Vertikal ko'sherlerde, en' jaqsısı shtrix sızılımlarda ko'rsetiw

h'a'm ol grafiktin' simmetriya ko'sheri boladı. g)  $Y$  ko'sheri  $\frac{b}{2a}$  shamag'a jılısadı,

sonın' ushın  $y_1 = \pm \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  funktsiyanın' grafigi alınadı. Keyin bul grafik  $|a|$  ma'rtebe sozılıp (qısılıp) h'a'm  $y_1 = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  grafigi alınadı.

d)  $x$  ko'sheri  $-\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)$  shamasına jılısadı. Yadqa tu'siremiz kvadrat u'sh ag'zalıqtın' diskriminanti

$$D = b^2 - 4ac$$

Bunnan,  $x$  ko'sheri  $\frac{D}{4a}$  shamasına jılısadı, ol  $\frac{b^2}{4a} - c$  g'a ten'.

Solay etip,  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat u'sh ag'zalıqtın' grafigi jasaladı.

Grafikti bul usılda jasawdag'ı kemshilikler:

1) İymekliktin' koordinata ko'sherleri menen kesilisiw noqatları anıqlanbaydı. Sol sebepten bul noqattın' koordinataları, grafikti jasag'annan keyin, qosımsha esaplanadı.

2)  $x^2$  tın' koeffitsentlerine baylanıslı grafikti sozıwdın' za'ru'rliğı. Sol sebepten iymek sızıq eki ma'rtebe jasaladı.

Bul kemshiliklerdin' ekinshisi bolmaydı, egerde  $a = \pm 1$  bolsa. Onda funktsiya

$$y = \pm x^2 + px + q$$

boladı.

$y$  ko'sheri  $\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = -x^2 + px + q \end{cases}$  funktsiyası ushın  $\pm \frac{p}{2}$ ; boladı.

$x$  ko'sheri  $\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = -x^2 + px + q \end{cases}$  funktsiyası ushın  $\pm \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ ; boladı.

Ko'rsetilgen sheshimlerden birinshisi aytarlıqtay kemshilikke jatpaydı. Sebebi koordinatalar ko'sherleri grafiktin' kesilispesin, tekseriw ushın dep qaraw mu'mkin. Sonın' ushında, qosımsha tekseriw noqatların almasada boladı.

2-usıl.

Bizge ma'lim, kvadrat u'sh ag'zalıqtın' grafigi, vertikal ko'sherge simmetriyalı parabolanı beredi. Egerde  $a > 0$  bolsa, onda parabola joqarıg'a bag'ıtlang'an, al parabolanın' to'besinin' ordinatası funktsiyanın' minimumın beredi (3 a-sızılma). Egerde  $a < 0$  bolsa, onda parabolanın' shaqası to'men bag'ıtlang'an, al parabolanın' to'besinin' ordinatası funktsiyanın' maksimumın beredi (3 b-sızılma).

Kvadrat u'sh ag'zalı funktsiyanı izertlegenimizde, ulıwma sxema boyınsha dawamlaw mu'mkin. Biraqta bul jag'dayda za'ru'rlik joq. Sebebi kvadrat u'sh ag'zalıqtın' ko'rnisi boyınsha,  $x$  tın' qa'legen h'aqıyqıy ma'nisti qabıl etiw mu'mkinligi jen'il anıqlanadı, yag'nıy funktsiyanın' bar bolıw oblastı  $(-\infty; +\infty)$  interval, al  $y$  ko'sheri boyınsha grafik parabolanın' to'besi menen shegaralang'an. Sonın' ushında, birinshi koeffitsenttin' belgisi boyınsha salıstırmalı parabolanın' to'besinin' jaylasıwınan (maksimum, minimum), birden xarakterli noqatların anıqlawg'a o'tiw mu'mkin.

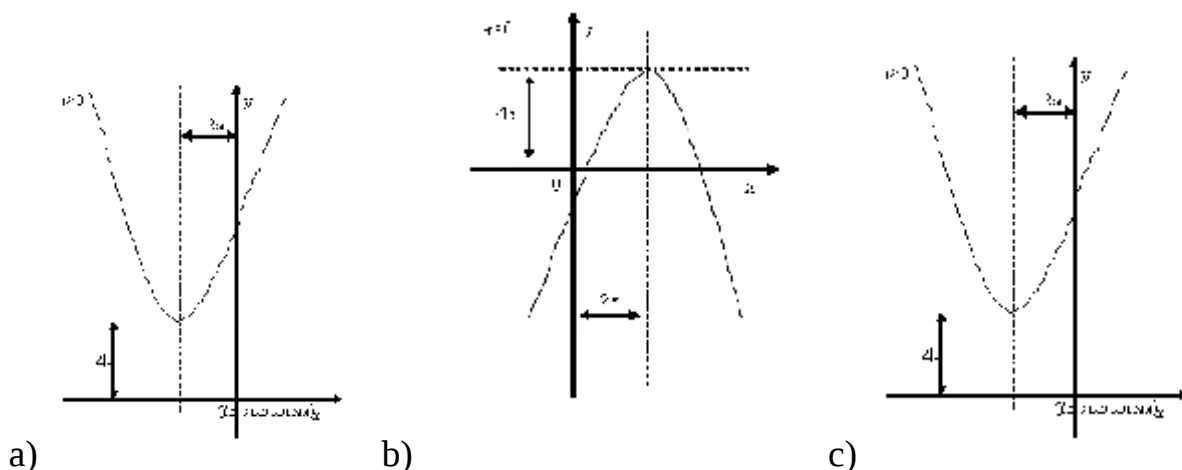
1) Parabola  $x$  ko'sherin kesip o'tiwın anıqlaw ushın, berilgen u'sh ag'zalıqtın' diskriminatın esaplaymız:

$$D = b^2 - 4ac \quad (1)$$

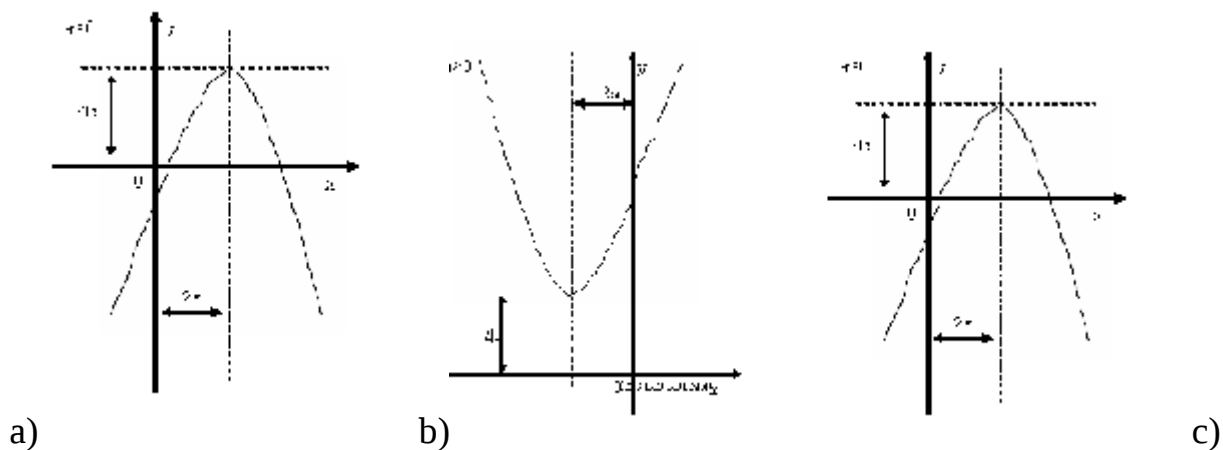
Egerde  $D > 0$  bolsa, onda parabola  $x$  kosherin eki noqatta kesip o'tedi. Funktsiyanin' grafiginin'  $X$  ko'sherin kesip o'tiw noqatları  $y = ax^2 + bx + c = 0$  an'latiladi. Aling'an kvadrat u'sh ag'zalıq  $D > 0$  bolg'anda eki h'aqıyqıy korengi iye:  $x_1, x_2$ .

Egerde  $D = 0$  bolsa, onda parabola o'zinin' to'besi menen  $x$  ko'sherine tiyip o'tedi. Sebebi  $D = 0$  bolg'anda  $x_1 = x_2$  boladı.

Egerde  $D < 0$  bolsa, onda parabola  $x$  ko'sherin kespeydi h'a'm tiyipte o'tpeydi. Bul jag'dayda  $\sqrt{D}$  minimum shamanı beredi h'a'm  $y = 0$  ten'leme h'aqıyqıy sheshimge iye emes.



#### 4- sızılma



#### 5-sızılma

2) Egerde  $D \geq 0$  bolsa, onda grafiktin'  $x$  ko'sheri menen kesilisiw noqatlarının' koordinataları esaplanadı. Onın' ushın  $ax^2 + bx + c = 0$  ten'leme sheshiledi. Bunnan  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  iye bolamız.  $x_1$  ushın kishi sheshimdi alıw usınıs etiledi. Bug'an parabolanı simmetriya ko'sherinin' shep jag'ında jatiwshı noqat sa'ykes keledi.

Bul noqatlar  $x$  ko'sherine tu'siriledi. Olardı ajıralıp turatug'ın belgi menen tu'siriw usınıs etiledi. Birinshi koeffitsent  $a > 0$  bolg'anda 4-sızılmada, al  $a < 0$  bolg'anda 5-sızılmada ko'rsetilgen.

