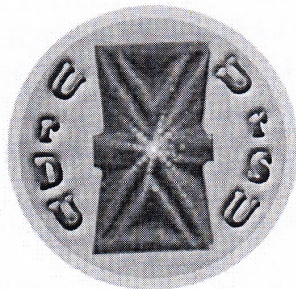


**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“MATEMATIKA” KAFEDRASI

Matematika yo'nalishi 402-guruh talabasi Masharipov Umidbekning

5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha

bakalavr darajasini olish uchun

***BITIRUV MALAKAVIY
ISHI***

Mavzu: Maksimal plyurisubgarmonik funksiyalar

Ilmiy rahbar:

A. A. Atamuratov



Urganch 2016 yil

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I-BOB. PLYURISUBGARMONIK FUNKSIYALAR	4
1.1. Subgarmonik funksiyalar.....	4
1.2. Plyurisubgarmonik funksiyalar.....	17
II-BOB. MAKSIMAL FUNKSIYALAR.....	22
2.1. Maksimal plyurisubgarmonik funksiyalar.....	22
2.2. Kompleks Monj-Amper operatori.....	32
Xulosa.....	38
Adabiyotlar ro'yxati.....	39

KIRISH

Plyurisubgarmonik funksiyalar kompleks analizda analitik funksiyalar sinfi bilan bog'liqligi yahshi ma'lum. Golomorf funksiyalar uchun baholashlar olishda bu funksiyalar sinfining o'rni beqiyosdir, zero har qanday golomorf funksiya modulini logarifmasi plyurisubgarmonik funksiyaning beradi. Shu o'rinda plyurisubgarmonik funksiyalar orasida maksimallik hususiyatiga ega bo'lgan funksiyalarni o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi. Dastlab bunday funksiyalar hususiy hollari Bremermann va Ciciak tomonidan o'rganilgan. Bunda asosiy masala maksimallikni ta'minlovchi mezonlarni izlashga qaratilgan. 1959 yilda Bremerman maksimal funksiyalar kompleks gessian determinatini nolga aylantirishini isbot qilib beradi. Keyinchalik Kerzman bu tasdiqni aksinchasi ham o'rinli bo'lishini ko'rsatib masalani silliq plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida to'liq hal qildilar. Biroq umuman olganda maksimal funksiyalar silliq hatto uzluksiz ham bo'lmasligini hisobga olsak hali masala to'liq yechilmaganini ko'ramiz. Shu sabab A.Sadullayev tomonidan 1981 yilda maksimal funksiya umumiy ta'rif berildi. Shu bilan birga maksimallik hususiyatini ochib beruvchi bir qator natijalar olindi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida yuqorida qayd etib o'tilgan klassik natijalar o'rganilgan. Bunda plyurisubgarmonik funksiyalar, kompleks Monj-Amper operatori va ularni maksimal funksiyalar bilan bog'lanishi keltirib o'tiladi.

I-BOB PLYURISUBGARMONIK FUNKSIYALAR.

1.1. Subgarmonik funksiyalar.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbf{R}^n$ sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi

$$u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$$

funksiya berilgan bo'lsin, $u \in L^1_{loc}(D)$.

Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz:

$$\forall x^o \in D \text{ uchun } \overline{\lim}_{x \rightarrow x^o} u(x) \leq u(x^o)$$

(bundan $u(x)$ funksiyaning D ga tegishli ixtiyoriy kompaktda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir $x^o \in D$ nuqta uchun shunday $r(x^o) > 0$ topiladiki, $r \leq r(x^o)$ uchun

$$u(x^o) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma; \quad (1.1)$$

u holda $u(x)$ funksiya D sohada *subgarmonik funksiya* deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi $Sh(D)$ kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial $u(x) \equiv -\infty$ funksiyasi ham D

da $Sh(D)$ ga tegishli deb qaraymiz. Endi subgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

a) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) &\in Sh(D); \end{aligned}$$

b) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \max \{ u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \} &\in Sh(D); \end{aligned}$$

v) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) &\in Sh(D); \end{aligned}$$

g) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi subgarmonik funksiya yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad u_j(x) \xrightarrow{\text{tekis}} u(x) \Rightarrow u(x) \in Sh(D)$$

d) *Maksimum prinsipi.* Agar $u(x) \in Sh(D)$ funksiya biror $x^o \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.2)$$

bo'lsa, u holda $u(x) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$M = \left\{ x \in D : u(x) = u(x^o) \right\}$$

to'plamni qaraylik. $u(x)$ funksiyaning yuqoridan yarim uzluksiz bo'lganligidan va (2) shartdan M to'plamning D da yopikligi kelib chikadi.

Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $p \in M$ uchun (1.1) formulaga ko'ra

$$u(x^o) = u(p) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) d\sigma \leq u(x^o), \quad r \leq r(p),$$

bo'ladi. Bu munosabatdan $u|_{S(p,r)} \equiv u(x^o)$, ya'ni p ning $B(p, r(p))$ atrofida $u(x) = u(x^o)$ bo'lishini ko'ramiz. Bu esa M to'plamning D da ochiq ekanligini ko'rsatadi. Demak, $M = D$.

e) Agar $\vartheta(x) \in Sh(D)$, $u(x) \in H(D)$ funksiyalar uchun $S(x^o, r) \subset\subset D$ sferada

$$\vartheta|_S \leq u|_S$$

bo'lsa, u holda $B(x^o, r)$ sharda $\vartheta(x) \leq u(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

e) – xossadan quyidagi muhim hulosaga kelamiz. Faraz qilaylik,

$$\vartheta(x) \in Sh(D) \cap C(D)$$

berilgan bo'lib, $B(x^o, r) \subset\subset D$ bo'lsin. Ushbu

$$u(x) = \int_{S(x^o, r)} \vartheta(y) P(x, y) d\sigma(y), \quad x \in B(x^o, r),$$

Puasson integralini qaraylik. $u(x) \in h(B)$, $u|_S = \vartheta|_S$ bo'lib, ye) – hossaga ko'ra $B = B(x^o, r)$ da $\vartheta(x) \leq u(x)$ bo'ladi. Uzlüksiz funksiyalar uchun isbotlangan bu xossa ixtiyoriy $\vartheta \in Sh(D)$ uchun ham o'rinlidir: $\vartheta(x) \leq u(x)$ va deyarli barcha $x \in S$ lar uchun $\vartheta(x) = u(x)$ o'rinlidir;

j) aytaylik, $u(x) \in Sh(D)$ funksiya va $x^o \in D$ nuqta berilgan bo'lsin. Ushbu

$$m(x^o, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma$$

va

$$n(x^o, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^o, r)} u(x) dV,$$

bunda $V_n r^n$ miqdor $B(x^o, r)$ ning hajmi, integrallarni (o'rta qiymatlarni) qaraylik.

1.1-teorema. Faraz qilaylik, $u(x) \in Sh(D)$ va $u(x) \not\equiv -\infty$ bo'lsin.

U holda ixtiyoriy $x^o \in D$ uchun

$$u(x^o) \leq n(x^o, r) \leq m(x^o, r), \quad n(x^o, r) > -\infty, \quad 0 < r < \rho(x^o, \partial D),$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, agar r monoton kamayib nolga intilsa, unda $n(x^o, r)$ va $m(x^o, r)$ o'rta qiymatlar monoton kamayib, $u(x^o)$ ga intiladi.

