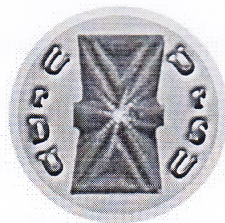


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
"MATEMATIKA" KAFEDRASI

402-GURUH TALABASI

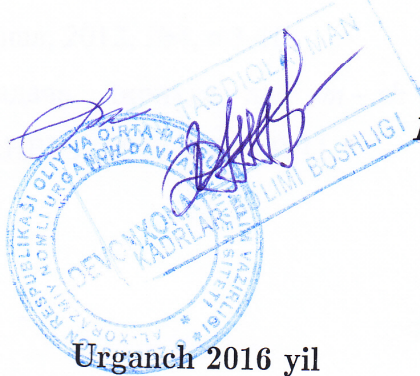
AMANGALDIYEVA SHOXISTANING

5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

*Mavzu: Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar uchun
regulyar sohalarda Dirixle masalasi.*

Ilmiy rahbar:



R.A. Sharipov

Urganch 2016 yil

**Mavzu: Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar uchun regulyar sohalarda
Dirixle masalasi**

R E J A:

Kirish

I-bob. Dastlabki ma'lumotlar.

- 1.1. Ba'zi muhim funksiyalar sinflari va ularning xossalari.
- 1.2. Garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi.
- 1.3. Dirixle masalasini yechishning Perron usuli

II-bob. Qat'iy m -qavariq va m -regulyar sohalar uchun Dirixle masalasi.

- 2.1. Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari
- 2.2. Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi

Xulosa.

Foydalanilgan adabiyotlar.

Kirish

O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni va «Qadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga yetkazish jarayonining mohiyati to'laqonli ochib berilgandir. Ana shu vazifalardan kelib chiqqan holda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o'rganish uchun uning asosi bo'lgan tushunchalarni mukammal o'zlashtirishimiz kerak.

Bitiruv malakaviy ishi mazmuni.

Maksimal funksiyalarni o'rganish uchun mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle Ushbu bitiruv malakaviy ish $m - wsh$ funksiyalar sinfida Dirixle masalasini o'rganishga bag'ishlanadi.

Ta'rif. Agar $u(z) \in m - wsh(D)$ funksiya uchun $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $m - wsh$ funksiyalar sinfida maksimum printsipi bajarilsa, ya'ni agar $v \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} (u(z) - v(z)) \geq 0$ munosabat bajarilishidan $\forall z \in D$ uchun $u(z) \geq v(z)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada maksimal funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasiga o'xshash tarzda mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi quyidagicha aniqlanadi: faraz qilaylik $D \subset \mathbb{C}^n$ – chegaralangan soha va $\varphi(\xi) \in C(\partial D)$ – tayinlangan funksiya bo'lsin. Shunday uzluksiz $u(z)$ maksimal $m - wsh$ funksiyaning aniqlash kerakki, $u|_{\partial D} = \varphi$. Odatdagidek, yechim Perron usulida izlanadi:

$$\mathcal{U}(\varphi, D) = \left\{ u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} u(z) \leq \varphi \right\},$$
$$\omega(z) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D) \right\}.$$

Klassik $m = 1$ holda, agar D – kuchli 1 – qavariq (regulyar), masalan, silliq ∂D chegaraga ega bo'lsa, u holda ω funksiya Dirixle masalasining yechimi bo'lishi isbotlangan, ya'ni u D sohada garmonik,

chegaragacha uzluksiz va $\omega|_{\partial D} = \varphi$. Biroq *psh* funksiya sinfidagidek, $m > 1$ bo'lganda, masala ancha murakkab va yechimning mavjudligi uchun D sohaning qavariqligiga va chegaraviy φ funksiyaga qo'shimcha shartlar qo'yishga to'g'ri keladi.

2.1-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ – qat'iy *mw*-qavariq soha bo'lsa, u holda bu sohada Dirixle masalasi istalgan chegaraviy $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya uchun yechimga ega bo'ladi. Aniqrog'i, $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$ funksiya maksimal, uzluksiz $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$ tenglik bajariladi.

psh funksiyalar ($m = n$) uchun $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\forall \xi \in \partial D$ munosabat Bremerman tomonidan, uzluksizligi, $\omega \in C(\overline{D})$ – Uolsh tomonidan isbotlangan.

2.2-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ – *regulyar* soha va $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya qandaydir $w \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$ funksiyaning izidan iborat bo'lsa, u holda $\omega(z)$ funksiya $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$ maksimal, uzluksiz $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lib, $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$ tenglik bajariladi.

I-bob. Dastlabki ma'lumotlar.

1.1. Ba'zi muhim funksiyalar sinflari va ularning xossalari.

1. Garmonik funksiyalar. $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada ushbu

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiya *garmonik funksiya* deyiladi, bunda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

laplas operatori.

Barcha garmonik funksiyalar to'plami $H(D)$ kabi belgilanadi.

1.1 – teorema. Agar $u(x)$ garmonik funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $S(x^o, r) \subset D$ $x^o \in D$ nuqta va sfera uchun

$$u(x^o) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma \quad (1.1)$$

bo'ladi, bunda σ_n - birlik sferaning yuzi. Aksincha, agar D dan olingan har bir $x^o \in D$ nuqta va yetarlicha kichik r ($0 < r \leq r_0(x^o)$) lar uchun (1.1) formula o'rinli bo'lsa, u holda $u(x) \in H(D)$ bo'ladi.

Endi garmonik funksiyalarning ba'zi bir xossalarini keltiramiz.

a) Agar $u, v \in H(D)$ bo'lib, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bo'lsa $f(\Delta\varphi) = 0$, u holda $\lambda u + \mu v \in H(D)$ bo'ladi;

b) agar umumlashgan funksiya f uchun $\Delta f = 0$, ya'ni ixtiyoriy $\varphi \in F(D)$ da tenglik bajarilsa, u holda f garmonik funksiya bo'ladi, aniqroq qilib aytganda, shunday $v(x) \in C^2(D)$, $\Delta v = 0$ bo'lgan funksiya mavjudki,

$$f(\varphi) = v(\varphi) = \int v(x) \varphi(x) dV \quad \text{bo'ladi};$$

v) agar $u(x)$ funksiya $B(x_o, r)$ sharda garmonik, uning yopig'ida esa uzluksiz, ya'ni $u(x) \in H(B(x_o, r)) \cap \overline{C(B(x_o, r))}$ bo'lsa, u holda

$u(x) = \int_{S(x^o, r)} u(y)P(x, y)d\sigma(y)$ formula o‘rinli bo‘ladi, bunda

$$P(x, y) = \frac{r^2 - |x - x_o|^2}{\sigma_n r |x - y|^n}, \quad n \geq 2, \text{ Puasson yadrosi.}$$

Ikkinchi tomondan, agar $\varphi(y)$ funksiya $S(x^o, r)$ sferada uzluksiz bo‘lsa, u holda $u(x) = \int_{S(x^o, r)} \varphi(y)P(x, y)d\sigma(y)$ funksiya $B(x_o, r)$ sharda Dirixle

masalasi $\Delta u = 0$, $u|_{S(x^o, r)} = \varphi(y)$ ning yechimi bo‘ladi.

Dirixle masalasini chegarasi silliq bo‘lgan ixtiyoriy $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada ham qarash mumkin: $\varphi(y) \in C(\partial D)$ uchun yagona $u(x) \in C(\bar{D})$ mavjudki,

$\Delta u = 0$, $u|_{\partial D} = \varphi(y)$ bajariladi;

g) kompleks tekislik $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ da garmonik funksiyalar golomorf funksiyalarga bevosita bog‘langandir.