3) Parabolanın' to'besinin'  $(x_0; y_0)$  koordinataları anıqlanadı

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}. \quad (3)$$

$x$  ko'sherin kesip o'tiwshi parabolalar ushın  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  formula boyınsha anıqlag'an qolaylı. Al  $x$  ko'sherinne tiyip o'tiwshi parabola ushın  $x_0 = x_1 = x_2$  h'a'm  $x$  ko'sherin kesip o'tpeytug'ın parabola ushın  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  formulaların qollang'an maqul.

Egerde  $a = 1$  bolsa, onda  $x_0 = -\frac{p}{2}$  boladı.  $x_0$  anıqlang'annan keyin, grafikte  $x = x_0$  ten'lemege iye bolg'an, parabolanın' vertikal ko'sherin jasaymız.

$x_0$  ushın (3) formulada ko'rinip tur, parabolanın' ko'sherlerinin' jasalıwı saltan' shamasınan baylanıssız. Egerde saltan' ag'zanı o'zgeritip, kvadrat u'sh ag'zalınnı' basqa koeffitsentlerin o'zgerissiz qaldırsaq, onda parabola o'zinin' ko'sheri boylap qozg'aladı. Bul aytilg'an sızılma (4a, b, v-sızılma)  $a > 0$  ushın, (5a, b, v-sızılma)  $a < 0$  ushın ko'rsetilgen.

$y_0$  di anıqlaw ushın, kvadrat u'sh ag'zalıg'a  $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$  ma'nisti beremiz,

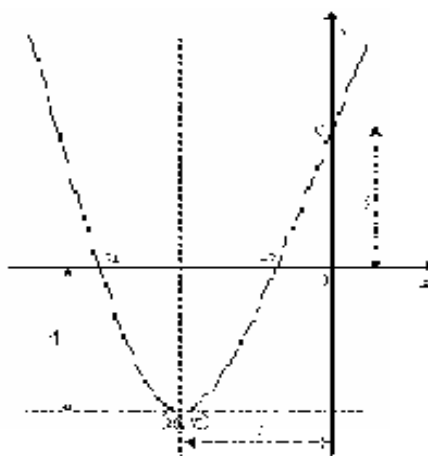
$$\text{na'tiyjede } y_0 = ax^2 + bx + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_0 = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac) = -\frac{D}{4a} \text{ iye bolamız.}$$

Solay etip,  $y_0$  di esaplaw ushın  $y_0 = -\frac{D}{4a}$  formulanı qollanıwımız maqsetke muwapıq boladı.

4)  $y$  ko'sheri menen parabolanın' kesilisiw noqatlarının' koordinataları esaplanıladı. Onın' ushın kvadrat u'sh ag'zalıqqa  $x=0$  di qoyamız  $y = ax^2 + bx + c = c$ . Sızılmada (0, s) sa'ykes keliwshi noqat jaylastırıladı. Keyin, og'an sa'ykes keliwshi simmetriyalı noqat jaylastırıladı.

5)  $D > 0$  de u noqat boyınsha iymek ju'rgiziledi,  $D \leq 0$  bolg'anda u'sh noqat boyınsha iymek ju'rgiziledi. Qosımsha (ayıqsha, u'sh noqat boyınsha iymekti jasag'anımızda) ja'ne bir tekseriw noqatın h'a'm og'an simmetriyalı noqat alıwımız mu'mkin.



6 – sızılma

**Мисаллар.** 1)  $y = x^2 + 6x + 5$

1-usıl. u'sh ag'zalıqtı tu'rlendiremiz:

$y = (x^2 + 6x) + 5 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 5 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$ , Solay etip,  $y = (x+3)^2 - 4$ . Berilgen  $y = x^2$  funktsiyanın' grafigi jasaladı. Bul grafik  $y$  ko'sheri boyınsha 3 ke jılıstırıladi, yag'nıy 3 birlikke on'g'a,  $x$  ko'sheri boyınsha -4 ke jılıstırıladi, yag'nıy 4 birlikke to'menge.

Koordinata ko'sherleri jasalg'annan keyin grafiktin' koordinata ko'sherleri menen kesilisiw noqatların anıqlaw za'ru'r.

2-usıl. Parabolanın' to'besi minimum noqat boladı (parabolanın' shaqası joqarig'a qarag'an), sebebi  $a=1>0$ .

a)  $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$ , parabola  $x$  ko'sheri menen eki noqatta kesilisedi.

b)  $x^2 + 6x + 5 = 0$  ten'lemenı sheshemiz (Viet teoreması boyınsha),  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -1$  iye bolamız h'a'm onı  $X$  ko'sherinde belgileyemiz (6-sızılma).

v) Parabolanın' to'besinin' koordinataların anıqlaymız  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3$  h'a'm

$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$  ( $x_0$  h'a'm  $y_0$  di anıqlag'anımızdan son', parabolanın' ko'sherin ju'rgizemiz).

g) Grafiktin'  $y$  ko'sheri menen kesilisiwi S noqatı  $y=5$  ordinatag'a iye ( $x=0$  bolg'anda). 6-sızılmada S(0;5) noqat h'a'm og'an simmetriyalı  $C_1(-6; 5)$  noqat jasalg'an.  $C_1$  noqatının' abstsissasın  $X_{c_1} = 2x_0 = 2 \cdot (-3) = -6$  tu'rinde esaplanadı.

2)  $y = -x^2 - 6x + 1$

1-usıl. u'sh ag'zalıqtı tu'rlendiremiz:

$$y = -(x^2 + 6x) + 1 = -(x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 1 = -(x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) + 3^2 + 1 \sim$$

$$y = -(x+3)^2 + 10$$

Berilgen  $y = -x^2$  funktsiya  $y$  ko'sheri boyınsha (3) ke,  $x$  ko'sheri boyınsha (-10) g'a jılısadı.

2-usıl. Parabolanın' shaqaları to'men qarag'an h'a'm to'besi maksimum boladı. Sebebi  $a=-1<0$ .

1)  $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-1 \cdot 1) = 36 + 4 = 40 > 0$

2)  $-x^2 - 6x + 1 = 0$  ten'lemenı sheshemiz:  $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{-2} \approx \frac{6 \pm 6,4}{-2}$

$$x_1 \approx -6,2; \quad x_2 \approx 0,2$$

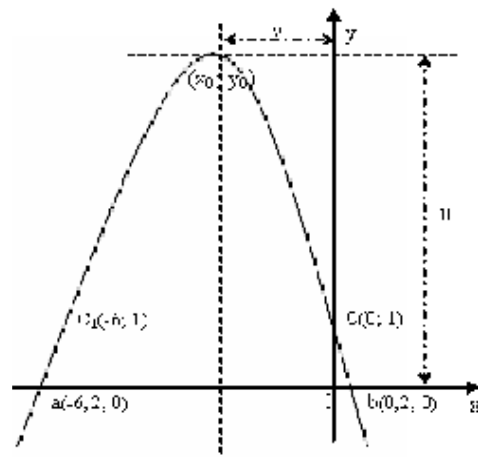
3) Parabolanın' to'besinin' abstsissası:  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6,2 + 0,2}{2} = -3$ .  $y$  ko'sherinen (-3)

aralıqta parabolanın' vertikal ko'sheri o'tkeriledi. Parabolanın' to'besinin' ordinatası

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{40}{4(-1)} = 10$$

4) Grafiktin'  $y$  ko'sheri menen kesilisiwshi S noqatının' ordinatası ( $x=0$  bolg'anda)  $y = c = 1$ .

5) D noqatının' koordinatası:  $x=-1$  bolg'anda  $y = -(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$



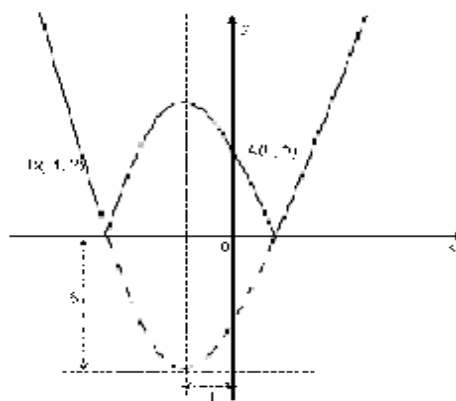
7-sızılma

$$3. y = |-x^2 - 2x + 5|$$

Bul jerde funktsiya modulde berilgen, onda moduldin' ishindegı belgini kerige o'zgertiw mu'mkin. Bul bolsa bizge qandayda bir qolaylı jag'day tuwg'ızadı. Na'tiyjede

$$y = |x^2 + 2x - 5|$$

iye bolamız. Berilgen funktsiyanın' grafigin jasaw rejesi to'mendegishe:  $y = x^2 + 2x - 5$  parabolanı shtrix sızıq penen jasaymız. Keyin  $y$  ko'sherinin' ma'nisinde jaylasqan grafiktin' bo'legin,  $x$  ko'sherine salıstırg'anda simmetriyalı tu'rde sa'wlendiremiz (7-sızılma).



8-sızılma

Funktsiyanın' ja'rdemshi parabolası  $y = x^2 + 2x - 5$  grafigin qurıw ushın bir usıldan paydalanamız. Onın' ushın funktsiyanı  $y = x^2 + 2x - 5 = ((x^2 + 2x + 1) - 1 - 5) = (x + 1)^2 - 6$  tu'rlendiremiz.  $y$  ko'sheri (1) ge,  $x$  ko'sheri  $u$  g'a jılıstırıladı.