1.1-teoremadan ushbu muhim natijaga ega bo'lamiz: $D \subset \mathbf{R}^n$ sohada subgarmonik $u(x) \neq -\infty$ funksiya D da lokal integrallanuvchidir, ya'ni ixtiyoriy $B \subset\subset D$ uchun $\int_B u(x)dV$ integral mavjuddir;

z) subgarmonik funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzilishga ega bo'lishi mumkin. Ayni paytda, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

1.2-teorema. Agar $u(x) \in Sh(D)$ bo'lsa, u holda shunday monoton to'plamlar

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

ketma – ketligi va shunday monoton kamayuvchi funksiyalar

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^\infty(D_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

ketma – ketligi mavjudki,

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-|x|^2} & \text{agar } |x| < 1 \text{ bo'lsa;} \\ 0 & \text{agar } |x| \geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sinfga tegishli bo'lib, uning salmog'i $\text{supp} K(x) = B(0,1)$ dir. Endi $K(x)$ ning ifodasidagi o'zgarmas c ni shunday tanlab olamizki,

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

bo'lsin. $u(x) \not\equiv -\infty$ deb, bu yadro yordamida ushbu

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0, \quad (1.3)$$

integralni qaraylik. $u_\delta(x)$ funksiyasi

$$D_\delta = \{x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta\}$$

ochiq to'plamda aniqlangan bo'lib, $x \in D_\delta$ da

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbf{R}^n} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV = \int_{\mathbf{R}^n} u(x + \delta y) K(y) dV$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdagi birinchi integral $C^\infty(D_\delta)$ sinfga, ikkinchi integral esa $Sh(D_\delta)$ sinfga tegishli bo'ladi. Binobarin,

$$u_\delta(x) \in Sh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta).$$

$u(x)$ ning subgarmonik funksiya ekanligidan, u_δ ning $\delta \downarrow 0$ da, monoton kamayuvchi bo'lishligi va

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

tenglikdan, $u_\delta(x)$ ning $u(x)$ ga intilishini topamiz.

ı) Subgarmonik funksiyalar umumiy holda C^2 sinfga tegishli bo'lmasligidan, Δu - Laplas operatorini faqat umumlashgan funksiya sifatida qarash mumkin bo'ladi:

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi, \quad \phi \in F(D).$$

1.3-teorema. Har qanday $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$ subgarmonik funksiya, uchun umumlashgan ma'noda $\Delta u \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\phi \in F(D)$, $\phi \geq 0$ uchun $\int u \Delta \phi \geq 0$ munosabat urinlidir.

Jumladan, $u(x)$ funksiya C^2 sinfga tegishli bo'lib, u subgarmonik bo'lsa, $u \in Sh(D) \cap C^2(D)$, u holda

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \geq 0 \text{ dir.}$$

Yuqorida keltirilgan teoremaning aksi ham o'rinli: agar umumlashgan funksiya u uchun

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi \geq 0, \quad \phi \in F(D), \quad \phi \geq 0,$$

munosabat bajarilsa, u holda u subgarmonik funksiya bo'ladi;

k) *F.Riss teoremasi.* Har qanday $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, funksiya olinganda ham D sohada shunday musbat o'lchov μ mavjudki, ixtiyoriy $D^0 \subset\subset D$ soha uchun

$$u(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu_y + u_{D^0}(x) \quad (1.4)$$

bo'ladi, bunda $u_{D^0}(x) \in H(D^0)$ va

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{agar } n = 2 \text{ bo'lsa} \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{agar } n > 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Eslatib o'tamiz, $K(x)$ funksiyasi Laplas tenglamasining fundamental yechimidir: $\Delta K(x) = \delta(x)$ bo'lib, bu yerda $\delta(x)$ - Dirakning

umumlashgan funksiyasi, $\delta \circ \phi(x) = \phi(0)$, $\phi \in F(\mathbf{R}^n)$. δ ga massasi $x = 0$ da bo'lgan birlik o'lchov (zaryad) mos keladi.

F. Riss teoremasini isbotlashda Δu ning musbat funksionalligidan foydalaniladi. Ma'lumki, har bir musbat funksional biror μ o'lchovni aniqlaydi: $\Delta u \circ \phi = \int \phi d\mu$, $\phi \in F(D)$. $\mu /_{D^0}$ chekli o'lchov bo'lib,

$$\vartheta(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu$$

integral mavjuddir. Ayni paytda, $\Delta K(x-y) = \delta(x-y)$ ligidan, $\Delta \vartheta = \mu$, ya'ni

$$\int \vartheta \Delta \phi dV = \int \phi d\mu, \quad \forall \phi \in F(D^0),$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bundan ushbu

$$\Phi_{D^0}(x) = u(x) - \vartheta(x)$$

ayirma uchun $\Delta u_{D^0} = 0$ bo'lishi, ya'ni u_{D^0} ning D^0 sohada garmonik funksiya ekanligi kelib chiqadi.

l) Agar $u(x) \in Sh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(x)} \in Sh(D)$ dir.

z) – xossaga ko'ra, $u(x)$ funksiyasini Sh va C^∞ funksiyalar bilan yaqinlashtirish mumkin. Shundan kelib chiqib, qaralayotgan xossani $u(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ funksiyalar uchun isbotlash

yetarlidir. Bu holda $De^{u(x)} = e^{u(x)} \left[\Delta u + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] \geq 0$ ekanligini

ko'rish qiyin emas.

Xuddi shunday quyidagi xossa ham o'rinlidir.

m). Agar $u(x) \in Sh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(x)] \in Sh(D)$ dir.

Polyar to'plamlar. Aytaylik, D soha va undagi biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset D$.

Agar shunday $u(x) \in Sh(D)$, $u(x) \not\equiv -\infty$ funksiya mavjud bo'lsaki, $\forall x \in E$ da $u(x) = -\infty$ tenglik bajarilsa, E to'plam D sohada *polyar to'plam* deyiladi.

Polyar to'plamlar quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

a) ixtiyoriy $D \subset \mathbf{R}^n$ sohada polyar to'plam butun $\mathbf{R}^n$ da ham polyar to'plam bo'ladi, ya'ni

$$u(x) \in Sh(D), \quad u(x) \not\equiv -\infty, \quad u|_E = -\infty$$

bo'lsa, u holda shunday $\vartheta(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)$ funksiya topiladiki,

$$\vartheta(x) \not\equiv -\infty, \quad \vartheta|_E = -\infty$$

bo'ladi;

b) sanoqli sondagi polyar to'plamlar yig'indisi polyar to'plam bo'ladi: $E_1, E_2, \dots$ polyar to'plamlar bo'lsa, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ham polyar to'plam bo'ladi;

v) E ning polyar to'plam bo'lishi uchun, uning tashqi Nyuton sig'imi $\text{cap} E = 0$ bo'lishi zarur va yetarli;

g) agar E polyar to'plam bo'lsa, uning Xausdorf o'lchovi $H_{2n-2+\varepsilon}(E) = 0$, $\varepsilon > 0$, bo'ladi va, aksincha, agar $H_{2n-2}(E) < \infty$ bo'lsa, E polyar to'plam bo'ladi;

d) subgarmonik funksiyalar nazariyasida yuqoridan lokal tekis chegaralangan funksiyalar sinfi muhim rol o'ynaydi: agar har bir $x^0 \in D$ nuqta uchun shunday atrof $B(x^0, r) \subset\subset D$ va shunday M

konstanta topilsaki, $\{u_\alpha\} \subset Sh(D)$ sinfdan olingan har bir $u_\alpha(x)$ funksiya ushbu

$$u_\alpha(x) \leq M \quad (x \in B(x^0, r))$$

tengsizlik bajarilsa, $\{u_\alpha\}$ sinfga D da *yuqoridan lokal chegaralangan* subgarmonik funksiyalar sinfi deyiladi. Ravshanki, qaralayotgan $\{u_\alpha\}$ sinf uchun

$$u(x) = \sup_\alpha u_\alpha(x)$$

funksiya mavjud va u D dan olingan har bir kompakt $K \subset\subset D$ da yuqoridan chegaralangandir. Agar bu funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, uning subgarmonik bo'lishligini isbotlash qiyin emas. $u(x)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'lmasa, unda, odatda quyidagi regulyarlash operatsiyasi qaraladi, ya'ni

$$u^*(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{y \in B(x, r)} u(y) = \overline{\lim_{y \rightarrow x} u(y)}.$$