Agar $z = x + iy$ deyilsa, unda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo‘ladi va har bir golomorf $f \in \mathcal{O}(D)$ funksiya uchun

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

tengliklardan $\Delta \operatorname{Re} f = 0$, $\Delta \operatorname{Im} f = 0$, ya’ni $\operatorname{Re} f$ va $\operatorname{Im} f$ larning garmonik funksiyalar ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek, agar $u(z) \in H(D)$ bo‘lsa, u holda har bir $z^o \in D$ nuqta va uning atrofi $B(z^o, r) \subset D$ uchun shunday $f \in \mathcal{O}(D)$ funksiya topiladiki, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $z \in B$ bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $z^0 = 0$ deb $B = B(0, r)$ doirada Puasson formulasini ushbu

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} dt,$$

bunda $\xi = re^{it}$, ko'rinishda ifodalaymiz. Bu formuladan $B(o, r)$ da golomorf

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} dt \quad (1.2)$$

funksiyasi uchun $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ ekanligi kelib chiqadi. (1.2) formula golomorf funksiyani uning haqiqiy qismi orqali ifodalashda ham ishlatiladi: ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(B) \cap C(\overline{B})$ uchun ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} dt + i \operatorname{Im} f(0)$$

formula o'rinalidir.

2. Subgarmonik funksiyalar. Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ funksiya berilgan bo'lsin, $u \in L^1_{loc}(D)$.

1.1-ta'rif. Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz: ya'ni $\forall x^o \in D$ uchun $\overline{\lim_{x \rightarrow x^o}} u(x) \leq u(x^o)$

(bundan $u(x)$ funksiyaning D ga tegishli ixtiyoriy kompaktda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir $x^o \in D$ nuqta uchun shunday $r(x^o) > 0$ topiladiki, $r \leq r(x^o)$ uchun

$$u(x^o) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma \quad (1.3)$$

u holda $u(x)$ funksiya D sohada *subgarmonik funksiya* deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi $Sh(D)$ kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial $u(x) \equiv -\infty$ funksiyasi ham D da $Sh(D)$ ga tegishli deb qaraymiz.

Endi subgarmonik funksiyalarning xossalari keltiramiz.

a) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffisientli chiziqli kombinatiasi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) \in Sh(D);$$

b) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) \Rightarrow \\ \Rightarrow \max \{ u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \} \in Sh(D);$$

v) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D);$$

g) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligi subgarmonik funksiya yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in sh(D) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad u_j(x) \Rightarrow u(x) \Rightarrow u(x) \in sh(D).$$

d) *Maksimumlar prinsipi.* Agar $u(x) \in Sh(D)$ funksiya biror $x^o \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.4)$$

bo'lsa, u holda $u(x) \equiv const$ bo'ladi.

e) Agar $\vartheta(x) \in Sh(D)$, $u(x) \in H(D)$ funksiyalar uchun $S(x^o, r) \Subset D$ sferada $\vartheta|_S \leq u|_S$ bo'lsa, u holda $B(x^o, r)$ sharda $\vartheta(x) \leq u(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

3. Plyurisubgarmonik funksiyalar. $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $u(z) \in C^2(D)$ bo'lsin.

1.2-ta`rif. Agar ixtiyoriy $z^0 \in D$ va bu nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy kompleks to'g'ri chiziq $l: z = z^0 + w\xi$, $w \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{C}$ uchun ushbu $\varphi(\xi) = u / l = u(z^0 + w\xi)$ kesim – funksiya $\xi = 0$ nuqtada garmonik, ya'ni $\xi = 0$ da $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \cdot \partial \bar{\xi}} = 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya D da *plyurigarmonik funksiya* deyiladi.

Plyurigarmonik funksiyalar sinfi $Ph(D)$ kabi belgilanadi. Aytaylik, $u(z) \in Ph(D)$ bo'lsin. Unda

$$\frac{\partial^2 u(z^0 + w\xi)}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = 0$$

bo'lib, murakkab funksiyaning differensiallashtirish qoidasidan

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \overline{w_j w_k} = 0, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad \text{ekanligini ko'ramiz. Bundan va}$$

$w \in \mathbb{C}^n$ vektorning ixtiyoriyligidan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, plyurigarmonik funksiyalar sinfi (1.5) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi va ba'zan bu sistema plyurigarmonik funksiyaning ta'rifi sifatida ham qaraladi.

1.3-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan $u(z) : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

- 1) $u(z)$ yuqoridagi yarim uzluksiz;
- 2) ixtiyoriy l kompleks to'g'ri chiziq uchun u / l funksiya $l \cap D$ da subgarmonik bo'lsa, $u(z)$ funksiya D sohada *plyurisubgarmonik* funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar to'plami $Psh(D)$ kabi belgilanadi. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada plyurisubgarmonik bo'lgan funksiya $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ da aniqlangan funksiya sifatida subgarmonik funksiya bo'ladi. Uni subgarmonik funksiyalarning (2) – shartini bajarishini ko'rish qiyin emas. Binobarin, subgarmonik funksiyalarning xossalari plyurisubgarmonik funksiyalar uchun ham saqlanadi.

Endi plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

- a) agar $u(z) \in Psh(D)$ bo'lsa, u holda $u_\delta(z)$ funksiya $Psh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta)$ sinfga tegishli bo'lib, $\delta \downarrow 0$ da $u_\delta(z) \downarrow u(z)$ bo'ladi;

b) agar $u(z) \in Psh(D)$ funksiya $z^0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, ya'ni $u(z^0) \geq u(z)$ ($z \in D$) bo'lsa, u holda $u(z) \equiv const$ bo'ladi;

v) plyurisubgarmonik funksiyalarning musbat koeffitientli chiziqli kombinativasi plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

g) monoton kamayuvchi yoki tekis yaqinlashuvchi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

d) D sohada plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ berilgan bo'lib, $u = \sup_{\alpha \in \Lambda} u_\alpha$ yuqoridan yarim uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $u(z)$ plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi, $u \in Psh(D)$.

Jumladan, $u_j(z) \in Psh(D)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) bo'lsa, $\sup\{u_1(z), u_2(z), \dots, u_k(z)\} \in Psh(D)$ bo'ladi;

e) agar $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ bo'lsa, $\alpha \cdot \ln|f(z)| \in Psh(D)$ bo'ladi, bunda $\alpha \geq 0$;

j) agar $u(z) \in Psh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(z)} \in Psh(D)$ dir, agar $u(z) \in Psh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(z)] \in Psh(D)$ dir.

z) D sohada aniqlangan $u(z) \in C^2(D)$ funksiyaning D da plyurisubgarmonik bo'lishi uchun ushbu

$$L(u, w) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \quad (1.6)$$

kvadratik formaning (Levi formasining) ixtiyoriy $z \in D$ da musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir. (1.6) munosabatda $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ bo'lib, kvadratik formaning musbat aniqlanganligi $\forall w \in \mathbb{C}^n$ da $L(u, w) \geq 0$ bo'lishini anglatadi.

Agar $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$ da $L(u, w) > 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya z nuqtada *qat'iy plyurisubgarmonik* funksiya deyiladi; agar $u(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida qat'iy plyurisubgarmonik bo'lsa, $u(z)$ sohada *qat'iy plyurisubgarmonik* funksiya deyiladi.