Parabolanın' to'mengi shaqası (shtrixlang'an)  $x$  ko'sherine salıstırg'anda simmetriyalı to'mennen joqarıg'ı yarım tegislikke o'tkeriledi.

Tekseriw noqatlari:

a)  $x=0$  bolg'anda  $y = |-5| = 5$ ;  $(0; 5)$  noqat

b)  $x=-4$  bolg'anda  $y = |-16 + 8 + 5| = |-3| = 3$ ;  $(-4; 3)$  noqat.

4.  $y = -x^2 + 2|x + 2| + 4$

Bul funktsiya ekige ajıraladı.

1) Egerde modul astındag'ı an'latpa  $x + 2 \geq 0$  yag'nıy  $x \geq -2$ , onda  $|x + 2| = x + 2$  h'a'm

$$y = -x^2 + 2(x + 2) + 4 = -x^2 + 2x + 4 + 4 \text{ yag'nıy}$$

$$y = -x^2 + 2x + 8$$

(a)

2) Egerde  $|x+2| \leq 0$  yag'niy  $x \leq -2$ , onda  $|x+2| = -(x+2)$  h'a'm  
 $y = -x^2 - 2(x+2) + 4 = -x^2 - 2x - 4 + 4$  yag'niy  
 $y = -x^2 - 2x$  (b)

$x+2=0$  bolg'anda, yag'niy  $x=-2$  ko'rinip turipti, (a) h'a'm (b) an'latpalar bir noqatni beredi:

$$(a) \text{ an'latpadan } y = -(-2)^2 + 2(-2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$$

$$(b) \text{ an'latpadan } y = -(-2)^2 - (-2) = -4 + 4 = 0$$

Bul A(-2;0) noqatni sızılmada belgileymiz. Usı sızılmada (a) h'a'm (b) parabolalardı shtrix sızıqlar menen jasaymız.

Eki parabola ushın koordinata ko'sherleri birdey bolg'anlıqtan, olardıń grafiklerin ko'sherlerdi jıljıtıw usılı menen jasawg'a bolmaydı. Sonlıqtan eki funktsiya ushın ulıwma izertlew ju'rgizemiz.

$$a) y = -x^2 + 2x + 8$$

Parabolanın' shaqası to'men bag'ıtlang'an, yag'niy onın' to'besi maksimum noqat boladı.

Diskriminant  $D=2^2-4(-1)8=36>0$ . Parabola  $x$  ko'sherin eki noqatta kesip o'tedi.  
 $y = -x^2 + 2x + 8 = 0$  bolg'anda

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = 1 \pm 3; \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Parabolanın' abstsissa ko'sheri  $x_0 = \frac{-2+4}{2} = 1$ . Parabolanın' ordinatası  $y_0 = -\frac{36}{4(-1)} = 9$ ,  
 $y$  ko'sheri menen parabola  $y=8$  bolg'anda kesilisedi, yag'niy (0;8) noqatta. Bug'an simmetriyalı noqat  $x=2$   $x_0=2 \cdot 1=2$  h'a'm  $u=8$  koordinatalarına iye, (2;8) noqat.

$$b) y = -x^2 - 2x$$

Funktsiya kvadrat u'sh ag'zalıqtın'  $s=0$  bolg'andag'ı dara tu'ri. Onın' grafigi koordinatalar basınan o'tetug'ın parabola. Sebebi  $u=-x^2-x$  ten'lemesi  $x=0$  h'a'm  $u=0$  ma'nislerdi qanaatlandıradı. Parabolanın' to'besi maksimum noqat boladı.

Ten'lemenin' on' jag'ın ko'beytiwshilerge jikleymiz:

$$u = -x(x+2)$$

Bunnan  $-x(x+2)=0$  ten'lemenin' korenleri

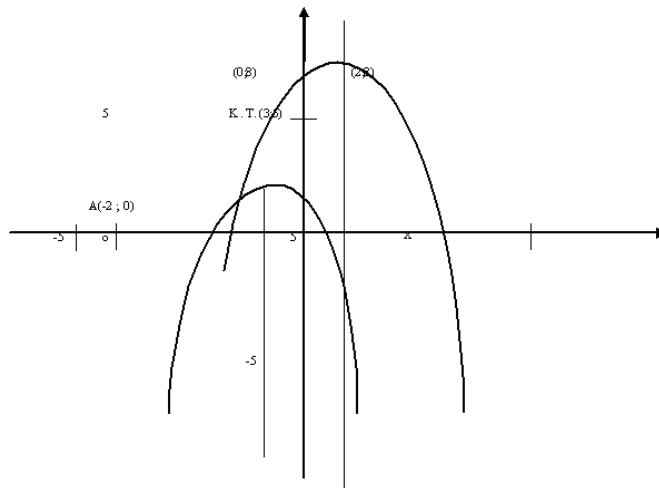
$$X_1=0; \quad x_2=-2$$

Parabolanın' ko'sheri  $u$ -ko'sherinen  $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$  aralıqta jaylasadı.

Parabolanın' to'besinin' ordinatası

$$u_0 = -x_0(x_0+2) = 1(-1+2) = 1$$

$u$ -ko'sheri menen parabola (0;0) noqatta kesilisedi. Bul noqatqa simmetriyalı noqattın' koordinatı  $x=2$ ,  $x_0=-2$  h'a'm  $u=0$  yag'niy (-2;0). Esaplang'an noqatlar boyınsha eki parabolada shtrix sızıqlar menen sızılğ'an



### 9-sızılma

Da'slepki sha'rtti qarasaq, a) funktsiya  $x > -2$  bolg'anda berilgen grafikni an'latadi yag'nuy  $x = -2$  noqatının' on' ta'repi, b) funktsiya  $x \leq -2$  bolg'anda, yag'nuy  $x = -2$  noqatının' shep ta'repi. Parabolanın' bul ko'rsetilgen bo'leklerin yag'nuy (a) h'a'm (b) lardi u'zliksiz sızıqlar menen ju'rgizemiz.

Keyin, shtrix penen sızılga'an bo'leklerdi alıp taslawımız mu'mkin.

Tekseriw noqatları:

$$1) x = 3; y = -3^2 + 2|3 + 2| + 4 = -9 + 10 + 4 = 5; \quad (3, 5) \text{ noqat,}$$

$$2) x = -3; y = -(-3)^2 + 2|-3 + 2| + 4 = -9 + 2|-1| + 4 = -9 + 2 + 4 = -3; \quad (-3, -3) \text{ noqat.}$$

$$5. y = |2x^2 - x|$$

Ma'seleni sheshiw rejisi.

$y = 2x^2 - x$  ja'rdemshi funktsiyanın' grafigi shtrix sızıqlar menen jasaladı. Keyin,  $x$  ko'sherinin' to'meninde jaylasqan grafik bo'legin, bul ko'sherge salıstırmalı simmetriyalı sa'wlelendiriledi.

$y = 2x^2 - x$  kvadrat funktsiyanı,  $c=0$  bolg'andag'ı kvadrat u'sh ag'zalıqtın' dara ko'rinisi dep qaraw mu'mkin. Onın' grafigi-koordinatalar basınan o'tetug'ın parabola~parabolanın' shaqaları joqarig'a bag'ıtlang'an. Bul parabolanı 2 usıl menen jasaw qolaylı. Sebebi  $2x^2 - x = 0$  ten'lemenin' sheshimi, ten'lemenin' shep ta'repin ko'beytiwshilerge tarqatıw arqalı jen'il tabıw mu'mkin.

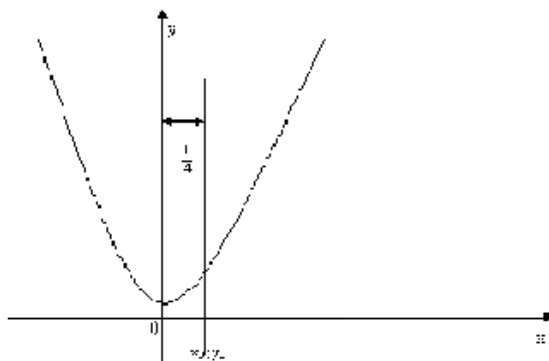
$$2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$x(2x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Parabolanın' ko'sheri } y \text{ ko'sherinen } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{aralıqta jaylasadı. Parabolanın' to'besinin' ordinatası } y_0 = 2x_0^2 - x_0 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$



10-sızılma.

Tekseriw noqatları:  $x=1$ ;  $y=(2 \cdot 1^2 - 1)=1$ ; (1;1) noqat.

6.  $y = (5 - x)(x + 1)$

Bul an'latpanin' on' jag'indag'ı ko'beymeni orinlasan'

$$y = -x^2 + 4x + 5$$

kvadrat u'sh ag'zalıqqa iye bolamız. Biraqta, bunday etip jazıwdın' za'ru'rılgı joq. Sebebi xarakterlik noqatlardan funktsiyanın' da'slepki ko'rınisinen tabıw an'sat boladı.

1)  $y = 0$  bolg'anda  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x$  ko'sheri menen kesilisetug'ın (5;0) h'a'm (-1;0) noqatlarg'a iye bolamız. Keyingi izertlewdi qa'dingishe ju'rgizemiz.

