

ÓZBEKISTAN RESPUBLİKASI
XALÍQ BİLIMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ

ÁJINIYAZ atındagı NÓKIS MÁMLEKETLİK
PEDAGOGİKALÍQ INSTITUTÍ

A.Matekov, B.Yavidov

KEÑISLİK TUWÍNDÍLARÍNÍN SFERALÍQ HÁM CİLİNDRLİK
KOORDİNATALARDA JAZÍLÍWÍ
(oqıw-metodikalıq qollanba)

NÓKIS-2016

Dúziwshiler: A.Matekov, B.Yavidov

Oqıw-metodikalıq qollanbada oqıwshılargá iymek sıızıqlı koordinatalar, olarda keńislik tuwındılarınıń jazılıwı, bir sistemadan Ekinshi sistemaǵa ótiw sıyaqlı teoriyalıq bilimler berilgen. Gradient, divergenciya hám rotorlardıń Dekart, Sferalıq hám Cilindrlık koordinatalarda jazılıwı keltiriledi. Teoriyalıq fizika kursınıń “Kvant mexanikası” bóliminde ótiletuǵın “Háreket muǵdarı momenti operatorı” teması boyınsha orbital moment operatorlarınıń Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq hám Cilindrlık koordinatalar sistemasına ótkeriliwi qolaylı berilgen. Ámeliy máseleler sheshiw metodikası bayan etilgen.

JUWAPLÍ REDAKTOR:

A.Kamalov - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı Fizika oqıtıw metodikasi kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleriniń doktorı, docent.

PIKİR BILDİRİWSHILER:

J.Jañabergenov - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı Fizika oqıtıw metodikasi kafedrası docentı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatu

M.Ermamatov - Ózbekistan İlimler Akademiyası Yadro fizikası institutı úlken ilimiy xizmetkeri, fizika-matematika ilimleriniń kandidatu.

Kirisiw

Teoriyalıq fizika kursında operatorlar algebrasına tiyisli temalarda, mäselen [1] ádebiyattıń XII bap § 2.11 Orbital mexanik moment operatorınıń Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalarda sistemasına ótkeriliwi tolıq emes hám belgilewlerde aljasıwǵa jol qoyılǵan. Davidov avtorlıǵındaǵı kvant mexanikası oqıw qollanbası [2] tıń II bap 16 § ta Iymek sızıqlı koordinatalar sisteması haqqında qısqasha maǵlıwmat berilgen hám Laplas operatorınıń Dekart koordinatalar sisteması hám Sferalıq koordinatalarda jazılıwı keltirilgen. Usı kitap [2] tıń B.- Matematikalıq qosımshasında orbital mexanikalıq momenti operatorınıń Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalar sistemasına ótiwi berilgen bolsa da, menshikli tuwındılar esaplanıwı keltirilmegen.

Operatorlar menen islew, olardı bir koordinatalıq sistemadan ekinshi koordinatalıq sistemaǵa ótkeriw joqarıda kórsetip ótilgeni sıyaqlı ayırım kemshilikler Teoriyalıq fizika kursın, operatorlar menen baylanıslı temalardı, ózlestiriwlerin, álbette, qıyınlastıradı. Sol sebepli, házirde pedagogikalıq institutlardıń fizika hám astronomiyanı oqıtıw metodikası qánigeligi baǵdarında bilim alıp atırǵan studentler ushın mólsherlep jazılǵan operatorlardıń hár túrli koordinatalar sistemasında jazılıwın bayan etiwshi oqıw-metodikalıq qollanbasınıń jaratılıwı aktual másele esaplanadı. Avtorlar oqıw-metodikalıq qollanba mashqalanı az bolsa da jumsartıwǵa, oqıwshılar ushın paydalı derek boladı degen úmitte.

Oqıw-metodikalıq qollanba quramlılıq jaqtan tómendegishe dúzilgen.

Qollanbanıń 1-, 2-, 3-, 4- hám 5- paragraflarında oqıwshı názerine iymek sızıqlı koordinataları, maydan funkciyasınıń keńislik tuwındıları hám olardıń iymek sızıqlı koordinatalarda menshikli tuwındılar koordinatalar sistemalarda jazılıwı házirde taptırmas derekke aylanǵan [3] tıń oqıw qollanbası boyınsha keltirilgen.

§6 Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalar sistemasına ótiw isletilgen menshikli tuwındılar qanday esaplanıwı tolıq táriyplep berilgen.

§7 Dekart koordinatalar sistemasınan Cilindirlik koordinatalar sistemasına jáne bir (alternativ) usılda ótiw berilgen.

§8 Esaplanǵan menshikli tuwındılardan paydalanıp, orbital mexanikalıq impuls momenti operatorınıń Dekart koordinatalar sistemasındaǵı qurawshıları hám orbital mexanikalıq impuls moment operatorı kvadratınıń Sferalıq hám Cilindrlik koordinatalar sistemasına ótkeriliwi tolıq kórsetilgen.

§9 Teoriyalıq fizika kursınıń elektrodinamika hám kvant mexanikası bólimlerine tiyisli ayırım máseleler shesiliwi berilgen.

Qollanba aqırında juwmaq, qısqasha glossariy hám paydalanılǵan derekler menen juwmaqlanadı.

Qollanba tekstinde isletilgen qısqartpalar.

DKS – Dekart koordinatalar sisteması.

SfKS – Sferalıq koordinatalarda sisteması.

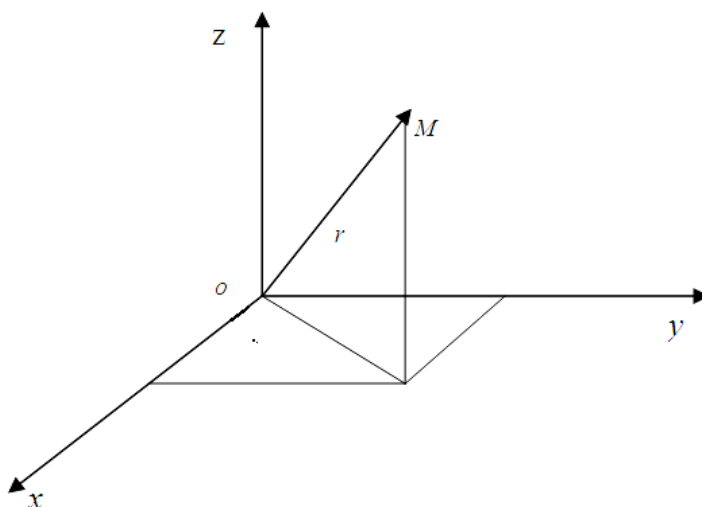
CKS – Cilindrlik koordinatalar sisteması.

§ 1. İymek sızıqlı koordinatalar

Dekart koordinatalar sistemasınıń kósherleri tuwrı sızıq hám óz-ara perpendikulyar, yaǵnıy x, y, z , koordinatalar tuwrı sızıqlı ortogonal koordinatalar. Bul koordinata noqatı radius-vektornıń Dekart komponentleri bolıp tabıladı. (1-súwret):

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.1)$$

Bul jerde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sáykes túrde x, y, z kósherler boyınsha jónelgen birlik ort vektorlar. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Bazı bir máselelerdi tekseriwde noqattı Dekart koordinataları menen anıqlaw artıqsha qolaysızlıq tuwdıradı.



1-súwret. Dekart koordinatalar sisteması.

Keńislik noqatın anıqlaw ushın tekserilip atırǵan máseleń tábiyatına qarap úsh q_1, q_2, q_3 muǵdarlar isletiwge tuwrı keledi. Keńislik noqatın anıqlawshı q_1, q_2, q_3 muǵdarlar noqattıń iymek sızıqlı koordinataları dep ataladı. Noqattıń iymek sızıqlı koordinatalar menen Dekart koordinataları arasında tómendegishe baylanıs bar:

$$q_i = q_i(x, y, z) \quad (1.2)$$

hám kerisinshe:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, q_3) \quad (1.3)$$

yamasa

$$\vec{r} = \vec{r}(q_i, q_j, q_k) \quad (1.4)$$

q_i ($i=1,2,3$) funkciyalar ushın izobetler:

$$q_i = (x, y, z) = C_i$$

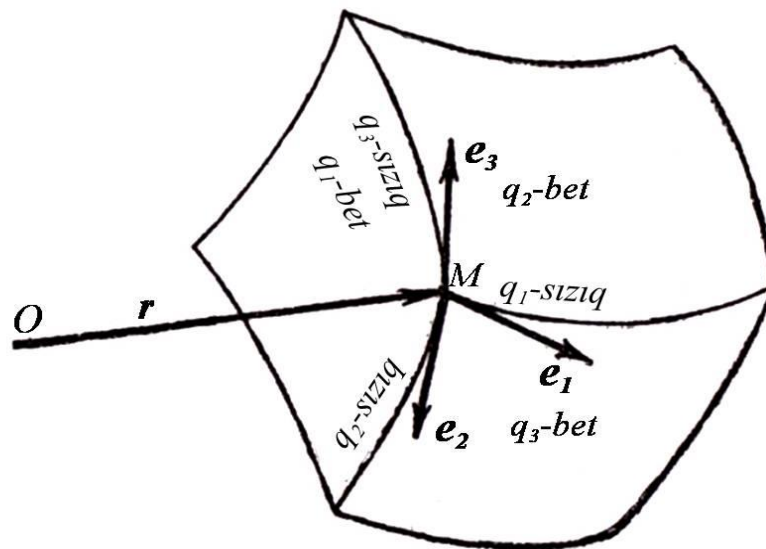
boladı.

