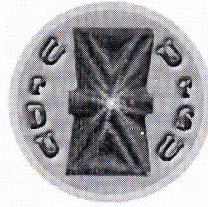


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“MATEMATIKA” KAFEDRASI

402-MATEMATIKA GURUH TALABASI

Xujaeva Muhayyo Omanbaevnaning
5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: Kombinatorika va uning tadbirlari.

Ilmiy rahbar:

“Matematika” kafedrasi katta
o'qituvchisi S.A.Bekmetova



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA –MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIKA KAFEDRASI

BITIRUV MALAKAVIY ISHNI BAJARISH BO'YICHA

TOPSHIRIQLAR REJASI:

1. Talaba Xujayeva Muhayyo Universitet rektorining «_____»-sonli _____ buyrug'i bilan bitiruv malakaviy ish bajarish uchun “Kombinatorika va uning tadbirlari” mavzusi tasdiqlangan.

2. Kafedra majlisining qaroriga binoan S. Bekmetova bitiruv malakaviy ishini bajarishga rahbar qilib tayinlangan.

3. Bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilmasi: Ushbu bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterda bo'lib, fazoviy jismlar kombinatsiyasini o'rganishning uslubiy xususiyatlariga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikkita bobdan iborat bo'lib, Asosiy kombinatsiya o'rganilgan. Ikkinchi bobda geometriya darslarida kompyuter animatsiyalaridan foydalanish metodlari o'rganilgan.

4. Bitiruv malakaviy ish uchun ma'lumotlar:

1. To'rayev H. T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009.
2. Юшкевич А.П. История математики в середине века. М., 1961 г.
3. Гаймнарзов Г. Комбинаторика и бином Ньютона, Л., 1984.
4. Gaymnazarov G., Qosimov S., Gaimnazarov O.G. Iqtisodiyotda matematika, Toshkent, 2006 y.
5. Gaimnazarov O.G. Matematikadan amaliy masalalar echish namunalari. T.: «Fan», 2006 y.

6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. – 384 с.
7. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
 - а. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
8. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. – 478 с.
9. www.ziyonet.uz
10. www.edu.uz
11. www.uzpak.uz
12. www.google.ru
13. www.rsl.ru

5. Bitiruv malakaviy ishga PowerPoint dasturida ishlangan multimediali taqdimot slaydlari ilova qilinadi.

Bitiruv malakaviy ishni bajarish jadvali

<i>No</i>	<i>Bajarilgan ishning mazmuni</i>	<i>Bajarish muddati</i>
1.	Bitiruv malakaviy ishni mavzusi bo'yicha adabiyotlarni to'plash, o'rganish va tahlil qilish	
2.	Bitiruv malakaviy ishning birinchi bobini tayyorlash	
3.	Ikkinchi bob bo'yicha ma'lumotlarni o'rganish va tahlil qilish	
4.	Bitiruv malakaviy ishning ikkinchi bobini tayyorlash	
5.	Mavzuga oid multimediali dars ishlanmalarini tayyorlash	
6.	Bitiruv malakaviy ishning loyhasini tayyorlash va kafedra muhokamasidan o'tkazish	

Bitiruv malakaviy ish rahbari: Bekmetova Sadoqat

Bajaruvchi talaba: Xujayeva Muhayyo

2016 yil «_____» _____

Topshiriqlar rejasi va jadvali kafedra majlisida 2016 yil tasdiqlandi

(«_____»- sonli bayonnoma)

Kafedra mudiri:

dots. Vaisova.M

Al-Xorazmiy nomidagi Urganch davlat universiteti

**Fizika-matematika fakulteti “Matematika” kafedrası
5130100-matematika ta’lim yo’nalishi**

Tasdiqlayman

Fizika-matematika fakulteti dekani
_____ dots. J.U.Xujamov
“ _____ ” _____ 2016 y.

BITIRUV MALAKAVIY ISH BO‘YICHA TOPSHIRIQ

Talaba Xujayeva Muhayyo

1.Ishning mavzusi:“ ”« _____ » _____ 2016 yil universitet rektorining _____ sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan.

2.Ishni topshirish muddati: “ _____ ” _____ 2016 y.

3.Mavzu bo‘yicha dastlabki ma’lumotlar beruvchi adabiyotlar ro‘yxati

9. To’rayev H. T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009.
10. Юшкевич А.П. История математики в середине века. М., 1961 г.
11. Гаймназаров Г. Комбинаторика и бином Ньютона, Л., 1984.
12. Gaymnazarov G., Qosimov S., Gaimnazarov O.G. Iqtisodiyotda matematika, Toshkent, 2006 y.
13. Gaimnazarov O.G. Matematikadan amaliy masalalar echish namunalari. T.: «Fan», 2006 y.
14. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. – 384 с.
15. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
- а. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
16. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. – 478 с.
9. www.ziynet.uz
10. www.edu.uz
11. www.uzpak.uz

12. www.google.ru
13. www.rsl.ru
14. www.mathnet.ru

4.Ishningmaqsadi: Kombinatorika va uning tadbiqlarini o'rganish.

