

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

AL XORAZMIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Qo'l yozma huquqida

UDK 517.55

SHARIPOVA SHOHISTA BAKBERGAN QIZI

Parabolik ko'pxilliklarda plyurikompleks grin funksiyasining xossalari.

mavzusida

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

dissertatsiya

Mutaxassislik: 5A130101-Matematika (yo`lanishlar bo'yicha-matematik analiz)

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n. Atamuratov A.A.

Urganch - 2015

MUNDARIJA

KIRISH

0.1. Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.....	3
0.2. Dissertatsiya ishining mazmuni.....	5

I-BOB. PLYURIPOTENSIALLAR NAZARIYASI VA PLYURIKOMPLEKS GRIN FUNKSIYASI.

1.1. $\mathbb{C}^n$ fazo. Golomorf funksiyalar.....	10
1.2. Plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....	22
1.3. Ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar.....	26
1.4. Grin funksiyasi va uning xossalari.....	28

II-BOB. KO'MPLEKS KO'PXILLIKLAR.

2.1. Ko'pxillik tushunchasi. Ko'mpleks ko'pxilliklarda analitik funksiyalar.....	35
2.2. Shteyn ko'pxilliklari.....	39

III-BOB. PARABOLIK KO'PXILLIKLARDA GRIN FUNKSIYASI

3.1. Parabolik ko'pxilliklar. Xossalari.....	41
3.2. Parabolik ko'pxilliklarda potentsiallar nazariyasi.....	50
3.3. Grin funksiyasining xossalari.....	52
Xulosa.....	56
Adabiyotlar.....	57

KIRISH

0.1. Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.

1.1. Mavzuning dolzarbligi. Magistrlik dissertatsiyasi kompleks ko'pxilliklarning muhim sinfini tashkil etuvchi parabolik tipdagi Shteyn ko'pxilliklarida aniqlangan analitik funksiyalar va ularni baholashda asosiy o'rin tutgan ekstremal Grin funksiyasi va uning xossalarini o'rganishga bag'ishlanadi. XX-asrning oxiriga kelib shakllangan bu yo'nalish 20 yildirki mutahassislar diqqat markazida turmoqda. Bu yo'nalishda A.Sadullayev, A. Zariahi, P.Griffiths, J.King, A.Aytuna, W.Stoll, J.P.Demailly, P.M.Wong kabi yetakchi matematiklar ishlarini qayd etib o'tishimiz mumkin. P.Griffiths va J.King tomonidan parabolik ko'philliklarda Newanlinna nazariyasi o'rganilgan. Ekstremal Grin funksiyasi dastavval parabolik ko'philliklar uchun A.Zariahi tomonidan kiritilib uning bir qator hossalari isbot qilindi. Hozirda kompleks analiz metodlari ko'pgina sohalardagi masalalarni yechishda keng qo'llanlib kelinadi va bu borada kompleks fazolarning umulashmasi hisoblangan ko'philliklarda analitik funksiyalarnig mukammal nazariyasini qurish muammosi dolzarb hisoblanadi.

1.2. Ishning maqsadi. Parabolik ko'pxilliklarda ekstremal Grin funksiyasi xossalarini o'rganish.

1.3. Ishning vazifalari. Dissertatsiyada quyidagi asosiy masalalar qaraladi:

- Parabolik ko'pxilliklarni alohida hususiyatlarini tadqiq qilish va o'ziga hos jihatlarini ajratib ko'rsatish.

- Parabolik ko'pxilliklarda plyurikompleks Grin funksiyasi va uning hossalari o'rganish.

1.4. Tadqiqot ob'yekti. Parabolik ko'philliklarda aniqlangan analitik funksiyalar, Plyurisubgarmonik funksiyalar.

1.5. Tadqiqot predmeti. Ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar.

1.6. Tadqiqot usullari. Funksional analiz, ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kompleks potentsiallar nazariyasi usullari.

1.7. Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi. Mazkur tadqiqot ishida parabolik ko'pxilliklarda plyurikompleks Grin funksiyasi uchun Bernshteyn-Uolsh tengsizligi va uning uzluksizlik xossalari isbot qilinadi.

1.8. Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati va tadbiqu. Olingan natijalar nazariy xarakterga ega. Natijalar va usullarni matematik analiz, funksional analiz va golomorf funksiyalar nazariyasining tadbiquorida foydalanish mumkin.

1.9. Ish tuzilishi va tarkibi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob hamda adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Har bir bob bo'limlardan tuziladi.

0.2. Dissertatsiya ishining mazmuni.

Dissertatsiya ishining birinchi bobida tayanch tushunchalar keltiriladi. Bunda kompleks fazo va unda aniqlangan golomorf funksiyalarning xossalari, kompleks potentsiallar nazariyasi asosini tashkil etuvchi plyurisubgarmonik funksiyalar, ekstremal plurisubgarmonik funksiyalar va Grin funksiyasining xossalari o'rganiladi.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi kompleks ko'pxilliklar va ularda aniqlangan analitik funksiyalarning ba'zi muhim xossalarini o'rganishga bag'ishlanadi. Ikkinchi bobning birinchi paragrafida Kompleks ko'pxillik ta'rifi keltirilib, kompleks ko'pxillikda analitik funksiyalarning quyidagi lokal xossalari isboti bilan keltirilgan.

Teorema 2.1.1. (Yagonalik teoremasi) *Agar ikki f va g funksiyalar bog'lamli kompleks analitik M ko'pxillikda golomorf bo'lib, M ning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plamida ustma-ust tushsa, u holda ular butun M da ustma-ust tushadi.*

Teorema 2.1.2. (Modulning maksimum prinsipi) *Agar f funksiya bog'lamli kompleks analitik M ko'pxillikda golomorf bo'lsa va M ning biror ichki nuqtasida $|f|$ maksimumga erishsa, u holda f funksiya M ning hamma yerida o'zgarmas bo'ladi.*

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida Shteyn ko'pxilliklariga oid ma'lumotlar keltirib o'tiladi va quyidagi asosiy xossalari keltirib o'tilgan.

Teorema 2.2.1. *M kompleks ko'pxillik Shteyn ko'pxilligi bo'lishi uchun uning chegarasida chegaralanmagan va cheksizga intiluvchi shunday silliq va qat'iy plyurisubgarmonik funksiya mavjud bo'lishi, ya'ni $\forall C \in \mathbb{R}$ uchun*

$\{p \in M : u(p) < C\} \subset\subset M$ shartni qanoatlantiruvchi $u \in psh(M)$

funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 2.2.3. Har qanday n o'lchamli M Shteyn ko'pxilligi uchun $f : M \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ xos golomorf joylashtirish mavjud.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobida parabolik ko'pxilliklar va ularda potentsiallar nazariyasi asoslarini o'rganishga bag'ishlanadi. Ushbu bobning birinchi bo'limi parabolik ko'pxillilarning asosiy muhim xossalarini keltirib o'tiladi.

Ta'rif 3.1.1. n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi parabolik deyiladi agarda unda aniqlangan chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar faqat o'zgarmas funksiyalardan iborat bo'lsa.

Parabolik ko'pxilliklarni P — o'lchov bilan bog'liq quyidagi bog'lanshi keltirib o'tiladi.

Teorema 3.1.1. X Shteyn ko'pxilligi parabolik bo'lishi uchun $\omega(z, \bar{B}_1) \equiv -1$ bo'lishi zarur va yetarli.

Ta'rif 3.1.2. n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi S —parabolik deyiladi agarda shunday $\rho(z)$ plyurisubgarmonik funksiya topilib,

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad D_c = \{z \in X : \rho(z) < c\} \Subset X$;

2. $\rho(z)$ funksiya biror $K \subset X$ kompaktdan tashqarida maksimal bo'lsin.

Ya'ni $X \setminus K$ da $(dd^c \rho)^n = 0$.

Agar yuqoridagi ta'rifda qo'shimcha ravishda $\rho \in C(X)$ shart ham bajarilsa, u xolda ko'pxilligimiz S^* — *parabolik deyiladi*.

$O(X)$ orqali X ko'pxillikda aniqlangan analitik funksiyalar fazosini belgilaymiz. $O(X)$ Freshe fazosini strukurasini o'rganilgan.

Teorema 3.1.2. *n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi uchun quyidagi shartlar ekvivalent:*

1. X *parabolik ko'xillik*
2. $O(X)$ *fazo DN xossaga ega*
3. $O(X)$ *fazo Freshe fazosi sifatida $O(\mathbb{C}^n)$ fazoga izomorf.*

Quyidagi natija parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalar Freshe fazolari o'rganishda muhimdir.

Teorema 3.1.4. *n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi S^* — parabolik bo'lishi uchun X fazoning shunday $(K_s)_{s=1}^\infty$ kompaktlar bilan qoplamasi mavjud bo'lib,*

$$(O(X), \| \cdot \|_{K_s}) \quad \text{va} \quad (O(\mathbb{C}^n), \| \cdot \|_{P_s}), P_s = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq e^s \right\} \quad \text{Freshe fazolari eguvchan}$$

izomorf bo'lishi zarur va yetarli.

Uchinchi bobning ikkinchi va uchinchi bo'limlarida Parabolik ko'pxilliklarda plyurikompleks Grin funksiyai va uning xossalari isbot qilinadi.

X parabolik Shteyn ko'pxilligi va ρ unda aniqlangan maxsus potensial funksiyasi bo'lsin. quyidagi

$$u(z) \leq c_u + \rho^+(z), \quad z \in X$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $u \in psh(X)$ funksiyalar sinfini $\mathfrak{A}_\rho(X)$ orqali belgilaymiz. Bu yerda $\rho^+(z) = \max\{0, \rho(z)\}$. $\mathfrak{A}_\rho(X)$ sinfga plyurisubgarmonik funksiyalarning Lelon sinfi deyiladi.

Ta'rif 3.2.1. $K \Subset X$ to'plam uchun ushbu

$$V_\rho(z, K) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X), \quad u|_K \leq 0 \right\}$$

Funksiyaning $V_\rho^*(z, K) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} V_\rho(w, K)$ yuqori regularizatsiyasiga K to'plamning ekstremal ρ – Grin funksiyasi deyiladi.

Ta'rif 3.2.2. Agar $f \in O(X)$ funksiya uchun biror musbat c_f, d sonlar topilib, barcha $z \in X$ uchun

$$|f(z)| \leq c_f(1 + e^{\rho(z)})^d$$

Tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda f funksiyaga darajasi d dan oshmagan ko'phad deyiladi va yuqoridagi (1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi d sonlar orasidan eng kichigi ko'phadning darajasi deyiladi.

Uchinchi bo'limda Grin funksiyasining quyidagi xossalari isbot qilinadi.

1⁰. Agar $P_m(z)$ m -darajali ko'phad bo'lsa, u xolda ixtiyoriy $E \subset X$ kompakt uchun

$$|P_m(z)| \leq \|P_m\|_E \cdot e^{V_\rho(z,E)}, \quad z \in X,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2⁰. Agar E kompakt o'suvchi $E_j \subset E_{j+1}$ kompaktlarni yig'indisi shaklida ifodalangan bo'lsa, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, u xolda $j \rightarrow \infty$ da

$V_\rho^*(z, E_j) \uparrow V_\rho^*(z, E)$ bo'ladi.