Bunda $u^*(x)$ funksiya $u(x)$ ning *regulyarlangan* funksiyasi deyiladi. Regulyarlangan $u^*(x)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'ladi.

1.4-teorema. *Yuqoridan lokal chegaralangan subgarmonik funksiyalarning ixtiyoriy sinfi $\{u_\alpha\}$ uchun*

$$u^*(x) \in Sh(D)$$

bo'lib, $N = \{x \in D : u(x) < u^(x)\}$ to'plam D da polyar to'plam bo'ladi, bunda $u(x) = \sup_\alpha u_\alpha(x)$.*

Shuningdek, quyidagi teorema ham o'rinli.

1.5-teorema. *Faraz qilaylik,*

$$u_j(z) \in Sh(D) \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

yuqoridan lokal chegaralangan subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi bo'lib, $u(x) = \overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(x)$ bo'lsin. U holda $u^*(x) \in Sh(D)$ bo'lib,

$N = \{x \in D : u(x) < u^*(x)\}$ to'plam D da polyar to'plam bo'ladi.

1.1.2. Garmonik o'lchovlar. Garmonik o'lchovlar tushunchasi «ikki konstanta haqidagi teorema» yoki «uch sfera haqidagi teorema» larga borib taqaladi.

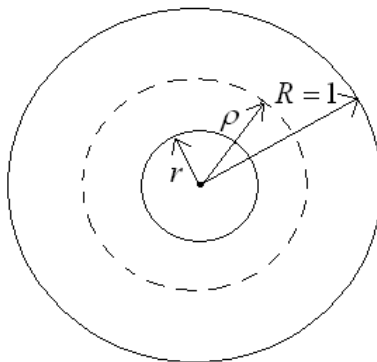
Ushbu masalani qaraylik: aytaylik, $\mathbf{R}^n$ fazoda

$$S(0, r), S(0, \rho), S(0, 1) \quad (r < \rho < 1)$$

konsentrik sferalar va birlik $B = B(0, 1)$ sharda biror M soni bilan chegaralangan $u(x)$ subgarmonik funksiyasi berilgan bo'lsin. Agar

$$u|_{S(0, r)} \leq m \quad , \quad m < M \quad ,$$

bo'lsa, $u(x)$ funksiya $S(0, \rho)$ sferada yuqoridan baholansin.



1 – ch i z m a.

Buning uchun $B(0, 1) \setminus \overline{B(0, r)}$ sohada garmonik bo'lgan ushbu

$$\omega(x, r) = \left(1 - \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \frac{r^{n-2}}{1 - r^{n-2}}$$

funksiyadan foydalanamiz. Ravshanki, $\omega|_{S(0,r)} = -1$, $\omega|_{S(0,1)} = 0$ bo'lib, bu funksiya $\bar{B}(0,r)$ ning $B(0,1)$ sharga nisbatan *garmonik o'lchovi* (merasi) deyiladi. $\omega(x,r)$ funksiyani $\frac{u-M}{M-m}$ subgarmonik funksiya bilan solishtirib, maksimumlar prinsipiga ko'ra $\frac{u-M}{M-m} - \omega \leq 0$ yoki $u(x) \leq -m\omega(x,r) + M[1 + \omega(x,r)]$, $x \in B(0,1) \setminus \bar{B}(0,r)$, bo'lishini topamiz. Bu tengsizlikdan $x \in S(0,\rho)$ da

$$u(x)|_{S(0,\rho)} \leq m C(r,\rho) + M[1 - C(r,\rho)], \quad (1.5)$$

$$C(r,\rho) = \frac{r^{n-2}(1 - \rho^{n-2})}{\rho^{n-2}(1 - r^{n-2})}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Odatda (1.5) tengsizlikka ikki konstanta yoki uchta sfera haqidagi tengsizlik (teorema) deyiladi. Undan $m \rightarrow -\infty$ da $u|_{S(0,\rho)}$ ning $-\infty$ ga intilishini baholashda foydalaniladi.

Endi, umumiy holda garmonik o'lchov ta'rifini keltiramiz. Bunda D sohadan uning regulyarligi, ya'ni

$$\exists u(x) \in Sh(D), \quad u|_D < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \partial D} u(x) = 0$$

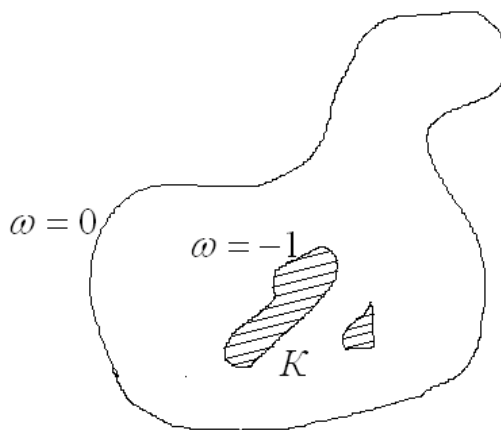
bo'lishligini talab etamiz. Berilgan $K \subset D$ kompakt uchun Ushbu

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(K, D) = \{u \in Sh(D): u|_K \leq -1, \quad u|_D \leq 0\} \quad \text{funksiyalar}$$

sinfini qaraylik. Quyidagi

$$\omega(x, K, D) = \sup_{u \in \mathfrak{A}} u(x)$$

funksiyaning regulyarlashdan hosil bo'lgan $\omega^*(x, K, D) = \overline{\lim_{y \rightarrow x}} \omega(y, K, D)$ funksiya K kompaktning D sohaga nisbatan garmonik o'lchovi deyiladi.



2 – rasm.

Garmonik o'lchovlar quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

a) garmonik o'lchov $\omega^* \in Sh(D) \cap H(D \setminus K)$ bo'lib,

$$-1 \leq \omega^*(x, K, D) \leq 0 \quad (x \in D),$$

$$\lim_{x \rightarrow \partial D} \omega^*(x, K, D) = 0$$

bo'ladi;

b) garmonik o'lchov $\omega^*(x, K, D)$ yoki hech bir $x^0 \in D$ nuqtada nolga teng bo'lmaydi yoki D sohada aynan nolga teng bo'ladi. Bundan tashqari, $\omega^*(x, K, D) \equiv 0 \Leftrightarrow K - \text{polyar}$;

v) agar $u(x) \in Sh(D)$, $u|_D \leq M$, $u|_K \leq m$ bo'lsa, u holda $x \in D$ lar uchun $u(x) \leq M(1 + \omega^*(x)) - m\omega^*(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu xossa *ikki konstanta haqidagi teorema* deb yuritiladi;

g) aytaylik, $K \subset D$ kompakt va $\omega^*(x) = \omega^*(x, K, D)$ esa garmonik o'lchov bo'lsin. Agar $x^0 \in K$ nuqtada $\omega^*(x^0) = -1$ bo'lsa, x^0 nuqta K ning *regulyar* nuqtasi, $\omega^*(x^0) > -1$ bo'lsa, x^0 *irregulyar* nuqtasi deyiladi. Agar K kompaktning barcha $x^0 \in K$ nuqtalari regulyar bo'lsa, bunday kompakt *regulyar kompakt* deyiladi.