1.2. Garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi.

G soha chegarasida aniqlangan va uzluksiz $\varphi(\zeta)$ funksiya berilgan bo'lsin. G sohada garmonik va yopiq $\overline{G}$ sohada uzluksiz bolgan shunday $u(z)$ funksiya topilsinki, bu funksiya G ning barcha chegaraviy nuqtalarida berilgan $\varphi(\zeta)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Masalan, issiqlik maydonining temperaturasi (vaqtga bog'liq bo'lmagan xolda) yoki biror sohada berilgan temperaturada elektrostatik maydonning potentsiolini toppish va shunga o'xshash bir qancha masalalar Dirixle masalasiga keladi.

1.1-Teorema. Dirixle masalasi uchun bittadan ortiq yechim mavjud emas.

Biz Dirixle masalasini G soha R radiusli doiradan iborat bo'lgan xol uchun yechamiz. Yozishni soddalashtirish uchun doiraning markazi koordinatalar boshida joylashgan, deb faraz etamiz. Doira aylanasi tenglamasi $|\zeta| = R$ bo'ladi. Agar qutb koordinatalari sistemasiga o'tib, qutb burchakni α deb belgilasak, $\zeta = Re^{i\alpha}$ bo'lib,

$$\varphi(\zeta) = \varphi(R \cdot e^{i\alpha}) = \varphi(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

va $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ bo'ladi. Bu masalani yechishdan oldin, garmonik funksiyaning qiymati doira aylanasi ma'lum bo'lsa, bu funksiya doiraning ichki nuqtalarida qanday aniqlash mumkinligini ko'rib chiqamiz. $f(z)$ funksiya R radiusli doirada va uning C aylanasi analitik bo'lsin deylik. C ning ichida yotuvchi ixtiyoriy $z = r \cdot e^{i\theta}$ nuqta uchun, Koshi formulasiga asosan, quyidagini yoza olamiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cdot e^{i\alpha}) \frac{R \cdot e^{i\alpha}}{R \cdot e^{i\alpha} - r \cdot e^{i\theta}} d\alpha \quad (1.7)$$

C aylanaga nisbatan z nuqtaga simmetrik bo'lgan z^* nuqtani olamiz:

$$|z^*| = \frac{R^2}{|z|} = \frac{R^2}{r}, \quad z^* = \frac{R^2}{r} \cdot e^{i\theta}.$$

z^* nuqta C dan tashqarida yotganligi uchun $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}$ funksiya C aylanada va uning ichida analitik bo'ladi., shuning uchun Koshi teoremasiga asosan:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R \cdot e^{i\alpha}) R \cdot e^{i\alpha} d\alpha}{R \cdot e^{i\alpha} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cdot e^{i\alpha}) \frac{r \cdot e^{i\alpha}}{r \cdot e^{i\alpha} - R \cdot e^{i\theta}} d\alpha \quad (1.8)$$

(1.7) tenglikdan (1.8) tenglikni ayiramiz:

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\alpha}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) e^{i\alpha} \left(\frac{R}{Re^{i\alpha} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}} - \frac{r}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} \right) d\alpha' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{(R^2 - r^2) e^{i(\theta+\alpha)}}{(R^2 + r^2) re^{i(\theta+\alpha)} - Rr(e^{2i\theta} + e^{2i\alpha})} d\alpha \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikdagi interval ishorasi ostidagi kasrning surat va maxrajini $e^{i(\theta+\alpha)}$ ga bo'lib, ushbu

$$e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)} = 2 \cos(\theta - \alpha)$$

Tenglikka asosan quyidagiga erishamiz:

$$\frac{f(re^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} = \frac{1}{2\pi} \frac{f(Re^{i\alpha})(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.9)$$

Bu formuladan bo'lganligi uchun, chap va o'ng tomondagi haqiqiy qismlarni tenglab, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.10)$$

Mavhum qism v uchun ham huddi shu ko'rinishdagi formula hosil bo'ladi. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari gormonik funksiyalardan iborat bo'lgani uchun (1.10) formula yordami bilan ixtiyoriy garmonik funksiyaning doira ichidagi qiymati aynadagi qiymatlari orqali ifodalanadi. Bundan shunday xulosa kelib chiqadiki, agar Dirixle masalasidagi berilgan $\varphi(\alpha)$ funksiya doirada izlana- yotgan biror $u(r, \theta)$ garmonik funksiyaning aylanadagi $u(R, \theta)$ qiymatiga teng bo'lsa, (1.10) formula Direxle masalasining echimidan iborat bo'ladi. (1.10) formulaning o'ng tomonidagi integrali P u a s s o n i n t e g r a l i deyiladi.

(1.9) formulada $r = 0$ desak, $v(r, \theta)$ funksiyaning $r = 0$ dagi qiymatini $u(0)$ orqali belgilab olsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) d\alpha \quad (1.11)$$

Bu esa o'rta qiymat haqidagi teoremlar, ya'ni garmonik funksiyaning doira markazidagi qiymati uning aylanadagi qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga teng.

(1.10) formulada $u(R, \theta) = 1$ bo'lsa, avvalgi punktdagi 1- natijaga asosan $u(r, \theta) = 1$ bo'ladi, ya'ni:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.12)$$

Endi $\varphi(\alpha)$ - oldindan berilgan, $[0, 2\pi]$ segmentda uzluksiz bo'lgan α haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsin. Bu funksiya uchun Puasson integralini yozamiz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.13)$$

Bu integralning birinchidan, r va α ning gormonik funksiyasi bo'lishini va ikkinchidan doira ichidagi $z = re^{i\alpha}$ nuqta aylanada yotuvchi ixtiyoriy $\zeta = re^{i\alpha}$ nuqtaga intilganda $\varphi(\alpha)$ limitga intilishini ko'rsatamiz: R o'zgarmas bo'lgani uchun (14) integral r va θ parametralarining funksiyasi bo'lib, θ ga ko'ra davriydir. (davri 2π). Ushbu

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) \geq R^2 + r^2 - 2Rr = (R - r)^2$$

tengsizlikdan ravshanki, $0 \leq r < R$ bo'lganda

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \quad (1.14)$$

ifodaning r va θ ga nisbatan ixtiyoriy tartibdagi hosilasi o'sha parametrlarning uzluksiz funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Shunga ko'ra (14) integralni r va θ bo'yicha integral ishorasi ostida diffensiallash mumkin Laplas operatorida qutb koordinatalariga o'tib, (1.14) funksiyaning Laplas tenglamasini qanoatlanishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Shunday

qilib, (1.13) integral $r < R$ da garmonik funksiyadir, buni biz $u(r, \theta)$ belgilab olamiz:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.15)$$

Endi $z = re^{i\alpha}$ ($r < R$) nuqta C aylanada yotuvchi ixtiyoriy $\zeta = Re^{i\alpha_0}$ nuqtaga intilganda $u(r, \theta)$ funksiya $\varphi(\alpha_0)$ limitga intilishini ko'rsatish kerak. Umumiyatlikni chegaralamay, $\alpha_0 = 0$ deyish mumkin, chunki α qutb burchakning qiymati faqat qutb o'qi yo'nalishining tanlab olinishga bog'liq bo'lgani uchun, qutb o'qini ixtiyoriy $\zeta_0 \in C$ nuqtadan o'tkazishimiz mumkin. Shunday qilib,

$$\lim_{r \rightarrow R, \theta \rightarrow 0} [u(r, \theta) - \varphi(0)] = 0$$

Tenglikni isbotlash kerak.