5.Chizma materiallar ro'yxati:

-
-
-
-
-

6.Maslahatchilar: --

Bo'limlar	Maslahatchi F.I.Sh.	Imzo, sana	
		Topshiriq berdi	Topshiriqqabul qildi

Ishgataqrizchi: _____ **M. Ro'zmetov**
imzo

Ilmiyrahbar: _____ **S.A. Bekmetova**
imzo

BMI bajaruvchi talaba: _____ **M.O. Xujayeva**
imzo

Kafedramudiri: _____ **dots. M.D.Vaisova**
imzo

Urganchdavlatuniversiteti
Fizika-matematika fakulteti
“Matematika” kafedrası

Bitiruv malakaviy ish _____sonli tartib raqam bilan qayd

qilindi.

Bitiruv malakaviy ishni bajaruvchining ismi-sharifi: *Muhayyo Xujayeva*

Bitiruv malakaviy ishning mavzusi: Kombinatorika va uning tadbiqlari.

Ilmiy rahbar (maslahatchi)ning ismi-sharifi: *S.Bekmetova*

Bitiruv malakaviy ish kafedraning 2016 yil «_____»_____da o‘tkazilgan majlisi qaroriga muvofiq DAK majlisida himoya qilishga tavsiya qilindi.

Bitiruv malakaviy ishga taqrizchi qilib ----- tayinlandi.

Kafedra mudiri: dots. M.D.Vaisova

Kafedraning bitiruv malakaviy ishni DAK majlisida himoya qilish bo‘yicha tavsiyasiga roziman.

Fakultet dekani: dots. J.U.Xujamov

Mundarija

Kirish.....

I – bob. Asosiy kombinatsiyalar.

1.1. O‘rin almashtirishlar.....

1.2. O‘rinlashtirishlar.....

1.3. Gruppalashlar va ularning xossalari.....

II – bob. Takrorli kombinatsiyalar.

2.1. Takroriy o‘rin almashtirishlar va uning tadbiqlari.....

2.2. Takroriy o‘rinlashtirishlar va uning tadbiqlari

2.3. Takroriy gruppalashlar va uning tadbiqlari.....

2.4. Kombinatorikani “Ehtimollar nazariyasi” fanida qo‘llanilishi.....

XULOSA.....

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....

Mavzu: Kombinatorika va uning tadbiqlari.

Reja:

Kirish.....

I – bob. Asosiy kombinatsiyalar.

1.1. O‘rin almashtirishlar.....

1.2. O‘rinlashtirishlar.....

1.3. Gruppalashlar va ularning xossalari.....

1.4. Takrorlanmaydigan kombinatsiyalarning tadbiqi

II– bob. Takrorli kombinatsiyalar.

2.1. Takroriy o‘rin almashtirishlar va uning tadbiqlari.....

2.2. Takroriy o‘rinlashtirishlar va uning tadbiqlari

2.3. Takroriy gruppalashlar va uning tadbiqlari.....

2.4. Kombinatorikani “Ehtimollar nazariyasi” fanida qo‘llanilishi.....

XULOSA.....

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....

KIRISH

Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, **kombinatorika** deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to'plamni (bu to'plamning elementlari qanday bo'lishining ahamiyati yo'q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash ya'ni, **kombinatsiyalar**, **kombinatorik tuzilmalar** bilan bog'liq masalalar o'rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma'lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo'llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko'ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

To'plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to'plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to'plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To'plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo'qligini tekshirish, bor bo'lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o'rganish hamda bu usullarni biror parametr bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

Kombinatorikaning ba'zi bir elementlari eramizdan avvallgi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchalardan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya o'zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar.

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ish ikkita bobdan iborat. Birinchi bobda takrorlanmaydigan

birlashmalar, ya'ni o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalar deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganilgan. Ikkinchi bobda esatakrorlanadigan birlashmalar, ya'ni takroriy o'rinlashtirishlar, takroriy o'rinalmashtirishlar, takroriy gruppalar va uning tadbirlari hamda kombinatorikani "Ehtimollar nazariyasi" fanida qo'llanilishi o'rganilgan.

I - BOB. ASOSIY KOMBINATSIYALAR.

1.1. O‘rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ bo‘lgan to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n ; a_2, a_1, a_3, \dots, a_n ; a_2, a_3, a_1, \dots, a_n .$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to‘plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarning joylashish o‘rinlari bilan farq qiladilar. Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plam elementlarining **o‘rin almashtirishi** deb ataladi.

Aslida “o‘rin almashtirish” iborasi to‘plam elementlarining o‘rinlarini o‘zgartirish harakatini anglatadi, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo‘lgan tuzilma sifatida qo‘llaymiz. Bu iboradan uning asl ma’nosida ham foydalanamiz.

O‘rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida “,” (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin..

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan.

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a, b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta

elementli $\{a\}$ to'plam uchun a o'rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o'rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o'rin almashtirishga ega bo'lamiz. Demak, ko'paytirish qoidasiga binoan ikkita o'rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$abc, acb, cab, bac, bca, cba$.

To'rtta elementli $\{a, b, c, d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$abcd, abdc, adbc, dabc,$

$acbd, acdb, adcb, dacb,$

$cabd, cadb, cdab, dcab,$

$bacd, badc, bdac, dbac,$

$bcad, bcda, bdca, dbca,$

$cbad, cbda, cdba, dcba$.

Shu tarzda davom etib " n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo'lgan barcha natural sonlarning ko'paytmasiga teng" deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$. Bu farazning to'g'riligi quyidagi 1-teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko'paytmasini $n!$ ko'rinishida belgilash qabul qilingan, ya'ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma'noda birinchi bo'lib K.