K kompaktning irregulyar nuqtalari to'plami I_K polyar to'plamdir. Bundan tashqari, agar K polyar to'plam bo'lsa, unda $I_K = K$ dir.

1.2. Plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Plyurigarmonik funksiyalar. $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $u(z) \in C^2(D)$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $z^0 \in D$ va bu nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy kompleks to'g'ri chiziq $l : z = z^0 + w\xi, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad \xi \in \mathbb{C}$ uchun ushbu $\varphi(\xi) = u / l = u(z^0 + w\xi)$ kesim – funksiya $\xi = 0$ nuqtada garmonik, ya'ni $\xi = 0$ da $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \cdot \partial \bar{\xi}} = 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya D da plyurigarmonik funksiya deyiladi.

Plyurigarmonik funksiyalar sinfi $ph(D)$ kabi belgilanadi. Aytaylik, $u(z) \in ph(D)$ bo'lsin. Unda

$$\frac{\partial^2 u(z^0 + w\xi)}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = 0$$

bo'lib, murakkab funksiyaning differensiallash qoidasidan

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \overline{w_j w_k} = 0, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad \text{ekanligini ko'ramiz. Bundan va}$$

$w \in \mathbb{C}^n$ vektorning ixtiyoriyligidan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, plyurigarmonik funksiyalar sinfi (2.1) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi va ba'zan bu sistema plyurigarmonik funksiyaning ta'rifi sifatida ham qaraladi.

Teorema 2.1. *Agar $f(z) = u(z) + iv(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf bo'lsa, u holda*

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(z)$$

funksiyalar D sohada plyurigarmonik bo'ladi va aksincha, agar $u(z)$ funksiya D sohada plyurigarmonik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $B(z^0, r) \subset D$ atrofda $u(z)$ funksiya biror $f(z) \in \mathcal{O}(B(z^0, r))$ golomorf funksiyaning haqiqiy qismi bo'ladi: $u(z) \equiv \operatorname{Re} f(z)$.

Plyusubgarmonik funksiyalar. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan $u(z) : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

- 1) $u(z)$ yuqoridan yarim uzluksiz;

2) ixtiyoriy l kompleks to'g'ri chiziqli uchun u/l funksiya $l \cap D$ da subgarmonik bo'lsa, $u(z)$ funksiya D sohada plyurisubgarmonik funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar to'plami $psh(D)$ kabi belgilanadi. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada plyurisubgarmonik bo'lgan funksiya $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ da aniqlangan funksiya sifatida subgarmonik funksiya bo'ladi. Uni subgarmonik funksiyalarning 2 – shartini bajarishini tekshirish mumkin. Binobarin, subgarmonik funksiyalarning xossalari plyurisubgarmonik funksiyalar uchun ham saqlanadi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar quyidagi xossalarini ko'rib chiqamiz.

1) agar $u(z) \in psh(D)$ bo'lsa, u holda

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \delta > 0, \quad (2.2)$$

formula bilan aniqlangan $u_\delta(z)$

$$D_\delta = \left\{ x \in D : dist(\partial D, x) > \delta \right\}$$

sohada plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi va $psh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta)$ sinfga tegishli bo'lib, $\delta \downarrow 0$ da $u_\delta(z) \downarrow u(z)$ bo'ladi;

2) agar $u(z) \in psh(D)$ funksiya $z^0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, ya'ni $u(z^0) \geq u(z)$ ($z \in D$) bo'lsa, u holda $u(z) \equiv const$ bo'ladi;

3) plyurisubgarmonik funksiyalarning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

4) monoton kamayuvchi yoki tekis yaqinlashuvchi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

5) D sohada plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ berilgan bo'lib, $u = \sup_{\alpha \in \Lambda} u_\alpha$ yuqoridan yarim uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $u(z)$ plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi, $u(z) \in psh(D)$. Jumladan, $u_j(z) \in psh(D)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) bo'lsa,

$$\sup \{u_1(z), u_2(z), \dots, u_k(z)\} \in psh(D)$$

bo'ladi.

6) agar $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ bo'lsa, $\alpha \cdot \ln|f(z)| \in psh(D)$ bo'ladi, bunda $\alpha \geq 0$.

7) agar $u(z) \in psh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(z)} \in psh(D)$ bo'ladi, agar $u(z) \in psh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(z)] \in psh(D)$ bo'ladi.

Bu xossaning isboti subgarmonik funksiyalarning shu xossasidan bevosita kelib chiqadi.

8) D sohada aniqlangan $u(z) \in C^2(D)$ funksiyaning D da plyurisubgarmonik bo'lishi uchun ushbu

$$L(u, w) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \quad (2.3)$$

kvadratik formaning ya'ni Levi formasining ixtiyoriy $z \in D$ da musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir. (2.3) munosabatda $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ bo'lib, kvadratik formaning musbat aniqlanganligi $\forall w \in \mathbb{C}^n$ da $L(u, w) \geq 0$ bo'lishini anglatadi.

Agar $\forall w \in \mathbb{C}^n, w \neq 0$ da $L(u, w) > 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya z nuqtada qat'iy plyurisubgarmonik funksiya deyiladi, agar $u(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida qat'iy plyurisubgarmonik bo'lsa, D sohada qat'iy plyurisubgarmonik funksiya deyiladi.

II-BOB. MAKSIMAL FUNKSIYALAR.

2.1. Maksimal plyurisubgarmonik funksiya

Ω to'plam $\mathbb{C}^n$ fazoning ochiq qism to'plami va $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ plyurisubgarmonik funksiya bo'lsin. Agar Ω ning G barcha nisbiy kompakt qism to'plam uchun $\bar{G}$ da har bir yuqoridan yarim uzluksiz va $v \in psh(G)$ funksiya uchun ∂G chegarada $v \leq u$ tengsizlik bajarilishidan G da ham $v \leq u$ bo'lishi kelib chiqsa u holda u funksiya maksimal deyiladi. Ushbu ta'rif ilk bora A.Sadullayev tomonidan kiritilgan.

Biz Ω da maksimal plyurisubgarmonik funksiyalar oilasini $Mpsh(\Omega)$ kabi belgilaymiz. Maksimal plyurisubgarmonik funksiyalarning ba'zi muhim sinflari o'tgan asrning 50-yillarda o'rganilgandir o'tdi quyidagi tarixiy Siciak(1962) va Bremermann(1959) ishlarini alohida ta'kidlab o'tish joiz. Sadullayev tomonidan maksimallikning ta'rifiga ekvivalent bo'lgan qulay ta'riflarni ifodalovchi quyidagi tasdiq muhim ahamiyatga ega.