(1.15) formuladan foydalanib, $\varphi(0)$ ni yozib olamiz:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.16)$$

(1.15) dan (1.16) ni ayiramiz:

$$u(r, \theta) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\alpha) - \varphi(0)| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (1.17)$$

ε -ixtiyoriy musbat son bo'lsin, $\varphi(\alpha)$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtadagi uzluksizligidan foydalanib, $\delta(\varepsilon) > 0$ ni shunday tanlaymizki, $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ bo'lganda $|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajarilsin. So'ngra nuqtalarni $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ tengsizlik qanoatlantiruvchi C aylananing yoyini γ_ε bilan, qolgan qismini Γ_ε bilan belgilab olamiz. U holda (18) dan:

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \oint_C \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| \quad (1.18)$$

(1.14) funksiyaning musbat ekanligini e'tiborga olib, (1.16) tengsizlikdagi γ_ε bo'yicha olingan integralni baholaymiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\varphi(\alpha)$ funksiya $[0, 2\pi]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun $\varphi(\alpha) - \varphi(0)$ ayirma shu segmentga chegaralangan bo'ladi:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| < M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\alpha$$

(1.18) dagi bo'yicha olingan integralni ham yetarli kichik qilib olish mumkin- ligini ko'rsatish uchun (r, θ) nuqtani $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ shartini bajariladigan qilib yozamiz. Yoyning nuqtalarida qutb barcha $\alpha(2\delta(\varepsilon), 2\pi - 2\delta(\varepsilon))$ intervalga tegishli bo'lgani sababli, shu nuqtalar uchun $(\alpha - \theta)(2\delta(\varepsilon), 2\pi - 2\delta(\varepsilon))$ intervalga tegishli bo'ladi. Shuning uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \theta) &< \cos \delta(\varepsilon); \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} < \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)}; \\ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| &< M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\alpha. \end{aligned}$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni $r \rightarrow R$ da nolga intiladi, demak, agar $R - r < \delta'(\varepsilon)$ bo'lsa,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| < \varepsilon.$$

Demak, $|\theta| < 2\delta(\varepsilon)$ va $R - r < \delta'(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib, doira uchun Dirixle masalasining yechimi (1.15) formula orqali ifodalanar ekan.

1.3. Dirixle masalasini yechishning Perron usuli

$D \subset R^n$ -ixtiyoriy chegaralangan soha bo'lsin. $u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ funksiya har bir $x \in D$ uchun $\Delta u(x) = 0$ Laplas tenglamasini va $u|_{\partial D} = \varphi(x)$ chegaraviy shartni qanoatlantirsin. Bunday $u = u(x)$ funksiya topish masalasi Laplas tenglamasi uchun qo'yilgan Dirixle masalasi deyiladi va $u(x)$ funksiyaga Dirixle masalasining klassik yechimi deb aytiladi. Endi shu ixtiyoriy chegaralangan soha uchun Dirixle masalasining klassik yechimining mavjudligi haqidagi masalani qarab chiqamiz. Bunda biz shart uchun Dirixle masalasining yechilishi va maksimum prinsipiga asoslangan subgarmonik funksiyalarning Perron usulidan keng foydalanamiz. Bu usul bir qator qulayliklarga ega bo'lib, masala yechimining chegara atrofidagi xarakterni o'rganishdan ajralgan holda olib qaraladi. Hamda usul ikkinchi tartibli elliptik tenglamalarning umumiyroq sinflari uchun ham soddagina umumlashtiriladi. Mavjudlik teoremlarining isbot qilishning boshqa ma'lum usullari ham mavjud bo'lib, ular integral tenglamalar usuli, variatsion usul yoki Gilbert fazosi usuli va boshqalardir.

1.4-ta'rif. Agar $D \subset R^n$ - sohada aniqlangan $u(x)$ $(-\infty \leq u(x) \leq \infty)$ funksiya uchun

1) D sohada $u(x)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni ixtiyoriy $x^0 \in D$ uchun

$$\overline{\lim_{x \rightarrow x^0}} u(x) \leq u(x^0);$$

2) har bir $x^0 \in D$ nuqta uchun $u(x^0)$ qiymat yetarlicha kichik $r > 0$ ($r \leq r(x^0)$) radiusli $S(x^0, r)$ sfera bo'yicha olingan $u(x)$ funksiyaning o'rta qiymatidan katta emas:

$$u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma \quad (1.19)$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $u(x)$ funksiya D sohada subgarmonik funksiya deyiladi. Bunda $\sigma_n = \frac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$ - R^n fazodagi $S(0,1)$ - birlik sferaning yuzi,

$C^2(D)$ sinfga qarashli $u(x)$ funksiya uchun $\Delta u = 0$ ($\Delta u \geq 0, \Delta u \leq 0$) munosabat bajarilsa, u holda $u(x)$ funksiya garmonik (subgarmonik, supergarmonik) funksiya deb ataladi.

$C^2(D)$ sinfga qarashli supergarmonik va subgarmonik funksiyalarning ta’rifini uzluksiz funksiyalar uchun quyidagicha ham umumlashtirish mumkin. $B \subset\subset D$ shar va B da garmonik ixtiyoriy $h(x)$ funksiya uchun ∂B da $u(x) \leq h(x)$ ($u(x) \geq h(x)$) tengsizlik o‘rinli ekanligidan shu $u(x) \leq h(x)$ ($u(x) \geq h(x)$) tengsizlikni B da ham o‘rinli ekanligi kelib chiqsa, u holda $u(x)$ funksiya D sohada subgarmonik (supergarmonik) funksiya deyiladi. Uzluksiz subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalarini ko‘rsatish mumkin.

1) D sohada uzluksiz $u(x)$ subgarmonik funksiya uchun maksimumning kuchli prinsipi o‘rinlidir, ya’ni agar D chegaralangan sohada $v(x)$ supergarmonik funksiya va ∂D da $v(x) \geq u(x)$ bo‘lsa, u holda butun D sohada $v(x) > u(x)$ yoki $v(x) \equiv u(x)$ bo‘ladi. Bu yerda $v(x)$ supergarmonik funksiya va $u(x)$ subgarmonik funksiyalar $\bar{D}$ da uzluksiz deb qaraladi.

Oxirgi xulosani isbot qilish uchun teskarisini faraz qilamiz. U holda biror $x^0 \in D$ nuqta uchun $(u - v)(x^0) = \sup_{x \in \Omega} (u(x) - v(x)) = M \geq 0$ va shunday bir $B = B(x^0)$ shar topilib, ∂B da u va v larga mos ravishda teng bo‘lsin. U holda

$$M \geq \sup_{x \in \partial B} (\bar{u}(x) - \bar{v}(x)) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x^0) \geq (u - v)(x^0) = M$$

va shunga ko‘ra bu formulada tengsizlik belgilarini tenglik belgisi bilan almashtirish mumkin. Garmonik funksiyalar uchun maksimumning kuchli prinsipiga ko‘ra, B da $\bar{u} - \bar{v} \equiv M$ bo‘lgani uchun $u - v \equiv M$ ekanligi ∂B kelib

chiqadi. Bu esa B sharning tanlanishiga ziddir. Demak, 1) xossa o'rinli ekan.

2) D sohada $u(x)$ funksiya subgarmonik va B shar shu D sohaning ichida qat'iy joylashgan (kompakt joylashgan), ya'ni $B \subset\subset D$ bo'lsin. $\bar{u}$ orqali B da garmonik bo'lgan va ∂B da $u(x)$ funksiyaning qiymati ortadi. Puasson integrali bilan berilgan funksiyaning belgilaymiz. Bu funksiya uchun ∂B da $\bar{u} = u$ bo'ladi. D sohada B ga nisbatan u funksiyaning garmonik qirgimini

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B \\ u(x) & x \in D \setminus B \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlaymiz. $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik funksiya bo'ladi. Haqiqatdan ham, D sohadagi ixtiyoriy $B' \subset\subset D$ shar va B' harda $h(x)$ garmonik funksiya bo'lib, $x \in \partial B'$ da $h(x) \geq U(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsin. $u(x) \leq U(x)$ tengsizlik B' da o'rinli bo'lgani uchun $u(x) \leq h(x)$ tengsizlik ham, B' da o'rinli va shunga ko'ra $U(x) \leq h(x)$ tengsizlik $x \in B' \setminus B$ da ham o'rinli. Lekin $U(x)$ funksiya B da garmonik. Shuning uchun, maksimum prinsipiga ko'ra, $U(x) \leq h(x)$ tengsizlik B' da o'rinli bo'ladi, ya'ni D sohada $U(x)$ subgarmonik funksiya bo'ladi.