2) Parabola ko'sherinin' abstsissası

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Parabolanın' to'besinin' ordinatası

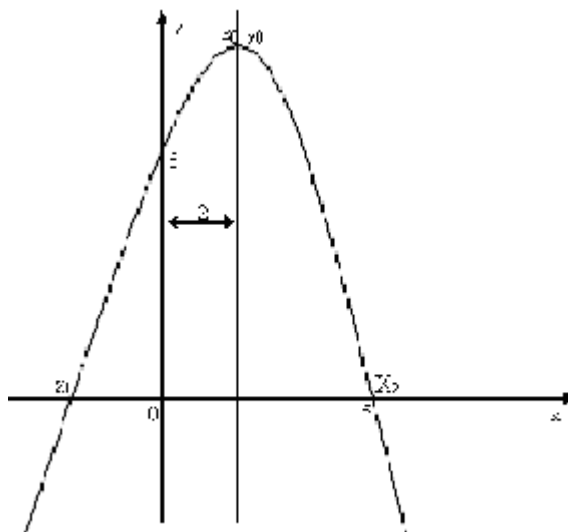
$$y_0 = (5 - x_0)(x_0 + 1) = (5 - 2)(2 + 1) = 9$$

3)  $y$  ko'sheri menen kesilisiw noqatı

$$x = 0; \quad y = (5 - 0)(0 + 1) = 5; \quad (0; 5) \text{ noqatı.}$$

Tekseriw noqatı:

$$x = 5,5; \quad y = (5 - 5,5)(5,5 + 1) = -3,25; \quad (5,5; -3,25) \text{ noqatı.}$$



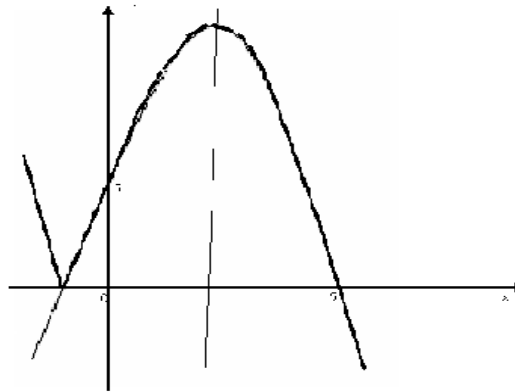
7.  $y = (5 - x)|x + 1|$ .

Funktsiya ekige bo'linedi.

1)  $x+1 \geq 0$  bolg'anda, yag'ınıy  $x \geq -1$  bolg'anda  $y = (5-x)(x+1)$ . Bul funksiyanın' grafigin burın bizler ko'rdik (6-mısal). 11-sızılmadag'ı grafikti jasaymız. Biraq onın'  $x \geq -1$  bo'legin tutas sızıqta, al basqa bo'legin shtrix sızıqta jasaymız.

2)  $x+1 \leq 0$  bolg'anda, yag'ınıy  $x \leq -1$  bolg'anda  $y = (5-x)(x+1)$  yamasa  $y = (x+5)(x+1)$ . Absolyut shaması boyınsha bul parabolanın' ordinatası, birinshi  $y = (5-x)(x+1)$  parabolanın' ordinatasının' belgisi boyınsha qarama-qarsısına ten' ekenligin bayqawg'a boladı.

Sonlıqtan, onı izertlemey-aq,  $x \leq -1$  bolg'anda birinshi parabolanın' ordinatasın keri belgi menen grafikte belgileymiz. Yag'ınıy birinshi parabola grafiginin' shtrixlang'an bo'leginin' aynalıq sa'wlelendiriwın jasaymız.



12-sızılma

Tekseriw noqatları:

$$x = -1,5; \quad y = (5+1,5)(-1,5+1) = 6,5 \cdot 0,5 = 3,25; \quad (-1,5; 3,25) \text{ noqatı.}$$

8.  $y = (5-|x|)(x+1)$

Funktsiya ekige ajraladı.

a)  $x \geq 0$  bolg'anda  $y = (5-x)(x+1)$ . Bul funksiyanın' grafigi 6-mısalda qaralg'an.  $x \geq 0$  bolg'anda bul grafiktin' bo'legin tutas sızıqta, al qalg'an bo'legin shtrix sızıqta jasaymız.

b)  $x \leq 0$  bolg'anda  $|x| = -x$ ;  $y = (5+x)(x+1)$  bul parabolanın' shaqası joqarig'a qarag'an.

1)  $y = 0$  bolg'anda  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -1$

2) Parabolanın' to'besinin' abstsissası:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3.$$

Parabolanın' to'besinin' ordinatası:

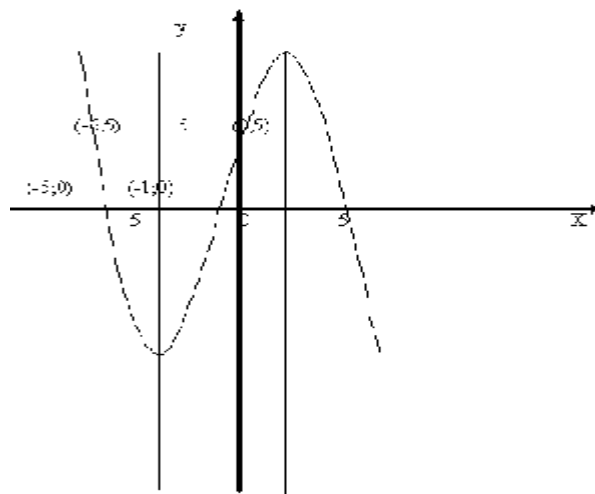
$$y_0 = (5-3)(-3+1) = -4.$$

3)  $x=0$  bolg'anda  $y = 5 \cdot 1 = 5$ ;  $(0; 5)$  noqatı.

Bul noqat parabolanın'  $y$  ko'sheri menen kesilisiw h'a'm birinshi parabola menen ulıwma noqat.

Tekseriw noqatı:

$$x = -6; \quad y = (5-|6|)(-6+1) = -1(-5) = 5; \quad (-6; 5) \text{ noqatı.}$$



13-sızılma

9.  $y = (5 - |x|)(|x| + 1)$

Berilgen funktsiya juv funktsiya. Sebebi

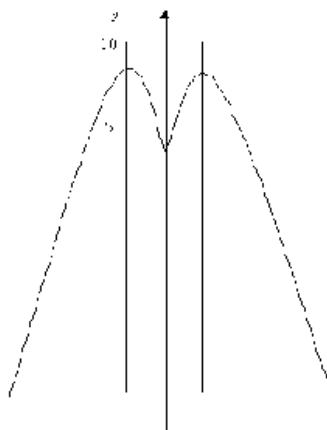
$$f(-x) = (5 - |-x|)(|-x| + 1) = (5 - |x|)(|x| + 1) = f(x).$$

Sonin' ushin,  $x \geq 0$  bolg'anda da'slep grafiktin' on' jag'in jasaymiz.

Bul jag'dayda berilgen funktsiyani

$$y = (5 - x)(x + 1)$$

tu'rinde jazıwg'a boladı. Bul funktsiyanın' grafigin jasag'annan keyin, grafiktin' shep ta'repi  $y$  ko'sherine salıstırg'anda simmetriyalı jasaladı.



14-sızılma

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an misallar

1.  $y = x|x|$

2.  $y = |2x^2 - 8x + 5|$

3.  $y = |x^2 - 3x + 2|$

4.  $y = -2 + \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$

5.  $y = x^2 + 4$

6.  $y = x^2 + 4x$

7.  $y = -x^2 - 5x + 6$

8.  $y = -x|x|$

9.  $y = |x^2 - 2x + 1|$

10.  $y = (x + 1)^2$

11.  $y = [x^2 + 2x + 1]$

12.  $y = x^2 - 1$

13.  $y = x^2 + 2$

14.  $y = \frac{1}{2}x^2$

$$15. y = (2x-1)^2 + \frac{1}{4}$$

$$16. y = (3x-1)^2 + 2$$

$$17. y = 2x^2 + 5$$

$$18. y = 2x^2 - 5$$

$$19. y = 8x - 2x^2$$

$$20. y = x^2 + 3x + 2$$

$$21. y = -x^2 + 2x - 1$$

$$22. y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$23. y = 2x^2$$

$$24. y = x^2 - x$$

$$25. y = x^2 + 1$$

$$26. y = x^2 - 7$$

$$27. y = x^2 - 5$$

$$28. y = x^2 + 2x - 3$$

$$29. y = 2(x-1)^2 + 3$$

$$30. y = 3x^2 + 12x + 15$$

### §3. Da'rejesi ekiden u'lken bolg'an funktsiyalardın' grafikleri

$$1. y = |x^3| + 1$$

$|-x^3| = |x^3|$  bolsa, onda funktsiyanı

$$y = |x^3| + 1$$

tu'rinde jazıw mu'mkin.

1-usıl.

Berilgen  $y = |x^3|$  funktsiya jup. Onın' grafigi vertikal ko'sherge iye parabola.

Sızılıwı boyınsha  $y = |x^2|$  kvadratlıq funktsiyasına uqsaydı, tek bir qansha qısıq. bul funktsiyanın' grafigin jasadı, keyin gorizonttal ko'sherdi (-1) ko'sheremiz.

2-usıl.