Grin funksiyasining keyingi ikkita xossasi faqat yuqoridagi misolga o'xshash regulyar tipdagi parabolik ko'pxilliklarga taaluqli bo'ladi.

Bunda A.Sadullaev va A.Aytuna tomonidan kiritilgan regulyar parabolik ko'pxillik ta'rifidan foydalanamiz. $\mathfrak{S}(X)$ orqali X parabolik ko'pxillikda aniqlangan barcha ko'phadlar fazosini belgilaymiz.

Ta'rif 3.2.3. Agar $\mathfrak{S}(X)$ fazo $O(X)$ analitik funksiyalar fazosida zich bo'lsa, u xolda X parabolik ko'pxilliklikka regulyar parabolik ko'pxillik deyiladi.

3⁰. X regulyar parabolik ko'pxillikda ixtiyoriy $E \subset X$ kompakt uchun

$$V(z, E) = \sup \left\{ \frac{1}{\deg P} \ln |P(z)| : P \in \mathfrak{S}(X) \quad \|P\|_E \leq 1 \right\} \quad (2)$$

tenglik o'rinlidir.

$\deg P$ – ko'phadning darajasi.

I-BOB. PLYURIPOTENSIALLAR NAZARIYASI VA PLYURIKOMPLEKS GRIN FUNKSIYASI.

1.1 $\mathbb{C}^n$ fazo. Golomorf funksiyalar.

$\mathbb{R}^{2n}$ Evklid fazosini qaraylik. Ravshanki, bu fazo elementlari tartiblangan $2n$ ta haqiqiy $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ sonlardan tuzilgan $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ vektordan iborat.

Aytaylik, $\mathbb{R}^{2n}$ fazodagi bu vektorlar quyidagicha $z_k = x_k + ix_{n+k}$ juftlangan, ya'ni kompleks struktura kiritilgan bo'lsin. Bunda har bir tayinlangan n da $x_{n+k} = y_k$ deb belgilash kiritilsa, $z_k = x_k + iy_k$ bo'lib, $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleks sonlardan tuzilgan tartiblangan $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ vektor hosil bo'ladi. Uni z bilan belgilaylik:

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Tarif 1.1.1. Har bir elementi (vektori)

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

bo'lgan, bunda $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, fazo n o'lchamli *kompleks fazo* deyiladi va u $\mathbb{C}^n$ kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifdan $\mathbb{C}^n$ ning ushbu

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{n \text{ ta}}$$

dekart ko'paytmadan iborat ekani ko'rinadi. Xususan, $n = 1$ bo'lganda,

$\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ bo'ladi.

Demak, n o'lchamli kompleks fazo $\mathbb{C}^n$ ning nuqtasi, $2n$ o'lchamli Evklid fazo $\mathbb{R}^{2n}$ ning nuqtasi sifatida qaralishi ham mumkin. Ba'zan, $z \in \mathbb{C}^n$ vektor quyidagicha $z = x + iy$ ifodalanadi, bunda

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

bo'lib, x, y lar $\mathbb{R}^n$ fazoning nuqtalari bo'ladi. $\mathbb{C}^n$ fazo vektorlari ustida qo'shish, kompleks songa ko'paytirish, shuningdek, vektorlarning skalyar ko'paytmasi tushunchalari kiritilishi mumkin.

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$$

bo'lsin.

$$z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n).$$

va

$$\lambda z = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n)$$

bunda λ - kompleks son.

Ushbu

$$\overline{z_1 w_1} + \overline{z_2 w_2} + \dots + \overline{z_n w_n} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k w_k}$$

yig'indi $\mathbb{C}^n$ fazo vektorlari z va w larning skalyar ko'paytmasi deyiladi va

(z, w) kabi belgilanadi:

$$(z, w) = \sum_{k=1}^n \overline{z_k w_k}$$

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

$$a) \quad (z, w) = \overline{(z, w)} \quad ;$$

$$b) \quad (\lambda z, w) = \lambda (z, w) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) .$$

Skalyar ko`paytma yordamida $z \in \mathbb{C}^n$ vektorning normasi quyidagicha ifodalanadi:

$$|z| = \sqrt{(z, z)} = \left[\sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ayni paytda ushbu $\rho(z, w) = |z - w|$ miqdorning z va w vektorlar orasidagi Evklid masofasini ifodalashini ko`rish qiyin emas.

Ko`p kompleks o`zgaruvchili funksiyalar. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ to`plamdan olingan har bir  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  nuqtaga ( $z_k = x_k + iy_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$ ) biror qoidaga ko`ra kompleks son mos qo`yilgan bo`lsa, D to`plamda ko`p o`zgaruvchili ( $n$  o`zgaruvchili) *funksiya* aniqlangan deyiladi. U $f = f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ yoki $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ kabi belgilanadi. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ to`plamda berilgan bo`lib, $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in D$,

$$z^0 + \Delta z = (z_1^0 + \Delta z_1, z_2^0 + \Delta z_2, \dots, z_n^0 + \Delta z_n) \in D$$

bo`lsin. Odatda, $\Delta z = (\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_n)$ vektor z^0 ning *orttirmasi* deyiladi.

Agar $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, z^0) > 0$:

$$\rho(z^0, z^0 + \Delta z) = \sqrt{|\Delta z_1|^2 + |\Delta z_2|^2 + \dots + |\Delta z_n|^2} < \delta$$

bo`lganda

$$|f(z_1^0 + \Delta z_1, z_2^0 + \Delta z_2, \dots, z_n^0 + \Delta z_n) - f(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z^0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Bir o`zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari kabi ko`p o`zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ham ma`lum xossalarga ega. Masalan, agar $f(z)$ funksiya chegaralangan yopiq to`planning har bir nuqtasida uzluksiz bulsa, funksiya shu to`plamda tekis uzluksiz, chegaralangan bo`lib, absolyut qiymati bo`yicha o`zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Agar  $f(z)$  funksiyasi  $D$  da uzluksiz bo`lsa, u holda $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ va $|f(z)|$ ham D da uzluksizdir va, aksincha, $\operatorname{Re} f(z)$ va $\operatorname{Im} f(z)$ larning D da uzluksizligidan $f(z)$ ning ham D da uzluksizligi kelib chiqadi.

Endi funksiyaning differentsiallanuvchiligi tushunchasini keltiraylik. $\mathbb{C}^n$ fazoda aniqlangan ushbu

$$L(z) = \sum_{k=1}^n a_k z_k + \sum_{k=1}^n \overline{b_k z_k} \quad (1.1.1)$$

funksiya *chiziqli funksiya* bo`lib, u quyidagi ikkita xossaga ega:

- a) $\forall z', z'' \in \mathbb{C}^n$ uchun $L(z' + z'') = L(z') + L(z'')$,
- b) $\forall z \in \mathbb{C}^n$ va $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ uchun $L(\lambda z) = \lambda L(z)$.

Aksincha, yuqoridagi ikkita shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funksiya (1.1.1) ko`rinishga ega bo`ladi. Ushbu

$$L(z) = \sum_{k=1}^n a_k z_k \quad (1.1.2)$$

ko`rinishdagi chiziqli funksiya $\mathbb{C}^n$ – *chiziqli funksiya* deyiladi. U quyidagi xossalarga ega:

$$1) \forall z', z'' \in \mathbb{C}^n \text{ uchun } L(z' + z'') = L(z') + L(z''),$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ uchun } L(\lambda z) = \lambda L(z).$$

Ayni paytda, shu ikkita shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funksiya (1.1.2) ko`rinishga ega bo`ladi. Shunday qilib, $\mathbb{C}^n$ fazodagi

ixtiyoriy chiziqli funksiya ushbu $L(z) = \sum_{k=1}^n a_k z_k + \sum_{k=1}^n \overline{b_k} \overline{z_k}$ ko`rinishga ega

bo`lib,  $\mathbb{C}^n$  – chiziqli funksiya uchun  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  bo`ladi.

Tasdiq 1.1.1. Chiziqli funksiya $\mathbb{C}^n$ - chiziqli funksiya bo`lishi uchun ushbu $L(iz) = iL(z)$ tenglikning bajarilishi zarur va etarlidir.

Ko`p kompleks o`zgaruvchili $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ funksiyaning differentsiallanuvchiligi tushunchasi matematik analiz kursida keltirilgan funksiyaning differentsiallanuvchiligi tushunchasi kabi kiritiladi. Faraz qilaylik, $z^0 \in \mathbb{C}^n$ nuqtaning biror U atrofida $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ berilgan bo`lsin.

$z \in U$ nuqtani olib, $\Delta z = z - z^0$, $\Delta f = f(z) - f(z^0)$ ayirmalarni hosil qilamiz. Bu ayirmalar mos ravishda *argument orttirmasi* va *funksiya*

orttirmasi deyiladi. Ravshanki, funksiya *orttirmasi* Δf argument *orttirmasi* Δz ga bog`liq bo`ladi.

Ta'rif 1.1.2. Agar shunday chiziqli L funksiya mavjud bo`lib, ushbu

$$\Delta f = L(\Delta z) + \alpha(\Delta z) \quad (1.1.3)$$

tenglik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z^0 nuqtada *differentiallanuvchi* deyiladi.

Bunda $\alpha(\Delta z)$ cheksiz kichik miqdor, yani

$$|\Delta z| \rightarrow 0 \quad \text{da} \quad \frac{\alpha(\Delta z)}{|\Delta z|} \rightarrow 0.$$

(1.1.3) munosabatdagi $L(\Delta z)$ ga funksiyaning z^0 nuqtadagi differentsiali deyiladi va df kabi belgilanadi:

$$df = L(\Delta z)$$

Ta'rif 1.1.3. Agar shunday $\mathbb{C}$ - chiziqli L funksiya mavjud bo`lib, ushbu

$$\Delta f = L(\Delta z) + \alpha(\Delta z)$$

tenglik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z^0 nuqtada $\mathbb{C}$ -*differentiallanuvchi* deyiladi.

Argument *orttirmasi* $\Delta z = (z_1 - z_1^0, z_2 - z_2^0, \dots, z_n - z_n^0)$, odatda, $dz = (dz_1, dz_2, \dots, dz_n)$ kabi belgilanadi. U holda funksiyaning differentsialini quyidagicha

$$df = \sum_{k=1}^n (a_k dz_k + b_k \overline{dz_k}) \quad (1.1.4)$$

ifodalanishini topamiz. Ravshanki, $\mathbb{C}$ - diferentsiallanuvchi funksiya uchun $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ bo`ladi.