3) D sohada $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ subgarmonik funksiyalar bo'lsin. U holda $u(x) = \max\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)\}$ funksiya ham D sohada subgarmonik funksiya bo'ladi.

Bu xossa bevosita subgarmonik funksiyaning ta'rifidan kelib chiqadi. supergarmonik funksiyalar uchun shunga o'xshash xossalarni xosil qilish uchun 1), 2), 3) xossalarda $u(x)$ funksiyaning $-u(x)$ funksiya bilan almashtirish kerak.

D - chegaralangan soha, $\phi(x)$ - esa ∂D da chegaralangan funksiya bo'lsin. Agar $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lgan $u(x)$ - supergarmonik funksiya ∂D da $u(x) \leq \phi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\phi(x)$ ga nisbatan subfunksiya deyiladi. Xuddi shunga o'xshash $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lgan $u(x)$ - supergarmonik funksiya ∂D da $u(x) \geq \phi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\phi(x)$ ga nisbatan superfunksiya deyiladi.

Maksimum prinsipiga ko'ra, har bir subfunksiya ixtiyoriy superfunksiyadan kichik yoki teng bo'ladi.

Xususan, $\inf_{x \in \partial\Omega} \phi(x)$ dan oshmaydigan ($\sup_{x \in \partial\Omega} \phi(x)$ dan kichik bo'lmagan) o'zgarmas funksiya subfunksiya (superfunksiya) bo'ladi. $\phi(x)$ funksiya uchun barcha subfunksiyalar to'plami S_ϕ orqali belgilaymiz.

Perron usulining asosiy natijasi quyidagi teoremda jamlangan.

1.2-teorema. $u(x) = \sup_{v(x) \in S_\phi} v(x)$ *D sohada garmonikdir.*

Isbot: maksimum prinsipiga ko'ra ixtiyoriy $v(x) \in S_\phi$ funksiya $v(x) \leq \sup_{x \in \Omega} \phi(x)$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Shunga ko'ra, $u(x)$ funksiya butun $\bar{D}$ da aniqlanadi. $y \in D$ ixtiyoriy tayinlangan nuqta bo'lsin. $U(x)$ funksiya aniqlanishi bo'yicha shunday bir $\{v_n(x)\}_1^\infty \subset S_\phi$ ketma – ketlik mavjud bo'lib, $v_n(y) \rightarrow u(y)$ bo'ladi. $v_n(x)$ ni $\max\left(v_n(x), \inf_{x \in \partial\Omega} \phi(x)\right)$ bilan almashtirib, $\{v_n(x)\}$ ketma – ketlikni chegaralangan deb xisoblash mumkin. Endi R sonni $B = B_R(y) \subset\subset D$ bo'ladigan qilib tanlaymiz va $V_n(x)$ orqali B ga nisbatan $V_n(x)$ funksiyaning garmonik qismini belgilaymiz. U holda $V_n(x) \in S_\phi$, $V_n(y) \rightarrow u(y)$ bo'ladi, hamda $\{v_n(x)\}$ qisman ketma – ketligi topilib, $\rho < R$ radiusli ixtiyoriy $B_\rho(y)$ sharda $v(x)$ garmonik funksiya tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. B da $v(x) \leq u(x)$ va $v(y) = u(y)$ tenglik o'rinli. Endi B da $v(x) = u(x)$ ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, biror $z \in B$ nuqtada $v(z) < u(z)$ bo'lsin. U holda shunday bir $\bar{u} \in S_\phi$ funksiya mavjud bo'lib, $v(z) < \bar{u}(z)$ o'rinli bo'ladi. $w_k(x) = \max(\bar{u}(x), V_{n_k}(x))$ deb belgilab, bu funksiyaning W_k garmonik qismini olsak, oldin xosil qilganimizdek $\{W_k\}$ ketma – ketlikning biror qisman ketma – ketligi w garmonik funksiya yaqinlashib, B da $v(x) \leq w(x) \leq u(x)$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan tashqari, $v(y) = w(y) = u(y)$. Lekin, u holda maksimum prinsipiga ko'ra, B da $v(x) = w(x)$ tenglik bajarilishi kerak bo'ladi. Bu esa $\bar{u}(x)$ ning tanlashiga ziddir. Shunday qilib, $u(x)$ funksiya D sohada garmonikdir. Biz konstruktiv ravishda qurgan garmonik funksiya tabiiyki, $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u|_{\partial D} = \phi(x)$

klassik Dirixle masalasining yechimi (bu yechimga Perron yechimi deb aytiladi) deb xisoblash mumkin. Xaqiqatdan ham, agar Dirixle masalasi yechiladigan bo'lsa, u holda uning yechimi Perron yechimi bilan ustma – ust tushadi. Xaqiqatdan ham, w yechim bo'lsin. U holda, $w \in S_\phi$ bo'lib, maksimum prinsipiga ko'ra, $w \geq u$ tengsizlik barcha uchun o'rinli bo'ladi. bundan $w = u$ hosil qilinadi.

Perron usulida yechimning chegara atrofidagi xarakteri shu yechimning mavjudligi masalasidan ajratilganligi muhimdir. Perron yechimi chegarada qiymatining berilishiga va soha chegarasining geometrik xossalriga bog'liq bo'lib, Baryer funksiyasi yordamida o'rganiladi. $\xi \in \partial D$ nuqta bo'lsin.

Agar $C(\overline{D})$ sinfga qarashli $W = W_\xi$ funksiya

- 1) D sohada W supergarmonik funksiya;
- 2) $x \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$ uchun $W(x) > 0$, $W(\xi) = 0$ bo'lsa, D uchun ξ nuqtada Barer funksiyasi deyiladi.

Baryer funksiyasiga umumiyroq holda ham ta'rif berish mumkin bo'lib, unda W funksiya supergarmonik va D sohadagina uzluksiz, musbat hamda $x \rightarrow \xi$ da $W(x) \rightarrow 0$ shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz. Baryer funksiyani qurishga asoslangan yo'nalishning muhimligi shundan iboratki, bunda ∂D chegaraning lokal xossalrigina zarur bo'ladi.

W funksiya $\xi \in \partial D$ nuqtada lokal baryer bo'lsin, ya'ni ξ nuqtaning shunday bir N atrofi mavjud bo'lib, $D \cap N$ da W funksiya yuqoridagi ta'rifni qanoatlantirsin. U holda D uchun ξ nuqtada baryerni quyidagicha aniqlash mumkin. B shar bo'lib, $\xi \in B \subset\subset N$ va $m = \inf_{x \in N \setminus B} W(x) > 0$ shartlarni qanoatlantirsin.

$$\overline{W}(x) = \begin{cases} \min(m, W(x)), & x \in \overline{D} \cap B, \\ m, & x \in \overline{D} \setminus B \end{cases}$$

Funksiya uchun ξ nuqtada bar'er bo'ladi. Bunga 1) va 2) xossalarning bajarilishini tekshirish bilan ishonch xosil qilish mumkin. Xaqiqatdan ham, $\overline{D}$ sohada uzluksiz va D sohada supergarmonik ekanligi

subgarmonik funksiyalarning 3) xossasidan kelib chiqadi. 2) xossa bevosita ko'rsatiladi.