Bul C_i, C_j, C_k konstantalarga túrli mánisler berip, úsh shańaraqtı qurağan izo-
betlerdi tabamız. Bul izobetler **koordinatalıq betler** dep ataladı. Keńisliktiń qálegen
noqatında hár shańraqqa tiyisli birewden izobet ótsin. Demek keńisliktiń qálegen
noqatınan koordinatalıq bet ótedi. Bul koordinatalıq betlerdiń hár ekewi bi-
rinshisin kesip ótedi. Eki koordinatalıq bettiń bir-birin kesiw sızıǵı **koordinatalıq sızıq**
dep ataladı. 2-súwrette $q_i C_i$ koordinatalıq bet q_i -bet hám q_i -sızıq dep kórsetildi.

Máselen $q_i = C_i$ hám $q_j = C_j$ koordinatalıq betlerdiń bir-birin kesiw sızıǵında
 q_i, q_j ózgermeydi, q_k bolsa ózgeredi. M noqatta koordinatalıq sızıqlarına urınba
iymek sızıqlı koordinatalardıń artıp baratırǵan táreplerine qaratılǵan birlik vektordı $\vec{e}_i, \vec{e}_j$
hám $\vec{e}_k$ arqalı belgileyik. Eger bul birlik óz-ara perpendikulyar bolsa, iymek sızıq koordi-
natar **ortogonal koordinatar** dep ataladı. Bunnan keyin biz tájriybede
ushraytuǵın zárúr ámellerdi názerde tutıp, tek ǵana ortogonal iymek sızıq koordi-
natar menen ǵana sheklenemiz. Ortogonol iymek sızıq koordinatar anıqla-
masına muwapıq:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) = \delta_{ik} \quad (1.5)$$

boladı.



2-súwret Eki koordinatalıq bettiń bir-birin kesip ótiw sızıǵı

Bul jerde i menen k indeksleri birden úshke shekem ózgeredi. Shártli simvol δ_{ik}
bolsa $i = k$ bolǵanda birge teń, $i \neq k$ bolǵanda bolsa nolge teń, yaǵnıy

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \quad (1.6)$$

boladı.

Anıqlıq ushın $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$ vektorlar orientaciyasın oń orientaciya dep alayıq. Birlik vektor ushın:

$$[\vec{e}_i \times \vec{e}_j] = \vec{e}_k, \quad [\vec{e}_j \times \vec{e}_k] = \vec{e}_i, \quad [\vec{e}_k \times \vec{e}_i] = \vec{e}_j, \quad (1.7)$$

$$\vec{e}_i \cdot [\vec{e}_j \times \vec{e}_k] = 1 \quad (1.8)$$

boladı.

Hár qanday vektordıń komplanar bolmaǵan úsh vektorı boyınsha ajıralıwı bizge belgili.

Demek:

$$\vec{a} = a_i \cdot \vec{e}_i + a_j \cdot \vec{e}_j + a_k \cdot \vec{e}_k. \quad (1.9)$$

Bul jerde a_1, a_2, a_3 vektor $\vec{a}$ nıń *ortogonol iymek sızıqlı komponentleri* dep ataladı.

Olar ushın, (1.5) ne muwapıq:

$$a_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i), \quad a_j = (\vec{a} \cdot \vec{e}_j), \quad a_k = (\vec{a} \cdot \vec{e}_k).$$

boladı.

Radius-vektor $\vec{r}$ iymek sızıqlı koordinatalardıń funkciyası (1.4) bolǵanlıǵınan:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (1.10)$$

boladı.

Radius-vektor $\vec{r}$ dan q_1 boyınsha menshikli $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ tuwındı alǵanda q_2, q_3 ózgermes dep esaplanadı. Demek, tek ǵana q_1 diń ózgeriwi menen ǵana baylanısqa radius-vektorınıń aqırı q_1 koordinatalıq sızıq boyınsha ǵana ózgeredi, yaǵnıy bul jerde q_1 koordinatalıq sızıq radius-vektorınıń godografi bolıp tabıladı. Sonıń ushın $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ vektorınıń baǵıtı q_1 koordinatalıq sızıqtıń urınba baǵıtı menen birdey.

Nátiyjede tómendegishe jazamız:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| \vec{e}_1.$$

Tap usılay

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| \vec{e}_2,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| \vec{e}_3.$$

Bulardı (1.10) formulağa qoyamız:

$$d\vec{r} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| dq_1 \vec{e}_1 + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| dq_2 \vec{e}_2 + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| dq_3 \vec{e}_3. \quad (1.11)$$

(1.1) hám (1.3) lerine muwapıq:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2}, \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2}, \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2}. \end{aligned}$$

Joqarıdağı $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ vektorlar koordinatalıq vektorlar dep ataladı. Koordinatalıq vektorlarıdıń modullerin ańlatıwshı arnawlı belgilerdi kirgizeyik:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} \\ H_2 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2} \\ H_3 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2} \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Bul H_1, H_2, H_3 ler **Lame koeficientleri** dep ataladı.

(1.12) in (1.11) ne qoyamız:

$$d\vec{r} = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3. \quad (1.13)$$

Bul jerde $H_1 dq_1, H_2 dq_2, H_3 dq_3$ sanlar radius vektor elementi $d\vec{r}$ diń iymek sıızıqlı komponentleri bolıp tabıladı.

Radius-vektori elementi modulin ds arqalı belgileyik: $|d\vec{r}| = ds, ds^2 = (d\vec{r})^2$.

(1.5) hám (1.13) lerine muwapıq:

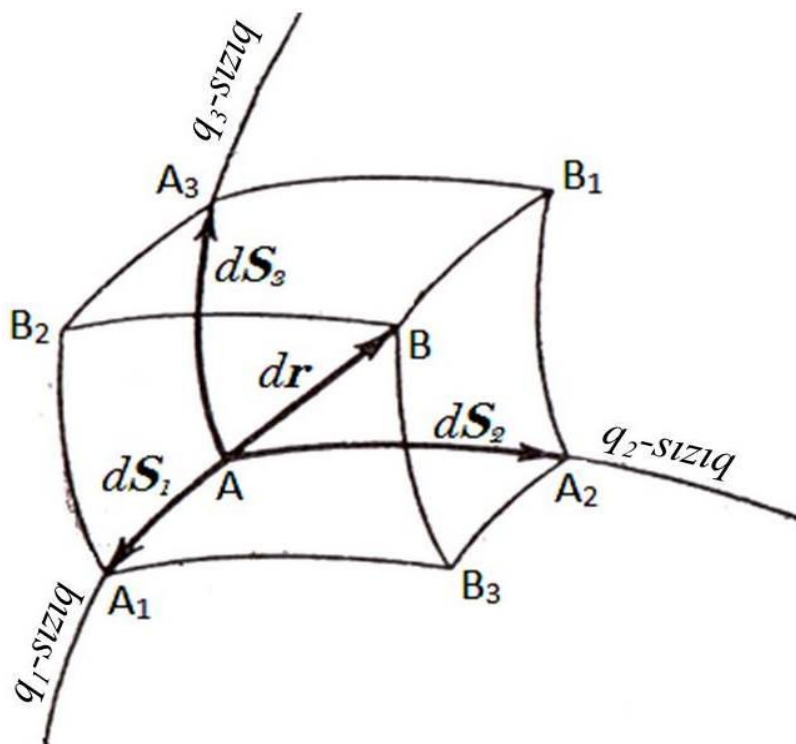
$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \quad (1.14)$$

boladı. q_1, q_2, q_3 koordinatalıq sıızıqlar boyınsha noqattıń elementar jılıwların $d\vec{s}_1, d\vec{s}_2, d\vec{s}_3$ arqalı belgilesek, (1.13) ne sáykes,

$$\left. \begin{aligned} d\vec{s}_1 &= ds_1 \cdot \vec{e}_1 = H_1 dq_1 \vec{e}_1 \\ d\vec{s}_2 &= ds_2 \cdot \vec{e}_2 = H_2 dq_2 \vec{e}_2 \\ d\vec{s}_3 &= ds_3 \cdot \vec{e}_3 = H_3 dq_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

boladı.

Bir-birine sheksiz jaqın turǵan eki A hám B noqattı alayıq (3-súwret).



3-súwret. İymek sızıqlı paralelepiped

A noqattan ótken úsh koordinatalıq bet penen B noqattan ótken úsh koordinatalıq bet sheksiz kishi iymek sızıqlı paralelepiped payda etedi. Bul elementar paralelepipedtiń tárepleri (1.15) ne muwapıq:

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= H_1 dq_1 \\ ds_2 &= H_2 dq_2 \\ ds_3 &= H_3 dq_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

boladı.

Elementar paralelepipedtiń tárepleriniń júzleri:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \left| [d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3] \right| = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \\ d\sigma_2 &= \left| [d\vec{s}_3 \times d\vec{s}_1] \right| = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \\ d\sigma_3 &= \left| [d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2] \right| = H_1 H_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Elementar paralelepipedtiń kólemi (1.15) hám (1.8) lerine muwapıq:

$$d\vec{V} = d\vec{s}_1 \cdot [d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3] = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (1.18)$$

boladı.