Kramp 1808 yilda nashr etilgan algebra bo'yicha qo'llanmada foydalangan.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ifodada $n=1$ bo'lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta'rif sifatida $1!=1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo'lganda esa $n!$ ifoda umuman ma'nosini yo'qotadi. Lekin, ta'rif sifatida $0!=1$ deb qabul qilinadi.

1 – teorema. *Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $P_n = n!$.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to'g'riligini, ya'ni teoremaning tasdig'i $n=1$ uchun to'g'riligini yuqorida ko'rdik. Induksion o'tish uchun teoremaning tasdig'i biror natural $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $P_k = k!$ bo'lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to'plamni k ta elementli to'plamga yangi $(k+1)$ - elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$ - elementni k elementli to'plam uchun barcha $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

- 1- elementdan oldin,
- 1- va 2- elementlar orasiga,
- 2- va 3- elementlar orasiga,
-
- $(k-1)$ - va k - elementlar orasiga,
- k - elementdan keyin.

Shunday qilib, ko'paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to'plam uchun jami $k!(k+1) = (k+1)!$ ta o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi, ya'ni $P_{k+1} = (k+1)!$

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a, b, c, d, e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1-teoremaga asosan, $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120 ga teng.

2- misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n = n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4 = 4! = 24$. Komandalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24 \cdot 24 = 576$ bo'ladi.

1.2. O‘rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Shu to‘plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) **n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirish** deb ataladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo‘lgan ikkita har xil o‘rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo‘lishi ham ravshan. Bu yerda qarayotgan o‘rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin.

Berilgan n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi. (Bu belgilash fransuzcha “arrangement” so‘zining bosh harfidan olingan bo‘lib, bu so‘z o‘rinlashtirish ma’nosini beradi.)

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ elementlardan bittadan o‘rinlashtirishlar n tabo‘ladi (bular: a_1 ; a_2 ; va hokazo, a_n), ya’ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtdan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan n ta elementdan uchtdan

o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$.

Isbot. n – ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llab, teorema tasdig‘ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (ya’ni induksiyaning m bo‘yicha bajarilishini).

Yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya’ni teorema tasdig‘i $m=1$ uchun to‘g‘ridir.

Endi $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formula $m=k < n$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilamiz va uning $m=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan $(n-1)$ ta elementdan k tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo‘lgan barcha n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} A_n^{k+1} &= nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)\dots((n-1)-k+1) = \\ &= n(n-1)\dots(n-(k+1)+1). \end{aligned}$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m=k+1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

3- misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb

hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25 ta elementli talabalar to'plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakili) qism to'plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25 ta elementdan uchmadan o'rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo'yilgan savolga javob topish maqsadida 2 – teoremadagi isbotlangan formulani $n=25$ va $m=3$ bo'lgan holda qo'llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800 ta imkoniyat mavjud.

$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ko'rinishda ham yozish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta'kidlaganidek, n ta elementdan m tadan o'rilashtirishlar n elementli to'plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to'plamlaridan iboratdir. Agar bu o'rinlashtirishlarda n ta elementli to'plamning barcha elementlari qatnashsa (ya'ni $m=n$ bo'lsa), n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar hosil bo'lishi tabiiydir. Shu tufayli, o'rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar deb n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o'zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O'rin almashtirishlarning bu ta'rifiga asosanib n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni formulasini o'rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-(n-1)) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

$$\text{yoki } P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

1.3. Gruppalashlar va ularning xossalari. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elementga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar. Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga n ta elementdan m tadan gruppalash deb ataladi.

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz.

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi.

Gruppalash ta'rifidan $1 \leq m \leq n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror (takrorli emas) gruppalash** deb ham atash mumkin.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a . Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan ($m=1$) gruppalashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) gruppalashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun gruppalashlar: bittadan ($m=1$) – a , b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab , ac , bc (uchta); uchtdan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan gruppalashlar: bittadan – a , b , c va d (to'rtta); ikkitadan – ab , ac , ad , bc , bd , cd (oltita); uchtdan – abc , abd , acd , bcd (to'rtta); to'rttdan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulsohazalar gruppalashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor degan

xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o'rinlashtirishlar hosil bo'ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo'lganligi tufayli, ko'paytirish qoidasiga asosan, $P_m \cdot C_n^m = A_n^m$ tenglik to'g'ri. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

formula o'rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo'lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko'paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko'paytmasiga nisbati kabidir: $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$.

4- misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo'limida 15 nafar ishchi bor. Ko'p qavatli uyning eshiklarini ta'mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo'limdagi har bir duradgor butopshiriqni bajarishga layoqatli bo'lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo'limdagi har bir duradgor ta'mirlashini bajarishga layoqatli bo'lgani uchun, bumasalani hal qilishda gruppalashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin.

Buyerda $n = 15$, $m = 3$ va $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlar soni 455 ekan.