Agar chegara nuqtasidan Baryer mavjud bo'lsa, u holda bu nuqta (Laplas tenglamasi uchun) regulyar nuqta deyiladi.

Baryer mavjudligi va yechimning chegara atrofidagi xarakteri orasidagi bog'liqlik quyidagi lemmada ifodalanadi.

Lemma. *D sohada $u(x) = \sup_{v(x) \in S_\phi} v(x)$ tenglik bilan aniqlangan garmonik funksiya bo'lsin. Agar ξ - nuqta D sohaning chegarasidagi regulyar nuqta va ξ nuqtada $\phi(\xi)$ uzluksiz bo'lsa, u holda $x \rightarrow \xi$ da $u(x) \rightarrow \phi(\xi)$ bo'ladi.*

1.3-teorema. *Chegaralangan sohada klassik Dirixle masalasi ixtiyoriy uzluksiz chegaraviy qiymatda yechilishi uchun sohaning barcha chegara nuqtalari regulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Endi quyidagi savol muhimdir: qanday sohalar uchun barcha chegara nuqtalari regulyar bo'ladi? Umumiy holda yetarli shartlarni chegaraning lokal geometrik xossalari terminida berish mumkin. Bunday shartlardan ayrimlarini keltiramiz. $n=2$ bo'lgan holda chegaralangan D sohani qaraymiz. Z_0 -nuqta D sohaning chegara nuqtasi bo'lsin. r, θ - orqali koordinata boshi z_0 nuqtada bo'lgan qutb koordinatalarini belgilaymiz. Z_0 nuqtaning shunday bir N atrofi mavjud bo'lib, $D \cap N$ da yoki z_0 nuqtani o'z chegarasida saqlovchi $D \cap N$ ning komponentasida aniqlangan θ funksiyaning bir qiymatli varag'ini ajratish mumkin bo'lsin. U holda

$$W = -\operatorname{Re} \frac{1}{\log(z - z_0)} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

funksiya z_0 nuqta uchun (sust) lokal Baryer funksiya bo'ladi va shunga ko'ra z_0 nuqta regulyar nuqtadir. Xususan, agar z_0 nuqta D sohaning tashqarisida yotuvchi sodda yoyning nuqtasi bo'lsa, u holda bu z_0 nuqta chegaraning regulyar nuqtasi bo'ladi. Shunday qilib, tekislikda Dirixle masalasining chegaralangan sohada uzluksiz chegaraviy qiymatlar uchun yechilishi sohaning barcha chegara nuqtalariga tashqaridan o'tuvchi sodda yoyning chekka nuqtasi bo'lishi mumkin bo'lgan holda o'rinli bo'ladi. Biroz

umumiyroq holda, shu Baryer ko'rsatadiki, agar soha to'ldiruvchisining ixtiyoriy komponentasi bittadan ortiq nuqtani saqlasa, chegaraviy masala yechiladi. Bunday sohaga misol sifatida chekli sondagi sodda yopiq egri chiziqlar bilan chegaralangan sohani keltirish mumkin. Boshqa bir misol – birlik doiradan qandaydir yoini qirqib tashlash bilan hosil qilish mumkin. Bu xolda chegaraviy qiymat qirqilgan qismining har ikkala qirg'og'ida ham berilishi mumkin.

Yuqori o'lchamli sohalar uchun bu masala qaralgan masaladan muhim farqi bo'lib, umumiy holda Dirixle masalasi yechilmasligi ham mumkin. Uch o'lchovli fazo bo'lgan holda yopiq sirt bilan chegaralangan va soha ichiga yo'nalgan yetarlicha o'tkir bigizli Lebeg tomonidan qurilgan sohani misol sifatida keltirish mumkin: bu bigizning o'tkir uchi shu sirt bilan chegaralangan soha chegarasining regulyar bo'lmagan nuqtasi bo'ladi.

Dirixle masalasi yechilishining sodda yetarli sharti chegaralangan D soha uchun tashqi sfera shartidir:

Har bir $\xi \in \partial D$ nuqta uchun $B = B_R(y)$ shar mavjud bo'lib, $\overline{B} \cap \overline{D} = \xi$ shartni qanoatlantirsin.

Agar bu shart bajarilsa, u holda

$$W(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x - y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \frac{|x - y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan W funksiya ξ nuqtada baryer bo'ladi. Xususan, chegarasi C^2 sinfga tegishli sohalarning barcha chegara nuqtalari regulyardir.

Sig'im fizik tushunchasi chegara nuqtasining regulyarligi va chiqarib tashlagan nuqta ekanligini xarakterlashda yordamchi vositadir. D - orqali $R^n (n \geq 3)$ fazodagi ∂D silliq chegaraga ega chegaralangan sohani belgilaymiz. u – garmonik funksiya $R^n \setminus \overline{D}$ to'ldiruvchi sohada aniqlangan va $u|_{\partial D} = 1$ chegaraviy shartni va $u(\infty) = 0$ shartni qanoatlantirsin. Odatda bunday funksiya o'tkazuvchanlik potentsiali deb ataladi. Bundan $u(x)$

funksiyaning mavjudligi ichki chegarasi ∂D (bunda $u_k(x)=1$ bo'lgan va tashqi chegarasi (bunda $u_k(x)=0$) cheksizlikka intiluvchi bo'lgan kengayuvchi chegaralangan sohalar ketma – ketligida aniqlangan $u_k(x)$ garmonik funksiyalarning yagona limiti ekanligini ko'rsatish mumkin. Agar $\sum$ orqali ∂D ni yoki D sohani o'rab oluvchi ixtiyoriy yopiq sirtini belgilasak,

$$cap D = - \int_{\sum} \frac{\partial u}{\partial \gamma} ds = \int_{R^n \setminus D} |Du|^2 dx$$

miqdor D sohaning sig'imini aniqlaydi, bunda γ - tashqi normalardir. Elektrostatika cap D sig'im ∂D da joylashgan to'la elektrik zaryad bilan ko'paytuvchi o'zgarmas son aniqlikda ustma – ust tushadi.

Sig'im tushunchasi sohaning chegarasi silliq bo'lmagan holda ham kiritilishi mumkin va ixtiyoriy kompakt to'plam uchun chegarasi silliq ichma – ich joylashgan sohalarning sig'implari ketma – ketligining yagona limiti sifatida aniqlanadi. Sig'im tushunchasining ekvivalent ta'rifini approksimaksiya qiluvchi sohalarsiz ham berish mumkin. Xususan, quyidagi variatsion xarakteristika o'rinli:

$$cap D = \inf_{v(x) \in K} \int_{R^n} |Dv(x)|^2 dx$$

Bunda

$$K = \{v(x) \in C_0^1(R^n) : v(x) = 1, x \in D\}$$

$x^0 \in \partial D$ chegara nuqtasining regulyarligini aniqlashda ixtiyoriy tayinlangan $\lambda \in (0,1)$ son uchun

$$c_j = cap \{x \in D : |x - x^0| \leq \lambda^j\}$$

Sig'imni qaraymiz. Viner kriteriyasiga ko'ra, D sohaning x^0 chegara nuqtasi regulyar bo'lishi uchun $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \lambda^{-j(n-2)}$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir

II-bob. Qat'iy mw -qavariq va mw -regulyar sohalar uchun

Dirixle masalasi.