§2. Maydan funkciyasınıń keńislik tuwındılarına qısqasha anıqlama

Fizika kursında hár túrli maydanlar úyreniledi. Skalyar hám vektor maydanlar elektrodinamika kurslarında kirgiziledi. Mısalı potencial (φ), maydan kernewlilik ($\vec{E}, \vec{H}$) hám maydan indukciyası ($\vec{D}, \vec{B}$) maydanları. Bul maydanlar zaryadlar, toklar menen anıqlanadı hám Maksvell teńlemeleri arqalı tolıq dálillenedi. Maksvell teńlemelerin integral hám differenciyal kórinisinde jazıw múmkin:

Integral kórinisi:

(SGS-ólshew birlik sisteması)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = 4\pi \int_V \rho dV \quad (2.1) \quad \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (2.2)$$

$$\oint_\Gamma \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{c} \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (2.3) \quad \oint_\Gamma \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \oint_S (\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{s} \quad (2.4)$$

Differncial kórinisi:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \quad (2.5) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Sonıń menen birge maydan kernewliligi hám potencial arasında

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \text{yamasa} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = -\nabla \varphi$$

baylanısı bar. Maydan potencialı Puasson teńlemesin sheshiw arqalı tabıladı

$$\nabla \varphi = -4\pi\rho \quad (2.9)$$

Kvant mexanikasında da bólekshe maydan dep qaraladı hám onıń jaǵdayı Shryodinger teńlemesi járdeminde xarakterlenedi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + u \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.10)$$

Joqarıdaǵı formulalar gradient, divergenciya, rotor hám Δ operatorları arqalı ańlatılǵan. Demek, bul qanday ámellerdi orınlaydı? Olar qanday analitikalıq formulalarda berilgen? Olar ortasında óz-ara baylanıs barma? Olar qanday fizikalıq mánige iye? Bul sorawlarǵa juwap tabıw ushın tómendegi vektor hám skalyar maydanlardı xarakterlewshi muǵdarlar ústinen bazı ámellerdi hám táriyplewlerdi [3] qa muwapıq keltiremiz.

Berilgen noqatıń skalyar funkciyanıń jabıq bet boyınsha skalyar funkciya integralı $\oint \varphi d\vec{S}$ ti alayıq. Bul integraldıń jabıq bet penen shegaralangán V kólemge qatnasın dúzemiz: $\oint \frac{\varphi d\vec{S}}{V}$. Berilgen noqattı qorshap alǵan jabıq bettiń, formasınan qatıy názer, sheksiz kemeyiwi menen birge, ol shegaralangán kólem nolge umıladı. Sol shárt orınlanganda joqarıdaǵıday dúzilgen qatnastıń bar hám anıq

limiti skalyar funkciyanıń φ diń berilgen noqattaǵı **gradienti** dep ataladı hám grad φ arqalı belgilenedi.

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \varphi \cdot d\vec{S} \quad (2.11)$$

Skalyar funkciyanıń berilgen noqattaǵı gradienti usı skalyar funkciyanıń usı noqattaǵı keńislik vektor tuwındısı dep ataladı. Keńislik noqatın qorshawshı jabıq bet boyınsha alınǵan maydan vektor funkciyasınıń eki túrli integralı bizge belgili:

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \text{hám} \quad \oint d\vec{S} \times \vec{a}.$$

Bul integraldıń keńislik noqatın qorshawshı jabıq bet boyınsha shegaralanǵan kólemge qatnasın dúzemiz:

$$\frac{1}{V} \oint \vec{a} \cdot d\vec{S}, \quad \frac{1}{V} \oint d\vec{S} \times \vec{a}.$$

Berilgen noqattı jabıq bet penen qorshap alǵan jabıq bettiń sheksiz kemeyiwi menen birge, birinshi qatnas qandayda bir anıq muǵdarǵa, ekinshi qatnas bolsa anıq vektor muǵdarına umtıladı.

Birinshi qatnastı ańlatıwshı skalyar muǵdar $\vec{a}$ vektorınıń berilgen noqattaǵı **divergenciyası** dep ataladı hám $\text{div } \vec{a}$ kórinisinde jazıladı. Ekinshi qatnastıń limitin ańlatıwshı vektor muǵdar $\vec{a}$ vektorınıń berilgen noqattaǵı **iyrimi** dep ataladı hám $\text{rot } \vec{a}$ kórinisinde jazıladı. Solay etip, joqarıdaǵı táriyplewlerge muwapıq:

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{a} \cdot d\vec{S}, \quad (2.12)$$

$$\text{rot } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint d\vec{S} \times \vec{a}, \quad (2.13)$$

$$d\vec{S} \times \vec{a} = [d\vec{S} \times \vec{a}].$$

boladı.

Joqarıda kórsetilgenindey skalyar funkciyanıń gradienti, vektor divergenciyası hám vektor iyrimi táriypine muwapıq keltirilgen formulalardan belgili, funkciyanıń ba-zı bir keńislik tuwındısın biliw ushın berilgen noqattı qorshap alǵan sheksiz kish-kene bet normalına usı funksiya sáykes túrde oń tárepinen kóbeytilip, soń kerekli limit alınadı. Bul matematikalıq ámel-di ańlatıw ushın usı simvol qabıl etilgen:

$$\nabla = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{n} dS \quad (2.14)$$

Bul simvol **nabla** yamasa **Gamilton operotorı**, yamasa **gamiltonion** dep ataladı.

Simvol vektorı bolǵan nabladan paydalanıp, joqarıdaǵı formulalarǵa muwapıq tómendegilerdi jazamız:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \cdot \varphi, \quad \text{div } \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a}), \quad \text{rot } \vec{a} = (\nabla \times \vec{a}).$$

Ayırım ádebiyatlarda ∇ simvolı ornına $\frac{d}{d\vec{r}}$ simvolı paydalanıladı. Keńislik tuwındılarınıń táriyplerin shártli túrde ańlatıwshı joqarıdaǵı formulalarda nabla simvolı menen kórsetilgen sáykes matematikalıq ámel usı simvoldıń oń tárepinde turǵan funkciyaǵa ǵana tiyisli.

Simvol vektordıń DKS da jazılıwı:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.15)$$

Gamilton operatorı Laplas operatorı menen DKS da tómendegishe baylanısta:

$$\Delta = \nabla^2, \quad (2.16)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.17)$$

Joqarıda ayılǵanlardan sonday juwmaq shıǵamız: funksiya gradienti sonday vektor, onıń baǵıtı funkciyanıń eń úlken ósimi menen kóbeyiwshı tárepke qaratılıp san mánisi (moduli) funkciyanıń baǵıtı boyınsha tuwındısına teń.

Gradient, divergenciya hám rotorlardıń táriypin bilgen halda olardıń iymek sızıqlı koordinatalar sistemasında qanday jazılıwın qarastıramız.

3. Keńislik tuwındılarınıń ortogonal iymek sızıqlı koordinatalarda jazılıwı

1. İymek sızıqlı koordinatalardıń skalyar funkciyası $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ tiń gradientin teksereyik.

Skalyar funkciyanıń bazı bir baǵıtı boyınsha tuwındısı.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } \varphi \cdot \vec{l}^0) = \text{grad}_r \varphi.$$

Bul funksiya gradientiniń usı baǵıttaǵı proekciyasına teńligin bilemiz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } \varphi \cdot \vec{l}^0).$$

(1.15) ne muwapıq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = (\text{grad } \varphi \cdot \vec{e}_1) = \text{grad}_{q_1} \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = (\text{grad } \varphi \cdot \vec{e}_2) = \text{grad}_{q_2} \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} = (\text{grad } \varphi \cdot \vec{e}_3) = \text{grad}_{q_3} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

bolǵanlıǵı ushın

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (3.2)$$

boladı.

2. İymek sızılıklı koordinatalardıń vektor funkciyası bolǵan $\vec{a}(q_1, q_2, q_3)$ vektorınıń divergenciyasın tekseriyik. Vektor divergenciyasınıń anıqlamasına kóre:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}}{V} \quad (3.3)$$

boladı. 3-súwrettegi elementar parallelepipedtiń kólemi V bolsın. Bizdi A noqattaǵı vektor divergenciyası qızıqtıradı. Parallelepipedtiń jabıq bet arqalı vektordıń tolıq aǵımı onıń ayırım jaqlarındaǵı vektor aǵımlarınıń jıyındısına teń. Biz dáslep $AA_2B_1A_3A$ tárep penen $A_1B_3BB_2A_1$ tárepli ds ke qarama-qarsı qaratılǵan, demek, $AA_2 B_1 A_3 A$ nıń bet vektorı $[ds_2 ds_3]$ boladı. Joqarı tártipli sheksiz sızılıq muǵdarlar názerde tutılmasa, $AA_2 B_1 A_3 A$ tárep arqalı vektor aǵımı bunday boladı:

$$\int_{AA_2B_1A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot [d\vec{s}_3 \times d\vec{s}_2])$$

yamasa (1.15) hám (1.7) lerine muwapıq:

$$\begin{aligned} \int_{AA_2B_1A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) &= (\vec{a} [\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2]) H_3 H_2 dq_3 dq_2 = -(\vec{a} [\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3]) H_2 H_3 dq_2 dq_3 = \\ &= -(\vec{a} \cdot \vec{e}_1) H_2 H_3 dq_2 dq_3 = -\vec{a}_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$AA_2B_1A_3A$ tárepten ótiwde q_2 menen q_3 ózgermeydi, tek ǵana q_1 ózgeredi. Sonıń ushın joqarı tártipli sheksiz kishi muǵdarlarǵa itibar qılınbasa, $A_1B_3BB_2A_1$ tárep arqalı vektor aǵımı tómendegishe jazıladı:

$$\int_{A_1B_3BB_2A_1} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = (\vec{a} [d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3]) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{a} [d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3]) dq_1$$

yamasa (1.15) hám (1.17) lerine muwapıq:

$$\begin{aligned} \int_{A_1B_3BB_2A_1} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) &= (\vec{a} [\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3]) H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} \{(\vec{a} [\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3]) H_2 H_3 dq_2 dq_3\} dq_1 = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} \{(\vec{a} \cdot \vec{e}_1) H_2 H_3 dq_2 dq_3\} dq_1 = \\ &= a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.4) hám (3.5) lerine muwapıq, $AA_2 B_1 A_3 A$ hám $A_1 B_3 BB_2 A_1$ tarepleri arqalı vektor aǵımlarınıń jıyındısı tómendegishe jazıladı:

$$\int_{AA_2B_1A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) + \int_{A_1B_3BB_2A_1} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Usıǵan uqsas qalǵan eki jup tárep arqalıda vektor aǵımlarınıń jıyındısı

$$\int_{AA_2B_1A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) + \int_{A_2B_3BB_1A_2} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$\int_{AA_1B_3A_2A} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) + \int_{A_3B_2BB_1A_3} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) dq_1 dq_2 dq_3$$

boladı. Sońǵı úsh ańlatpanıń jıyındısı elementar parallelepipedtiń jabıq bet arqalı vektordıń tolıq aǵımın beredi:

$$\oint (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right\} dq_1 dq_2 dq_3$$

Elementar parallelepipedtiń kólemi (1.18) ne muwapıq $V = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$ boladı. Solay etip (3.3) ne muwapıq tómendegini tabamız:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right\}. \quad (3.6)$$

3. Potenciál vektor $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ ushın $\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{divgrad} \varphi = \Delta \varphi$. (3.6) daǵı $\vec{a}$ ornına $\operatorname{grad} \varphi$ di qoysaq:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (\operatorname{grad}_{q_1} \varphi \cdot H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\operatorname{grad}_{q_2} \varphi \cdot H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\operatorname{grad}_{q_3} \varphi \cdot H_1 H_2) \right\}$$

kelip shıǵadı.