Agar ta'rif sifatida $C_n^0 = 1$ qabul qilinsa,

n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni uchun yuqoridagi keltirilgan formula $m = 0$ bo'lgan holda ham to'g'ri bo'ladi:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1. \quad \text{Tabiiyki,}$$

n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalashtirish imkoniyati mavjud:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Gruppalashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots(n-m)}$$

ko‘rinishdagiformulalardanhamfoydalanishmumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!} = \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots(n-m)}. \end{aligned}$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun gruppalashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan,

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Haqiqatdan ham,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1} \right) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1}$$

1.4. Takrorlanmaydigan kombinatsiyalarning tadbiri. Matematikaning bir to'plam elementlaridan, talab qilingan shartlarni qanoatlantiruvchi har xil birlashmalarni (kombinatsiyalarni) tuzish haqidagi masalasini o'rganish sohasi **kombinatorika** deyiladi.

Ba'zan kombinatorika ehtimollar nazariyasiga kirish deb qaraladi, chunki kombinatorika usullari ehtimollar nazariyasi hodisa voqealarni biror aniq holatda o'rganishda muhim ahamiyatga ega. Ehtimollar nazariyasida "birlashma" (kombinatsiya) deb aytishning o'rniga "tanlanma" deb aytish qabul qilingan. Kombinatorikada tanlanma o'rinalashtirish, o'rinalmashtirish, gurppalash (guruhlash) ko'rinishda qaraladi.

Kombinatorikaning masalalarini yechishda yordam beradigan ikkita umumiy qoidasini ko'rib o'tamiz: qo'shish qoidasi va ko'paytirish qoidasi.

Qo'shish qoidasi. Agar biror A narsani m usul bilan B narsani k usul bilan (lekin xuddi A kabi emas) tanlash mumkin bo'lsa, u holda "yo A narsani yoki B narsani" $m + k$ usul bilan tanlash mumkin.

Masalan. Yashikda n ta har xil rangdagi sharlar bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda bitta shar olinsin. Necha xil usul bilan buni bajarish mumkin? Albatta n usul bilan.

Endi bu n ta sharlarni 2 ta yashikka joylashtiraylik: Birinchida m ta sharlar, ikkinchida k ta sharlar bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda birorta yashikdan 1 ta shar olaylik. Buni nechta har xil usullar bilan bajarish mumkin? Birinchi yashikdan m ta har xil usul bilan shar chiqarish mumkin, ikkinchi yashikdan k ta o'lar xil usul bilan shar chiqarish mumkin. Hammasi bo'lib $m + k$ ta usul bilan bittadan shar chiqarib olish mumkin.

Ko'paytirish qoidasi. Agar biror A narsani m usul bilan tanlab so'ngra B narsani k usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, u holda bir juft A va B narsalarni $m \cdot k$ usulda tanlash mumkin.

Masalan: Faraz qilaylik berilgan to'plam $n = m + k$ elementdan iborat bo'lib ikkita qism to'plamga ajratilgan bo'lsin; ulardan birida m ta $a_1, a_2, \dots, a_m$ elementlardan,

ikkinchisi k ta $b_1, b_2, \dots, b_k$ elementlardan iborat bo'lsin. Endi har bir qism to'plamdan bittadan elementni bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tanlab olinsin. Bunday tanlab olishda nechta juft-juft elementlar hosil bo'ladi?

Bu savolga quyidagi jadval javob beradi.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1b_1, & a_1b_2, & a_1b_3, & \dots & a_1b_k, \\ a_2b_1, & a_2b_2, & a_2b_3, & \dots & a_2b_k, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_mb_1, & a_mb_2, & a_mb_3, & \dots & a_mb_k, \end{bmatrix}}_{k \text{ ta ustun}} \quad m\text{-ta qator}$$

Bu jadvalda hammasi bo'lib $m \cdot k$ ta bir-juft narsalar joylashgan, chunki har bir qatorda k -tadan juft-juft narsalar joylashgan. Shunday qilib bu jadvaldagi juftlar sonini N desak, u holda

$$N = m \cdot k \quad (1)$$

bo'ladi

Faraz qilaylik n ta

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

elementlar berilgan bo'lsin. Bu elementlar to'plamdan har biri m elementdan iborat bo'lgan ($0 < m \leq n$) tenglamalar tuzish mumkin (o'rinlashtirishlar bo'lishi mumkin). Masalan;

$$a, b, c$$

elementlaridan quyidagi 2 tadan quyidagicha kombinatsiyalar tuzish mumkin

$$ab \quad ba \quad ca \quad ac \quad bc \quad cb$$

Bunday kombinatsiyalar soni 6 ta bo'ladi va ular bir biridan yo element bilan yoki elementining kelish tartibi bilan farq qiladi.

To'rtta

$$a, b, c, d$$

elementlardan 3 tadan tuzilgan kombinatsiyalar 24 ta bo'ladi. Ular quyidagicha

$$abc, dac, cab, dab, \dots$$

yuqorida ko‘rib o‘tilgan tanlanmalar o‘rinlashtirishlar deb ataladi.

Yuqorida o‘rinlashtirish ta’rifi va belgilanishini keltirib o‘tganimizdek, yuqoridagi misollarimizda o‘rinlashtirishlar soni:

$$A_3^2 = 6, \quad A_4^3 = 24.$$

Umumiy holda n ta elementdan m tadan tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni hisoblashni ko‘rib o‘tamiz.

Bizga n ta element berilgan bo‘lsin. Birinchi elementni n ta usul bilan tanlash mumkin. Ikkinchi elementini qolgan $(n-1)$ ta elementdan $(n-1)$ ta usul bilan tanlash mumkin.

