

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA - MATEMATIKA FAKULTETI

Egamberdiyev Otabek G‘ulomboy o‘g‘lining

5130200- Amaliy matematika va informatika ta‘lim yo‘nalishi bo‘yicha

bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**Mavzu: “Nochiziqli Shredinger tenglamasining
saqlanish qonunlari ”**

Ilmiy rahbar:

f-m.f.d Urazboyev G‘.U.

Urganch – 2016

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM
VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA - MATEMATIKA FAKULTETI

“AMALIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

**“Nochiziqli Shredinger tenglamasining
saqlanish qonunlari”**

Bajaruvchi:

Egamberdiyev O. G‘.

Ilmiy rahbar:

f-m.f.d Urazboyev G‘.U.

Urganch – 2016

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika matematika fakulteti

Amaliy matematika kafedrası

BITIRUV MALAKAVIY ISHNI BAJARISH BO‘YICHA

TOPSHIRIQLAR REJASI:

1. Talaba Egamberdiyev Otabek G‘ulomboy o‘g‘li Universitet rektorining № 199-T sonli buyrug‘i bilan bitiruv malakaviy ish bajarish uchun “Nochiziqli Shredinger tenglamasining saqlanish qonunlari” mavzusi tasdiqlangan.

2. Kafeda majlisining qaroriga binoan f-m.f.d Urazboyev G‘.U. bitiruv malakaviy ishni bajarishga rahbar qilib tayinlangan.

3. Bitiruv malakaviy ishning tarkibiy tuzilmasi:

1) Kirish.

2) Toda zanjiri uchun tenglamalar sistemasi.

3) KdF tenglamasi uchun Gardner almashtirishi.

4) Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun saqlanish qonunlari.

5) Xulosa.

4. Bitiruv malakaviy ish uchun dastlabki ma’lumotlar:

1. Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys.Rev. Lett. – 1967. – v.19. – pp. 1095-1097.
2. Kay J., Moses H. The determination of the Scattering potential from the spectral measure function II // Nuovo Cimento. – 1956. – v.3, № 1.-pp.56-84.

3. Фаддеев Л.Д. Свойства S – матрицы одномерного уравнения Шредингера
// Труды института им. В.А.Стеклова. – Москва, 1964. – Т.73. – С.314-336.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев:
Наукова думка, 1977. - 329 с.
5. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.:Наука, 1984.- 240
с.
6. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves //
Comm. Pure and Appl. Math. –1968. – v.21. – pp.467-490.

Urganch Davlat Universiteti Fizika - matematika fakulteti “Amaliy matematika”
kafedrasi 5130200 - amaliy matematika va informatika ta’lim yo’nalishi

«Tasdiqlayman»

Fakultet dekani: f.-m.f.n.,dots. Xujamov J.U.

“ ____ ” _____ 2016-yil.

BITIRUV MALAKAVIY ISH BO‘YICHA TOPSHIRIQ

Talaba Egamberdiyev Otabek G‘ulomboy o‘g‘li

1. Ishning mavzusi: Nochiziqli Shredinger tenglamasining saqlanish qonunlari.
03.11.2015-yil Universitet rektorining № 199 – T sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan.
2. Ishni topshirish muddati: “31”may 2016-yil.
3. Mavzu bo‘yicha dastlabki ma’lumotlar beruvchi adabiyotlar ro‘yxati:
 1. Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys.Rev. Lett. – 1967. – v.19. – pp. 1095-1097.
 2. Kay J., Moses H. The determination of the Scattering potential from the spectral measure function II // Nuovo Cimento. – 1956. – v.3, № 1.-pp.56-84.
 3. Фаддеев Л.Д. Свойства S – матрицы одномерного уравнения Шредингера // Труды института им. В.А.Стеклова. – Москва, 1964. – Т.73. – С.314-336.
 4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. - 329 с.
 5. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.:Наука, 1984.- 240 с.
4. Maslahatchilar: Baltaeva I, Xasanov M.

5.

Bo'limlar	Maslahatchi F.I.SH.	Imzo, sana	
		Topshiriq berdi	Topshiriq qabul qildi
Kirish.	Urazboyev G'.U.	02.03.2016-yil.	09.03.2016-yil.
Toda zanjiri uchun tenglamalar sistemasi.	Urazboyev G'.U.	11.03.2016-yil.	24.03.2016-yil.
KdF tenglamasi uchun Gardner almashtirishi.	Urazboyev G'.U.	25.03.2016-yil.	30.03.2016-yil.
Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun saqlanish qonunlari.	Urazboyev G'.U.	01.04.2016-yil.	15.04.2016-yil.
Xulosa.	Urazboyev G'.U.	18.04.2016-yil.	22.04.2016-yil.

6.Ishga taqriz yozuvchi:

f.-m.f.n.,dots. Saidov Y.R.