Gradiyent komponentlerdi (3.1) nen alıp, joqarıdaǵı formulaǵa qoyamız:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right\}. \quad (3.7)$$

4. İymek sıızıqlı koordinatalardıń vektor funkciyası bolǵan $\vec{a}(q_1, q_2, q_3)$ tiń iyrimin tekseriyik.

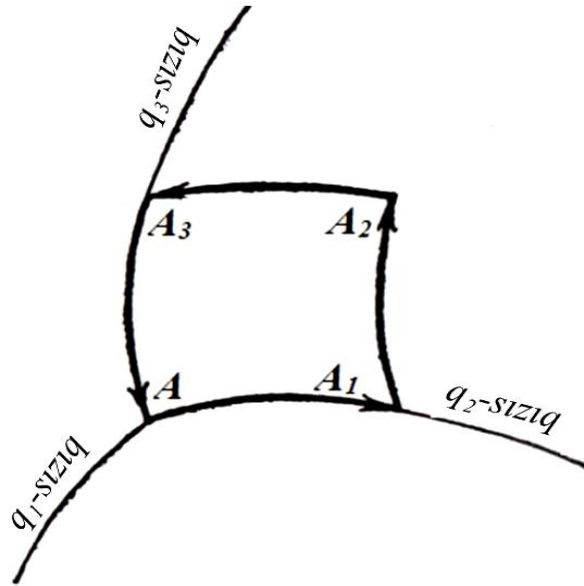
Vektor iyriminiń normal komponenti ushın berilgen integral anıqlamasın esleyik:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = (\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{a} \cdot d\vec{l})}{S},$$

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{a} \cdot d\vec{s})}{\sigma}. \quad (3.8)$$

Bul jerde $d\vec{s}$ kontur elementi, σ usı kontur menen shegaralanǵan bet. Vektor iyriminiń q_1 sıızıqlı baǵıttaǵı komponenti $\operatorname{rot}_{q_1} \vec{a}$ nı tekseriw ushın kontur spatında 4-súwrette kórsetilgen elementar iymek sıızıqlı tuwrı tórt múyeshlikti alayıq.

Bizdi A noqattaǵı vektor iyrimi qızıqtıradı. 4-súwrette kórsetilgen kontur menen shegaralanǵan bet normalınıń baǵıtı q_1 sıızıqtıń birlik vektorı $\vec{e}$ -baǵıtı menen birdey boladı. Sonıń ushın kontur boyınsha júriw baǵıtı 4-súwretegidey etip alındı.



4-súwret. Elementar iymek sızıqlı tuwrı tórt múyeshlik

$\vec{a}$ vektordıń kontur boyınsha cirkulyaciyasın tómendegishe jazıwımız múmkin

$$\oint (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = \int_{AA_1} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) + \int_{A_1A_2} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) + \int_{A_2A_3} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) + \int_{A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{s}). \quad (3.9)$$

Joqarı tártipli kishi muǵdarların itibrsiz qaldırıp, oń táreptegi integrallardı esaplap shıǵayıq. (3.9) nıń oń tárepindegi birinshi integral (1.15) ne muwapıq:

$$\int_{AA_1} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = (\vec{a} \cdot d\vec{s}_2) = (\vec{a} \cdot \vec{e}_2) H_2 dq_2 = \vec{a}_2 H_2 dq_2. \quad (3.10)$$

Tórtinshi integraldı (1.15) formulaǵa muwapıq

$$\int_{A_3A} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = - \int_{AA_3} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = -(\vec{a} \cdot d\vec{s}_3) = -(\vec{a} \cdot \vec{e}_3) H_3 dq_3 = -a_3 H_3 dq_3 \quad (3.11)$$

boladı.

(3.9) formulanıń oń tárepindegi ekinshi integral $\int_{A_1A_2} (\vec{a} \cdot d\vec{s})$ dı esaplawda sońǵı (3.11)

degi $\int_{AA_3} (\vec{a} \cdot d\vec{s})$ integralǵa salıstırǵanda q_1 hám q_2 ózgermeydi, tek ǵana q_3 ózgeredi.

Sonıń ushın

$$\int_{A_1A_2} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = a_3 H_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3 dq_3) dq_2 \quad (3.12)$$

boladı.

(3.9) formulanıń oń tárepindegi úshinshi integral ushın tómendegishe jazamız.

$$\int_{A_2A_3} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = - \int_{A_3A_2} (\vec{a} \cdot d\vec{s}). \quad (3.13)$$

Tabılǵan nátiyjelerdi (3.9) daǵı óz orınlarına alıp barıp qoyamız

$$\oint (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right\} dq_2 dq_3.$$

Bunı (3.8) ne qoysaq hám elementar iymek sıızılı tuwrı tórtmúyeshlik beti $d\sigma_1 = |d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3| = H_2 H_3 dq_2 dq_3$ ekenligin eslese, tómendegini tabamız.

$$\text{rot}_{q_1} \vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right\}. \quad (3.14)$$

Vektor iyriminiń qalǵan komponentin de tap usınday jol menen shıǵarıw múmkin:

$$\text{rot}_{q_2} \vec{a} = \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right\}. \quad (3.15)$$

$$\text{rot}_{q_3} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right\}. \quad (3.16)$$

Vektordıń iyrimin tabıw ushın sońǵı ańlatpalardı tiyislisine e_1, e_2, e_3 ke kóbeytip soń olardıń jıyındısın alıw lazım:

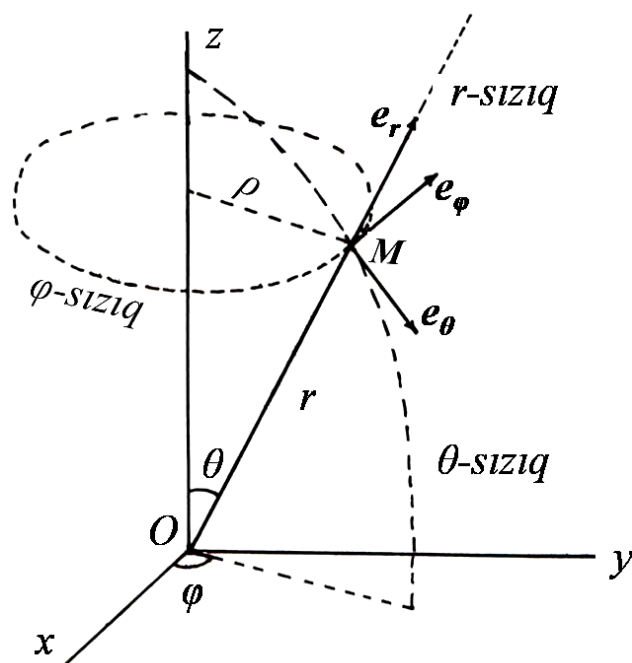
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right\} \vec{e}_1 + \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right\} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right\} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Joqarıda ayılǵanlardı konkretlestiriw ushın esaplarda kóbirek ushrap tura tuǵın Sferalıq koordinatalar menen Cilindrlik koordinatalardı kórip shıǵayıq.

§ 4. Keńislik tuwındılarınıń Sferalıq koordinatalarda jazılıwı

Keńislik noqatınıń Sferalıq koordinataların r, θ, φ arqalı belgileyik. 5-súwret: demek, $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$. Keńisliktiń hámme noqatların ańqlaw ushın r di 0 den ∞ ke shekem, θ nı 0 den 2π ge shekem ózgertemiz. x, y, z lerdı r, θ, φ ler arqalı ańlatıw múmkin:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$



5-súwret. Sferalıq koordinatalar sistemasında birlik ort vektorları

Koordinatalıq betler:

- 1) $q_1 = r = \text{const}$, - bular orayı O noqatağı sferalar bolıp esaplanadı.
- 2) $q_2 = \theta = \text{const}$, - bular ushları O noqatta hám ulıwmalıq kósheri Oz bolğan yarım kósher betleri bolıp esaplanadı.
- 3) $q_3 = \varphi = \text{const}$, - bular Oz kósheri menen shegeralangán yarım tegislikler bolıp esaplanadı.