Teorema 1.1. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ochiq to'plam va $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ plyurisubgarmonik funksiya bo'lsin. Quyidagi holatlar ekvivalent

(I) Agar Ω ning barcha G nisbiy kompakt ochiq qism to'plamlar uchun va barcha $v \in psh(G)$ funksiya uchun barcha $\xi \in \partial G$ nuqtalarda $\liminf_{z \rightarrow \xi} (u(z) - v(z)) \geq 0$ munosabat o'rinli bo'lishidan G to'plamda $u \geq v$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(II) Agar $v \in psh(G)$ funksiya va har bir $\varepsilon > 0$ son uchun $K \subset \Omega$ kompakt to'plam va $\Omega \setminus K$ da $u - v \geq -\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa u holda G to'plamda $u \geq v$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(III) Agar $v \in psh(G)$ funksiya G to'plam Ω ning nisbiy kompakt ochiq qism to'plami uchun barcha $v \in psh(G)$ funksiya uchun ∂G chegarada $u \geq v$ bo'lishidan G to'plamda $u \geq v$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(IV) Agar $v \in psh(G)$, G to'plam Ω ning nisbiy kompakt ochiq qism to'plamini bo'lib, har bir $\xi \in \partial G$ uchun

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in G}} (u(z) - v(z)) \geq 0$$

o'rinli bo'lsa u holda G da $u \geq v$ bo'ladi.

(V) u maksimal funksiya bo'ladi.

Isbot. (I) $\Rightarrow$ (II) faraz qilaylik, v plyurisubgarmonik funksiya uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $K \subset \Omega$ mavud bo'lib, $\Omega \setminus K$ da $u - v \geq -\varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. Faraz qilaylik biror $a \in \Omega$ nuqtada $u(a) - v(a) = \eta$ bo'lsin.

$E = \{z \in \Omega : u(z) < v(z) + \eta / 2\}$ to'plamning yopig'i Ω ning kompakt qism to'plamidir. Shuning uchun shunday G ochiq to'plam topilib, E ni o'z ichiga oladi. (I) ga asosan G ning ichida olingan har bir $a \geq v + \eta / 2$ bo'lib, bu esa $a \in E$ bo'lishiga zid bo'ladi. Qolganlari (III),(IV),(V) va (I) lar shartida

$$w(z) = \begin{cases} \max\{u(z), v(z)\} & (z \in G) \\ u(z) & (z \in \Omega \setminus G) \end{cases}$$

funksiyaning Ω da plyurisubgarmonik bolishi faktidan kelib chiqadi.

Bir o'lchamli xolatda maksimal funksiyalar garmonik bo'lib, hususan C^∞ sinfga tegishli bo'ladi. Bu katta o'lchamlarda to'g'ri bo'lmaydi.

1-misol

$$u(z_1, \dots, z_n) = \log(\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\})$$

$$((z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\})$$

Funksiyani qarasak, $n > 1$ da u differensiallanuvchi. Uning plyurisubgarmonikligi bevosita psh funksiyalar xossalaridan kelib chiqadi. Bu funksiyaning maksimalligi har bir $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nuqta uchun Bir o'zgaruvchili $t \rightarrow u(tw)$ funksiya $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da garmonik bo'lishidan ta'rifga asosan to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadi..

2-misol. Biz uzulishga ega bo'lgan maksimal funksiyalarni ham ko'rsatib berishimiz mumkin

Biror $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uzulishga ega subgarmonik funksiyaning olib, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ uchun $u(z_1, z_2) = w(z_1)$ funksiyaning qaraylik. Har bir $a \in \mathbb{C}$ nuqta uchun $z_2 \rightarrow u(a, z_2)$ o'zgarmas va demak garmonik bo'ladi. Bu esa u funksiyaning maksimalligini bildiradi.

Endi biz uzluksiz maksimal funksiyalarning o'ziga xos muhim sinflariga yaqinroq nazar solamiz. Dasavval, bizga ba'zi tushunchalar kerak bo'ladi.

Ω - $\mathbb{C}^n$ da chegaralangan soha va $f \in C(\partial\Omega)$ bo'lsin Dirixle masalasi umumlashmasida shundan iboratki shunday $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ yarim uzluksiz funksiya aniqlash kerakki $(u|_{\Omega}) \in MPSH(\Omega)$ va $u|_{\partial\Omega} \equiv f$ bo'lsin. $\mathbb{C}^n$ da Ω chegaralangan soha va $f \in C(\partial\Omega)$ bo'lsin. $\mathfrak{A}(\Omega, f)$ orqali biz $\partial\Omega$ da $u^* \leq f$ shartni qanoatlantiruvchi

barcha $u \in psh(\Omega)$ funksiyalarning oilasini belgilaymiz. Bunda barcha $z \in \bar{\Omega}$ lar uchun

$$u^*(z) = \limsup_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} u(w)$$

kabi aniqlanadi.

$$\psi_{\Omega, f}(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathfrak{A}(\Omega, f)\} \quad (z \in \Omega)$$

funksiyani aniqlaymiz

$\psi_{\Omega, f}$ funksiya va f uchun Perron – Bremermann funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya haqiqiy patensiallar nazariyasida foydalanilgan klassik Perron funksiyasiga o'xshash tarzda Bremermann tomonidan kiritilgan.

Biz $\psi_{\Omega, f}$ funksiya Ω soha evklid shari bo'lgan holda Dirixle masalasini yechimi bo'lishini ko'rsatamiz.

Teorema 1.2. $f \in C(\partial B)$ bo'lsin $B = B(a, r)$ - $\mathbb{C}^n$ dagi ochiq shar bo'lsin.

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_{B, f}(z) & (z \in B) \\ f(z) & (z \in \partial B) \end{cases}$$

ψ funksiya B to'plam va f funksiya uchun Dirixle masalasini umumlashmasi uchun yechimdir bundan tashqari ψ uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Umumiylikni yoqotmasdan biz $a = 0$ deb faraz qilishimiz mumkin. h B va f uchun klassik Dirixle masalasini yechimi bo'lsin plyurisubgarmonik funksiyalar ayni vaqtda subgarmonik

funksiyalar hamdir u B da $\psi_{B,f} \leq h$ subgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsiga amal qiladi. h $\bar{B}$ da $(\psi_{B,f})^* \leq h$ ga egamiz. Asosan uni manosi $(\psi_{B,f})^* \in \mathfrak{A}(B, f)$ va shuningdek B da $(\psi_{B,f})^*$ funksiya ψ bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun $\psi \in PSH(B)$. Teoremaning birinchi xulosasining isbotini tugatish uchun. Buning uchun ∂B chegarada $(\psi_{B,f})^* \geq f$ ekanligini ko'rsatish yetarli. Biz biror $z_0 \in \partial B$ uchun kuchliroq xossasini ya'ni

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in B}} \psi_{B,f}(z) \geq f(z_0)$$

ni isbotlaymiz. $z_0 \in \partial B$ va $\varepsilon > 0$ deb olamiz. Teorema isbotini yakunlash uchun biz $v|_B \in \mathfrak{A}(B, f)$ va $v(z_0) = f(z_0) - \varepsilon$ shartlarni lqanoatlantiruvchi $v : \bar{B} \rightarrow R$ uzluksiz funksiya topsak kifoya. Bu $v(z) = c[\operatorname{Re}\langle z, z_0 \rangle - r^2] + f(z_0) - \varepsilon$ funksiya bo'ladi bunda $\varepsilon > 0$ o'zgarmas va ∂B da $v \leq f$ tengsizlik bajariladign qilib tanlangan. (To'rtburchak qavs ichidagi ifoda $\bar{B} \setminus \{z_0\}$ da manfiydir).