Endi (1.1.4) munosabatdagi a_k va b_k lar $f(z)$ funksiyaning xususiylar hosilalari bilan bog`langanligini ko`rsatamiz. Aytaylik,

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

bo`lsin. Agar $z = (x, y)$, $z_k = x_k + iy_k$ deb qaralsa, $f(z)$ funksiyasi haqiqiy (x, y) argumentli funksiyaga aylanadi. Haqiqiy argumentli funksiya differentsiallari xossaligidan foydalanib topamiz:

$$df = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right). \quad (1.1.5)$$

Ravshanki,

$$dz_k = dx_k + idy_k, \quad \bar{dz}_k = dx_k - idy_k$$

tenglikdan

$$dx_k = \frac{dz_k + \bar{dz}_k}{2}, \quad dy_k = \frac{-dz_k + \bar{dz}_k}{2}i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

bo`lishi kelib chiqadi. Natijada (1.1.5) tenglik ushbu

$$df = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) dz_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) \bar{dz}_k \right\} \quad (1.1.6)$$

ko`rinishga keladi. (1.1.4) va (1.1.6) tengliklardan

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) \\ b_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.7)$$

bo`lishini topamiz. Kompleks analiz kursida, (1.1.7) tenglikdagi  $a_k$  ga  $f(z)$  funksiyaning  $z_k$  buyicha,  $b_k$  ga esa  $\bar{z}_k$  bo`yicha xususiy hosila deb qaraladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) \\ b_k &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k} i \right) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Bu belgilar natijasida funksiyaning differentsiali ushbu

$$df = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right)$$

ko`rinishga keladi. Kelgusida biz

$$\partial f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

belgilashlardan ham foydalanamiz. Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{C}$ -differentsiallanuvchi bo`lsa, unda  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  bo`lib,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

bo`ladi.

Teorema 1.1.1. Differentsiallanuvchi $f(z)$ funksiya z^0 nuqtada $\mathbb{C}$ -

differentsiallanuvchi bo`lishi uchun  $\bar{\partial} f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k = 0$  bo`lishi zarur

va etarli.

Endi kompleks analizda muxim boʻlgan funksiyaning golomorfligi taʼrifini keltiramiz.

Taʼrif 1.1.3. Agar $f(z)$ funksiya z^0 nuqtaning faqat oʻzida $\mathbb{C}$ -differentiallasuvchi boʻlmasdan, balki uning biror atrofidagi har bir nuqtada $\mathbb{C}$ -differentiallasuvchi boʻlsa, $f(z)$ funksiya z^0 nuqtada *golomorf* funksiya deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan boʻlsin.

Taʼrif 1.1.4. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf boʻlsa, $f(z)$ funksiya D sohada *golomorf* deyiladi.

D sohada golomorf boʻlgan funksiyalar toʻplami (sinfi) $\mathcal{O}(D)$ kabi belgilanadi.

2⁰. *Golomorf funksiyalarning xossalari.*

1-xossa. Agar $f(z)$ funksiya $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ nuqtada golomorf boʻlsa, funksiya har bir z_j argument ($j = 1, 2, \dots, n$) boʻyicha z^0 nuqtada golomorf, yaʼni funksiyaning $z_1, z_2, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ argumentlarini tayinlab, uni z_j ning funksiyasi sifatida

$\phi(z_j) = f(z_1^0, z_2^0, \dots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \dots, z_n^0)$ qaralganda, bu funksiya z_j^0 nuqtada golomorf boʻladi.

Demak, koʻp argumentli funksiyaning golomorfligidan, uning har bir argumenti boʻyicha golomorf boʻlishi kelib chiqadi. Ayni paytda, har bir

argumenti bo'yicha golomorf bo'lgan funksiyaning ko'p argumentli funksiya sifatida golomorf bo'lishini ko'rsatish murakkab masalalardan hisoblanadi va biz uni keyinroq bayon etamiz.

2-xossa. Agar $f(z)$ funksiya

$$U : \{ |z_v - a_v| < r_v, v = 1, 2, \dots, n \}$$

polidoirada golomorf, uning yopilmasi $\bar{U}$ da uzluksiz, ya'ni $f \in O(U) \cap C(\bar{U})$ bo'lsa, u holda $\forall z \in U$ nuqtada ushbu

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} \quad (1.1.8)$$

integral formula o'rinli bo'ladi, bunda integral

$\Gamma : \{ |z_v - a_v| = r_v, v = 1, 2, \dots, n \}$ ostov bo'yicha olingan karrali integral.

Xususan, $n = 1$ bo'lganda (1.1.8) formula Koshi formulasiga keladi.

3-xossa. Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsa, uning istalgan tartibidagi

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_n^{k_n}}$$

xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar ham D sohada golomorf bo'ladi.

4-xossa. (*Murakkab funksiya yoki funksiyalar kompozitsiyalarining golomorfligi*). Faraz qilaylik, $\mathbb{C}^k$ fazoda G ($G \subset \mathbb{C}^k$), $\mathbb{C}^n$ fazoda esa

D ($D \subset \mathbb{C}^n$) sohalar berilgan bo`lib, $\mathbb{C}^k$ ning koordinatalari

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, $\mathbb{C}^n$ niki esa $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ bo`lsin. G sohada

$$z_j = \phi_j(\xi) = \phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

funksiyalar, D sohada esa

$$w = f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

funksiya berilgan bo`lib, ular yordamida ushbu

$$w = f(\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \dots, \phi_n(\xi))$$

murakkab funksiya (ya'ni f va ϕ funksiyalarning kompozitsiyasi $f \circ \phi$)

hosil qilingan bo`lsin.

Natija 1.1.1. Agar $f \in \mathcal{O}(D)$ bo`lsa, u holda ixtiyoriy kompleks to`g`ri chiziq l uchun

$$f|_l \in \mathcal{O}(D)$$

bo`ladi.

5-xossa. Agar $f \in \mathcal{O}(D)$, $g \in \mathcal{O}(D)$ bo`lsa, u holda

$$f \pm g \in \mathcal{O}(D), \quad f \cdot g \in \mathcal{O}(D)$$

bo`ladi.

6-xossa (yagonalik printsipli). Agar D sohada holomorf bo`lgan  $f(z)$  funksiya  $D$  dagi biror  $\{|z-a| < r\}$  atrofda aynan nolga teng bo`lsa, u holda D sohaning barcha nuqtalarida $f(z) = 0$ bo`ladi.

7-xossa. (*maksimumlar printsiipi*). Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo`lib,  $|f(z)|$  funksiya o`zining eng katta qiymatiga D sohaning ichida erishsa, ya'ni biror $a \in D$ va $\forall z \in D$ uchun

$$|f(a)| \geq |f(z)|$$

bo`lsa, u holda  $f(z) = \text{const}$  bo`ladi.

8-xossa. (*Liuvill teoremasi*). Agar $f(z)$ funksiya $\mathbf{C}^n$ da golomorf va chegaralangan bo`lsa, u o`zgarmas bo`ladi:

$$f(z) \equiv \text{const}, \quad z \in \mathbf{C}^n.$$

9-xossa. (*Veyershtrass teoremasi*). Aytaylik, D sohada golomorf $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo`lib, u sohaning ichida, ya'ni sohadan olingan ixtiyoriy kompakt  $F$  da  $f(z)$  ga tekis yaqinlashuvchi bo`lsin:

$$\|f_k(z) - f(z)\|_F = \max_{z \in F} |f_k(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

U holda

$$1) f(z) \in \mathcal{O}(D);$$

$$2) \text{ istalgan tartibdagi xususiy hosilalar ketma – ketligi}$$

$$\frac{\partial^{|j|} f_k}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}}, \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_n), \quad |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n,$$

D soha ichida tekis yaqinlashuvchi bo`ladi:

$$\frac{\partial^{|j|} f_k}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} \rightarrow \frac{\partial^{|j|} f}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} \quad (k \rightarrow \infty)$$

1.2 Plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Plyurigarmonik funksiyalar. $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $u(z) \in C^2(D)$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $z^0 \in D$ va bu nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy kompleks to'g'ri chiziq $l: z = z^0 + w\xi$, $w \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{C}$ uchun ushbu $\varphi(\xi) = u / l = u(z^0 + w\xi)$ kesim – funksiya $\xi = 0$ nuqtada garmonik, ya'ni $\xi = 0$ da $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \cdot \partial \bar{\xi}} = 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya D da plyurigarmonik funksiya deyiladi.

Plyurigarmonik funksiyalar sinfi $ph(D)$ kabi belgilanadi. Aytaylik, $u(z) \in ph(D)$ bo'lsin. Unda

$$\frac{\partial^2 u(z^0 + w\xi)}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = 0$$

bo'lib, murakkab funksiyaning differensiallash qoidasidan

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \overline{w_j w_k} = 0, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad \text{ekanligini ko'ramiz. Bundan va}$$

$w \in \mathbb{C}^n$ vektorning ixtiyoriyligidan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, plyurigarmonik funksiyalar sinfi (1.2.1) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi va ba'zan bu sistema plyurigarmonik funksiyaning ta'rifi sifatida ham qaraladi.

Teorema 1.2.1. *Agar $f(z) = u(z) + iv(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf bo'lsa, u holda*

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(z)$$

funksiyalar D sohada plyurigarmonik bo'ladi va aksincha, agar $u(z)$ funksiya D sohada plyurigarmonik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $B(z^0, r) \subset D$ atrofda $u(z)$ funksiya biror $f(z) \in \mathcal{O}(B(z^0, r))$ golomorf funksiyaning haqiqiy qismi bo'ladi: $u(z) \equiv \operatorname{Re} f(z)$.

Plyusubgarmonik funksiyalar. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan $u(z) : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(z)$ yuqoridan yarim uzluksiz;

2) ixtiyoriy l kompleks to'g'ri chiziq uchun $u|_l$ funksiya $l \cap D$ da subgarmonik bo'lsa, $u(z)$ funksiya D sohada plyurisubgarmonik funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar to'plami $psh(D)$ kabi belgilanadi.

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada plyurisubgarmonik bo'lgan funksiya $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ da aniqlangan funksiya sifatida subgarmonik funksiya bo'ladi. Uni subgarmonik funksiyalarning 2 – shartini bajarishini tekshirish mumkin.

Binobarin, subgarmonik funksiyalarning xossalari plyurisubgarmonik funksiyalar uchun ham saqlanadi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar quyidagi xossalarini ko'rib chiqamiz.

1) agar $u(z) \in psh(D)$ bo'lsa, u holda

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0, \quad (1.2.2)$$

formula bilan aniqlangan $u_\delta(z)$

$$D_\delta = \left\{ x \in D : dist(\partial D, x) > \delta \right\}$$

sohada plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi va $psh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta)$ sinfga tegishli bo'lib, $\delta \downarrow 0$ da $u_\delta(z) \downarrow u(z)$ bo'ladi;

2) agar $u(z) \in psh(D)$ funksiya $z^0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, ya'ni $u(z^0) \geq u(z)$ ($z \in D$) bo'lsa, u holda $u(z) \equiv const$ bo'ladi;

3) plyurisubgarmonik funksiyalarning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

4) monoton kamayuvchi yoki tekis yaqinlashuvchi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

5) D sohada plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ berilgan bo'lib, $u = \sup_{\alpha \in \Lambda} u_\alpha$ yuqoridan yarim uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $u(z)$

plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi, $u(z) \in psh(D)$. Jumladan,

$u_j(z) \in psh(D)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) bo'lsa,

$$\sup \{u_1(z), u_2(z), \dots, u_k(z)\} \in psh(D)$$

bo'ladi.