1. Bar bolıw oblastı-  $OX$  ko'sheri.

2. Funktsiyanın' o'zgeriw oblastı-  $1 \leq y < \infty$  yarım interval.

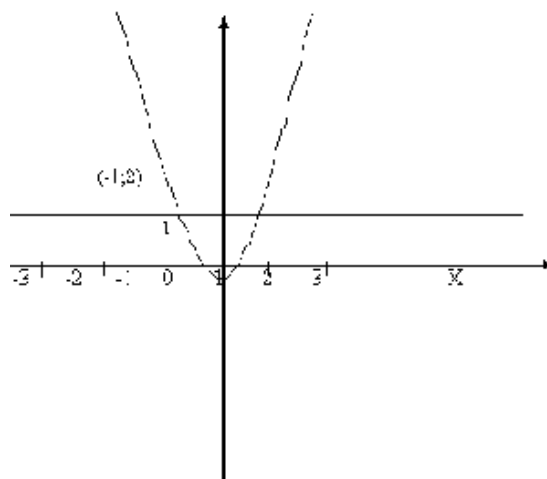
3. Bar bolıw oblastı-  $OX$  ko'sheri

4. Bar bolıw oblastı-  $OX$  ko'sheri

5.  $x_0 = 0$  de  $y = 1$ , parabolanın' to'besi (0;1).

3. X-o'skende (on' yarım tegislikte) U ordinatası abstsissag'a qarag'anda derlik tez o'sedi – kub nızamı boyınsha.

Grafiktin' eki usılda jasalıwına qaramastan, onın' durıslıg'ın tekseriw ushın qosımsha tekseriw tochkası (-1;2) esaplanadı.



15-sızılma

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an mısallar

1.  $y = |x^3| - 1$

7.  $y = \frac{1}{x^3}$

2.  $y = (x^2 + 2x - 3)^2$

8.  $y = \frac{1}{x^4}$

3.  $y = (x^2 - 4x + 3)^2$

9.  $y = x^3$

4.  $y = \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^3$

10.  $y = x^4$

5.  $y = x^2 - x^4$

11.  $y = |x^3| - 3$

6.  $y = x^3 - 9x$

### §4. Bo'lshek da'rejeli funktsiyalardın' grafigi

1.  $y = 3 - \sqrt{1 - 2x}$

**1-usıl.**

Funktsiyanı sonday etip tu'rlendiremiz, x argumentke qosımsha ajralıp tursın.

$$y = 3 - \sqrt{2\left(\frac{1}{2} - x\right)} = 3 - \sqrt{2\left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]} = 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{-(x - 0,5)} + 3$$

Berilgen funktsiya:  $y = -\sqrt{-x}$ . Bul funktsiya ushın bar bolıw oblastı  $(-\infty; 0)$  yag'nıy shep yarım ko'sher. Funktsiyanın' o'zgeriw oblastı  $y \leq 0$ , sebebi radikaldın' belgisi minus.

Solay etip, funktsiyanın' grafigi u'shinshi sherekte jaylasqan. Ol  $y = \sqrt{x}$  grafigine qıya simmetriyalı. Sızılma 1 de berilgen funktsiya shtrix sızıg'ında ko'rsetilgen.

Keyin, u- ko'sheri argumentke qosılğ'an shamag'a jılastırıladı. Yag'nıy  $(-0; 5)$  h'a'm alıng'an  $\sqrt{-(x - 0,5)}$  funktsiyanın' grafigi  $\sqrt{2} \approx 1,4$  ma'rtebe sozıladı.



## §5. Bo'lshek-sızıqlı funksiyanın' grafigi

Eki qısqarmaytug'ın putin-ratsional funksiyanın' (ko'pag'zalınnı') qatnasınan du'zilgen

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

Funktsiya bo'lshek ratsional funksiya dep ataladı. Bo'lshek-ratsional funksiya

$$X = R \setminus \{x: x \in R, Q_m(x) = b_0x\}$$

ko'plikte, yag'nıy bo'limi no'lge aylandırıwshı tochkalardan o'zgeshe bolg'an barlıq h'aqıyqıy sanlardan ibarat bog'an ko'plikke ayıladı.

Bo'lshek-sızıqlı funksiya-bul  $y = \frac{ax + e}{cx + d}$  tu'rindegi algebralıq bo'lshek, onın' alımı h'a'm bo'limi sızıqlı funksiya dan turadı.

Barlıq bo'lshek-sızıqlı funksiyanın' pu'tin bo'legin ajratıwg'a boladı. Mısalı:

$$y = \frac{3-2x}{1-x} = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{(2x-2)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$

Bo'lshek-sızıqlı funksiyanın' grafigin tikkeley izzertlew usılı arqalı jasaw mu'mkin. Sonday-aq, jasalma usıldı qollanıp, funksiyanı aldın ala tu'rlendirilip, keyin grafigi jasaladı.

$$1. y = \frac{2}{|1+x|} = \left| \frac{2}{1+x} \right|$$

**1-usıl.**

$y = \frac{1}{|x|}$  funksiyanın' grafigi shtrix sızıg'ı menen sızıladı. Keyin, u ko'sheri (+1) ge jılıydı, bunnan son' grafik vertikal bag'ıtı boyınsha eki ese sozıladı.

**2-usıl.**

1. Funktsiyanın' bar bolıw oblastı  $x \neq -1$  sha'rtinen anıqlanadı;  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; +\infty)$  intervalg'a iye bolamız.  $x = -1$  tuwrısı vertikal asimtota boladı.

Funktsiyanın' o'zgeriwi:

a)  $y \geq 0$  modul retinde.

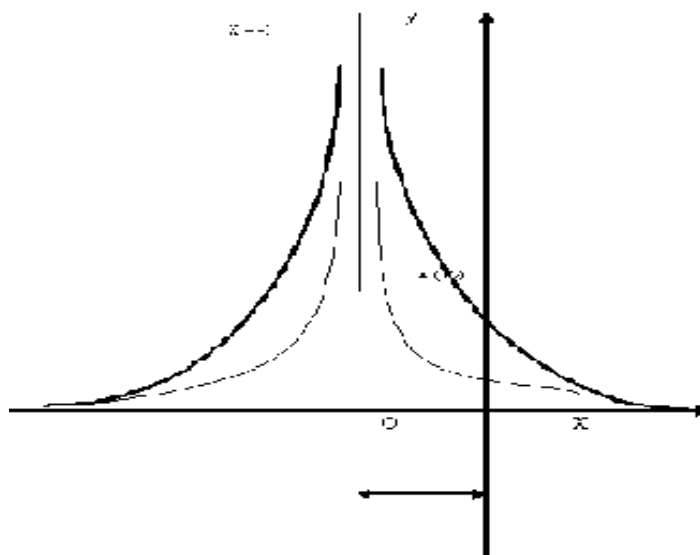
b)  $y \neq 0$   $y \rightarrow 0$   $y \rightarrow \infty$  bolg'anda sha'rtlerinde shegaralang'an.

Bunnan  $y > 0$  yag'nıy funksiya yarım tegisliktin' joqarısında jaylasqan  $y \rightarrow 0$  de  $x \rightarrow \pm\infty$  yag'nıy X ko'sheri gorizantal asimtota boladı.

2. Funktsiyanın' grafigi u ko'sheri menen  $x=0$  de  $u=2$  yag'nıy  $A(0;2)$  tochkada kesisedi.

3. Anıqlaw h'a'm tekseriw ushın ja'ne bir tochkani esaplaymız. Mısalı  $x=-3$  te

$$y = \frac{3}{|1-3|} = 1; (-3;1) \text{ tochka.}$$



17-sızılma

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an misallar

$$1. y = \frac{2}{x-3}$$

$$2. y = \frac{5}{2-x}$$

$$3. y = 1 + \frac{1}{x}$$

$$4. y = -3 + \frac{x}{2}$$

$$5. y = \frac{3x+2}{3-x}$$

$$6. y = \frac{3x+2}{3-x}$$

$$7. y = \frac{x^2-2x}{x^2+x+1}$$

$$8. y = \frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$$

$$9. y = \frac{x^2-5x+6}{x-4}$$

$$10. y = \frac{1}{9-x^2}$$

$$11. y = \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-2}$$

### §6. Ko'rsetkishli funktsiyanin' grafigi

Aniqlama. Ko'rsetkishli yamasa eksponentsial (latinsha “eksponent”-“ko'rsetkish”) funktsiya dep,  $y = a^x$  ko'rinisidagi funktsiya aytiladi, bunda  $a > 0, a \neq 1$ ,  $x$ -erikli o'zgeriwshi.

Ko'rsetkishli funktsiya ilimde h'a'm texnikada u'lken a'h'miyetke iye. Tabiyatga ko'p qubulislarda  $y = a^x$  ko'rinistegi funktsiya ja'rdeminde aniqlaw mu'mkin.

Ko'rsetkishli funktsiya to'mendegi qa'siyetlerge iye.

1<sup>o</sup>. Ko'rsetkishli funktsiyanin' aniqlanw oblasti barliq h'aqiyqiy sanlar ko'pliginen ibarat:  $D(a^x) = R^1$ .

2<sup>o</sup>. Ko'rsetkishli funktsiyanin' o'zgeriw oblasti:  $E(f)(0; +\infty) = R_+^1$  den ibarat.

3<sup>o</sup>. Funktsiya  $a > 1$  bolg'anda  $a^x$  funktsiya aniqlanw oblastida o'siwshi,  $0 < a < 1$  bolg'anda bolsa kemeyiwshi.