Natijada, har bir $z_0 \in \partial B$ uchun

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \bar{B}}} \psi(z) = \psi(z_0) \quad (2)$$

ya'ni ψ har bir chegaraviy nuqta uzluksiz bo'ladi. ψ ning maksimaligini ko'rsatish yanada oson. Haqiqatan ham, agar G B ning nisbiy kompakt ochiq qism to'lami bo'lsa va

$v : \bar{G} \rightarrow [-\infty, \infty)$ yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa shuningdek $v|_G \in psh(G)$ va ∂G da $v \leq \psi$ bo'lsa u holda

$$V = \begin{cases} \max\{v, \psi\}, & z \in G \\ \psi, & z \in B \setminus G \end{cases}$$

funksiya $\mathfrak{A}(B, f)$ sinfga tegishli va $V \leq \psi$ bo'ladi. Hususan G da $v \leq \psi$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

ψ ni uzluksiz ekanini ko'rsatish uchun, uni quyidan yarim uzluksiz ekanini ko'rsatish yetarli. $\varepsilon > 0$ son olamiz. ∂B chegara kompakt va $\psi|_{\partial B} = f$ tekis uzluksiz bo'ladi. Buni (2) bilan birlashtirib shunday $\delta \in (0, r/2)$ mavjudligini va agar $z \in \bar{B}$, $w \in \partial B$ va $\|z - w\| < 3\delta$ bo'lsa u holda

$$|\psi(z) - \psi(w)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

o'rinli. Bacha $y \in B(0, \delta)$ uchun

$$H_y(z) = \begin{cases} \max\{\psi(z), \psi(z+y) - \varepsilon\} & (z \in \bar{B} \cap (-y + \bar{B})) \\ \psi(z) & (z \in \bar{B} \setminus (-y + \bar{B})) \end{cases}$$

funksiya aniqlaymiz. H_y ning B ga cheklashini $\mathfrak{A}(B, f)$ ga tegishli bo'lishini ta'kidlatmiz. $B(0, r - \delta) \subset B \cap (-y + B) = B(0, r) \cap B(-y, r)$ ekanidan $H_y \in PSH(B(0, r - \delta))$ bo'ladi, chunki ikkita plyurisubgarmonik funksiyalarning maksimumi bo'lgani uchun. Boshqa tomondan $\bar{B} \setminus B(0, r - 2\delta)$ da $H_y = \psi$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, H_y ning aniqlanishiga ko'ra bu $\bar{B} \setminus (-y + \bar{B})$ dagi holatdir. Agar $z \in \bar{B} \cap (-y + \bar{B}) \setminus B(0, r - 2\delta)$ bo'lsa $\|z - z_0\| < 2\delta$ ni

qanoatlantiruvchi $z_0 \in \partial B$ nuqtani tanlaymiz. Biz $\|z + y - z_0\| < 3\delta$ ga egamiz va shunday qilib (3) ga asosan

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{va} \quad |\psi(z + y) - \psi(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Shuning uchun

$$\psi(z) \geq \psi(z + y) - \varepsilon \quad \text{va} \quad H_y(z) = \psi(z)$$

$H_y \in PSH(B)$ va ∂B da $H_y = f$ bo'ladi. talab qilingandek $H_y \in \mathfrak{A}(B, f)$ natijada $H_y \leq \psi$ bu agar $z, w \in \bar{B}$ va

$$\psi(z) \geq H_{w-z}(z) \geq \psi(z + w - z) - \varepsilon = \psi(w) - \varepsilon$$

Shuning uchun ψ quyidan yarim uzluksiz bo'ladi.

Natija 1.1. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ning ochiq qism to'plami va $u \in MPSH(\Omega)$ bo'lsin. Agar $B, \bar{B} \subset \Omega$ ochiq shar bo'lsa, u holda $u|_B$ qisqartma funksiya B da uzluksiz maksimal plyurisubgarmonik funksiyalarning kamayuvchi ketma-ketligining limiti bo'ladi.

Isbot. $G \supset \bar{B}$ ni o'z ichiga oladigan Ω ning nisbiy kompakt ochiq qism to'plam bo'lsin. 2-teoremaga ko'ra u funksiya $\{u_j\}_{j \in N} \subset C^\infty \cap PSH(G)$ kamayuvchi ketma-ketlik topishimiz mumkin. Quyidagi funksiyani aniqlaymiz

$$v_j(z) = \begin{cases} (\psi_{B, U_j}|_{\partial B})(z) & (z \in \bar{B}) \\ U_j(z) & (z \in G \setminus \bar{B}) \end{cases}.$$

U holda barcha $j, v_j \in PSH(G)$ uchun $v_j|_B \in MPSH(B)$ va v_j ketma-ketlik $v \in PSH(G)$ funksiya kamayib intiladi.

G da albatta $v \geq u$ bo'ladi. Shuningdek $G \setminus B$ da $v \equiv u$ aynan bir biriga teng bo'ladi. u funksiya B da maksimal $v \leq u$ bo'ladi bundan $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z) = u(z) \quad z \in B$.

C^2 sinfga tegishli plyurisubgarmonik funksiyalar uchun kompleks Gessi matrisasi

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right]$$

maksimallik haqida malumot beradi.

Teorema 1.3. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u \in C^2(\Omega)$ bo'lsin. Agar $u \in M_{psh}(\Omega)$

bo'lsa, u holda Ω da $\det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right] \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik

$$\det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right]$$

Ω sohada aynan 0 bo'lmasin. U holda har bir $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ uchun shunday $a \in \Omega$ topiladi va $\langle Lu(a)b, b \rangle > 0$ bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosilalarni uzliksizligiga asosan r son (bu yerda r musbat son) mavjud va $z \in \bar{B}(a, r)$ va $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ uchun $\langle Lu(a)b, b \rangle > 0$. Shuning uchun biror $c > 0$ son uchun va $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $z \in \bar{B}(a, r)$ lar uchun $\langle Lu(a)b, b \rangle \geq c \|b\|^2$ bo'ladi.

$$v(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in \Omega \setminus \bar{B}(a, r)) \\ u(z) + c(r^2 - \|z - a\|^2) & (z \in \bar{B}(a, r)) \end{cases}$$

funksiyani aniqlaymiz u holda $\partial B(a, r)$ da $v = u$ va $v(a) > u(a)$ bu esa u ning maksimaligiga zid.

Teorema 1.4. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ning chegaralangan ochiq qism to'plam bo'lsin va u, v funksiyalar $\bar{\Omega}$ ning biror atrofida C^2 - plyurisubgarmonik funksiyalar bo'lsin. Agar $\partial\Omega$ chegarada $v \leq u$ va Ω da

$$\det \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right] \geq \det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right]$$

bo'lsa, u holda Ω da $v \leq u$ bo'ladi.

Isbot. $\varepsilon > 0$ uchun

$$v_\varepsilon(z) = v(z) + \varepsilon(\|z\|^2 - \sup_{w \in \partial\Omega} \|w\|^2)$$

funksiyani aniqlaymiz. U holda

$$\begin{aligned} 0 &< \det \left[\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right] - \det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right] = \int_0^1 \frac{d}{dt} \det \left[\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (tv_\varepsilon + (1-t)u) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j,k=1}^n A_t^{jk} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (v_\varepsilon - u) \right) dt = \sum_{j,k=1}^n B^{jk} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (v_\varepsilon - u), \end{aligned}$$

Bu yerda $[A_t^{jk}]$ ushbu

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (tv_\varepsilon + (1-t)u) \right]_{j,k=1,\dots,n}$$

Matritsaning tashkil etuvchilari va $[B^{jk}]$ ularning integrallaridan

iborat. Shuning uchun $[B^{jk}]$ musbat aniqlangan, ya'ni $v_\varepsilon - u$

funksiya Ω da lokal maksimumga ega emas. Natijada Ω da $v_\varepsilon \leq u$ va $\varepsilon \rightarrow 0$ orqali ko'zlangan natijaga ega bo'lamiz .