U holda (1) formulaga asosan ikki elementli juftlarni

$$n(n-1)$$

usulda tuzish mumkin. Uchinchi elementni qolgan $(n-2)$ ta elementdan tanlashga to‘g‘ri keladi. Buni $(n-2)$ ta usul bilan tanlash mumkin. Bu holda (1) formula bo‘yicha elementlarning uchliklarini

$$n(n-1)(n-2)$$

usulda tuzish mumkin.

Xuddi shunday to‘rtliklarni

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

usulda tuzish mumkin.

Nihoyat n ta elementdan m tadan tuzilishni o‘rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)] \quad (2)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar (2) formulada $m = n$ bo‘lsa, u holda A_n^n o‘rinlashtirishlar bir-biridan faqat elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladi va bunday o‘rinlashtirishlar o‘rinalmashtirishlar deyiladi.

O‘rinalmashtirishlar soni P_n deb belgilanishini va

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots [n-(n-1)] = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = n! \quad (3)$$

formula bilan hisoblanishini o'rgangan edik.

Hayotda (ya'ni amalda) kombinatsiyada hamma vaqt elementlarning joylashtirish tartibi muhim emas. Masalan, agar shaxmat bo'yicha respublika birinchiligi uchun yarim finalda 20 ta o'yinchi qatnashsa, finalda esa ulardan faqat 3 tasi qatnashishi mumkin, u holda qatnashuvchi uchun uchtdan birinchi joyini egallashning farqi yo'q, chunki yarim finalda uchinchi joyni egallagan o'yinchi finalda birinchi joyni egallagan holat bo'lgan.

Agar final uchun uchlikni necha usul bilan tanlash mumkinligi talab etilsa, u holda 20 elementdan 3 ta tuzilgan tanlanmamizdan faqat bir-biridan kamida bitta element bilan farq qiladiganlarini hisoblash kerak. Bunday holatda tartiblanmagan gruppalash kombinatsiyaga ega bo'lamiz.

Endi n ta elementdan m tadan tuzilgan gruppalashlar soni

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{p_m} = \frac{n(n-1) \cdots [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (4)$$

formula bilan hisoblanishini ha ko'rib o'tgan edik.

Bu (4) formulani shaxmat o'yinchilariga tadbiqlab tuzish mumkin bo'lgan final o'yinchilarini sonini aniqlaymiz.

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

yuqorida (2), (3), (4) formulalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalar, (ya'ni sinov yoki kuzatish) natijalari sonini aniqlashda tadbiq etiladi.

5 – misol. Futbol bo'yicha musaboqaga 18 ta komanda qatnashmoqda. Musobaqa g'oliblari oltin, kumush va bronza medali bilan mukofatlanadi. Komandalarga medallar necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Yechish. Masala yechimi (2) formula bilan hisoblanadi.

$$A_{18}^3 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$$

6 – misol. Mashg'ulotda 12 ta basketbolchi qatnashmoqda. Trener har xil

beshlik o'yinchilarni nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechish. Masala yechimi (4) formula bilan hisoblanadi

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

7 – misol. Shaxmat taxtasida 8 ta to'ra (rux)ni bir-birini olmaydigan qilib nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechish. Bunday xilda shaxmat taxtasida gorizontal va vertikal yo'nalishda faqat bittadan to'ra (rux) joylashtarish mumkin. Mumkin bo'lgan joylashtirishlar (vaziyatlar) 8 elemantdan tuzilgan o'rinalmashtirishlardan iborat bo'ladi, ya'ni

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

II– bob. Takrorlikombinasiyalar.

2.1.Takrorli o‘rin almashtirishlarva uning xossalari. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan boshqa birlashmalar ham o‘rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Avval o‘rganilgan o‘rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilishi natijasida yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o‘zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o‘rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kombinatsiyaning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k - tur elementlar bo‘lsin, bu yerda $n_1, n_2, \dots, n_k$ – hech bo‘lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar. Bu n ta elementlarning o‘rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgankombinasiyalar **takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar** (qisqacha, **takrorli o‘rin almashtirishlar**) deb ataladi.

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo‘lgan takrorli o‘rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

formula o‘rinlidir, bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ – elementlar soni, k – turlar soni.

I s b o t. Har bir o‘rin almashtirishdagi elementlar soni $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o‘rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo‘lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi

tur, va hokazo, oxirda barcha n_k ta k - tur elementlar joylashgan bo'lsin. Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo'lgani uchun ularning mumkin bo'lgan hamma o'rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli ularning o'rinlarini almashtirish natijasida yangi takrorli o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo'lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o'rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o'rin almashtirishlariga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo'lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o'rin almashtirishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga, jami, ko'paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!$ ta o'rin almashtirishlarga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda oxirgi k - tur elementlar o'rinlarini almashtiramiz. Bunday o'rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo'lib, bu o'rin almashtirishlar ham yangi takrorli o'rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o'rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo $(k-1)$ - tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko'paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!...n_{k-1}!$ bo'lgan o'rin almashtirishlariga bog'liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n!$ ta o'rin almashtirishlarni har birida $n_1!n_2!...n_k!$ tadan bir xil o'rin almashtirishlar bo'lgan qismlarga ajratildi deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ bo'ladi, bu yerda

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

1- misol. Ikkita a , bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan elementlar uchun barcha takrorli o'rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng ($n=5$) bo'lib, $n_1=2$

(ikkita a), $n_2 = 1$ (bitta b) va $n_3 = 2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o‘rinlarini o‘zaro almashtirsak yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 30$ bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca ,
acabc, acacb, acbac, acbca, accab, accba ,
baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa ,
caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba ,
cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa .

2 – misol. 30 ta detalni 5 ta har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish: Masalaning shartiga ko‘ra

$$k = 30, \quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 6, \quad m = 6.$$

Yuqorida keltirilgan formula bo‘yicha usullar sonini hisoblaymiz:

$$P_{30}(6,6,6,6,6) = \frac{30!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}.$$

3 –misol. «GAMMA» so‘zida qatnashgan harflardan nechta har xil so‘z tuzish mumkin?

Berilgan so‘zda 5 ta harf bo‘lib, takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlar formulasidan foydalanib, $5! = 120$ ta desak noto‘g‘ri bo‘ladi, faqat 30 ta tuzish mumkinligini quyida keltirib o‘tamiz.

Demak bu yerda o‘rin almashtirish formulasini ($P_n = n!$) tadbiqlab bo‘lmaydi, chunki “o‘rin almashtirish” da harflar takrorlanadi. “GAMMA” so‘zidagi a va m harflarning joylarini ba’zi almashtirishlarda so‘z o‘zgarmay qoladi. Bu bilan biz kombinatsiyaning takroriy o‘rinalmashtirish tushunchasidan foydalanamiz.

“GAMMA” so‘zining harflardan tuzilgan tanlanma misolida $n=5$, “G” harfi $n_1=1$ marta, “A” harfi $n_2=2$ marta, “M” harfi ham $n_3=2$ marta ishlatilgan.

Shunday qilib,

$$\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30$$

ta har xil soʻz tuzish mumkin (lekin hammasi maʼnoga ega emas). Bu yuqoridagi masala yechimidir.

2.2. Takroriy o‘rinlashtirishlar va uning tadbiqu. n ta elementlardan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kombibatsiyalarni shunday tuzamizki, bu kombinatsiyalarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kombinatsiyalar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin. Shunday usul bilan tuzilgan kombinatsiyalarning har biri n ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o‘rinlashtirish (qisqacha, takrorli o‘rinlashtirish) deb ataladi.

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2 –teorema. n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya’ni $\overline{A}_n^m = n^m$.

Isbot. Berilgan n uchun takrorli o‘rinlashtirishdagi elementlar soni m bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Takrorli o‘rinlashtirishlar $m=1$ bo‘lganda bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo‘lgani uchun takrorli o‘rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Teoremaning tasdig‘i $m=k$ bo‘lganda to‘g‘ri, ya’ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo‘lsin deb faraz qilamiz. Bu tasdiq $m=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o‘rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to‘plamning ixtiyoriy bitta elementini $(k+1)$ - element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirishni paydo qilamiz. Tabiiyki, qaralayotgan k tadan o‘rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo‘lgan $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda birorta ham $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlar qolib ketmaydi va hech qaysi ilgari ko‘rilgan $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirish qaytadan paydo bo‘lmaydi. Ko‘paytirish qoidasiga asosan n ta turli elementlardan $(k+1)$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta

ortiqdir, ya'ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$.

4 –misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d , va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, \\ cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o'rinashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25dir.

5 –misol. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo'lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o'rinashtirishlar tashkil etish mumkin. O'nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000ga ($\overline{A}_{26}^2 \cdot \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng.

6 – misol. Agar bitta raqam bir necha marta takrorlanishi mumkin bo'lsa 1,2,3,4,5 raqamlardan nechta uch xonali sonlar tuzish mumkin?

Yechish. Agar raqamlar takrorlanmasa u holda masala yechimi bizga ma'lum, u A_5^3 dan iborat bo'ladi. Lekin bu yerda elementlar takrorlanishi mumkin. Demak bunday holatda takroriy o'rinashtirish bo'ladi.

Uch xonali sonning birinchi raqamini besh usul bilan tanlashimiz mumkin,

ya'ni 1,2,3,4,5 lardan birini. Ikkinchi raqamni ham besh usul bilan tanlash mumkin. U holda $\overline{A}_n^m = n^m$ formula bo'yicha ikki raqamli sonlarni $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ usul bilan tanlash mumkin. Uchinchi raqamni ham besh usul bilan tanlash mumkin va shuning uchun uch xonali son $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ usul bilan tanlash mumkin.

Demak, masala yechimi 125 ta 3 xonali son bo'lishi mumkin.

2.3. Takroriy gruppashlar va uning tadbiqlari. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni qaraymiz. Bunaqa birlashmalar n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppashlar (qisqacha, **takrorli gruppashlar**) deb ataladi.