Koordinatalıq sızıqlar:

- 1) $q_1 = r$, sızıqları-bular $q_2 = \theta = \text{const}$ hám, $q_3 = \varphi = \text{const}$ koordinatalıq betleriniń kesilisen sızıqlarınıń radiusları bolıp esaplanadı.
- 2) $q_2 = \theta$, sızıqları-bular $q_1 = r = \text{const}$ hám $q_3 = \varphi = \text{const}$ koordinatalıq betleriniń kesilisen sızıqlarınıń meridianları bolıp esaplanadı.
- 3) $q_3 = \varphi$, sızıqları-bular $q_1 = r = \text{const}$ hám $q_2 = \theta = \text{const}$ koordinatalıq betleriniń kesilisen sızıqlarınıń parallelleri bolıp esaplanadı. 5-súwrette kórip turǵanıımızday:

$$ds_1 = ds_r = dr, \quad ds_2 = ds_\theta = r d\theta, \quad ds_3 = ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi.$$

Bul jerden, (1.16) na muwapıq, tómendegini tabamız: (4.2)

$$\begin{aligned} H_1 &= H_r = 1, \\ H_2 &= H_\theta = r, \\ H_3 &= H_\varphi = r \sin \theta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Lame koefficientlerin (1.12) ne muwapıq, (4.1) nen paydalanıp tapsaq bolar edi. (4.2) in (3.2) ne qoysaq:

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \tag{4.3}$$

(4.2) in (3.6) na qoysaq:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\vec{r}^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (a_r \vec{r}^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \vec{r} \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi \vec{r}) \right\}$$

yamasa

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\vec{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} (\vec{r}^2 a_r) + \frac{1}{\vec{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{\vec{r} \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (4.4)$$

(4.2) in (3.7) ne qoysaq:

$$r = \frac{1}{\vec{r}^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\vec{r}^2 \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \right\}$$

yamasa

$$r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (4.5)$$

boladı. **Laplasian** Sferalıq koordinatalarda tómendegishe ańlatıladı:

$$r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.6)$$

Sońǵı eki bólshek tek múyeshleriniń ózgereiwine baylanısı bolıp tabıladı. $r=1$ dep, usı sońǵı eki bólshekter belgi menen alıp, Δ arqalı belgileyik:

$$\Delta = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (4.7).$$

Bul jerde kórsetilgen operator matematikalıq fizikada úlken áhmiyetke iye bolıp, ádette, ol **Lejandr operatorı** dep ataladı.

(4.2) in (3.17) ne qoysaq:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\theta r) \right\} \vec{e}_r + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_r) - \frac{\partial}{\partial r} (a_\varphi r \sin \theta) \right\} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (a_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (a_r) \right\} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

yamasa

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \frac{1}{\vec{r} \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right\} \vec{e}_r + \\ & + \frac{1}{\vec{r} \sin \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (\vec{r} a_\varphi) \right\} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\vec{r}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\vec{r} a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right\} \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.8)$$

kelip shıǵadı. (4.3) nen paydalanıp nablanıń Sferalıq koordinatalardaǵı ańlatpasın kórsetiwimiz múmkin:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.9)$$

Nabla-nıñ usı formulasına tiykarlanıp, keńislik tuwındılarınıń Sferalıq koordinatalarında ańlatılıwı tikkeley keltirip shıǵarıw múmkin edi. Bunıń ushın tómendegi formulalardan paydalanıw lazım.

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \varphi, \operatorname{div} \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a}), \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla \times \vec{a}).$$

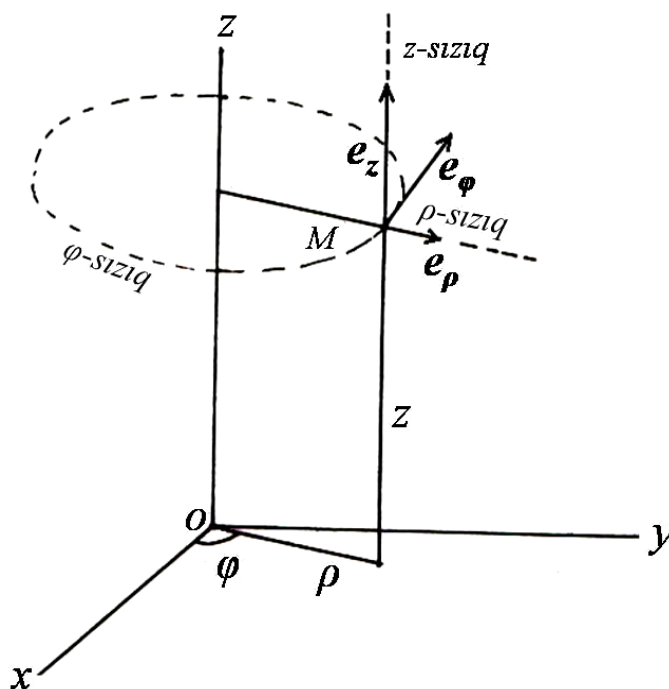
§ 5. Keńislik tuwındılarınıń Cilindrlilik koordinatalarda jazılıwı

Keńislik noqatınıń Cilindrlilik koordinataların ρ , φ , z arqalı belgileyik.

6-súwret: demek, $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$.

Keńiskliktiń hámme noqatların anıqlaw ushın ρ nı 0 den ∞ shekem, φ di 0 den 2π ge shekem, hám z ti $-\infty$ ten $+\infty$ ke shekem ózgeritemiz. x, y, z di ρ , φ , z arqalı ańlatıw múmkin:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (5.1).$$



6- súwret. Cilindrlilik koordinatalar sistemasında birlik ort vektorları.

Koordinatalıq betler:

- 1) $q_1 = \rho = \text{const}$, - bular ulıwmalıq kósher Oz bolǵan cilindir bolıp esaplanadı.
- 2) $q_2 = \varphi = \text{const}$, - bular Oz kósheri menen shegaralanǵan yarım tegislikler bolıp esaplanadı.
- 3) $q_3 = z = \text{const}$, - bular Oz kósherge perpendikulyar bolǵan tegislikler bolıp esaplanadı.

Koordinatalıq sızıqlar:

- 1) $q_1 = \rho$ sızıqlar-bular $q_2 = \varphi = \text{const}$ hám $q_3 = z = \text{const}$ koordinatalıq betleriniń kesiliskeñ sızıqlarınıń Oz kósherge perpendikulyar radiuslar bolıp esaplanadı.

2) $q_2 = \varphi$ sızıqları-bular $q_3 = z = \text{const}$ hám $q_1 = \rho = \text{const}$ koordinatalıq betlerniń kesiliskeń sızıqlarınıń orayları Oz kósherge jaylasqan hám usı kósherge perpendikulyar tegislikte jatqan sheńberler bolıp esaplanadı.

3) $q_3 = z$ sızıqları-bular $q_1 = \rho = \text{const}$ hám $q_2 = \varphi = \text{const}$ koordinatalıq betleriniń kesiliskeń sızıqlarınıń Oz kósherge parallel tuwrı sızıqları bolıp esaplanadı. 6-súwretten tómendegilerdi jazamız:

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds_\rho = d\rho, \\ ds_2 &= ds_\varphi = \rho d\varphi, \\ ds_3 &= ds_z = dz. \end{aligned}$$

Bul jerden, (1.16) na muwapıq, tómendegilerdi tabamız:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_\rho = 1, \\ H_2 &= H_\varphi = \rho, \\ H_3 &= H_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

(1.12) ne muwapıq, Lamé koefficientlerin (4.9) nan paydalanıp tapsaq ta boladı.

(5.1) in (3.3) ne qoysaq:

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (5.3)$$

(5.1) in (3.7) ne qoysaq:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (a_z \rho) \right\}$$

yamasa

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (5.4)$$

(5.2) in (3.7) ne qoysaq:

$$r = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial r}{\partial z} \right) \right\}$$

yamasa

$$r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \quad (5.5)$$

boladı. Demek, laplasian cilindrlik koordinatalarda tómendegishe jazıladı:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.6)$$

(5.1) in (3.17) ne qoysaq:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_z) - \frac{\partial}{\partial z} (a_\varphi \rho) \right\} \vec{e}_\rho + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (a_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho} (a_z) \right\} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (a_\varphi \rho) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\rho) \right\} \vec{e}_z \end{aligned}$$

yamasa

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_\varphi) \right\} \vec{e}_\rho + \\ & + \left\{ \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right\} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right\} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.7)$$

boladı. (5.2) ne muwapıq, cilindrlik koordinatalarda ∇ tómendegishe jazıladı:

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.8)$$

Keńislik tuwındıların cilindrlik koordinatalarda, (5.8) ne muwapıq, tikkeley ańlatıw múmkin.

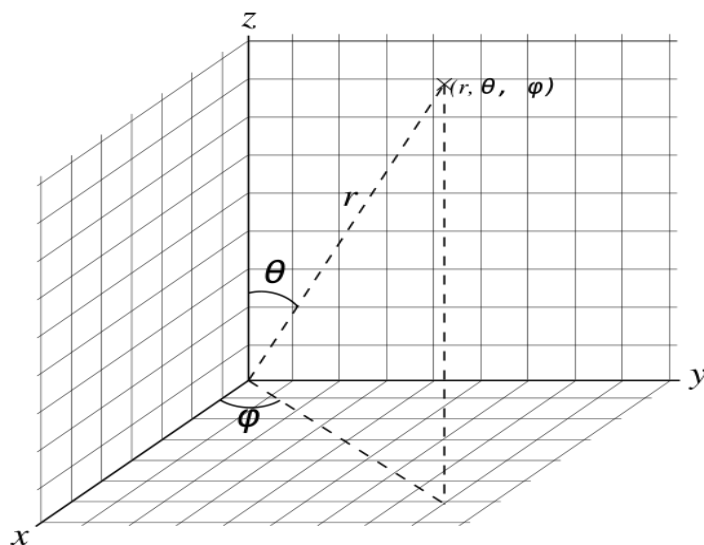
$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \varphi, \operatorname{div} \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a}), \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla \times \vec{a}).$$

§ 6. Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalar sistemasına ótiwdiń jáne bir (alternativ) usılı

Noqattıń DKS daǵı x, y hám z koordinataları hám olar SfKS daǵı r, θ hám φ ler menen óz-ara tómendegi qatnaslar arqalı baylanısqa:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (6.1) \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (6.2) \quad z = r \cos \theta \quad (6.3)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \quad (6.4) \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (6.5) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.6)$$



7- súwret. Dekart koordinatalar sistemasıń Sferalıq koordinatalar sisteması koordinatlari menen kórsetiliwi

Bul jerde birinshi topar formulalar SfKS da noqattırn r, θ hám φ koordinataların bile otırıp, usı noqattırn koordinataların DKS da tabıw imkanın beredi. Ekinshi topar teńlemeler bolsa kerisinshe ótiwin táminleydi.