6) agar $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ bo'lsa, $\alpha \cdot \ln|f(z)| \in psh(D)$ bo'ladi, bunda $\alpha \geq 0$.

7) agar $u(z) \in psh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(z)} \in psh(D)$ bo'ladi, agar $u(z) \in psh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(z)] \in psh(D)$ bo'ladi.

Bu xossaning isboti subgarmonik funksiyalarning shu xossasidan bevosita kelib chiqadi.

8) D sohada aniqlangan $u(z) \in C^2(D)$ funksiyaning D da plyurisubgarmonik bo'lishi uchun ushbu

$$L(u, w) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \quad (1.2.3)$$

kvadratik formaning ya'ni Levi formasining ixtiyoriy $z \in D$ da musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir. (1.2.3) munosabatda

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ bo'lib, kvadratik formaning musbat aniqlanganligi

$\forall w \in \mathbb{C}^n$ da $L(u, w) \geq 0$ bo'lishini anglatadi.

Agar $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$ da $L(u, w) > 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya z nuqtada qat'iy plyurisubgarmonik funksiya deyiladi, agar $u(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida qat'iy plyurisubgarmonik bo'lsa, D sohada qat'iy plyurisubgarmonik funksiya deyiladi.

1.3. Ekstremal plyurisubgrmonik funksiyalar.

P - o`lchov. $\mathbb{C}^n$ - fazoda chegaralangan

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\} \quad (1.3.1)$$

ko`rinishdagi sohalarni qaraylik, bunda  $\rho(z)$  funksiya  $\bar{D}$  ning biror atrofida uzluksiz va plrisubgarmonik funksiya. Bunday sohalar kuchli psevdokavariq sohalar bilan bog`langan bo`lib, ular $\mathbb{C}^n$ fazodagi muhim sohalardan hisoblanadi.

Ushbu bo`limda potentsiallar nazariyasining dastlabki tushunchalaridan ekstremal funksiyalar va  $P$  - o`lchovlar bayon etiladi. Bunda soddalik uchun D soha sifatida (1.3.1) ko`rinishdagi soha olinadi. Aslida esa keltiriladigan ma`lumotlar (tasdiqlar) umumiyrok sohalar uchun ham o`rinli bo`ladi. Biror $E \subset D$ to`plamni olib,

$$\mathfrak{A}(E, D) = \left\{ u(z) \in Psh(D) : u|_G \leq 0, \quad u|_E \leq -1 \right\}$$

sinfni qaraylik. Ushbu

$$\omega(z, E, D) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathfrak{A}(E, D) \right\}$$

funksiyaning regulyarlangan funksiyasi

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} \omega(w, E, D)$$

E to`plamning  $P$  - o`lchov deyiladi.

Shoke lemmasiga ko`ra shunday sanoqli qism to`plam $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}(E, D)$ topiladiki,

$$\left[\sup_{u \in \mathfrak{A}} u(z) \right]^* \equiv \omega^*(z, E, D)$$

bo`ladi. Bundan, shunday monoton o`svchi

$u_j(z) \in \mathfrak{A}(E, D)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ funksiyalar ketma – ketligi mavjud bo`lib,

$$\left[\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z) \right]^* = \omega^*(z, E, D)$$

bo`lishi kelib chiqadi.

P - o`lchov quyidagi xossalarga ega:

a) agar $E_1 \subset E_2$ bo`lsa, u holda

$$\omega^*(z, E_1, D) \geq \omega^*(z, E_2, D)$$

bo`ladi. Bu  $P$  - o`lchovning *monotonlik* xossasi deyiladi;

b) agar $U \subset D$ - ochiq to`plam ushbu

$$K_j \subset K_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

kompakt to`plamlar yig`indisi: $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ shaklida ifodalangan bo`lsa, u

holda $\omega^*(z, K_j, D)$ ketma – ketlik $\omega^*(z, U, D)$ ga monoton kamayib intiladi:

$j \rightarrow \infty$ da $\omega^*(z, K_j, D) \downarrow \omega^*(z, U, D)$.

Shuningdek, ixtiyoriy $E \subset D$ to`plam uchun shunday

$$U_j \supset E, \quad U_j \supset U_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

ichma – ich joylashgan ochiq to`plamlar ketma – ketligi mavjudki,

$$\omega^*(z, E, D) = \left[\lim_{j \rightarrow \infty} \omega^*(z, U_j, D) \right]^*$$

bo`ladi;

v) P - o'lcham $\omega^*(z, E, D)$ yoki hech bir nuqtadan 0 ga teng emas yoki u aynan 0 ga teng. Bu funksiyaning aynan nolga teng,

$$\omega^*(z, E, D) \equiv 0$$

bo'lishi uchun E to'plamning plyuripolyar bo'lishi zarur va etarlidir.

g) *Ikki konstanta xaqidagi teorema.* Agar $u(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ da plyurisubgarmonik bo'lib,

$$u|_D \leq M, \quad u|_E \leq m \quad (E \subset D)$$

bo'lsa, u holda $z \in D$ da $u(z) \leq M(1 + \omega^*(z, E, D)) - m\omega^*(z, E, D)$, tengsizlik o'rinli bo'ladi.

1.4 Plyurikompleks Grin funksiyasi va uning xossalari.

$\mathbb{C}^n$ fazoda $E \subset \mathbb{C}^n$ kompakt berilgan bo'lib,
 $L = \{ u(z) \in psh(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq C_u + \ln(1 + \|z\|) \}$, C_u - konstanta bo'lib,
 $u(z)$ funksiya bog'liq emas. U holda
 $V(z, E) = \sup\{ u(z) : u(z) \in L, u|_E \leq 0 \}$ funksiya qaraylik.

Ta'rif 1.4.1. $V(z, E)$ funksiyaning regulyarlangan funksiyasi
 $V^*(z, E) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} V(w, E)$ ga E kompaktning ekstremal Grin funksiyasi deyiladi.

Grin funksiyalari quyidagi xossalarga ega:

1) $V^*(z, E) \in psh(\mathbb{C}^n)$ mavjud bo'lishligi uchun E ning plyuripolyar bo'lmashligi zarur va yetarlidir. E plyuripolyar bo'lsa, $V^*(z, E) \equiv +\infty$ bo'ladi. Aks holda, $V^*(z, E) \in L$ bo'lib, $\{z \in \mathbb{C}^n: V(z, E) < V^*(z, E)\}$ to'plam plyuripolyardir.

Bernshteyn – Uolsh tengsizligi. Agar $P_m(z)$ m - darajali polinom bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{m} \ln |P_m(z)| \leq \frac{1}{m} \ln \|P_m\|_E + V(z, E), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $P_m(z)$ m - darajali polinom bo'lib, u $P_m(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ bo'lgani uchun $\ln |P_m(z)| \in psh(\mathbb{C}^n)$ bo'ladi. Quyidagi funktsiyani qaraylik,

$$u(z) = \frac{1}{m} \ln |P_m(z)| - \frac{1}{m} \ln \|P_m\|_E = \frac{1}{m} \ln \frac{|P_m(z)|}{\|P_m\|_E}$$

$u(z)$ funktsiyaning kompaktdagi qiymatlari

$$u(z)|_E = \frac{1}{m} \ln \frac{|P_m(z)|}{\|P_m\|_E} |_E \leq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Endi $u(z) \in L$ ga tegishlilikini ko'rsatamiz.

$P_m(z)$ m - darajali polinom bo'lishligidan $z \rightarrow \infty$ da $\left| \frac{|P_m(z)|}{|z|^m} \right|$ chekli son

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{m} \ln |P_m(z)| - \frac{1}{m} \ln \|P_m\|_E = \\
&= \frac{1}{m} \ln |z|^m + \frac{1}{m} \ln \left| \frac{P_m(z)}{|z|^m} \right| + \ln \|P_m\|_E^{-1/m} \leq \\
&\leq \ln |z| + \ln \left(\left| \frac{P_m(z)}{|z|^m \|P_m\|_E} \right| \right)^{\frac{1}{m}} \leq C_u + \ln(1 + |z|)
\end{aligned}$$

Demak, $u(z) \in L$ sinfdan bo'lib, E kompakt da $u|_E \leq 0$ bo'lib, Grin funksiyasining aniqlanishidan $u(z) \leq V(z, E)$ bo'lishi kelib chiqadi.

2-xossa isbotlandi.

Teorema 1.4.1. *Ixtiyoriy $E \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun*

$$V(z, E) = \sup \left\{ \frac{1}{\deg p} \ln |p| : p \in \mathcal{P} \quad \|p\|_E \leq 1 \right\}$$

tenglik o'rinlidir.

Bunda $\mathcal{P}$ - barcha n o'zgaruvchili polinom(ko'phad)lar sinfi, $\deg p$ - polinomning darajasi.

4) Agar E kompakt o'suvchi $E_j \subset E_{j+1}$ kompaktlarni yig'indisi shaklida ifodalangan bo'lsa, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, u holda $j \rightarrow \infty$ da

$V^*(z, E_j) \uparrow V^*(z, E)$ bo'ladi.

$\mathbb{C}^n$ da Bernshteyn-Uolsh teoremasi

Aytaylik, $K \subset \mathbb{C}^n$ - plyuriregulyar kompakt va unda uzluksiz f -funksiya berilgan bo'lsin. U holda $f(z)$ golomorf funksiyani $e_m(f, K)$

polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkin bo'lib, u quyidagi sohada golomorf bo'ladi.

$$G_R = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : V^*(z, K) < \ln R \right\}, R > 1$$

Teorema 1.4.2. (Bernshteyn-Uolsh). *f golomorf funksiya G_R ga golomorf davom qilishi uchun*

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} e_m^{1/m}(f, K) \leq \frac{1}{R}$$

tengsizlik bajarilishu zarur va yetarli.

Isbot. a) (1.4.4) shartdan shunday $p_m(z)$ polinomlar ketma-ketligi mavjudgi, uning uchun $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - p_m\|_K^{1/m} \leq \frac{1}{R}$ bo'lib, ixtiyoriy tayinlangan $\tilde{R} < R$ uchun biror m_0 son topilib, $m > m_0$ larda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$\|f - p_m\|_K \leq \frac{1}{\tilde{R}^m}$$

Bundan esa $\|p_{m+1} - p_m\|_K \leq \frac{2}{\tilde{R}^m}$ va (3.1) ga ko'ra

$$|p_{m+1}(z) - p_m(z)| \leq \frac{2}{\tilde{R}^m} \exp[(m+1)V(z, K)], z \in \mathbb{C}^n, m \geq m_0$$

Bundan esa, $p_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (p_{m+1} - p_m)$ qator G_R kompakt qism to'plamda tekis yaqinlashuvchi, qator yig'indisi G_R da golomorf va K kompaktda f funksiya bilan ustma-ust tushadi.

b) Endi teskarisini isbotlaymiz. Aytaylik f funksiya G_R da golomorf bo'lsin.