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar sonini $\bar{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Isboti. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to'plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo'lish mumkinki, har bir i - bo'lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biror marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o'rniga bu element i - bo'lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biror marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo'lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo'lishi mumkin – bu nollar mos elementlarning gruppashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan 6ta elementdan 9tadan takrorli *bbbcdddf* gruppashga 01110101111001 shifr, 6ta elementdan 12tadan takrorli *aaaabeeeff* gruppashga esa 1111010011111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6ta elementdan 6tadan takrorli *abeeee* gruppash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppash uchun qandaydir m ta birlar va $(n-1)$ ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va $(n-1)$ ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppashni mos qo'ygan bo'lamiz (bir qiymatli moslik

o'ratildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppalar soni $(n-1)$ ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kombinatsiya elementlaridan tuzilgan takrorli o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $C_{n+m-1}(m, n-1)$ ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m.$$

7 –misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqalarni tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro'y beradi:

$$\begin{aligned} &<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <2,2>, \\ &<2,3>, <2,4>, <2,5>, <2,6>, <3,3>, <3,4>, <3,5>, \\ &<3,6>, <4,4>, <4,5>, <4,6>, <5,5>, <5,6>, <6,6>. \end{aligned}$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli gruppalarlarni tashkil etadi. Ularning soni 3- teoremaga asosan $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo'ladi.

8 – misol. Do'konga 10 xil daftar keltirildi. Miqdori 12-ta bo'lgan daftarlar kombinatsiyasini nechta usul bilan tanlash mumkin? Miqdori 8 ta bo'lsachi?

Yechish: Masala shartiga ko'ra takroriy guruhlashlarni hisoblash kerak.

$$\overline{C}_n^k = P_{k, n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

formulaga asosan $k=12$ $n=10$

$$\overline{C}_n^k = \frac{(12+10-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$$

xuddi shunday

$$\overline{C}_{10}^8 = \frac{(8+10-1)!}{8!(10-1)!} = \frac{17!}{8!9!} = 24310$$

Endi takroriy gruppalarlarni sodda holatda ko'rib o'tamiz.

Elementlari soni $m=2$ ta bo'lgan $M\{a, b\}$ to'plam berilgan. a dan k_1 ta, b dan k_2 ta, jami $k = k_1 + k_2 = 4$ ta olinib, elementlari bilan farq qiluvchi to'rtaliklar tuzaylik:

$aaaa$, bunda $k_1 = 4, k_2 = 0$, ya'ni tarkibi $(4,0)$ ikkilik,

$aaab$, bunda $k_1 = 3, k_2 = 1$ ya'ni tarkibi $(3,1)$ ikkilik,

$abbb$, bunda $k_1 = 2, k_2 = 2$, ya'ni tarkibi $(2,2)$ ikkilik,

$abbb$, bunda $k_1 = 1, k_2 = 3$ ya'ni tarkibi $(1,3)$ ikkilik,

$bbbb$, bunda $k_1 = 0, k_2 = 4$ ya'ni tarkibi $(0,4)$ ikkilik,

bunda ekementlar tarkibi ro'l o'ynamasin. Shunga ko'ra masalan, $aaaa$, $aaab$, ... deb qabul qilinadi. Biz elementlari takrorlangan kombinatsiyalarga ega bo'lamiz. Ularning sonini $\overline{C}_m^k$ orqali belgilaylik. Bizda $\overline{C}_2^4$ bo'lmoqda. Bu sonni hisoblash yo'lini topish maqsadida to'rttalik tarkibdagi $k_1 = k_2$ sonlarini 1, vergullarni 0 orqali almashtiraylik. Masalan, tarkibida $(3,1)$ bo'lgan ikkitalik bo'yicha 11101 beshtalikni hosil qilamiz, unda $k = 4$ ta 1, $m - 1 = 2 - 1 = 1$ ta 0 ishtirok etadi. Har qaysi beshtalikka aynan bitta ikkitalik mos va, aksincha, har qaysi ikkitalikka bitta beshtalik mos. Shunga ko'ra izlayotgan ikkitaliklar soni $k = 4$ ta 1 lar va $m - 1 = 1$ ta 0 dan tuzilgan beshtaliklar soniga teng. Takroriy o'rin almashtirishlar formulasi bo'yicha bunday beshtaliklar sonini $P(4;1) = \frac{(4 + 2 - 1)!}{4! \cdot 1!} = \frac{5!}{4!} = 5$.

m xil elementdan k tadan olib, shunday k taliklar tuzish kerak bo'lsin—ki, ular hech bo'lmaganda bir elementi bilan farq qilsin, bir xil elementlardan tuzilganlari esa teng hisoblansin (elementlarning tarkibi ro'l o'ynamaydi). Bunday k taliklarga m elementdan k tadan olib tuzilgan *takroriy kombinatsiyalar* deyiladi. Ularning soni $\overline{C}_m^k$ orqali belgilanadi. Shu sonni topaylik.

Kombinatsiyaning har qanday tarkibi nomanfiy butun sonlardan tuzilgan m talik $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ bilan beriladi va bundagi k_1 son kombinatsiyadagi birinchi xil elementning, k_2 ikkinchi xil elementning, ... , k_m m - xil elementning sonini ko'rsatadi. Shunday qilib, $\overline{C}_m^k$ son m uzunlikdagi $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ sonli m talikdagi har qaysi k_i sonni k_i ta 1 lar ketma — ketligi bilan, har qaysi vergulni 0 bilan almashtiramiz (agar $k_i = 0$ bo'lsa 1 lar yozilmaydi). Natijada $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$ ta 1lar va $m - 1$ ta 0 dan iborat $k + m - 1$ talik hosil bo'ladi (bundagi barcha k_i lar nomanfiy butun sonlardan iborat). Ularning har birida vergullar sonlarga nisbatan bitta kam

bo'lishi tushunarli. Masalan, 4102 to'rttalikka 1111010011 o'ntalik mos. Shunday qilib izlanayotgan m talik $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ lar soni k ta 1 lar va $m-1$ ta 0 dan tuzilgan $k+m-1$ liklar soniga teng bo'ladi. Takroriy o'rin almashtirishlar formulasi bo'yicha bunday $k+m-1$ taliklar soni

$$P(k, m-1) = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$$

ga teng, ya'ni $\bar{C}_m^k = C_{k+m-1}^k$.