4<sup>o</sup>  $a > 1$  bolsin. Bul jag'dayda  $x > 0$  bolg'anda  $a^x > 1$ ,  $x < 0$  bolg'anda  $a^x < 1$ .

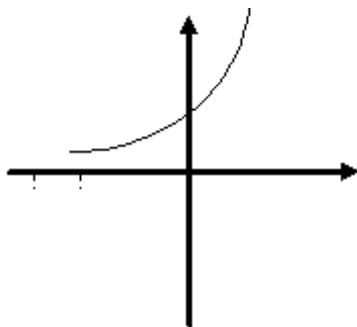
5<sup>o</sup>.  $0 < a < 1$  bosin. Bul jag'dayda  $x > 0$  bolg'anda,  $a^x < 1$ ,  $x < 0$  bolsa  $a^x > 1$ .

6<sup>o</sup>. Eger  $a > 1$  bolsa, onda  $x \rightarrow +\infty$  de  $a^x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  de bolsa  $a^x \rightarrow 0$  boladi.

7<sup>o</sup> Eger  $0 < a < 1$  bolsa, onda  $x \rightarrow +\infty$  de  $a^x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$  de bolsa  $a^x \rightarrow -\infty$  boladı.

8<sup>o</sup>.  $y = 0$  tuwrı sızıq  $y = a^x$  funksiya grafiginin' gorizantal asimptotası boladı.

9<sup>o</sup>. Ko'rsetkishli funksiyanın' grafigi anıqlanıw oblastında oyıs boladı.  $y = a^x$  h'a'm  $y = a^{-x}$  funksiyanınn' grfikleri to'mendegishe boladı.



18-sızılma

1.  $y = 3^{|x+1|}$  grafigin jasan'.

**1-usıl.**

Berilgen funksiya  $y = 3^{|x|}$ . u-ko'sheri (+1) ko'shiriledi.

**2-usıl.**

1. Anıqlanıw oblastı:  $(-\infty; \infty)$ ;

Funktsiyanın' o'zgeriw intervalı

$$(x+1) > 0$$

$$1 \leq y < \infty$$

$$y \geq 3^0, y \geq 1$$

2. Funktsiyanın' ulıwma ko'rinisi, eki shaqadan turadı:

a)  $|x+1| \geq 0$  de  $y = 3^{x+1}$

b)  $|x+1| \leq 0$  de  $y = 3^{-(x+1)}$  yamasa  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

Ulıwma tochka:  $|x+1| = 0$  de  $x+1 = 0$ ;  $x = -1$ ;  $y = 3^{-1+1} = 3^0 = 1$ ; A(-1;1) tochka.

3. u-ko'sheri menen kesilisiwshi tochka:

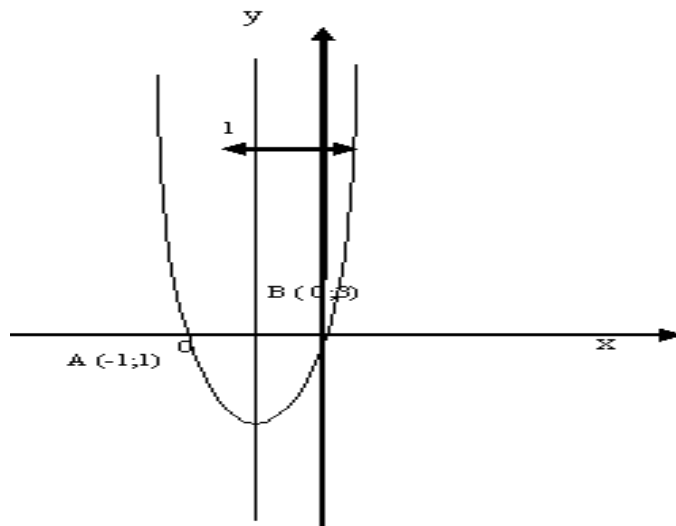
$$x=0; y=3^1=3; V(0;3) \text{ tochka}$$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3^{|x+1|} = \infty$

$x+1 > 0$  de  $u = 3^{x+1}$  funksiya o'siwshi.

$x+1 < 0$  de  $u = 3^{-(x+1)}$  funksiya kemiwshi.

Argumenttin' o'siwine qarag'anda, funksiyanın' o'siwi h'a'm kemeyiwi tezirek boladı.



19-sizilma

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an misallar

$$1. y = e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$2. y = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$3. y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2}$$

$$4. y = 2^{\sin x}$$

$$5. y = 3^x$$

$$6. y = 2^{|x|}$$

$$7. y = 5^x$$

$$8. y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$9. y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$10. y = 2^x$$

$$11. y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$12. y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

### §7. Logarifmlik funktsiyanin' grafigi

Aniqlama.  $y = a^x$  ko'rsetkishli funktsiyang'a keri bolg'an funktsiya  $a$  tiykarli logarifmlik funktsiya dep ataladi h'a'm  $y = \log_a x$  dep belgilenedi. ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

Bizge belgili,  $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$  bolip, bunda  $a^{\log_a x} = x$ .

Nol ja'ne teris sanlardin' logarifmleri joq:

1<sup>0</sup>. Onin' aniqlaniv oblasti barliq on' sanlar ko'pliginen ibarat:

$$D(\log_a)x = R_+^1 = (0; +\infty).$$

2<sup>0</sup>. Onin' ma'nisler ko'pligi barliq h'aqiyqiy sanlar ko'pliginen ibarat:  $E(\log_a)x = R^1$ .

3<sup>0</sup>. Funktsiya  $a > 1$  bolg'anda, o'siwshi,  $0 < a < 1$  bolg'anda bolsa kemeyiushi.

4<sup>0</sup>  $a > 1$  bolsin. ul jag'dayda  $x > 1$  bolg'anda  $\log_a x > 0$  ten'sizlik,  $0 < x < 1$  bolg'anda bolsa  $\log_a x < 0$  ten'sizlik orinli (yag'nuy  $x > 1$  bolsa, funktsiyanin' grafigi Ox ko'sherinen joqarida,  $0 < x < 1$  bolsa, kerisinshe, Ox ko'sherinen to'mende joylasadi).

5<sup>0</sup>.  $0 < a < 1$  bosin. Bul jag'dayda  $x > 1$  bolg'anda,  $\log_a x < 0$  ten'sizlik,  $0 < x < 1$  bolsa  $\log_a x > 0$  ten'sizlik orinli (yag'nuy  $x > 1$  bolsa, funktsiyanin' grafigi Ox ko'sherinen joqarida jaylasadi).

6<sup>0</sup>. Eger  $a > 1$  bolsa,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty$  qatnaslari orinli boladi.

7<sup>0</sup>. Eger  $0 < a < 1$  bolsa,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = +\infty$  qatnaslari orinli boladi.

8<sup>0</sup>. Eger  $a > 1$  bolsa, funktsiyanin' grafigi do'n'es,  $0 < x < 1$  bolg'anda oyis boladi.

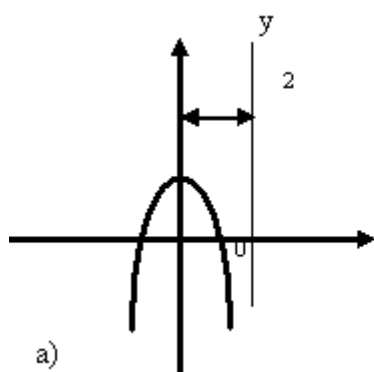
Logarifmlik funktsiyanin' grafigi (1;0) tochkadan o'tip, ordinitalar ko'sherine asimptotikalik tu'rde jaqinlasadi.  $x = 0$  tuwri sızıq (Ou ko'sheri), funktsiya grafigine vertikal asimptota boladi.

$y = \log_a x$  logarifmlik funktsiya  $y = a^x$  ko'rsetkishli funktsiyag'a keri funktsiya bolg'anlig'ınan onin' grfigi ko'rsetkishli funktsiyanin' grfigine (olar birdey tikarlı bolg'anda) birinshi h'a'm u'shinshi shirek bissektisasına baylanisli simmetriyalıq boladi.

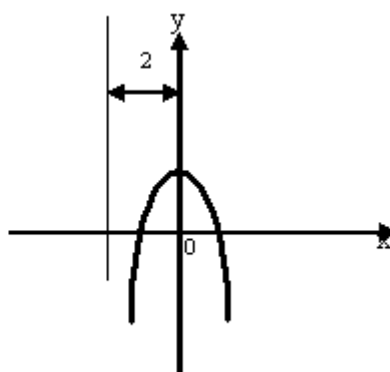
Anıqlama. Tiykari 10 bolg'an logarifm onlıq logarifm dep ataladı h'a'm ol "lg" belgisi arqalı jazıladı, yag'nuy  $y = \log_{10} x = \lg x$ .

Anıqlama. Tiykari " $e = 2,71$ " bolg'an logarifm natural logarifm dep ataladı h'a'm ol "ln" belgisi arqalı jazıladı, yag'nuy  $y = \log_e x = \ln x$

Mısallar. 1.  $y = \log_2(2 - |x|)$

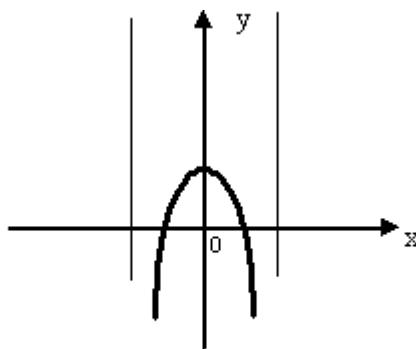


a)



b)

20-sızılma



B)

21-sızılma

Funktsiya jup bolg'anlıqtan, da'slep bir shaqası jasaladı, keyin ekinshiis og'an simmetriyalı boladı.