U holda teorema 1.4.1. ga ko'ra, yani

$$\sup \left\{ \frac{1}{\deg p} \ln |p(z)| : p \in \mathcal{P}, \|p\|_K \leq 1 \right\} \equiv V(z, K).$$

va $V(z, K)$ uzluksiz bo'lganidan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday p_j polinomlar nabori mavjudki,

$$\sup \left\{ \frac{1}{s} \ln |p_j(z)|, j = 1, 2, \dots, N \right\} > \ln R - \varepsilon \quad \forall z \in \partial G_R$$

bo'ladi bundan, Veyl poliedri

$$\Pi = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |P_j| < 1, j = 1, 2, \dots, N \right\}$$

G_R da kompakt bo'ladi, ya'ni $P_j = \frac{p_j}{e^{-\varepsilon s} R^s}$ belgilashni olsak,

$$K \subset \left\{ |P_j(z)|^{1/s} \leq \frac{1}{e^{-\varepsilon} R}, j = 1, 2, \dots, N \right\}$$

Π poliedrda f golomorf funksiyaning P_j polinomlar bo'yicha qatorga yoyish mumkin:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} A_k P_1^{k_1} \dots P_N^{k_N},$$

bu yerda $k = (k_1, \dots, k_N)$ — multiindeks, $|k| = k_1 + \dots + k_N$ va

A_k — koefitsient bo'lib, darajasi t dan oshmaydigan polinom, $P_1, \dots, P_N$ lar erksiz bog'liq.

A_k uchun Koshi tipidagi tengsizlik o'rinli, yani

$$\|A_k\|_{\Pi} \leq C(f), \quad |k| = 1, 2, \dots$$

bunda $C(f)$ — o‘zgarmas bo‘lib, k ga bog‘liqmas.

Aytaylik,

$$Q_m(z) = \sum_{|k|=0}^q A_k P_1^{k_1} \dots P_N^{k_N}$$

— darajasi $m = t + sq$ ga teng polinom bo‘lsin. U holda (2.5) tenglikdan

$$\|f - Q_m\|_K \leq \sum_{|k|=q+1}^{\infty} C(f) \cdot \frac{1}{(e^{-\varepsilon} R)^{|k|}} \leq C(f, N) \cdot \frac{1}{(e^{-\varepsilon} R)^{sq}},$$

Bu yerda $C(f, N)$ — konstanta bo‘lib, m ga bog‘liqmas. Bundan esa

$$\overline{\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ m=t+sq}} \|f - Q_m\|^{1/m}} \leq \frac{1}{e^{-\varepsilon} R}$$

bo‘lib, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriyligidan,

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} e_m^{1/m}(f, K) \leq \frac{1}{R}$$

bo‘ladi. *Teorema isbotlandi.*

Agar polinomial qavariq kompakt $K \subset D$ plyuriregulyar bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $z^0 \in K$ uchun $V^*(z^0, K) = 0$ dir. Va, aksincha, $V^*(z^0, K) = 0$ bo‘lishidan $\omega^*(z^0, K, D) = -1$ bo‘lishligi kelib chiqadi. Ko‘pincha, $V^*(z, K)$ ning bu xossasini plyuriregulyarlik ta’rifi sifatida ham qabul qilishadi: agar $z^0 \in K$ nuqta uchun $V(z^0, K) = 0$ bo‘lsa, z^0 ga K kompaktning *plyuriregulyar* nuqtasi deyiladi.

Teorema 1.4.2. Agar $K \subset \mathbb{C}^n$ - plyuriregulyar bo'lsa, u holda

$$V(z, K) = V^*(z, K) \in Psh(\mathbb{C}^n) \cap C(\mathbb{C}^n) \text{ dir.}$$

II-BOB. KO'MPLEKS KO'PXILLIKLAR.

2.1. Ko'pxillik tushunchasi. Ko'mpleks ko'pxilliklarda analitik funksiyalar.

Bizga bog'lamli M Xausdorf fazosida ochiq to'plamlarning sanoqli bazasi bilan berilgan bo'lsin. $M - R^n$ dan olingan B_α sharlarga gomeomorf bo'lgan $U_\alpha \subset M$ sohalarning $U = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ qoplamasi bilan qoplangan bo'lsin. Bu yerda A -indekslarning ixtiyoriy to'plami.

f akslantirish gomeomorf akslantirish deyiladi agar u uzluksiz, teskarisi mavjud va u ham uzluksiz bo'lsa.

$(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ juftlikka karta deyiladi. Bu yerda $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow B_\alpha$ gomeomorfizm $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ juftliklar to'plamiga atlas deyiladi. Bu yerdagi V_α atroflar kordinatalari, $x^\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = \varphi_\alpha(P)$ vektor o'zgaruvchilar V_α da amal qiluvchi lokal koordinatalar deyiladi. Bu yerda $P \in V_\alpha$. Agar

$V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ bo'lsa, $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_{\alpha\beta}) \rightarrow B_\beta$

gomeomorfizm yuzaga kejadi. Bunday gomeomorfizmlar A atlasning qo'shnichilik munosabatlari deyiladi. Demak, qo'shnichilik munosabatlari bu R^n dagi sharni sharga akslantirish bo'lgani uchun uning silliqliqi haqida gapirish mumkin. Agar A atlas qo'shnichilik munosabatlari C^K sinfga tegishli bo'lsa, A ga k — silliq atlas deyiladi.

$k \geq 1$ bo'lsa $\varphi_{\alpha\beta}$ lar diffeomorfizm bo'ladi, ya'ni $\varphi_{\alpha\beta}$ differensiallanuvchi va $(\varphi_{\alpha\beta})^{-1}$ ham differensiallanuvchi bo'ladi.

Ko'pxillik tushunchasiga o'tish uchun tayin bir atlasni tanlashdan halos bo'lishimiz kerak. Buning uchun ikkita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{V'_\beta\}_{\beta \in B}$ qoplamalarga mos $A = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ va $A' = \{(V'_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in B}$ k -silliqlik atlaslar ekvivalent deyiladi, agar ularning birlashmasi

$$A \cup A' = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha), (V_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}_{\alpha \in A, \alpha' \in A'}$$

ham k -silliqlik atlas bo'lsa.

Ta'rif 2.1.1. M fazo, unda aniqlangan k -silliqlik atlasning ekvivalentlik sinflari bilan birga k -silliqlik ko'pxillik deyiladi.

V qoplamalar sohasida gomeomorf sharlar o'lchami ko'pxillikning o'lchami deyiladi: $n = \dim_R M$. Ko'mpleks ko'pxillik tushunchasi ham xuddi shunday kiritiladi.

M fazo $2n$ o'lchamli sharlarga gomeomorf bo'lgan V_α sohalar bilan qoplangan bo'lsin. $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ gomeomorfizmlar bo'lsin. $A = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ atlas ko'mpleks deyiladi, agar barcha (α, β) , $\varphi_{\alpha, \beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$ qo'shnichilik munosabatlari $A = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ dagi ochiq to'plamlarning bigolomorf akslantirishlari bo'lsa. Bunday ikkita atlas ekvivalent deyiladi, agar ularning birlashmasi yana ko'mpleks atlas bo'lsa. M fazo unda aniqlangan ekvivalentlik sinflari bilan birga ko'mpleks ko'pxillik deyiladi.

Misollar.

1. Eng sodda n o'lchamli ko'mpleks ko'pxillik bu $\mathbb{C}^n$ fazo va undagi sohalar. $\mathbb{C}^n$ uchun 2 ta kartadan iborat atlas olish mumkin. $\mathbb{C}^n$ fazoning o'zi $\varphi(z) = z$ ayniy akslantirish. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohani $B_a = \{|z - a| < \delta(a, \partial D)\}$, $a \in D$ sharlar bilan qoplaymiz. φ_α akslantirish sifatida $\varphi_\alpha(z) = z$ ayniy akslantirishni olamiz.

2. P^n kompleks proyektiv fazo chekli sondagi

$V_j = \{[\omega_0, \dots, \omega_n] \in P^n : \omega_j \neq 0\}$, $j = \overline{1, n}$ sohalar bilan qoplanadi.

Kompleks analitik ko'pxillikda golomorf funksiya tushunchasini quyidagicha kiritish mumkin:

Ta'rif 2.1.2. f funksiya m - o'lchamli M kompleks analitik ko'pxillikda golomorf deyiladi, agar har bir $U \subset M$ atrofda f funksiya U atrofda berilgan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$ lokal parametrlariga nisbatan golomorf bo'lsa.

Bu ta'rif qo'shnichilik munosabatlari yordamida parametr almashtirishga nisbatan invariant, yoki golomorfizmlik xossasini saqlaydi.

Biz kompleks ko'pxilliklarda golomorf funksiyalarning ba'zi xossalarini ko'rib chiamiz.

Teorema 2.1.1. (Yagonalik) *Agar ikki f va g funksiyalar bog'lamli kompleks analitik M ko'pxillikda golomorf bo'lib, M ning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plamida ustma-ust tushsa, u holda ular butun M da ustma-ust tushadi.*

Isbot. E orqali $f(p) = g(p)$ bo'ladigan barcha $P \in M$ nuqtalar to'plamini ochiq yadrosini belgilaymiz; E to'plam sharga ko'ra bo'sh emas. Biz E ni yopiq to'plam emasligini ham ko'rsatamiz. $P_0 \in M$ nuqta E ning limit nuqtasi bo'lsin. $\mathfrak{A} \subset M$ atrofdagi bu nuqtalar $\xi = T(p)$ lokal parametrlar bo'ladi va $f \circ T^{-1}(\xi), g \circ T^{-1}(\xi)$ funksiyalar $B \subset \mathbb{C}^m$ sharning $\xi^0 = T(P_0)$ nuqtasida golomorf, ξ^0 nuqtaning ixtiyoriy $V \subset B$ atrofida shunday ξ^1 nuqta topiladiki, $P_1 = T^{-1}(\xi^1) \in E$ biror P_1 atrofda $f \equiv g$ ekan u holda, ξ_1 nuqtaning biror atrofida $f \circ T^{-1} \equiv g \circ T^{-1}$ bo'ladi. Yagonalik teoremasiga ko'ra oxirgi ayniyat V ning hamma yerida o'rinli, bundan esa $P_0 \in E$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, E bo'sh emas va birvaqtning o'zida ham ochiq, ham yopiq. Shartga ko'ra M bog'lamli ekan, u holda $E \equiv M$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni M ning hamma yerida $f \equiv g$ bo'ladi.

Teorema 2.1.2. (Maksimum prinsipi) *Agar f funksiya bog'lamli kompleks analitik M ko'pxillikda golomorf bo'lsa va M ning biror ichki nuqtasida $|f|$*

maximumga erishsa, u holda f funksiya M ning hamma yerida o'zgarmas bo'ladi.

Isboti. $|f|$ $P_0 \in M$ nuqtada maximumga erishsin. Bu nuqtaning atrofida $\xi = T(P)$ local parametrni qaraymiz. $f \circ T^{-1}(\xi)$ funksiyaning moduli $\xi^0 = T(P_0)$ nuqtada golomorf va bu nuqtada maximumga erishadi. Natijada maximum prinsipiga ko'ra $f \circ T^{-1}$ funksiya biror ξ^0 atrofda o'zgarmas. Demak, $f \circ T^{-1}(\xi)$ biror P_0 nuqtani atrofida o'zgarmas. Yuqoridagi teoremaga ko'ra f funksiya butun M da o'zgarmas bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2.2. Shteyn ko'pxilliklari.