Misol. 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to'plam yozish mumkin?

Yechish. Izlanayotgan son $\bar{C}_4^7$ ga yoki C_{7+4-1}^7 ga teng. Jami

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ ta to'p .}$$

2.4. Kombinatorikani “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” faniga qo'llanilishi. Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya'ni natijasini

oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o'rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o'zgarmas (ya'ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo'lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro'y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko'p marta takrorlash mumkin bo'ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o'tishida natijalari turlicha bo'lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro'y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo'lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro'y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiyatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o'yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarixini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo'lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog'liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug'ullanadi. Tasodiflar insoniyatni doimo qiziqtirib kelgan. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o'laroq nisbatan qisqa, ammo o'ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma'lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o'rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to'g'ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o'lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o'lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug'urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo'lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarni o'rganishdan emas, balki eng

sodda qimor o'yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojida katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi fanida kombinatorika elementlari juda muhim rol o'ynaydi.

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz. Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A \cdot B = \emptyset$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A + B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

Endi ehtimollik hisoblash kombinatorika elementlarini qo'llashga doir misollar keltiramiz.

-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon

nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. $A = \{\text{telefon nomeri to'g'ri terilgan}\}$ hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011.$$

- **misol.** Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Sinovning barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni C_5^2 gat eng. Bularning ichidan C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi hodisasi (A)

uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0.3$

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $0 \leq P(A) \leq 1$;
4. Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
5. $\forall A, B \in \Omega$ uchun $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isbot. 1) $N(\emptyset) = 0$ bo'lgani uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$.

2) Klassik ta'rifga ko'ra $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$.

3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ ekanligidan $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'ladi.

4) Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $N(A + B) = N(A) + N(B)$ va

$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

5) $A + B$ va B hodisalarni birgalikda bo'lmagan ikki hodisalar yig'indisi shaklida yozib olamiz:

$A + B = A + B \cdot \bar{A}$ (1.3 – misol), $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \bar{A}) = A \cdot B + B \cdot \bar{A}$, u holda 4-xossaga ko'ra $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A})$ va $P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ kelib chiqadi.

2.4. Kombinatorikani “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” faniga qo‘llanilishi. Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p marta takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiyatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarixini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘ullanadi. Tasodiflar insoniyatni doimo qiziqtirib kelgan. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy

ma'lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o'rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to'g'ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o'lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o'lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug'urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo'lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarni o'rganishdan emas, balki eng sodda qimor o'yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi fanida kombinatorika elementlari juda muhim rol o'ynaydi.

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz. Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A \cdot B = \emptyset$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A + B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

Endi ehtimollik hisoblash kombinatorika elementlarini qo'llashga doir misollar keltiramiz.

-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. $A = \{\text{telefon nomeri to'g'ri terilgan}\}$ hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011.$$

- misol. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Sinovning barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni C_3^2 gat eng. Bularning ichidan C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi hodisasi (A)

uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0.3$

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $0 \leq P(A) \leq 1$;
4. Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
5. $\forall A, B \in \Omega$ uchun $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isbot. 1) $N(\emptyset) = 0$ bo'lgani uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$.

2) Klassik ta'rifga ko'ra $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$.

3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ ekanligidan $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'ladi.

4) Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $N(A + B) = N(A) + N(B)$ va

$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

5) $A + B$ va B hodisalarni birgalikda bo'lmagan ikki hodisalar yig'indisi shaklida yozib olamiz:

$A + B = A + B \cdot \bar{A}$ (1.3 – misol), $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \bar{A}) = A \cdot B + B \cdot \bar{A}$, u holda 4-xossaga ko'ra $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A})$ va $P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ kelib chiqadi.

XULOSA

Kombinatorika elementlari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega. Bizning kundalik hayotimizda amaliy masalalarni yechishda kombinatorikadan foydalanishga to'g'ri keladi. Masalan: telefon (uyali telefon)larni nomerlashda; avtomobillarni nomerlashda, hisob-kitob varaqlarini nomerlash va shu kabi masalalarni yechishda kombinatorikadan keng foydalaniladi. Bu yerda biz shu tipdagi (xildagi) masalalarni yechib o'rgandik.

Foydalanilgan adabiyotlar

17. To'rayev H. T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009.
18. Юшкевич А.П. История математики в середине века. М., 1961 г.
19. Гаймназаров Г. Комбинаторика и бином Ньютона, Л., 1984.
20. Gaymnazarov G., Qosimov S., Gaimnazarov O.G. Iqtisodiyotda matematika, Toshkent, 2006 y.
21. Gaimnazarov O.G. Matematikadan amaliy masalalar echish namunalari. T.: «Fan», 2006 y.
22. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. – 384 с.
23. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
 - а. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.

24. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. – 478 с.

9. www.ziyonet.uz
10. www.edu.uz
11. www.uzpak.uz
12. www.google.ru
13. www.rsl.ru
14. www.mathnet.ru