DKS nan ańlatılğan operatorlardı SfKS da ańlatıw ushın $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sıyaqlı menshikli tuwındılardı $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ menshikli tuwındıları arqalı ańlatıw kerek. Buni tómendegishe ámelge asıramız. Bizge belgili $\frac{\partial}{\partial x}$ qatnasınıń ózi de funkciya bolıp $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ler menen $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ formula arqalı baylanısqa boladı. Sol sıyaqlı $\frac{\partial}{\partial y}$ hám $\frac{\partial}{\partial z}$ ler de $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ menen baylanısadı.

Ulıwma alǵanda

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} . \quad (6.7)$$

teńlemeler sistemasın matrica kórinisinde jazsada boladı:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} .$$

Kózde tutılğan nátiyjeni qolǵa kirkiziw ushın

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

matrica elementlerin tabıwımız kerek.

Keliń aldın matricanıń birinshi baǵanasın yaǵnıy $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ hám $\frac{\partial r}{\partial z}$ elementlerin tabamız. Bunuń ushın (6.6) formulanıń eki tárepin differenciaylaymız:

$$d(r^2) = d(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$2rdr = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz$$

Aqırǵı teńlemelerden radius-vektor moduliniń x , y hám z koordinatalar boyınsha menshikli tuwındıların tabamız:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

(6.1) - (6.3) formulalardı esapqa alıp tómendegilerdi tabamız.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \quad (6.9) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \quad (6.10) \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta \quad (6.11)$$

Endi (6.8) matricanıń ekinshi baǵanasın yaǵnıy $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ hám $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ tabamız.

Bunıń ushın (6.3) qatnastıń eki tárepın de x , y hám z boyınsha differenciyalaymız:

$$x: (-\sin \theta) \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{r^2} \frac{dr}{dx} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{r^2 \sin \theta} \frac{dr}{dx}$$

$\frac{dr}{dx}$ tuwındı ornına usı tuwındınıń (6.9) formula menen berilgen ańlatpasın qoyamız, z ornına bolsa onıń (6.3) formuladaǵı ańlatpasın qoyamız.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{z}{r^2 \sin \theta} \frac{dr}{dx} = \frac{r \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$y: (-\sin \theta) \frac{d\theta}{dy} = -\frac{z}{r^2} \frac{dr}{dy} \Rightarrow \frac{d\theta}{dy} = \frac{z}{r^2 \sin \theta} \frac{dr}{dy}$$

$\frac{dr}{dy}$ tuwındı ornına usı tuwındınıń (6.10) formula menen berilgen ańlatpasın qoyamız, z ornına bolsa onıń (6.3) formuladaǵı ańlatpasın qoyamız

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dy} &= \frac{z}{r^2 \sin \theta} \frac{dr}{dy} = \frac{r \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow \frac{d\theta}{dy} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \\ \frac{d\theta}{dy} &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$z: (-\sin \theta) \frac{d\theta}{dz} = \frac{r - z}{r^2} \frac{dr}{dz}$$

$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ qatnasın esapqa alıp tómendegishe jazamız:

$$(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dz} = \frac{r - z \frac{dr}{dz}}{r^2} = \frac{r - z \frac{z}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3}$$

z tiń (6.3) menen berilgen ańlatpasın qoyıp, $\frac{d\theta}{dz}$ ti tabamız:

$$\begin{aligned} (-\sin \theta) \frac{d\theta}{dz} &= \frac{r^2 - r^2 \cos^2 \theta}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{r} \Rightarrow \frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Sońınan (6.8) matricanıń úshinshi baǵanası yaǵnıy, $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ elementlerin tabamız. Bunıń ushın (6.5) qatnastıń eki tárepinde x, y hám z boyınsha differenciaylaymız.

$$x: \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2}$$

x hám y tiń orınlarına sáykes túrde (6.1) hám (6.2) formula menen anıqlanǵan qatnaslardı qoyamız:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{r \sin \theta \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(r \sin \theta \cos \varphi)^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$y: \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos^2 \varphi}{x}$$

x tiń ornına (6.2) formula menen anıqlanǵan qatnastı qoyamız:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{\cos^2 \varphi}{r \sin \theta \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$z: \frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (6.17)$$

Demek,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

§ 7. Dekart koordinatalar sistemasınan Cilindrlık koordinatalar sistemasına ótiwdiń jáne bir (alternativ) usılı

Noqattıń DKS daǵı x, y hám z koordinataları hám olar CKS daǵı ρ, φ hám z ler menen óz-ara tómendegi qatnaslar arqalı baylanısqan:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (7.1) \quad y = \rho \sin \varphi \quad (7.2) \quad z = z \quad (7.3)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (7.4) \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (7.5)$$

Bul jerde birinshi topar formulalar CKS da noqattıń ρ, φ hám z koordinataların bile otırıp, usı noqattıń koordinataların DKS da tabıw imkanın beredi. Ekinshi topar teńlemeler bolsa kerisinshe ótiwin táminleydi.

DKS da ańlatılǵan operatorlardı CKS da ańlatıw ushın $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sıyaqlı menshikli tuwındılardı $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$ menshikli tuwındıları arqalı ańlatıw kerek. Bunı tómendegishe ámelge asıramız. Bizge belgili $\frac{\partial}{\partial x}$ qatnasınıń ózi de funkciya bolıp $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$ ler menen $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}$ formula arqalı baylanısqan boladı. Sol sıyaqlı $\frac{\partial}{\partial y}$ hám $\frac{\partial}{\partial z}$ ler de $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$ menen baylanısağı.

Ulıwma alǵanda

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (7.6)$$

teńlemeler sistemasın matrica kórinisinde jazsada boladı.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Kózde tutılǵan nátiyjeni qolǵa kirgiziw ushın

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

matrica elementlerin tabıwımız kerek.

Keliń aldın matricanıń birinshi baǵanasın yaǵnıy $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ hám $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ elementlerin tabamız. Bunıń ushın (7.4) formulanıń eki tárepın differenciaylaymız:

$$\begin{aligned} d(\rho^2) &= d(x^2 + y^2) \\ 2\rho d\rho &= 2xdx + 2ydy \\ d\rho &= \frac{x}{\rho} dx + \frac{y}{\rho} dy \end{aligned}$$

Aqırǵı teńlemelerden radius-vektor moduliniń x , y hám z koordinatalar boyınsha menshikli tuwındılardı tabamız:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}$$

(7.1)-(7.3) formulalardı esapqa alıp tómendegilerdi tabamız.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi \quad (7.8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi \quad (7.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (7.10)$$

Endi (7.7) matricanıń ekinshi baǵanasın yaǵnıy $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ hám $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ di tabamız.

Bunıń ushın (7.5) qatnastıń eki tárepın de x , y hám z boyınsha differenciaylaymız:

$$x: \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = -\cos^2 \varphi \frac{y}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin \varphi}{\rho} \quad (7.11)$$

$$y: \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = \cos^2 \varphi \frac{1}{x} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \quad (7.12)$$

$$z: \frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad (7.13)$$

Sońınan (7.7) matricanıń úshinshi baǵanası yaǵnıy $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dz}$ elementlerin tabamız.

Bunıń ushın (7.3) qatnastıń eki tárepinde x , y hám z boyınsha differenciaylaymız:

$$x: \frac{dz}{dx} = 0 \quad (7.14) \quad y: \frac{dz}{dy} = 0 \quad (7.15) \quad z: \frac{dz}{dz} = 1 \quad (7.16)$$

Demek,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\rho} & 0 \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

§ 8. Háreket muǵdarı momentı operatorın Sferalıq hám Cilindrlik koordinatalar sistemasında ańlatıw

İmpuls momentı operatorın DKS da jazamız:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (8.1)$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

İmpuls momentı operatorınıń x , y hám z kósherlerindegi qurawshıların (proekciyası) $\hat{L}_z$ ($i = x, y, z$) ti DKS nan SfKS na ótkeriw ushın dáslep (6.1)-(6.3) shi formulalardan hám (6.7) formuladaǵı teńlemeler sistemasınan paydalanamız.