1-usıl.

$x \geq 0$  bolg'anda  $y = \log_2(2-x)$ . Bul an'latpanı sonday etip tu'rlendiremiz, argument on' belgige iye bolatug'ınday:

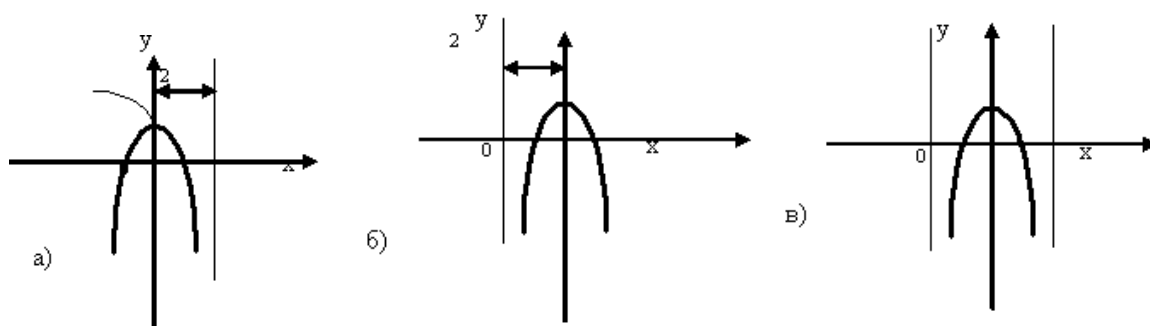
$$y = \log_2[-(x-2)]$$

Berilgen  $y = \log_2(-x)$  funktsiyanın' grafigin jasaymız. Keyin u-ko'sherin (-2) jılıtımız. Bunnan son' bul grafiktin' shep bo'legin o'shiremiz. Na'tiyjede grafiktin' on' shaqasına iye bolamız h'a'm onı u-ko'sherine salıstırg'anda simmetriyalı ko'shirip shep shaqasın jasaymız.

Da'slep grafiktin'  $x \leq 0$  bolg'anda shep shaqasın jasaw jen'il. Ol ushın funktsiyanı to'mendegishe tu'rlendiremiz.

$$y = \log_2[2-(-x)]; y = \log_2(2+x)$$

Bul jag'dayda berilgen grafik a'piwayı boladı:  $u = \lg x$ .



U ko'sheri (+2) jılıtıladı. Bunnan keyin (shtrixlang'an) grafiktin' on' bo'legi o'shiriledi h'a'm grafiktin' shep bo'legine simmetriyalı iymek penen awmastırıladı.

## 2-usıl.

1. Funktsiyanın' anıqlanıw oblastı  $2 - |x| > 0$  sha'rtinen anıqlanadı yag'nıy

$$\begin{aligned} x \geq 0 \text{ de } 2-x > 0; \quad x < 2 \\ x \leq 0 \text{ de } 2+x > 0; \quad x > -2 \text{ (-2;2) interval} \end{aligned}$$

2. Funktsiya jup.

3. Xarakterli tochkalar:

a) X ko'sheri menen kesilisiw tochkası:  $u=0$  de yag'nıy  $\log_2(2-|x|)=0$  yamasa  $2-|x|=1; |x|=1; x=\pm 1$ ; on' shaqa ushın A(1;0) tochkag'a iye bolamız.

b) U ko'sheri menen kesilisiw tochkası:  $x=0$  de  $y = \log_2(2-0) = \log_2 2 = 1$ ; V(0;1) tochka.

v)  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} (2-x) = -\infty$ ;  $x=2$  tuwrı (sonday-aq  $x=-2$  shep shaqa) vertikal asimptota boladı.

## O'z betinshe sheshiuge arnalg'an misallar

1.  $y = \lg(1+x^2)$

2.  $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$

3.  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$

4.  $y = \log_3(x^2 + 3)$

5.  $y = \log_4 x$

6.  $y = \log_5 x$

7.  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

8.  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

9.  $y = \log_3 x$

10.  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

$$11. y = \lg|x|$$

$$12. y = \log_{\frac{1}{10}}|x|$$

$$13. y = |\log_4 x|$$

$$14. y = \left| \log_{\frac{1}{4}} x \right|$$

## §8. Trigonometriyalıq funksiyanın' grafigi

Anıqlama. Tuwrı mu'yeshli u'shmu'yeshlikte su'yir mu'yesh qarsısında jatqan katettin' gipotenuzag'a qatnası sol su'yir mu'yeshtin' sinusı dep ataladı h'a'm ol  $\sin \alpha = \frac{CB}{AB}$  dep belgilenedi.

Anıqlama. Tuwrı mu'yeshli u'shmu'yeshlikte su'yir mu'yeshke qon'sı katetinin' gipotenuzag'a qatnası, sol su'yir mu'yeshtin' kosinusı dep ataladı h'a'm ol  $\cos \alpha = \frac{CA}{AB}$  dep belgilenedi.

Anıqlama. Tuwrı mu'yeshli u'shmu'yeshlikte su'yir mu'yeshke qarsısında jatqan katettinin' su'yir mu'yeshke qon'sı katetine qatnası sol su'yir mu'yeshtin' tangenisi dep ataladı h'a'm ol  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$  dep belgilenedi.

Anıqlama. Tuwrı mu'yeshli u'shmu'yeshlikte su'yir mu'yeshke qon'sı katetinin' mu'yesh qarsısında jatqan katettine qatnası sol su'yir mu'yeshtin' katangensi dep ataladı h'a'm ol  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC}$  dep belgilenedi.

$$1. y = 2 - \sin \left| x + \frac{\pi}{3} \right| \text{ funksiyanın' grafigin jasan'}$$

**1-usıl.**

Funktsiyanı

$$y = -\sin \left| x + \frac{\pi}{3} \right| + 2$$

tu'rinde jazamız.

Berilgen  $y = -\sin|x|$  funksiyanın' grafigin jasaymız.

U ko'sherin  $(+\frac{\pi}{3})$  ko'shiremiz, al X-ko'sherin  $(-2)$ .

**2-usıl.**

Grafigin eki shaqag'a iye h'a'm onın' ten'lemeleri h'a'r qıylı.

$$1) x + \frac{\pi}{3} \geq 0 \text{ de yag'nıy } x \geq -\frac{\pi}{3} \text{ de } y = -\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 2;$$

$$2) x + \frac{\pi}{3} \leq 0 \text{ de yag'nıy } x \leq -\frac{\pi}{3} \text{ de } y = -\sin \left[ -\left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 2$$

Yamasa

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 2$$

1. Anıqlanıw oblastı:  $(-\infty; \infty)$

Funktsiyanın' o'zgeriw intervalın

$$-1 \leq -\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

sha'rtinen anıqlaymız.

2. Funktsiya taq h'a'm jup qa'siyetlerge iye.

Funktsiya  $2\pi$  periodqa iye.

3. Grafiktin' eki shaqası ushın ulıwma tochka.

$$x = -\frac{\pi}{3}; \quad y = -\sin|0| + 2 = 2; \quad \left(-\frac{\pi}{3}; 2\right) \text{ tochka.}$$

4. Grafiktin' on' shaqasının' bir periodı ushın basqa xarakterlik tochkaları:

$$1) x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}; \quad y = -\sin \frac{\pi}{2} + 2 = -1 + 2 = 1; \quad \left(\frac{\pi}{6}; 1\right) \text{ tochkası.}$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}; \quad y = -\sin \pi + 2 = 2; \quad \left(\frac{2\pi}{3}; 2\right).$$

$$3) x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = 1\frac{1}{6}\pi; \quad y = -\sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1 + 2 = 3; \quad \left(1\frac{1}{6}\pi; 3\right);$$

$$4) x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = 1\frac{2}{3}\pi; \quad y = 2; \quad \left(1\frac{2}{3}\pi; 2\right) \text{ tochkası.}$$

4a. Grafiktin' shep shaqasının' bir period ushın basqa xarakterlik tochkaları.

$$1) x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}; \quad x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}; \quad y = \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1; \quad \left(-\frac{5\pi}{6}; 1\right)$$

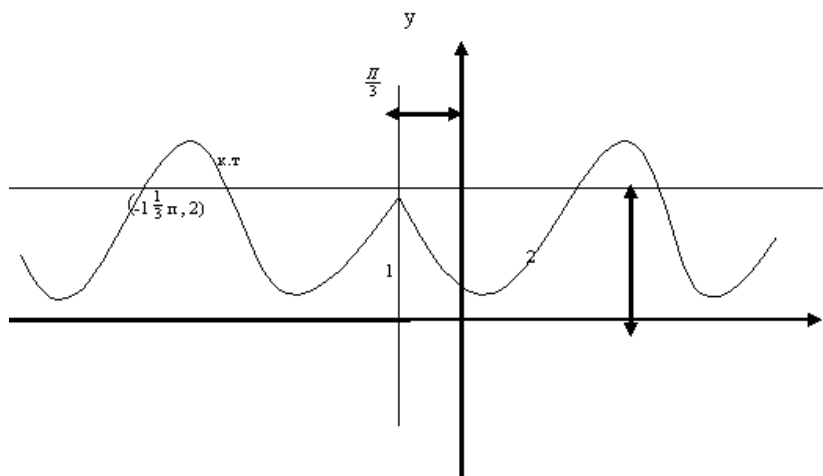
tochkası.

$$2) x = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -1\frac{1}{3}\pi; \quad y = \sin(-\pi) + 2 = 2; \quad \left(-1\frac{1}{3}\pi; 2\right) \text{ tochkası.}$$

$$3) x = -1\frac{1}{3}\pi - \frac{\pi}{2} = -1\frac{5}{6}\pi; \quad y = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 3; \quad \left(-1\frac{5}{6}\pi; 3\right) \text{ tochkası.}$$

$$4) x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -2\frac{1}{3}\pi; \quad y = 2; \quad \left(-2\frac{1}{3}\pi; 2\right) \text{ tochkası.}$$

Bul alıng'an tochkalar arqalı funktsiyanın' grafigin jasaw qıyın emes.