2.1. Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

2.1-ta`rif Agarda $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan $u(z) \in L_{loc}^1(D)$

funksiya:

1) D sohada yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni

$$\overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);;$$

2) D sohada $dd^c u \wedge \left(dd^c |z^2| \right)^{n-m} \geq 0$, $1 \leq m \leq n$, ya'ni

$\forall \omega \in F^{(m-1, m-1)}$ uchun $D \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z^2| \right)^{n-m}(\omega) = \int u \left(dd^c |z^2| \right)^{n-m} \wedge dd^c \omega \geq 0,$$

bo'lsa, bu funksiyaga D sohada m – wsh funksiya $(n - m + 1)$ o'lchamli kompleks tekisliklarda subgarmonik m – wsh funksiya bo'ladi ya'ni

$\forall \omega \in F^{(m-1, m-1)}$ uchun

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z|^2 \right)^{n-m}(\omega) = \int u \left(dd^c |z|^2 \right)^{n-m} \wedge dd^c \omega \geq 0, \quad (2.1)$$

bo'lsa, bu funksiyaga D sohada m – wsh funksiya $(n - m + 1)$ o'lchamli kompleks tekisliklarda subgarmonik funksiya deyiladi.

Bunday funksiyalar sinfini m – $wsh(D)$ orqali belgilaymiz. Bu yerda “ ω ” xarfi bu sinfni m – sh funksiyalar sinfidan farqlash uchun ishlatilgan.

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada m – wsh funksiyalar ham ayni paytda $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ da ham subgarmonik bo'ladi.

Binobarin subgarmonik funksiyalarning barcha xossalari m – wsh funksiyalar uchun ham o'rinli

Quyida m – wsh funksiyalarni ba`zi muhim xossalarini keltiramiz.

1) m – wsh funksiyalarning nomanfiy koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyani m – wsh funksiya bo'ladi ya'ni

$$u_j(z) \in m - wsh(D) \quad a_j \in R_+ \quad (j = 1, 2, \dots, N) \Rightarrow$$

$$a_1 u_1(z) + a_2 u_2(z) + \dots + a_N u_N(z) \in m - wsh(D);$$

2) Monoton kamayuvchi $m - wsh$ funksiyalar ketma-ketligining limiti

$$m - wsh \text{ funktsiya bo'ladi ya'ni } u_j(z) \in m - wsh(D) \\ u_j(z) \geq u_{j+1}(z) \quad (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z) \in m - wsh(D)$$

3) Tekis yaqinlashuvchi $m - wsh$ funksiyalar ketma-ketligi $m - wsh$ funksiyaga yaqinlashadi ya'ni agar

$$u_j(z) \in m - wsh(D), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad u_j(z) = u(z)$$

bo'lsa u holda $u(z) \in m - wsh(D)$ bo'ladi.

4) *Maximum prinsipi.* Agar $u(z) \in m - wsh(D)$ funktsiya biror $z^0 \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa ya'ni

$$u(z^0) = \sup_{z \in D} u(z) \quad (2.2)$$

bo'lsa u holda $u(z) \equiv const$ bo'ladi.

5) Agar $u(z) \in m - wsh(D)$ bo'lsa u holda $u_j(z) = u^* K_{\frac{1}{j}}(z - w)$ o'rama

ham $m - wsh(D)$ ga tegishli bo'ladi, hamda $j \rightarrow \infty$ da $u_j(z) \downarrow u(z)$ bu yerda $K_{\frac{1}{j}}(x) = j^n K(jx)$ bu yerda K – standart silliq yadro

$$\sup K \subset B(0;1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx = \int_{B(0;1)} k(x) dx = 1$$

6) $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan va yuqoridan yarim uzluksiz u funktsiya $m - wsh$ bo'lishi uchun, ixtiyoriy $(n - m + 1)$ -o'lchamli $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ kompleks tekislikda $u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D)$ bo'lishi zarur va yetarli.

2.2. Kuchsiz m – subgarmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi.

2.2-Ta’rif. Agar $u(z) \in m - wsh(D)$ funksiya uchun $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $m - wsh$ funksiyalar sinfida maksimum printsipi bajarilsa, ya’ni agar $v \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} (u(z) - v(z)) \geq 0$ munosabat bajarilishidan $\forall z \in D$ uchun $u(z) \geq v(z)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada maksimal funksiya deyiladi.

$u(z) \in m - wsh(D)$ funksiya maksimum bo’ladi, faqat va faqat shu holdaki, istalgan $G \Subset D$ sohada barcha $v \in m - wsh(D) : u|_{\partial D} \geq v|_{\partial G}$ funksiyalar uchun D da $u(z) \geq v(z)$ tengsizlik bajarilsa.

Maksimal funksiyalarni o’rganish uchun mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasini qaraymiz. Plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasiga o’xshash tarzda mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi quyidagicha aniqlanadi: faraz qilaylik $D \subset \mathbb{C}^n$ – chegaralangan soha va $\varphi(\xi) \in C(\partial D)$ – tayinlangan funksiya bo’lsin. Shunday uzluksiz $u(z)$ maksimal $m - wsh$ funksiyani aniqlash kerakki, $u|_{\partial D} = \varphi$. Odatdagidek, yechim Perron usulida izlanadi:

$$\mathcal{U}(\varphi, D) = \left\{ u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} u(z) \leq \varphi \right\},$$

$$\omega(z) = \sup \{ u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D) \}. \quad (2.1)$$

Klassik $m = 1$ holda, agar D – kuchli 1 – qavariq (regulyar), masalan, silliq ∂D chegaraga ega bo’lsa, u holda ω funksiya Dirixle masalasining yechimi bo’lishi isbotlangan, ya’ni u D sohada garmonik, chegaragacha uzluksiz va $\omega|_{\partial D} = \varphi$. Biroq psh funksiya sinfidagidek, $m > 1$ bo’lganda, masala ancha murakkab va yechimning mavjudligi uchun D sohaning qavariqligiga va chegaraviy φ funksiyaga qo’shimcha shartlar qo’yishga to’g’ri keladi.

2.3-Ta’rif. Agar $\forall \xi^0 \in \partial D$ nuqta chegarasida $b(z) \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$ $b(\xi^0) = 0$, $b|_{\overline{D} \setminus \{\xi^0\}} < 0$ pik funksiya mavjud bo’lsa, $D \subset \mathbb{C}^n$ soha mw – regulyar soha deyiladi.

Shuni takidlaymizki, agar $m > 1$ da ∂D chegara silliqliqi mw -regulyar soha uchun yetarli bo'lmaydi, ya'ni $m - wsh$ funksiya uchun pik mavjud bo'lishi. Lekin, agar $D = \{\rho(z) < 0\}$ qat'iy mw -qavariq soha bo'lsa, u holda u mw -regulyar bo'ladi, ya'ni istalgan $\xi^0 \in \partial D$ nuqta chegarasida $b(z)$ pik funksiya mavjud. Boshqacha aytganda $\rho(z)$ - qandaydir $G \supset \bar{D}$ atrofida qat'iy $m - wsh$ funksiya bo'lsa, u holda fiksirlangan $\xi^0 \in \partial D$ nuqta uchun $\sigma > 0$ mavjudki, $b(z) = \rho(z) - \sigma |z - \xi^0|^2 \in m - wsh(G)$ bo'ladi.

2.1-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ - qat'iy mw -qavariq soha bo'lsa, u holda bu sohada Dirixle masalasi istalgan chegaraviy $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya uchun yechimga ega bo'ladi. Aniqrog'i, $\omega(z) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$ funksiya maksimal, uzluksiz $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$ tenglik bajariladi.

psh funksiyalar ($m = n$) uchun $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\forall \xi \in \partial D$ munosabat Bremerman tomonidan, uzluksizligi, $\omega \in C(\bar{D}) - Uolsh$ tomonidan isbotlangan.