Biz ushbu bo'limda kompleks kopxilliklarning muhim sinflaridan bo'lgan Shteyn ko'pxilliklarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif 2.2.1. n o'lchamli M kompleks ko'pxillikka Shteyn ko'pxilligi deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1. M - golomorf qavariq bo'lsin;
2. M - golomorf ajratish xossasiga ega bo'lsin.
3. Har bir $p \in M$ nuqta uchun n ta shunday $f_\nu \in O(M)$ funksiyalar topilib, p nuqtaning atrofida birgalikda lokal kordinatalar vaziasini bajarsin.

Quyidagi natija Shteyn ko'pxilliklari golomorflik sohasining umumlashmasi ekanini ko'rsatadi.

Teorema 2.2.1. *M kompleks ko'pxillik Shteyn ko'pxilligi bo'lishi uchun uning chegarasida chegaralanmagan va cheksizga intiluvchi shunday silliq va qat'iy plyurisubgaronik funksiya mavjud bo'lishi, ya'ni $\forall C \in \mathbb{R}$ uchun $\{p \in M : u(p) < C\} \subset\subset M$ shartni qanoatlantiruvchi $u \in psh(M)$ funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Teorema 2.2.2. *Agar M Shteyn ko'pxilligi biror $\hat{M}$ kompleks ko'pxillikning ochiq qism ko'pxilligi bo'lsa, u holda shunday $f \in O(M)$ funksiya topilib, bu funksiya $\hat{M} \setminus M$ to'plamning hech bir nuqtasiga golomorf davom etmaydi.*

Shuningdek n o'lchamli Shteyn ko'pxilligini $\mathbb{C}^{2n+1}$ fazoga yopiq qism ko'pxillik sifatida joylashtirish mumkin. Ya'ni bu tasdiqni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Teorema 2.2.3. *Har qanday n o'lchamli M Shteyn ko'pxilligi uchun $f : M \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ xos golomorf joylashtirish mavjud.*

III-BOB. PARABOLIK KO'PXILLIKLARDA GRIN

FUNKSIYASI

3.1. Parabolik ko'pxilliklar. Xossalari.

Biz ushbu bo'limda Shteyn ko'pxilliklari parabolikligi tushunchalarini tahlil qilib o'tamiz va parabolik Shteyn ko'pxilliklarini ularda aniqlangan analitik funksiyalarning Freshe fazolari bilan bog'liq ayrim xususiyatlarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif 3.1.1. n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi parabolik deyiladi agarda unda aniqlangan chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar faqat o'zgarmas funksiyalardan iborat bo'lsa.

Demak paraboliklik tushunchasi quyidagiga ekvivalent ekan: agar $u(z) \in psh(X)$ va $u(z) < C$ bo'lsa u holda $u(z) \equiv const$ bo'ladi.

Potensiallar nazariyasi metodlaridan foydalanib, parabolik ko'pxilliklarni P — o'lchov yordamida tavsiflash mumkin ekan. X Shteyn ko'pxilligi berilgan bo'lsin. Ma'lumki har qanday n o'lchamli Shteyn ko'pxilligi $\mathbb{C}_w^{2n+1}$ kompleks fazoga joylashtirilishi mumkin. $\sigma(z)$ orqali $\mathbb{C}_w^{2n+1}$ fazodagi $\ln|w|$ funksiyaning X ko'pxillik ustiga qisqartmasini belgilaylik. U holda $\sigma(z) \in psh(X) \cap C(X)$ bo'lib, va $\{\sigma(z) < C\} \subset\subset X, \forall C \in \mathbb{R}$ bo'ladi. Faraz qilaylik 0 nuqta X ga

tegishli bo'lmasin va $\min \sigma(z) < 0$ bo'lsin. Biz quyida σ —sharlarni qaraymiz. $B_R = \{z \in X : \sigma(z) < \ln R\}$ va odatdagidek

$$\mathcal{U}(\bar{B}_1, B_R) = \{u \in psh(B_R) : u|_{B_1} < -1, u|_{B_R} < 0\}$$

sinfni aniqlaymiz. U holda ushbu

$$\omega(z, \bar{B}_1, B_R) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\bar{B}_1, B_R)\}$$

funksiyaga $\bar{B}_1$ sharning B_R sohaga nisbatan P —o'lchovi deyiladi.

$\omega(z, \bar{B}_1, B_R)$ funksiya B_R da plyurisubgarmonik $\bar{B}_1$ ni ustida -1 ga teng bo'lib, $z \rightarrow \partial B_R$ da nolga intiladi. Bundan tashqari u maksimal, ya'ni

$B_R \setminus \bar{B}_1$ to'plamda $(dd^c \omega)^n = 0$ tenglamani qanoatlantiradi. $R \rightarrow \infty$

da $\omega(z, \bar{B}_1, B_R)$ funksiya kamayib boradi va u limit funksiya ega bo'lib bu limit funksya

$$\omega(z, \bar{B}_1) = \lim_{R \rightarrow \infty} \omega(z, \bar{B}_1, B_R) \in psh(X)$$

bo'lib, $\omega(z, \bar{B}_1)|_{B_1} \equiv -1, \omega(z, \bar{B}_1) < 0, \forall z \in X$ shartlarni

qanoatlantiradi. Quyidagi tasdiq osongina kelib chiqsada amaliy jihatdan qo'llashda foydali hisoblanadi.

Teorema 3.1.1. *X Shteyn ko'pxilligi parabolik bo'lishi uchun*

$\omega(z, \bar{B}_1) \equiv -1$ bo'lishi zarur va yetarli.

$\omega(z, \bar{B}_1) \equiv -1$ tenglik bajarilishi $\bar{B}_1$ ni tanlanishiga bog'liq emas va biz uning o'rniga istalgan boshqa bir $\bar{B}_r$ yopiq shar yoki, kompakt $E \subset X$ to'plamni olishimiz mumkin.

Biz S —parabolik ko'pxillik ta'riflashda V. Stoll tomonidan ilgari surilgan maxsus funksiya mavjudligiga asoslanamiz.

Ta'rif 3.1.2. n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi S —parabolik deyiladi agarda shunday $\rho(z)$ plyurisubgarmonik funksiya topilib,

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad D_c = \{z \in X : \rho(z) < c\} \Subset X$;
2. $\rho(z)$ funksiya biror $K \subset X$ kompaktdan tashqarida maksimal bo'lsin.

Ya'ni $X \setminus K$ da $(dd^c \rho)^n = 0$.

Agar yuqoridagi ta'rifda qo'shimcha ravishda $\rho \in C(X)$ shart ham bajarilsa, u xolda ko'pxilligimiz S^* —parabolik deyiladi.

Ushbu ta'rifdagi $\rho(z)$ maxsus plyurisubgarmonik funksiya ko'pxillikning potensial funksiyasi deyiladi.

Ochiq Riman sirlari uchun paraboliklik, S —paraboliklik va S^* —paraboliklik tushunchalari ustma-ust tushadi. Biroq ko'p o'chamli Shteyn ko'pxilliklari uchun bu masala hali ochiq turibdi.

Parabolik ko'pxilliklarga asosiy misol sifatida $\mathbb{C}^n$ fazoni o'zini keltirish mumkin. Bunda maxsus potensial funksiya $\rho(z) = \ln^+ |z|$ funksiya

iborat bo'ladi. Yana bir muhim misol sifatida algebraik affin ko'pxilligini keltirish mumkin.

$O(X)$ orqali X ko'pxillikda aniqlangan analitik funksiyalar fazosini belgilaymiz. Bu fazo freshe fazosini tashkil etib, unda topologiya X ko'pxillikning kompakt qism to'plamlarida tekis yaqinlashish orqali aniqlanuvchi odatdagi topologiyadan iborat. Bu topologiya $O(X)$ fazoni atomar Freshe fazosi qiladi. Biz $O(X)$ Freshe fazosini strukurasini o'rganish uchun D.Vogt tomonidan ustuvor norma(DN- Dominated Norm)shartini ifodalashdan boshlaymiz.

Ta'rif 3.1.3. Y Freshe fazosi tayinlangan $(\|\cdot\|_k)$ yarimnormalar sistemasiga nisbatan DN xossaga ega deyiladi, agar shunday k_0 son topilib, $\forall p$ uchun $\exists q, C > 0$ va barcha $x \in Y$ lar uchun

$$\|x\|_p \leq C \|x\|_{k_0}^{\frac{1}{2}} \|x\|_q^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlik bajarilsa.

Bu ta'rif normalar sistemasini tanlanishiga bog'liq emas ekan. Quyidagi natija A.Aytuna J.Krone va T.Terziogluga tegishli bo'lib qisman D.Vogt, V.P.Zahariuta va A.Aytuna tomonidan ham o'rganilgan.

Teorema 3.1.2. n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi uchun quyidagi shartlar ekvivalent:

1. X parabolik ko'xillik

2. $O(X)$ fazo DN xossaga ega

3. $O(X)$ fazo Freshe fazosi sifatida $O(\mathbb{C}^n)$ fazoga izomorf.

Biz ushbu paragrafning asosiy natijasini keltirishdan oldin Freshe fazolarini akslantirishlarini korib chiqamiz.

Freshe fazolari o'rtasda aniqlangan operatorlar. E Freshe fazosida 2 ta $\| \cdot \|_1 \leq \| \cdot \|_2 \leq \dots$ va $\| \cdot \|_1^{\sim} \leq \| \cdot \|_2^{\sim} \leq \dots$ yarimnormalar sistemasi berilgan bo'lib, shunday shunday C_k va $n(k) \in N$ sonlar topilib, barcha $k \in \mathbb{N}$ uchun

$$\| \cdot \|_k \leq C_k \| \cdot \|_{n(k)}^{\sim} \quad \text{va} \quad \| \cdot \|_k^{\sim} \leq C_k \| \cdot \|_{n(k)}$$

tengsizliklar bajarilsa, bu yarimnormalar sistemalari o'zaro ekvivalent deyiladi.

Tayinlangan yarimnormalar sistemasi bilan berilgan Freshe fazosiga darajalangan Freshe fazosi deyiladi.

Freshe fazolarining maxsus sinfi bu Kothe ketma-ketliklari fazolari bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi.