2 – sızılma.

### O'z betinshe sheshiuge arналg'an misallar

$$1. \quad y = \ln \cos x + \cos x$$

$$2. \quad y = \lg(\operatorname{tg} x)$$

$$3. \quad y = \sin|x|$$

$$4. \quad y = |\sin x|$$

$$5. \quad y = \cos|x|$$

$$6. \quad y = |\cos x|$$

$$7. \quad y = \operatorname{tg}|x|$$

$$8. \quad y = |\operatorname{tg} x|$$

### §9. Keri trigonometriyalıq funktsiyanın' grafigi

$$1. y = 2 \arcsin|x + 0,5| - \frac{\pi}{2}$$

1-usıl.

Berilgen  $y = \arcsin|x|$  funktsiyanın' grafigi U - ko'sheri boyınsha 2 ma'rtebe sozıladı. Keyin U - ko'sheri (+0,5) jılıyadı, al X - ko'sheri ( $\frac{\pi}{2}$ ).

2-usıl.

1. Funktsiyanın' anıqlanıw oblastı  $-1 \leq x + 0,5 \leq 1$  bunnan  $-1,5 \leq x \leq 0,5$

2. Funktsiyanın' o'zgeriw oblastı  $0 \leq \arcsin|x + 0,5| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{sha'rtinen tabıladı.}$$

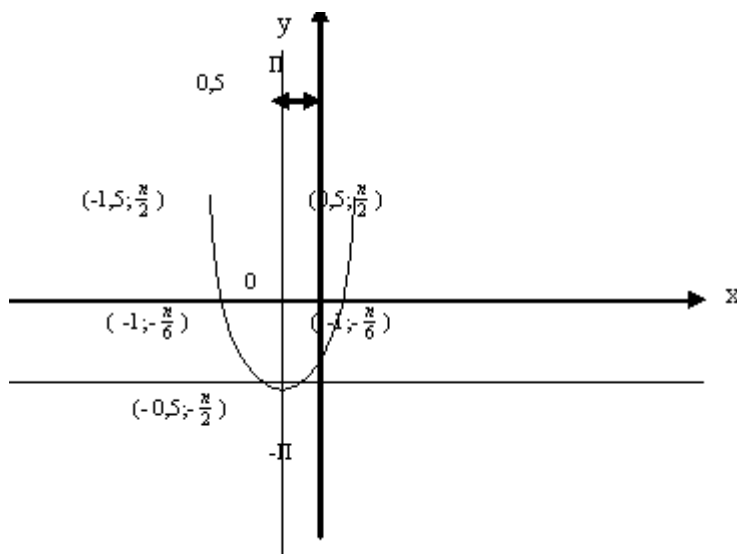
3. Ulıwma ko'rinistegi funktsiya.

4. Xarakterlik tochkalar.

a) Shegaralıq ma'nisler:  $x = -1,5$ ;  $y = 2 \arcsin|-1| - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ;  $(-1,5; \frac{\pi}{2})$  tochkası.

b) Aralıq tochkaları:  $x = -1$ ;  $y = 2 \arcsin|-0,5| - \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$ ;  $(-1; -\frac{\pi}{6})$

tochkası.



23 – sızılma

$x = -0,5$ ;  $y = 2 \arcsin 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ ;  $(-0,5; -\frac{\pi}{2})$  tochkası.

$x = 0$ ;  $y = 2 \arcsin|0,5| - \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$ ;  $(0; -\frac{\pi}{6})$  tochkası.

### O'z betinshe sheshiwge arnalg'an mısallar

$$1. y = \ln(\arctg x)$$

$$2. y = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$5. y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$3. y = \arccos 2x$$

$$4. y = \arctg(\ctg x)$$

$$6. y = \arctg(\ctg x)$$

$$7. y = \sin(\arcsin x)$$

$$9. y = |\arcsin x|$$

$$11. y = |\arccos x|$$

$$13. y = |\operatorname{arcctg} x|$$

$$15. y = \operatorname{arcctg}|x|$$

$$8. y = \arcsin|x|$$

$$10. y = \arccos|x|$$

$$12. y = |\operatorname{arctg} x|$$

$$14. y = \operatorname{arctg}|x|$$

### **Juwmaqlaw**

Akademiyalıq litsey h'a'm ka'sip-o'ner kolledjlerinde matematika sabag'ında funksiyalardıń grafigin jasawdı teren'irek u'yretiw, alg'an bilimin h'a'm qa'liplestirgen uqıplılıg'ın bekkemlew- bul aktual ma'selelerdin' biri bolıp esaplanadı. Sol sebepli, bul metodikalıq qollanbanın' tiykarg'ı maqseti funksiyanın' grafigin jasawda, onı izertlew ta'rtibin u'yretiw metodikası menen baylanıslı. Sonın' ushında, bunda to'mendegi jumıslar islendi:

- funksiyanın' ulıwma qa'siyetlerine arnalg'an bolıp, bunda funksiyanın' anıqlanıw oblasti, o'zgeriw shegaraları, juplıg'ı, taqlıg'ı, simmetriyalılıg'ı, periodlılıg'ı ma'seleleri h'a'm olarg'a mısallar, o'z-betinshe jumıslardı orınlaw ushın tapsırmalar keltirilgen.

- funksiyanın' xarakterlik tochkaları bolg'an, koordinat ko'sherleri menen kesisiw tochkaların, funksiyanın' shegaralıq ma'nislerin, maksimumg'a h'a'm minimumg'a iye tochkalardı tabıw, olarg'a mısallar h'a'm o'z-betinshe jumıslardı orınlaw ushın tapsırmalar qaralg'an.

- funksiyanın' ulıwma qa'siyetlerin izertlew, funksiyanın' xarakterli tochkaların tabıw h'a'm onı grafikke tu'siriw, funksiyanın' grafiginin' xarakterin h'a'r tu'rli aralıqlarda izertlew, funksiyanın' ma'nisin bir h'a'm eki tochkada tekseriw ma'seleleri qaralg'an.

Ulıwmalastırıp aytqanıımızda, bul jumıs mazmunı boyınsha metodikalıq xarakterge iye bolıp, onı usı bag'dardag'ı shug'ıllanıwshılar ushın metodikalıq qural iretinde paydalanıwına boladı.

### **A'debiyatlar**

1. Kramer V.S. Povtoryaem i sistematizituem shkolny kurs algebr i nachal analiza. M., Nauka, 1990.
2. Umirbekov A.U., Shaabazov Sh.Sh. Matematikani takrorlang. T., 1989.
3. Virchenko N. A., Lyashko I. I., Shvetsov K. I. Grafik funktsii: Spravochnik. Kiev, «Nauka» 1989
4. Tolipov A. Elementar funktsiyalar T., 1992
5. I.P.Gurskiy. Funktsii i postroenie grafikov. M. 1961
6. I.X.Sivashinskiy. Elementarne funktsii i grafiki. M. 1965

## MAZMUNI

|                                                                     |                                 |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| KIRISIW .....                                                       | ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА. |
| §1. Sızıqlı funksiyanın' grafigi. ....                              | 4                               |
| §2. Kvadrat funksiyanın' grafigi .....                              | 5                               |
| §3. Da'rejesi ekiden u'lken bolg'an funksiylardıń' grafikleri ..... | 17                              |
| §4. Bo'lshek da'rejeli funksiylardıń' grafigi .....                 | 18                              |
| §5. Bo'lshek-sızıqlı funksiyanın' grafigi .....                     | 20                              |
| §6. Ko'rsetkishli funksiyanın' grafigi .....                        | 21                              |
| §7. Logarifmlik funksiyanın' grafigi .....                          | 23                              |
| §8. Trigonometriyalıq funksiyanın' grafigi .....                    | 26                              |
| §9. Keri trigonometriyalıq funksiyanın' grafigi.....                | 28                              |
| Juwmaqlaw .....                                                     | 30                              |
| A'DEBIYATLAR .....                                                  | 31                              |

M. Qasimov, A. Xalqanazarov, R. Gaypova. Funktsiyalardın' grafiklerin jasawdı u'yretiw metodikası.  
(metodikalıq qollanba).

**K. Ubaydullaev atındag'ı RPKQT h'a'm QAI baspası.**  
**Ko'lemi: 2 b.t. Tirajı: 100.**  
**No'kis qalası . E. Alako'z ko'shesi 54.**