Natija. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ qat'iy mw -qavariq soha bo'lsa, u holda istalgan uzluksiz φ funksiya ∂D chegarasida $m - wsh(D)$ funksiya izi hisoblanadi. Boshqacha aytganda, $\varphi \in C^2(\partial D)$ bo'lsa, u holda u $w \in m - wsh(D_\varepsilon) \cap C(D_\varepsilon) : w|_{\partial D} = \varphi$ funksiyaning izi hisoblanadi. Bu yerda $D_\varepsilon - \bar{D}$ yopilma atrofi.

Bundan ko'rinadiki, natijaning birinchi qismi ravshan, lekin w yechimning o'zi φ funksiya ichkarisiga davom qildirilgan $m - wsh(D)$ ni beradi.

Dirixle masalasi yechimi faqat qat'iy mw -qavariq soha uchun emas, balki mw -regulyar $D \subset \mathbb{C}^n$ soha uchun ham yechiladi.

Endi Dirixle masalani ixtiyoriy $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada qaraymiz, unga minimal talab u $D \subset \mathbb{C}^n$ soha regulyar sohadan iborat bo'lishi kerak. Masalan, $D \subset \mathbb{C}^n$ soha chegarasi silliq yoki istalgan $\xi \in \partial D$ chegaraviy nuqtada ichki konus mavjudki, klassik potentsiallar nazariyasi ma'nosida

regulyar sohadan iborat bo'ladi. Ravshanki, bunday sohalar uchun, umuman aytganda, qandaydir $m - wsh(D)$ funksiyaning izidan iborat bo'lmagan $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya mavjud bo'ladi. Masalan, $U^2 = U^2(0,1) = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ polidoira uchun $\varphi(\xi_1, \xi_2) \in C(\partial U^2)$ funksiya, $(1,0) \in \partial U^2$ nuqtada pik, ichkariga $2 - wsh = psh$ davom qilmaydi. Binobarin, Dirixle masalasi $\omega|_{\partial U^2} = \varphi$ chegaraviy shartda mavjud emas.

2.2-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ – regulyar soha va $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya qandaydir $w \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$ funksiyaning izidan iborat bo'lsa, u holda $\omega(z)$ funksiya $\omega(z) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$ maksimal, uzluksiz $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lib, $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$ tenglik bajariladi.

Isbot. $\omega(z) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$ lar uchun $m - wsh$ funksiyalar xossasiga ko'ra $\omega^*(z)$ regularizatsiya ham $m - wsh$ funksiya bo'ladi. Shuningdek, D – regulyar soha va $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya, hamda $m - wsh$ funksiyaning 6)-xossasiga ko'ra

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \forall \xi \in \partial D \quad (2.2)$$

ega bo'lamiz.

Teskari tengsizlikni isbotlash uchun $w \in m - wsh(D)$, $\lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$ funksiya dan foydalanamiz. $\mathcal{U}(\varphi, D)$ sinf ta'rifiga ko'ra $w \in \mathcal{U}(\varphi, D)$ bo'lishi ravshan. Bundan $w(z) \leq \omega(z)$, ya'ni $\underline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \geq \underline{\lim_{z \rightarrow \xi}} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$ va $\overline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \forall \xi \in \partial D$ lar birgalikda bizga $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega^*(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$ ekanligini beradi.

Bundan xususan quyidagi $\omega^* \in \mathcal{U}(\varphi, D)$ kelib chiqadi va shu sababli $\omega^* \equiv \omega$ bo'ladi. $\omega(z)$ funksiyaning maksimal ekanligi 2.1-teoremadan kelib chiqadi.

Endi ω funksiyaning $\overline{D}$ da uzluksiz ekanini ko'rsatish qoldi. Buning uchun $z \rightarrow \xi \in \partial D$ da $|u(z) - u(\xi)|$ ayirma nolga tekis yaqinlashadi, ya'ni

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |u(z) - u(\xi)| < \varepsilon \quad \forall \xi \in \partial D, z \in D, |z - \xi| < \delta$. Shu sababli, agar biz standart C^∞ –approksimatsiya olsak

$$u_j(z) = u \circ K_{1/j}(z - w), \quad u_j \in C^\infty(D_j) \cap m - wsh(D_j),$$

bu yerda $D_j = \{z \in D: dist(z, \partial D) > 1/j\}$, unda $j \rightarrow \infty$ da $\max_{\partial D_j} [u_j(z) - u(z)] \rightarrow 0$

bo'lishini ko'ramiz. U holda D da u funksiyaning maksimumligidan $\max_{D_j} [u_j(z) - u(z)] \rightarrow 0$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni D soha ichkarisida $u_j \downarrow u$

teng. Bundan, $u \in C(D)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Xulosa.

Ushbu bitiruv malakaviv ishida quyidagi mavzular o'rganildi

mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasini qaraymiz. Plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasiga o'xshash tarzda mw – subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi quyidagicha aniqlanadi: faraz qilaylik $D \subset \mathbb{C}^n$ – chegaralangan soha va $\varphi(\xi) \in C(\partial D)$ – tayinlangan funksiya bo'lsin. Shunday uzluksiz $u(z)$ maksimal m – wsh funksiyaning aniqlash kerakki, $u|_{\partial D} = \varphi$. Odatdagidek, yechim Perron usulida izlanadi:

$$\mathcal{U}(\varphi, D) = \left\{ u \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \partial D} \overline{u(z)} \leq \varphi \right\},$$
$$\omega(z) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D) \right\}.$$

Klassik $m = 1$ holda, agar D – kuchli 1 – qavariq (regulyar), masalan, silliq ∂D chegaraga ega bo'lsa, u holda ω funksiya Dirixle masalasining yechimi bo'lishi isbotlangan, ya'ni u D sohada garmonik, chegaragacha uzluksiz va $\omega|_{\partial D} = \varphi$. Biroq psh funksiya sinfidagidek, $m > 1$ bo'lganda, masala ancha murakkab va yechimning mavjudligi uchun D sohaning qavariqligiga va chegaraviy φ funksiya qo'shimcha shartlar qo'yishga to'g'ri keladi.

2.1-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ – qat'iy mw -qavariq soha bo'lsa, u holda bu sohada Dirixle masalasi istalgan chegaraviy $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya uchun yechimga ega bo'ladi. Aniqrog'i, $\omega(z) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D) \right\}$ funksiya maksimal, uzluksiz $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$ tenglik bajariladi.

psh funksiyalar ($m = n$) uchun $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$, $\forall \xi \in \partial D$ munosabat Bremerman tomonidan, uzluksizligi, $\omega \in C(\overline{D})$ – Uolsh tomonidan isbotlangan.

2.2-Teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ – regulyar soha va $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya qandaydir $w \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$ funksiyaning izidan

iborat bo'lsa, u holda $\omega(z)$ funksiya $\omega(z) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$
 maksimal, uzluksiz $\omega \in m\text{-}wsh(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lib, $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$ tenglik
 bajariladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Уэрмер Дж., Теория потенциала, М.,МИР.1980 г.
2. Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции. М.,МИР.1980
3. Абдуллаев Б.И. Задача Дирихле в классе $m - wsh$ функций. Узбекский математический журнал, 2012, №4, с.3-10.
4. Абдуллаев Б.И., Задача Дирихле для $m - sh$ функций регулярных областях. Доклады АНРУз., 2012, №6, с.9-11.
5. Bremermann H.J. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans.Amer. Math.Soc, 1959, 91, p. 246-276.
6. Walsh J.L. Continuity of envelopes of plurisubharmonic functions. J. Math. Mech., 1968, 18, p. 143--148.