Natija 1.2. Ω to'plam $\mathbb{C}^n$ ning ochiq qism to'plami va $u \in C^2 \cap PSH(\Omega)$ bo'lsin. Agar Ω to'plamda $\det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right] \equiv 0$ bo'lsa u holda u maksimal bo'ladi.

Isbot (I): G to'plam Ω ning nisbiy kompakt ochiq qism to'plami va $v \in psh(\Omega)$ bo'lsin shu bilan birga ∂G chegarada $v \leq u$ bo'lsin. Biz $(v - \delta)^* x_\varepsilon \leq u$ uchun yuqoridagi xossaga murojat qilishimiz mumkin. v ning o'rniga $(v - \delta)^* \chi_\varepsilon$ ni olib (bunda $v > 0, \varepsilon > 0$ ni yetarlichakichik qilib) G da $(v - \delta)^* x_\varepsilon \leq u$ va $\varepsilon \rightarrow 0$ bo'lganda biz G da $v \leq u$ baholashga ega bo'lamiz.

Isbot (II): Faraz qilaylik Ω va u natija shartini qanoatlantirsin, lekin u maksimal bo'lmasin. u holda biror $v \in psh(\Omega)$ va $G \subset \Omega$ nisbiy kompakt ochiq to'plam uchun ∂G da $v \leq u$ bo'ladi, lekin $(v - u)$ funksiya G da o'zining maksimal qiymatiga biror $a \in G$ ichki nuqtada erishadi. Oldingidagidek biz faraz qilishimiz mumkin. $v, \varepsilon > 0$ bilan $v_1 + \varepsilon(\|\cdot\|^2 + const)$ ning ko'rinishidir . $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ni tanlaymiz . Shu kabi $\langle Lu(a)b, b \rangle = 0$ 0 ning yetarlicha kichik atrofiga tegishli $t \in \mathbb{C}$ uchun $f(t) = (v - u)(a + tb)$ ni aniqlaymiz. f 0 da lokal maksimalga ega . $(\Delta f)(0) \leq 0$ boshqa tamondan.

$$(\Delta f)(0) = 4 \langle L(v - u)(a)b, b \rangle = 4 \langle Lv(a)b, b \rangle > 0$$

va shuning uchun biz ziddiyatga kelamiz .

2.2. Kompleks Monj-Amper operatori.

1. $(dd^c u)^k$ - **operator**. Quyidagi operatorlarni qaraymiz:

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$$

bu yerda

$$\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

C^2 sinfdan olingan ixtiëriy u funksiya uchun

$$(dd^c u)^k = dd^c u \wedge dd^c u \wedge \dots \wedge dd^c u$$

deb olamiz. Bu (k, k) - bidarajali diferensial formani ifodalaydi. Bu yerdan

$$(dd^c u)^n = \pi^n n! \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) \beta_n$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rish mumkin va bunda

$$\beta_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j - C^n \text{ fazoning odatdagi hajmi formasi.}$$

Ushbu holat yuqorida isbot qilingan teorema 1.3. va natija 1.2. ni birlashtirib quyidagicha ifodalash mumkinligini ko'rsatadi

Teorema 2.1. Ω to'plam $\mathbb{C}^n$ ning ochiq qism to'plami va $u \in C^2 \cap psh(\Omega)$ bo'lsin u holda u maksimal bo'lishi uchun Ω to'plamda $(dd^c u)^n = 0$ tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Ixtiyoriy chegaralangan plyurisubgarmonik (psh) funksiya (ikki marta silliq bo'lishi shart emas) uchun $(dd^c u)^k$ operatorni umumlashgan manoda aniqlash mumkin. $u - G \subset C^n$ sohada chegaralangan psh funksiya bo'lsin, va $D^{(n-k, n-k)} - G$ da $(n-k, n-k)$ bidarajali asosiy differensial formalar fazosi bo'lsin. U holda quyidagi rekkurent munosabat

$$\int (dd^c u)^k \wedge \varphi = \int u (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \varphi, \quad \varphi \in D^{(n-k, n-k)} \quad (2.1)$$

$(dd^c u)^k$ ni (k, k) - bidarajali musbat oqim sifatida aniqlaydi.

Haqiqatan ham, $k=1$ da bu isbotlangan. Induksiya bo'yicha faraz qilaylik, $k-1$ uchun aytilgan tasdiq o'rinli bo'lsin, uni k uchun isbotlaymiz. Farazga ko'ra $(dd^c u)^{k-1}$ musbatligidan u o'lchov tipidagi oqim bo'ladi. Shuningdek, $u(dd^c u)^{k-1}$ ham o'lchov tipidagi oqim va shuning uchun (1) ning o'ng qismi to'g'ri aniqlanadi. Shunday qilib, $(dd^c u)^k$ oqim bo'ladi. $(dd^c u)^k$ musbatligi isbotlash uchun $u_j \downarrow u$ approksimatsiyadan foydalanamiz. U holda

$$\int u (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \varphi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \varphi$$

$(dd^c u)^{k-1}$ oqim tarifiga ko'ra

$$\int (dd^c u)^{k-1} \wedge u_j dd^c \varphi = \int (dd^c u)^{k-2} \wedge dd^c u = \int (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c u_j \wedge \varphi.$$

bo'ladi. Natijada barcha musbat φ forma uchun $\int u (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \varphi \geq 0$ bo'ladi, chunki $(dd^c u)^{k-1}$ induktiv farazga ko'ra musbat, $dd^c u \wedge \varphi$ forma esa qandaydir ikkita musbat

formaning tashqi ko'paytmasi sifatida musbat. Bu yerdan $(dd^c u)^k$ oqimning musbat bo'lishi kelib chiqadi. $(dd^c u)^k$ operatorning amaliy qullash bilan bog'lik asosiy qiyinchilik monoton kamayuvchi u_j *psh* funksiyalar ketma-ketligi uchun $(dd^c u_j)^k$ oqimlar ketma-ketligining yaqinlashishini ko'rsatishdan iborat. Bu yerda biz faqat tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun yaqinlashishini ko'rsatamiz. Agar u uzluksiz *psh* funksiya bo'lsa, u holda uning approksimatsiyasi $u_j \downarrow u$ C^∞ funksiyalar sinfi tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, shuning uchun bu yerda oqim manosida $(dd^c u_j)^k \rightarrow (dd^c u)^k$ bo'lishi kelib chiqadi. $k = 1, 2, \dots, n$. istalgan monoton ketma-ketlik uchun $(dd^c u_j)^k$ ni yaqinlashishi isbotlanadi, shungacha uzluksiz funksiyalar bilan cheklanamiz.