Yaǵnıy

$$\begin{aligned} \hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -i\hbar \left[r \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \right. \\ \left. - r \cos \theta \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Bul kelip shıqqan (8.2) ańlatpaǵa (6.9)-(6.17) shi formulalardan paydalanıp almasırwıwları ámelge asıramız:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -i\hbar \left[r \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \right. \\ \left. - r \cos \theta \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = -i\hbar \left[r \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - r \sin \theta \sin \varphi \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - r \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} - r \cos \theta \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = \\ = -i\hbar \left[-\sin^2 \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos^2 \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = \\ = -i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = -i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Yaǵnıy

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (8.3)$$

Tap usı sıyaqlı almasırlardı $\hat{L}_y$ hám $\hat{L}_z$ lerde de ámelge asırıp elementar algebralıq esaplawlardan soń tómendegilerdi qolǵa kirgizemiz.

$$\begin{aligned} \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \left[r \cos\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - r \sin\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right] = -i\hbar \left[r \cos\theta \left(\sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - r \sin\theta \cos\varphi \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] = \\ &= -i\hbar \left[r \cos\theta \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r \cos^2\theta \cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} - r \sin\theta \cos\varphi \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r \sin^2\theta \cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right] = -i\hbar \left[\cos^2\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^2\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta \sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = \\ &= -i\hbar \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) = -i\hbar \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \end{aligned}$$

Yaǵnıy

$$\hat{L}_y = -i\hbar (\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}). \quad (8.4)$$

Tap usı sıyaqlı

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \left[r \sin\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - r \sin\theta \sin\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right] = -i\hbar \left[r \sin\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + r \sin\theta \cos\varphi \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + r \sin\theta \cos\varphi \frac{\cos\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} - r \sin\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \right. \\ &\quad \left. - r \sin\theta \sin\varphi \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + r \sin\theta \sin\varphi \frac{\sin\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = -i\hbar \left(\frac{r \sin\theta \cos^2\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{r \sin\theta \sin^2\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) = \\ &= -i\hbar \left(\cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin^2\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

Yaǵnıy

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (8.5)$$

(8.2)-(8.5) formulardan paydalanıp (8.1) formulanıń SfKS daǵı mánisin esaplaymız.

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_x^2 &= \hat{L}_x \cdot \hat{L}_x = -\hbar^2 \left[\left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{ctg} \theta) + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi) + \operatorname{ctg}^2 \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\ \hat{L}_y^2 &= \hat{L}_y \cdot \hat{L}_y = -\hbar^2 \left[\left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{ctg} \theta) - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi) + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\ \hat{L}_x^2 &= -\hbar^2 \left(\sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (8.6) \end{aligned}$$

$$\hat{L}_y^2 = -\hbar^2 \left(\cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (8.7)$$

$$\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left[\sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\operatorname{ctg}^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 1) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (8.9)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}. \quad (8.10)$$

Endi 7§ taǵı keltirip shıǵarılǵan formulalardan paydalanıp háreket muǵdarı momentı operatorınıń CKS da jazılıwın kórip shıǵayıq. Bunıń ushın biz 8§ ta orınlanǵan ámellerdi sáykes túrde CKS da da orınlawımız kerek.

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

İmpuls momentı operatorınıń x , y hám z kósherlerindegi qurawshıların (proekciyası) $\hat{L}_i$ ($i = x, y, z$) ti DKS nan CKS na ótkeriw ushın dáslep (7.1)-(7.3) shı formulalardan hám (7.6) formuladaǵı teńlemeler sistemasınan paydalanamız. Yaǵnıy

$$\begin{aligned} \hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -i\hbar \left[\rho \sin \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Bul kelip shıqqan (8.12) ańlatpaǵa (7.8)-(7.16) shı formulalardan paydalanıp alımastrıwları ámelge asıramız:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x = -i\hbar \left[\rho \sin \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] = \\ = -i\hbar \left[\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} - z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

Almastrıwlar ámelge asırılsa, elementar algebralıq esaplawlardan soń (8.12) formulanı qolǵa kirgizemiz. Bul jerdegi almastrıwlarda $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ ekenligin esapqa alıw lazım.

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left[\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} - z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad (8.12)$$

Tap usı sıyaqlı almastrıwları $\hat{L}_y$ hám $\hat{L}_z$ lerge de ámelge asırıp elementar algebralıq esaplawlardan soń tómendegilerdi qolǵa kirgizemiz.

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \left[z \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \right.$$

$$-\rho \cos \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Bigg] = -i\hbar \left(z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Yağny

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \left[\rho \cos \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \rho \sin \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] = \\ &= -i\hbar \left(\rho \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \cos \varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \sin \varphi \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Yağny

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (8.14)$$

(8.12)-(8.14) formulalardan paydalanıp (8.1) formulanın CKS dağı mánisin esaplaymız.

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \\ \hat{L}_x^2 &= \hat{L}_x \cdot \hat{L}_x = -\hbar^2 \left[\left(\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} - z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} - z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\left(\rho^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + z^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left[\rho^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \right. \\ &\quad \left. - 2\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2z^2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad (8.15) \end{aligned}$$

$$\hat{L}_y^2 = \hat{L}_y \cdot \hat{L}_y = -\hbar^2 \left[\left(z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar^2 \left[z^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - z^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} - z^2 \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \right. \\
&+ z^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} - \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\
&+ \rho^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left. \right] = -\hbar^2 \left[z^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2z^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\
&- 2z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} + 2\rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left. \right]. \quad (8.16)
\end{aligned}$$

$$\hat{L}_y^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left[\rho^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \right. \\
&- 2\rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2z^2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + z^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\
&+ \rho^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2z^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} + 2\rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left. \right] = \\
&= -\hbar^2 \left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + z^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + z^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \\
&= -\hbar^2 \left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + z^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\
&\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (8.18)
\end{aligned}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\rho, z}. \quad (8.19)$$

§ 9. Keñislik tuwındıları boyınsha máseleler sheshiw

Másele №1. $\hat{M}^2$ İmpuls moment kvadrati operatorınıń $Y(\theta, \varphi) = (\cos\theta + 2\sin\theta\cos\varphi)$ menshikli funkciyaǵa sáykes kelgen impuls moment kvadrati operatorınıń menshikli mánisi tabılsın.

Sheshiliwi: Bizge belgili $\hat{M}^2 Y(\theta, \varphi) = M^2 Y(\theta, \varphi)$ menshikli funkciyalar hám menshikli mánislerdi anıqlaw qatnasınan paydalansaq hám

$$\hat{M}^2 = -\hbar \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right)$$

yekenligi esapqa alınsa, usı operatordı $Y(\theta, \varphi) = (\cos\theta + 2\sin\theta\cos\varphi)$ funkciya tásiiri nátiyjesinde $\hat{M}^2 Y = 2\hbar^2 (\cos\theta + 2\sin\theta\cos\varphi)$ kelip shıǵadı. Demek, impuls momenti kvadrati operatorınıń menshikli mánisi $M^2 = 2\hbar^2$ qa teń boladı.

Juwabı: $M^2 = 2\hbar^2$

Másele №2. $\vec{r}$ radius-vektorınıń modullerine ǵana ǵárezli bolǵan $f(r)$ funkciya graidentin esaplań.

Berilgeni: $r, f(r)$

Tabıw kerek: $f(r)$ grad $f(r) - ?$

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{grad } f(r) = \nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \vec{k}$$

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ekenliklerin esapqa alıp, tómendegilerdi esaplawlardı ámelge asıramız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

ekenligin inabatqa alıp $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$ tı tabamız. Usıǵan uqsas $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$.

endi alıńǵan nátiyjeden paydalanıp ($\text{grad } \phi = \nabla \phi$) formulasına muwapıq

$$\text{grad } f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{z}{r} \vec{k} = \left(\frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Juwabı: $\text{grad } f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Másele №3. $\vec{r}$ radius-vektorınıń $\vec{a}$ vektor boyınsha gradienti $(\vec{a} \nabla) \vec{r}$ tabılsın.

Berilgeni: $\vec{r}, \vec{a}$

Tabıw kerek: $(\vec{a} \nabla) \vec{r} - ?$

Sheshiliwi: $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ ekenin bile otırıp, $(\vec{a} \nabla)$ nı $\vec{r}$ ǵa kóbetemiz.

$$(\vec{a} \nabla) \vec{r} = (\vec{a} \nabla) x \vec{i} + (\vec{a} \nabla) y \vec{j} + (\vec{a} \nabla) z \vec{k} = (\vec{a} \nabla x) \vec{i} + (\vec{a} \nabla y) \vec{j} + (\vec{a} \nabla z) \vec{k} = (\vec{a} \vec{i}) \vec{i} + (\vec{a} \vec{j}) \vec{j} + (\vec{a} \vec{k}) \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \vec{a}.$$

Juwbabi: $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{a}$

Másele №4. $\vec{r}$ radius-vektorınıń divegenciyası tabılsın.

(Másele §2. №2.1. Л.Г.Гречко и др. Сборник задач по теоретической физике. Москва-1984)

Berilgeni: $\vec{r}$

Tabıw kerek: $\text{div } \vec{r} - ?$

Sheshiliwi: $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ formulasınan paydalanıp $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ dep jazsaq boladı. Onda teńlemedegi $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ ekeni kelip shıǵadı. Demek

$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$ bolsa, $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ mánislerin orınlarına qoysaq

$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \text{div } \vec{r} = 3.$$

Juwbabi: $\text{div } \vec{r} = 3$.

Másele №5. $\vec{r}$ radius-vektorınıń iyrimi tabılsın.

(Másele §2. № 2.2. Л.Г.Гречко и др. Сборник задач по теоретической физике. Москва-1984)

Berilgeni: $\vec{r}$

Tabıw kerek: $\text{rot } \vec{r} - ?$

Sheshiliwi: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ hám $\nabla = \nabla_x \vec{i} + \nabla_y \vec{j} + \nabla_z \vec{k}$ dan $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$

skalyar funkciyanıń gradient operatorınıń DKS daǵı formulasınan paydalanamız.

Nabla operatori menen iyrimniń $\nabla \times \vec{r}$ kóbeymesin determinant formasında jazıp

alamız. $\nabla_{yz} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ h.t.b

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} \nabla_y z + \nabla_x \vec{j} z + y \nabla_z \vec{i} + \vec{k} \nabla_y x - \vec{j} \nabla_z x - \nabla_x y \vec{k} = 0$$

Juwbabi: $\text{rot } \vec{r} = 0$.