Analizda ko'pchilik funksiyalar fazolari kononik yoyilma yordamida qandaydir ketma-ketliklar fazosiga mos qo'yiladi (masalan Teylor yoyilmasi, Fure yoyilmasi va hokazo). $A = (a_{jk})$ cheksiz matritsa bo'lib, $\forall j, k \in N$ uchun $0 \leq a_{jk} \leq a_{jk+1}$, $\sup_k a_{jk} > 0$

$\lambda(A)$ Kothe ketma-ketliklari fazosi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda(A) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\|_k = \sum_j |x_j| a_{jk} < \infty, k \in M \right\}$$

bu fazo $\| \cdot \|_k$ yarimnormalar sistemasi kiritilgan Freshe fazosi bo'ladi. Agar

matritsa maxsus $a_{jk} = e^{k\alpha_j} \left(a_{jk} = e^{-\frac{1}{k}\alpha_j} \right)$ formada bo'lib,

$\alpha: \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, bo'lsin u holda biz

$$\lambda(A) = \Lambda_\infty(\alpha) \quad (\lambda(A) = \Lambda_0(\alpha))$$

belgilash kiritamiz va bu Freshe fazolarini ***cheksiz tartibli darajali qatorlar (chekli tartibdagi) fazosi*** deyiladi. Ularning har biri darajalangan Freshe fazolari sifatida qaraladi. Chiziqli fazo sifatida $r \in \{0, \infty\}$ son uchun

$$\Lambda_r(\alpha) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : |x|_t = \sum_j |x_j| e^{t\alpha_j} < +\infty, \text{ barcha } t < r \right\}$$

fazoga ega bo'lamiz. $t_k \rightarrow r$ o'suvchi ketma-ketlik uchun

$(\| \cdot \|_{t_k})_k$ yarimnormalar $(\| \cdot \|_k)_k$ normalarga ekvivalent sistema bo'ladi.

Ko'pchilik xollarda $(\| \cdot \|_t)_{t>0}$ bir parametrlil normalarni qarash qulay bo'ladi.

Agar E darajalangan Freshe fazosi bo'lsa, u holda $E_k = (E / \ker \| \cdot \|_k)^\wedge$ har

bir $k \in N$ da lokal Banax fazosi bo'ladi, bunda $^\wedge$ -orqali

$\|\tilde{x}\|_k = \|x\|_k; \tilde{x} = x + \ker \| \cdot \|_k \in E / \ker \| \cdot \|_k$ normaga nisbatan factor

fazosini to'ldiruvchisini belgilaymiz. Ayniy akslantirish $\ell_l^k: E_l \rightarrow E_k, l > k$

kanonik bog'lovchi akslantirishni beradi Barcha $l > k; \ell_k^k = \text{id}_E$ uchun

$\ell_l^k = \ell_{k+1}^k \circ \dots \circ \ell_l^{l-1}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Ya'ni biz

$$E_1 \xleftarrow{\ell_2^1} E_2 \xleftarrow{\ell_3^2} E_3 \xleftarrow{\ell_4^3} \dots$$

Akslantirishlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz. Bu ketma-ketlik Banax fazolarining proektiv spektri deyiladi. Biz ularni kanonik proektiv spektr deymiz.

E fazo Freshe-Shvarts fazosi deyiladi, agar barcha k uchun shunday $l > k$ da ℓ_l^k -kompakt operator bo'lsa.

$\varphi: E \rightarrow F$ operator nuqtali deyiladi, agar

$$\varphi x = \sum_n g_n(x) y_n$$

yoyilmaga ega bo'lsa va bunda $g_n \in E^*$, $y_n \in F$ va

$$\sum_n \|g_n\|^* \|y_n\| < +\infty$$

Bo'lsa. Bu yerda $\|\cdot\|^*$ norma E^* qo'shma fazodagi norma.

Agar har qanday k uchun shunday l nomer topilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n,k}}{a_{n,l}} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa Kothe fazosiga Freshe-Shvarts fazosi bo'ladi.

Agar har qanday k uchun shunday l nomer topilib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{a_{n,l}} < +\infty$$

munosabat bajarilsa Kothe fazosiga atomar deyiladi.

Demak har qanday darajali qatorlar fazosi Freshe-Shvarts fazosi bo'ladi. $\Lambda_r(\alpha)$

fazo nuqtali fazo bo'lishi uchun esa

$$r = \infty \text{ bo'lganda } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\alpha_n} < +\infty$$

$$r = 0 \quad \text{bo'lganda} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\alpha_n} = 0$$

tenglikni bajarilishi zarur va yetarlidir.

Biz faqat nuqtali bo'lgan $\Lambda_r(\alpha)$ fazolarni qaraymiz.

Chiziqli operatorlar va uzluksizlik xarakteristikasi. Darajalangan E Freshe fazosini F Freshe fazosiga akslantiruvchi $\varphi : E \rightarrow F$ chiziqli operatorga uzluksiz chiziqli operator deyiladi, agar ixtiyoriy k uchun shunday $C > 0$ va $\sigma \in \mathbb{N}$ sonlar topilib, barcha $x \in E$ uchun

$$\|\varphi x\|_k \leq C \|x\|_\sigma \quad (3.2.1)$$

tengsizlik bajarilsa.

$$\sigma(k) = \min \left\{ \sigma : \sup_{\|x\|_\sigma \leq 1} \|\varphi x\|_k < +\infty \right\} \quad (3.2.2)$$

kattalikni belgilab olamiz. Bunda (1) tengsizlik bajariluvchi barcha σ lar ichida minimali olinadi. $\sigma(k)$ kattalikka φ operatorning uzluksizlik xarakteristikasi deyiladi.

Misol. $E = F = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fazolarni quyidagi

$$\|f\|_k = \sup \left\{ |f^{(\alpha)}(x)| : |\alpha| \leq k, |x| \leq k \right\}$$

Kabi aniqlangan yarimnormalar sistemasi bilan qaraylik. Bu fazolarda aniqlangan $\varphi = P(D) : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o'zgarmas koeffitsiyentli hususiy differensial operatorni qaraylik. U holda $\sigma(k) = k + m$ bo'ladi va bu yerda m soni $P(z)$ ko'phadning darajasiga teng.

Chiziqli operator **“eguvchi”(tame)** deyiladi agar biror $b \in \mathbb{N}$ son topilib $\sigma(k) \leq k + b$ munosabat bajarilsa. Chiziqli operator **“Chiziqli eguvchi”(linear Tame)** deyiladi agar biror $a, b \in \mathbb{N}$ sonlar topilib, $\sigma(k) \leq ak + b$ munosabat bajarilsa. Yuqoridagi misolda biz eguvchi operatorni ko'rib turibmiz.

Tabiiy ravishda berilgan E, F fazolari uchun qanday $\sigma(\cdot)$ funksiyalar biror chiziqli operatorlarning uzluksizlik xarakterini aniqlaydi va bu funksiyalarning chegarasi bormi degan savollar tug'iladi. Shuni ta'kidlab o'tish joizki shegaralangan to'plamlarni chegaralangan to'plamlarga akslantiruvchi akslantirishlarga chegaralangan akslantirish deyiladi. Ushbu ta'rif chiziqli operatorlar uchun nolni atrofini nolni atrofiga o'tkazishi sharti bilan ekvivalent, ya'ni buning uchun uzluksizlik xarakteristikasi chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli. Shunday qilib E, F juftliklarni akslantiruvchi chiziqli uzluksiz operatorlarning chegaralangan bo'lish sharti bu operatorning uzluksizlik xarakteristikasi chegaralangan bo'lishi yoki oxir oqibat o'zgarmasga teng bo'lishi bilan ekvivalent ekan.

Ikkita Freshe fazosi eguvchan izomorf (tamely isomorphic) deyiladi agar ularni bir biriga akslantiruvchi eguvchan o'zaro bir qiymatli operator topilib, uning teskarisi ham eguvchi operator bo'lsa.

Quyidagi natija parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalar Freshe fazolari o'rganishda muhimdir.

Teorema 3.1.3. *n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi S^* — parabolik bo'lishi uchun X fazoning shunday $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ kompaktlar bilan qoplamasi mavjud bo'lib, $(O(X), \| \cdot \|_{K_s})$ Freshe fazosi cheksiz tartibli darajali qatorlar fazosiga eguvchan izomorf bo'lishi zarur va yetarli.*

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi:

Teorema 3.1.4. *n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi S^* — parabolik bo'lishi uchun X fazoning shunday $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ kompaktlar bilan qoplamasi mavjud bo'lib, $(O(X), \| \cdot \|_{K_s})$ va $(O(\mathbb{C}^n), \| \cdot \|_{P_s})$, $P_s = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq e^s\}$ Freshe fazolari eguvchan izomorf bo'lishi zarur va yetarli.*

Ushbu teorema S^* –parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalar fazosining Kompleks Evklid fazosida aniqlangan analitik funksiyalar fazosiga oxshashlik jihatlarini namoyon qiladi.

3.2. Parabolik ko'pxilliklarda potentsiallar nazariyasi.

Parabolik ko'pxilliklarda potentsiallar nazariyasi qurishda Grin funksiyasi tushunchasi alohida ahamiyat kasb etadi. Parabolik ko'pxilliklarda kompaktning Grin funksiyasi dastavval A.Zariyaxi tomonidan kiritilgan bo'lib bir qator nazariy xossalari isbot qilingan. Biz Zariyaxi tomonidan kiritilgan ta'rifga asoslanamiz:

X parabolik Shteyn ko'pxilligi va ρ unda aniqlangan maxsus potentsial funksiyasi bo'lsin. quyidagi

$$u(z) \leq c_u + \rho^+(z), \quad z \in X$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $u \in psh(X)$ funksiyalar sinfini $\mathfrak{A}_\rho(X)$ orqali belgilaymiz. Bu yerda $\rho^+(z) = \max\{0, \rho(z)\}$. $\mathfrak{A}_\rho(X)$ sinfga plyurisubgarmonik funksiyalarning Lelon sinfi deyiladi.

Ta'rif 3.2.1. $K \subseteq X$ to'plam uchun ushbu

$$V_\rho(z, K) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X), \quad u|_K \leq 0 \right\}$$

Funksiyaning $V_\rho^*(z, K) = \overline{\lim_{w \rightarrow z} V_\rho(w, K)}$ yuqori regularizatsiyasiga K to'plamning ekstremal ρ – Grin funksiyasi deyiladi.

A.Zariyaxi tomonidan hususan K to'plam $K_r = \{z \in X : \rho(z) \leq r\}$ psevdoshardan iborat bo'lganda Grin funksiyasi oddiygina

$$V_\rho(z, K_r) = \max\{\rho(z) - r, 0\}$$

tenglik bilan aniqlanishini ko'rsatib berilgan.

Shuningdek kompaktning plyuripolyar to'plam bo'lishi kriteriyasi isbot qilingan. Quyidagi tasdiq o'rinli

Teorema 3.2.1. X parabolik Shteyn ko'pxilligi va $E \subseteq X$ biror qism to'plami bo'lsin. U xolda E to'plam plyuripolyar to'plam bo'lishi uchun $V_\rho^*(z, E) \equiv +\infty$ bo'lishi zarur va yetarli.

Parabolik ko'pxilliklarda ko'phad tushunchasiga analitik funksiyalar o'sishiga shart qo'yish orqali ta'riflanadi.

Ta'rif 3.2.2. Agar $f \in O(X)$ funksiya uchun biror musbat c_f, d sonlar topilib, barcha $z \in X$ uchun

$$|f(z)| \leq c_f(1 + e^{\rho(z)})^d \quad (3.2.3)$$

Tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda f funksiya darajasi d dan oshmagan ko'phad deyiladi va yuqoridagi (3.2.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi d sonlar orasidan eng kichigi ko'phadning darajasi deyiladi.