Lemma. Agar $G = \{\rho(z) < 0\}$ qat'iy psevdokvartir soha, $\rho \in C^2(G)$, $\sigma = \min \rho(z)$ va u G dagi *psh* uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy r va k , $\sigma < r < 0$, $1 \leq k \leq n$ uchun

$$\int_{\sigma}^r dt \int_{\rho(z) < t} (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^k \leq (M - m) \int_{\rho(z) \leq r} (dd^c \rho)^{n-k+1} (dd^c u)^{k-1} \quad (2.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, bu yerda, $M = \max_G u(z)$, $m = \min_G u(z)$.

Ikki marta silliq u funksiya uchun lemma Stoks formulasi va Rudin teoremasidan kelib chiqadi.

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma}^r dt \int_{\rho(z) \leq t} (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^k &= \int_{\rho \leq r} d\rho \wedge d^c u \wedge (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^{k-1} = \int_{\rho \leq r} du \wedge \\
d^c \rho \wedge (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^{k-1} &= \int_{\rho \leq r} du \wedge d^c \rho \wedge (dd^c \rho)^{n-k} \wedge \\
(dd^c u)^{k-1} &= \int_{\rho=r} u d^c \rho \wedge (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^{k-1} - \int_{\rho \leq r} u (dd^c \rho)^{n-k+1}. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$d^c \rho \wedge (dd^c \rho)^{n-k} \wedge (dd^c u)^{k-1} = \lambda \sigma$, bu yerda $\lambda \geq 0$ va $\sigma = \{\rho = r\}$ dagi evklid hajm formasi, va shuningdek $(dd^c \rho)^{n-k+1} \wedge (dd^c u)^{n-1}$ musbat, u holda u baholanadi va yana bir marta Stoks formulasidan foydalansak (2) ga ega bo'lamiz. u istalgan uzluksiz psh funksiya xolida, $u_j \downarrow u$ approksimatsiya ishlatiladi. Limitga o'tish uchun $(dd^c u_j)^k$ oilalarning kompaktligini ko'rsatish yetarli.

u G dagi ikki marta silliq funksiya bo'lsin. Uni $k = p, p-1, \dots, 1$ uchun (2) tengsizlikga qo'llasak, biz quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\int_{\sigma}^0 dt \int_{\sigma}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\sigma}^{t_{p-1}} dt_p \int_{\rho \leq t} (dd^c \rho)^{n-p} \wedge (dd^c u)^p \leq (M-m)^p \int_{\rho \leq 0} (dd^c \rho)^n. \quad (2.4)$$

Fiksirlangan $\sigma < r < 0$ da (4) ning qismini $\frac{|r|^p}{p!} \int_{\rho \leq r} (dd^c \rho)^{n-p}$

$\wedge (dd^c u)^p$ miqdor bilan quyidan baholash mumkin.

Demak, istalgan $r < 0$ uchun o'rtacha tekis baholash o'rinli.

$$\int_{\rho \leq r} (dd^c \rho)^{n-p} \wedge (dd^c u)^p \leq C_r (M-m)^p(u), \quad (2.5)$$

bu yerda C_r u ga bog'lik bo'lmagan o'zgarmas. Shuning uchun $(dd^c u)^p$ kuchli musbat oqim va ρ qat'iy psh , u holda (5) ning chap qismi $C \cdot \|(dd^c u)^p\|$ dan kichik emas, bu yerda $C > 0$ uzgarmas faqat ρ ga bog'liq, $\|\cdot\|$ esa o'lchov tipli oqim massasini anglatadi.

Demak, istalgan $\alpha \in D^{(n-p, n-p)}$ asosiy forma uchun

$$\int_{\rho \leq r} \alpha \wedge (dd^c u)^p \leq C_r \|\alpha\|_G (M - m)^p(u)$$

baholash o'rinli bo'ladi. Chegaralangan Psh funksiyalar sinfida $(dd^c u)^p$ sust kompaktlar oilasini ifodalaydi. Bu baxolashdan umumiy xoldagi lemma isboti kelib chiqadi.

Olingan kompaktlar oilasini alohida tariflaymiz va limitga o'tamiz.

Teorema 2.2. $\{u\} - G \subset C^n$ sohadagi C^2 sinfning lokal tekis chegaralangan Psh funksiyalar oilasi bo'lsin. U holda $\{(dd^c u)^p\}$ oqimlar oilasi istalgan p , $1 \leq p \leq n$ uchun G da sust kompaktdir.

Teorema 2.3. Agar $u \in C^2(G)$ funksiyalar ketma-ketligi G soha ichida u ga yaqinlashsa, u holda

$$(dd^c u_j)^p \rightarrow (dd^c u)^p, \quad 1 \leq p \leq n$$

sust yaqinlashadi.

Bizning holda, $p=1$ uchun teorema ravshan. Faraz qilaylik, u $p-1$ uchun o'rinli bo'lsin, uni p uchun isbotlaymiz. Tarifga ko'ra istalgan asosiy $\alpha \in D^{(n-p, n-p)}$ forma uchun

$$\begin{aligned} \int_G (dd^c u_j)^p \wedge \alpha &= \int_G u_j (dd^c u_j)^{p-1} \wedge (dd^c \alpha) = \int_G u (dd^c u_j)^{p-1} \wedge dd^c \alpha + \\ &+ \int_G (u_j - u) (dd^c u_j)^{p-1} \wedge dd^c \alpha \end{aligned}$$

Induktiv farazga ko'ra o'ng qismidagi birinchi integral

$$\int_G u (dd^c u)^{p-1} \wedge dd^c \alpha = \int_G (dd^c u)^p \wedge \alpha$$

ga, ikkinchi integral 0 ga intiladi, chunki $(dd^c u_j)^{p-1}$ chegaralangan va $u_j - u$ tekis nolga yaqinlashadi.

C^2 sinfning Psh funksiyalar uchun olingan maksimallik kriteriyasini uzluksiz funksiyalar uchun ham to'g'ri bo'ladi.

Teorema 2.4. Ω to'plam $\mathbb{C}^n$ ning ochiq qism to'plami va $u \in C \cap psh(\Omega)$ bo'lsin, u holda u funksiya maksimal bo'lishi uchun Ω to'plamda $(dd^c u)^n = 0$ tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida maksimal plyurisubgarmonik funksiyalarning kompleks Monj-Amper operatori bilan bog'lanishi o'rganildi va uzluksiz plyurisubgarmonik funksiyalar faqat va faqat $(dd^c u)^n = 0$ tenglikni qanoatlantirsagina maksimal bo'lishi va bu kriteriyani nafaqat uzluksiz balki istalgan plyurisubgarmonik funksiyalar uchun isbot qilish kompleks Monj-Amper operatorining aniqlanishi bilan bog'liq masala ekanini ko'ramiz.

Adabiyotlar.

1. Bremermann H.J., On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc., 1059 , 91:2 , 246-276.
2. Kerzman N., A Monge-Ampere equation in complex analysis. Proceedings of symposia in pure mathematics of the American Mathematical Society , Providence , RI , V. 30:1 , pp 161-167.
3. Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ. Т.1.2, М.: Наука, 1976.
4. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium. Academic publishing, Germany, 2012.
5. Садуллаев А., Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях// Успехи мат. наук, 1981, 36, № 4, 53-105.
6. Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.-М.,ВИНИТИ 1985.т. 8. стр. 65 - 113.
7. M. Klimek, Pluripotential theory, vol. 6 of London Mathematical Society Monographs. New Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991.

Internet manbalari:

1. www.mathnet.ru (Rossiya matematika sayti)
2. www.arxiv.org (yangi maqolalar sayti)
3. www.ziynet.uz (ta'lim portal)