Másele №6. Aralıq gradienti $\text{grad } r$ radius vektori $\vec{r}$ diń ortı ekenligi

dálillensin: $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$

Berilgeni: $\text{grad } \vec{r}$

Sheshiliwi: r aralıq Dekart koordinataları x, y, z arqalı ańlatıladı: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. r diń menshikli tuwındıların alamız:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}. \text{ Tap solay } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Bulardan: $\text{grad } r = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r}$ boladı.

Juwabi: $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$

Másele №7. Vektorlardıń dekart ańlatpalarınan paydalanıp, $\text{rot grad } \varphi = 0$ ekenligi dálillensin.

Berilgeni: $\text{rot grad } \varphi = 0$

Sheshiliwi:

$$\text{rot}_x \text{ grad } \varphi = \frac{\partial}{\partial y} \text{ grad}_z \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \text{ grad}_y \varphi = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0.$$

Tap solay: $\text{rot}_y \text{ grad } \varphi = 0$, $\text{rot}_z \text{ grad } \varphi = 0$. Demek: $\text{rot grad } \varphi = 0$.

Juwabi: $\text{rot grad } \varphi = 0$.

J U W M A Q L A W

Fizika hám astronomiya oqıtıwshıların tayarlawda, olardıń sanasın ósiriwde hám álemniń birden-bir fizikalıq kórinisin qalıplestiriwde teoriyalıq fizika óz aldına áhimiyetke iye. Teoriyalıq fizika kursı joqarı matematika, vektorlar analizi, analitikalıq geometriya, differenciyal hám integral esaplawlar menen tıǵız baylanısqa. Teoriyalıq fizika kursında ápiwayı tuwındılardan tısqarı “gradient”, “divergenciya” hám “rotor” keńislik tuwındılarında isletiledi. Olardı bilmey, túp negizgi mánisin túsınbey, teoriyalıq fizika kursın ózlestiriw tolıq bolmaydı. Sol sebepli, qollanbada oqıwshılardıǵa iymek sıızqlı koordinatalar, olarda keńislik tuwındılarınıń jazılıwı, bir kordinatalıq sistemadan ekinshi sistemaǵa ótiw sıyaqlı teoriyalıq bilimler berildi. Gradient, divergenciya hám rotorlardıń Dekart, Sferalıq hám Cilindrlık koordinatalarda jazılıwı keltiriledi. Teoriyalıq fizika kursınıń “Kvant mexanikası” bóliminde ótiletuǵın “Háreket muǵdarı momenti operatori” teması boyınsha orbital moment operatorlarınıń Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalarda sistemasına ótkeriliwi qolaylı berilgen. Ámeliy máseleler sheshiw metodikası bayan etilgen.

Usı qollanba Joqarı oqıw orınları studentlerine hám qalaberse fizikaǵa qızıǵatuǵın hámme oqıwshılardıǵa paydalı derek boladı degen úmittemiz.

Keńislik tuwındılarınıń Sferalıq hám Cilindrlik koordinatalarda jazılıwı temasına tiyisli qısqasha

GLOSSARIY

Komplanar vektorlar	Bazı bir tegislikke parallel vektorlar
Izobet (sirt)	Barlıq noqatlarında funkciyanıń ózgermes mánisine iye bolǵan izobet yamasa ekvipotenciya bet dep ataladı.
Koordinatalıq vektorlar	$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ vektorlar koordinatalıq vektorlar dep ataladı.
Gradient	Berilgen noqattı qorshap alǵan jabıq bettiń, formasınan qatıy názer, sheksiz kemeyiwi menen birge, ol shegaralanǵan kólem nolge umtıladı. Sol shárt orınlanǵanda joqarıdaǵıday dúzilgen qatnastıń bar hám anıq limiti skalyar funkciyanıń φ diń berilgen noqattaǵı gradienti dep ataladı hám $\text{grad } \varphi$ arqalı belgilenedi.

Skalyar funkciyanıń berilgen noqattaǵı gradienti usı skalyar funkciyanıń usı noqattaǵı keńislik vektor tuwındısı dep ataladı qandaydır anıq vektor muǵdarına umtıladı.

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \varphi \cdot d\vec{S}}{V}$$

Rotor	Ekinshi qatnastıń limitin ańlatıwshı vektor muǵdar $\vec{a}$ vektorınıń berilgen noqattaǵı iyrimi dep ataladı hám $\text{rot } \vec{a}$ kórinisinde jazıladı. $\text{rot } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint (d\vec{S} \vec{a})}{V},$
-------	--

Divergenciya	Birinshi qatnastı ańlatıwshı skalyar muǵdar $\vec{a}$ vektorınıń berilgen noqattaǵı divergenciyası dep ataladı hám $\text{div } \vec{a}$ kórinisinde jazıladı.
--------------	--

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint [\vec{a} d\vec{S}]}{V},$$

Lame koefficienti	Koordinatalıq vektorlarınıń modullerin (1.12) formula bóyinsha iymek siziqli koordinatalarda ańlatıwshı H_1, H_2, H_3 arnawlı koefficientler Lamé koefficientleri dep ataladı.
-------------------	--

Lejandr operatorı	Bul jerde kórsetilgen operator Lejandr operatorı dep ataladı.
-------------------	---

$$\Delta = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Nabla – operatorı

Joqarıda kórsetilgenindey skalyar funkciyanıń gradienti, vektor divergenciyası hám vektor iyrimi táriypine muwapıq keltirilgen formulalardan belgili, funkciyanıń bazı bir keńislik tuwındısın biliw ushin berilgen noqatti qorshap alǵan sheksiz kishkene bet normalına usı funksiya sáykes túrde oń tárepinen kóbeytirilip, soń kerekli limit alınadı. Bul matematik ámeldi ańlatıw ushın usı simvol qabıl etilgen.

$$\nabla = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{n} dS}{V}$$

Bul simvol nabla yamasa Gamilton operatorı, yamasa gamiltonion dep ataladı.

Ayrım ádebiyatlarda ∇ simvolı ornına $\frac{d}{d\vec{r}}$ simvolı paydalanıladı. Keńislik tuwındılarınıń táriyplerin shártli túrde ańlatıwshı joqarıdaǵı formulalarda nabla simvolı menen kórsetilgen sáykes matematik ámel usı simvolıdın oń tárepinde turǵan funkciyaǵa ǵana tiyisli.

PAYDALANILGAN ÁDEBIYATLAR:

1. Rasulov E., Begimqulov U. Kvant fizikasi (1-qism). T., "Fan va texnologiya" nashriyoti, 2006 – 352 b.
2. Давидов А.С. Квантовая механика. М.; Наука, 1973 – 704с.
3. Маллин Р.Х. Майдон назарияси. Ташкент., «Ўқитувчи» нашриёти, 1965. – 491 б.
4. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике: Учебное пособие для вузов – М.: - Высшая школа, 1984. – 319 с.

Internet derekleri:

<http://www.rec.vsu.ru>

<http://www.ntimgudt.ru>

<http://umu.kemsu.ru>

<http://www.phys.nsu.ru>

M A Z M U N Í

Kirisiw.....	3
§1. İymek sıziqlı koordinatalar.....	4
§2. Maydan funkciyasınıń keńislik tuwındılarına qısqasha anıqlama	9
§3. Keńislik tuwındılarınıń ortogonal iymek sıziqlı koordinatalarda jazılıwı	11
§ 4. Keńislik tuwındılarınıń Sferalıq koordinatalarda jazılıwı	15
§5. Keńislik tuwındılarınıń Cilindrlık koordinatalarında jazılıwı	18
§6. Dekart koordinatalar sistemasınan Sferalıq koordinatalar sistemasına ótiwdiń jáne bir (alternativ) usılı	20
§7. Dekart koordinatalar sistemasınan Cilindrlık koordinatalar siste- masına ótiwdiń jáne bir (alternativ) usılı.....	24
§8. Háreket muǵdarı momenti operatorın Sferalıq hám Cilindrlık koordinatalar sistemasında ańlatıw	26
§9. Keńislik tuwındıları boyınsha máseleler sheshiw	32
Juwmaqlaw	35
Glossariy	36
Paydalanılǵan derekler	38

Tuzuvchilar:

Azizbek Matekov Marat uli –Ózbekistan Milliy universitetiniń
astronomiya qánigeligi 1- basqısh magistrantı.

Bahram Yavidov Yangibaevich – Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik
pedagogikalıq instituti Fizika oqıtıw metodikası kafedrası docenti,
fizika-matematika ilimleriniń doktorı.

**KENİSLİK TUWÍNDÍLARÍNÍN SFERALÍQ HÁM CİLİNDRLİK
KOORDİNATALARDA JAZÍLÍWÍ
(oqıw-metodikalıq qollanba)**

Oqıw-metodikalıq qollanba Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik
pedagogikalıq instituti Ilimiy oqıw-metodikalıq keńesiniń qararı
(10-aprel 2015-jılǵı №6 -sanlı protokolı) menen baspadan
shıǵarıwǵa usınılǵan.

Bas redaktor *Q.M. Koshanov*

Tex. redaktor *E.K.İskenderova*

Operator *N.Nisanbaev*

Ájiniyaz atındaǵı NMPI redakciya-baspa bólimi

Ájiniyaz atındaǵı NMPI baspaxanasında basılǵan 2016-j.
Buyırtpa ----- . Nusqası 100 dana. Formatı 60x84. Kólemi 2,6 b.t.
742005, Nókis qalası, A.Dosnazarov kóshesi-104. Reestr № -----