Misol. $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ko'pxillik S^* —parabolik ko'pxillikdan iborat bo'ladi. va unda potensial funksiyasi sifatida $\rho(z) = \max\{\ln|z|, -\ln|z|\}$ funksiya qarash mumkin. Ushbu funksiya S^* —parabolik ko'pxillik shartlarini qanoatlantiradi.

$$1. \forall c \in \mathbb{R}, c > 1, D_c = \{z \in X : \rho(z) < \ln c\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{c} < |z| < c\right\} \subseteq X$$

$$2. \rho(z) \text{ funksiya } K = \{i, -i\} \subset X \text{ kompaktdan tashqarida maksimal bo'ladi.}$$

$$YA'ni X \setminus K \text{ da } \Delta\rho = 0.$$

$$3. \rho \in C(X) \text{ shart ham bajariladi.}$$

Endi $K_r = \{z \in X : \rho(z) \leq \ln r\}, r > 1$ kompakt uchun Grin funksiyasini aniqlaymiz: Ushbu

$$V_{\rho}^*(z, K_r) = \max\{\rho(z) - \ln r, 0\}$$

funksiya Grin funksiyasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Biz yuqoridagi misolga ya'ni $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ko'pxillikka qaytamiz.

$$\rho(z) = \max\{\ln|z|, -\ln|z|\} \text{ ekanidan.}$$

Ushbu $P_n(z) = z^n$, $Q_n(z) = z^{-n}$ funksiyalar

$$|P_n(z)| \leq (1 + e^{\max\{\ln|z|, -\ln|z|\}})^n, |Q_n(z)| \leq (1 + e^{\max\{\ln|z|, -\ln|z|\}})^n.$$

Tengsizlikni qanoatlantiradi va har biri n -darajali ko'phaddan iborat bo'ladi. Biroq bu xolatda turli hil qutbli funksiyalar bir hil darajadagi ko'phadni aniqlashi anglashimovchiliklarni keltirib chiqarishi mumkin. Shu sababdan biz ikkinchi $Q_n(z)$ funksiyalarni $Q_{-n}(z)$ orqali belgilaymiz. Biroq bu holat bizni umumiy xoldagi ko'phadga ta'rif berganimizdan keyin ta'qib etmaydi.

$X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ko'pxillikda aniqlangan n darajali ko'phad deb ushbu

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n}$$

funksiyaga aytiladi va bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlar o'zgarmas kompleks sonlar bo'lib, $|a_n| + |b_n| > 0$ shart bajariladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi $\mathfrak{S}_{\rho}^n(X)$ ning o'lchami $2n + 1$ ga teng bo'lishini ko'ramiz.

3.3. Grin funksiyasining xossalari.

Endi Grin funksiyasining ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz.

1⁰. Bernshteyn-Uolsh tengsizligi. Agar $P_m(z)$ m -darajali ko'phad bo'lsa, u xolda ixtiyoriy $E \subset X$ kompakt uchun

$$|P_m(z)| \leq \|P_m\|_E \cdot e^{V_\rho(z,E)}, \quad z \in X, \quad (3.2.4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $P_m(z)$ m – darajali ko'phad bo'lib, u $P_m(z) \in \mathcal{O}(X)$ bo'lgani uchun $\ln|P_m(z)| \in psh(X)$ bo'ladi. Quyidagi funksiyani qaraylik,

$$u(z) = \frac{1}{m} \ln|P_m(z)| - \frac{1}{m} \ln\|P_m\|_E = \frac{1}{m} \ln \frac{|P_m(z)|}{\|P_m\|_E}$$

$u(z)$ funksiyaning kompaktdagi qiymatlari

$$u(z)|_E = \frac{1}{m} \ln \frac{|P_m(z)|}{\|P_m\|_E} |_E \leq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Endi $u(z) \in \mathfrak{A}_\rho(X)$ ga tegishliligini ko'rsatamiz.

$P_m(z)$ m - darajali polinom bo'lishligidan

$$|P_m(z)| \leq c_f(1 + e^{\rho(z)})^m$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, natijada

$$\frac{1}{m} \ln|P_m(z)| \leq c_P + \rho(z) + \ln\left(\frac{1}{e^{\rho(z)}} + 1\right)$$

va

$$u(z) \leq c_u + \rho(z)$$

munosabat kelib chiqadi.

Demak, $u(z) \in \mathfrak{A}_\rho(X)$ sinfdan va E kompaktda $u|_E \leq 0$ bo'lib, Grin funksiyasining aniqlanishidan $u(z) \leq V_\rho(z, E)$ bo'lishi kelib chiqadi.

2⁰. **To'plam funksiyasi sifatida uzluksizligi.** Agar E kompakt o'suvchi

$E_j \subset E_{j+1}$ kompaktlarni yig'indisi shaklida ifodalangan bo'lsa, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, u

xolda $j \rightarrow \infty$ da $V_{\rho}^*(z, E_j) \uparrow V_{\rho}^*(z, E)$ bo'ladi.

Grin funksiyasining keyingi ikkita xossasi faqat yuqoridagi misolga o'xshash regulyar tipdagi parabolik ko'pxilliklarga taaluqli bo'ladi.

Bunda A.Sadullaev va A.Aytuna tomonidan kiritilgan regulyar parabolik ko'pxillik ta'rifidan foydalanamiz. $\mathfrak{S}(X)$ orqali X parabolik ko'pxillikda aniqlangan barcha ko'phadlar fazosini belgilaymiz.

Ta'rif 3.2.3. Agar $\mathfrak{S}(X)$ fazo $O(X)$ analitik funksiyalar fazosida zich bo'lsa, u xolda X parabolik ko'pxilliklikka regulyar parabolik ko'pxillik deyiladi.

3⁰. X regulyar parabolik ko'pxillikda ixtiyoriy $E \subset X$ kompakt uchun

$$V(z, E) = \sup \left\{ \frac{1}{\deg P} \ln |P(z)| : P \in \mathfrak{S}(X) \quad \|P\|_E \leq 1 \right\} \quad (3.2.5)$$

tenglik o'rinlidir.

$\deg P$ – ko'phadning darajasi.

4⁰. **Regulyar parabolik ko'pxilliklarda Bernshteyn-Uolsh teoremasi.**

X regulyar parabolik ko'pxillik va $K \subset X$ – kompakt to'plam bo'lsin agar $V_{\rho}^*(z, K)$ Grin funksiyasi uzluksiz bo'lsa, u xolda K kompaktga ρ – regulyar kompakt deyiladi.

Agar $K \subset X$ ρ – regulyar kompakt bo'lsa, u xolda K to'plamda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy $f(z)$ funksiyani K kompaktda ko'pxadlar ketma-ketligi bilan yaqinlashtirish masalasini qaraymiz va ushbu kattaliklarni aniqlab olamiz:

$$e_m(f, K) = \inf_{P \in \mathfrak{S}_{\rho}^m(X)} \sup_K |f(z) - P(z)|$$

Teorema 3.3.1. (Regulyar parabolik ko'pxilliklarda Bernshteyn-Uolsh teoremasi). $K \subset X$ ρ — regulyar kompakt bo'lsa, u xolda K to'plamda uzluksiz bo'lgan $f(z)$ funksiya uchun

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} e_m^{1/m}(f, K) \leq \frac{1}{R}$$

tengsizlik bajarilsin. U xolda f funksiya

$$G_R = \left\{ z \in X : V_\rho^*(z, K) < \ln R \right\}$$

sohaga analitik davom qiladi.

Xulosa

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida parabolik ko'pxilliklarda plyurikompleks Grin funksiyasi xossalari o'rganilgan. Parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalarning Freshe fazosi topologik strukturasi uchun olingan xulosalar asosida Parabolik ko'pxilliklarda Grin funksiyasining $\mathbb{C}^n$ fazoda Grin funksiyasi kabi xossalarga ega bo'lishi korsatildi. Xususan quyidagi xossalar bajariladi:

1⁰. Agar $P_m(z)$ m -darajali ko'phad bo'lsa, u xolda ixtiyoriy $E \subset X$ kompakt uchun

$$|P_m(z)| \leq \|P_m\|_E \cdot e^{V_\rho(z,E)}, \quad z \in X,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2⁰. Agar E kompakt o'suvchi $E_j \subset E_{j+1}$ kompaktlarni yig'indisi shaklida ifodalangan bo'lsa, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, u xolda $j \rightarrow \infty$ da

$V_\rho^*(z, E_j) \uparrow V_\rho^*(z, E)$ bo'ladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.
2. Садуллаев А.С., Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Мат. сб. - 1982. - Т. 119(1). - с. 96 - 118.
3. Садуллаев А.С., Плюрисубгармонические функции// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНТИ, 1985.- Т. 8. - с. 65 – 111.
4. Садуллаев А.С., Куп аргументли голоморф функциялар. Урганч. 2004й.
5. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium, Germany, 2012.
6. Спивак М., Математический анализ на многообразиях. Москва. “Наука”.
7. Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия. Издательство иностранной литературы Москва 1961. с- 242.
8. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ. Москва. “Наука”. Часть 2. 1985.
9. Aytuna A., Sadullaev A., Parabolic Stein Manifolds\\ Mathematica Scandinavica Vol 114, No 1 (2014) , P. 86-109.
10. Aytuna A., Sadullaev A., Polynomials on Parabolic Manifolds\\ preprint arXiv: 1504.08092v1[math CV] 30 Apr2015
11. Griffiths P. and King J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta mathematica, V.130 (1973), 145-220
12. Sadullaev A., On analytic multifunctions, Mathematical Notes, V.83:5 (2008), 715-721

13. Stoll W., Value distribution on parabolic spaces, Lecture notes, no.600, Springer,Berlin-Heidelberg-New York – 1977.
14. Stoll W., Value distribution of holomorphic maps into compact complex manifolds, Lecture notes, no. 135, Springer,Berlin-Heidelberg-New York – 1970
15. Vogt D., Charakterisierung der Unterräume von s , Math. Z. 155, (1977), no. 2, 109-111
16. Vogt, D., Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau, Studia Math., 67, (1980), no. 3, 225-240
17. Vogt, D., Power series space representations of nuclear Fréchet spaces, TAMS, 319, no.1, (1990), 191-208
18. Zaharyuta V.P. Spaces of analytic Functions and Complex Potential theory, Linear Topological Spaces and Complex Analysis 1 TUBITAK Publications (1994),74-146
19. Zeriahi A., Fonction de Green pluricomplexe à pole à l'infini sur un espace de Stein parabolique, Math.Scand., V.69, (1991), 89-126
20. Zeriahi A., Approximation polynomial et extension holomorphe avec croissance sur une variété algébrique, Ann.Polon.Math. V.63:1, (1996), 35-50
21. Atamuratov A., Sharipova Sh., Parabolik ko'pxilliklarda ekstremal Grin funksiyasi xossalari.\\ Ilm sarchashmalari, 2015, № 6.
22. Atamuratov A., Sharipova Sh., Parabolik ko'pxilliklarda regulyar kompaktlar\\ Xorazm Ma'mun akademiyasi axborotnomasi(nashrda)