7.Ilmiy rahbar:

f-m.f.d Urazboyev G'.U.

BMI bajaruvchi talaba:

Egamberdiyev O.G'.

Kafedra mudiri:

f.-m.f.n.,dots. Babajonov B.A.

M U N D A R I J A

Kirish.....	8
1-§. Toda zanjiri uchun tenglamalar sistemasi.....	12
2-§. KdF tenglamasi uchun Gardner almashtirishi.....	16
3-§. Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun saqlanish qonunlari.....	21
Xulosa.....	26
Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.....	27

Kirish

Tadqiqot mavzusining dolzarbligi. Nochiziqli evolyutsion tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalalarining global yechimlarini teskari masalalar usulidan foydalanib topish masalasi matematika va fizikaning muhim masalalardan biridir. Bu masalalar hozirgi kunda ko'plab amaliy tadbiqlarga ega, ulardan Kvant fizikasi, chiziqli va nochiziqli xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi, kristallografiya, geologiya-razvedka kabi masalalarni hal qilishda matematik apparat sifatida unumli foydalanib kelinmoqda. Toda tenglamasi yuqorida qayd qilingan nochiziqli evolyutsion tenglamalardan biri bo'lib, qattiq jismlar mexanikasida muhim amaliy tadbiqlarga ega. Bundan tashqari KdF tenglamasini yechish uchun Gardner almashtirishining mavjudligi bu boradagi muammolarni kamaytirdi. Bizga ma'lumki Shredinger tenglamalari Kvant mexanikasida atom strukturasini ifodalaydi va bu tenglamaning saqlanish qonunlarini o'rganish muhim ahamiyatga ega.

Ilmiy izlanishning maqsad va vazifalari. 1967-yilda Amerikalik olimlar K.S.Gardner, J.M.Grin, M.Kruskal va R.Miuralarning[1] izlanishlariga ko'ra barcha boshlang'ich shartlardan foydalangan holda Korteveg-de friz(KdF) tenglamasining yechimini butun son o'qidagi ko'rinishini aniqlashga uringanlar. Bu metod sochilish nazariyasining teskari metodi(SNTM) nomi bilan atalib, butun son o'qida berilgan ushbu

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y$$

Shturm-Liuvill operatorining potensialini tiklash haqidagi muhim masaladan foydalanib yechiladi.

Bundan tashqari I.Key va X.Mozes[2], L.D.Faddeev[3], V.A.Marchenko[4], B.M.Levitan[5], P.Deyft va E.Trubovits[6], Sh.A.Alimov [7] va boshqalar sochilish nazariyasining teskari masalasi uchun Shtrum-Liuvill operatorini o'rgandilar.

Mavzuning o'rganilish darajasining qiyosiy tahlili. Sochilishning teskari masalasi va umumlashgan KdF tenglamasi uchun universal metod P.Laks[8] tomonidan ishlab chiqildi, buni umumiy KdF tenglamasi uchun “kirish” deb tushunish mumkin.

Keyinchalik bu–sochilishning teskari masalasi metodini differensial o'zgaruvchili sistemaga tadbiq etilishi bilan bog'liq g'oyalar ham rivojlangan. Bu tenglamalar sistemasi shunday sonli sistema bo'ladiki, uning dinamikasida o'zaro yaqin yonma-yon holdagi ta'sirlashishlar o'suvchi exponensial bir o'lchovli zanjir ko'rinishida bo'ladi:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

bu yerda $u_n(t)$ deb zanjirdagi n -atomning koordinatasini tushunish mumkin.

(1) – sistema Toda zanjiri deb atalib, ilk marotaba 1970 – yilda shunga o'xshash zanjir va (1) – soliton tenglamasining aniq yechimi topilgan va bu zanjirda siljish harakati deb tavsiflangan.

Keyingi belgilashimiz (1) – sistema uchun kontinual chegara sifatida quyidagi nochiziqli bog'langan tenglama bo'ladi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2$$

Shuningdek, bu sochilishning teskari masalasi metodini yaxlit bir holga keltirishimizga ham yordam beradi.

(1) – tenglamani quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \end{cases} \quad n \in Z, \quad (2)$$

bunda

$$a_n = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{u_n - u_{n+1}}{2}\right), \quad b_n = \frac{1}{2} \dot{a}_n, \quad n \in Z$$

S.V.Manakov[9] va N. Flashkalarining[10] ishlarida sochilish masalasini

Shturm – Liuvill operatoriga tadbiq qilishning turli usullarini

$$L(t)y \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}, \quad n \in Z$$

(2) – tenglamalar sistemasini yechish uchun sochilish masalasining teskari metodi sifatida ko‘rishimiz mumkin.

Sochilish masalasi uchun diskret Shturm – Liuvill operatorining qo‘llanilishi K.Keys va M.Katsening ishlarida rivojlantirildi va keyinchalik biz yuqorida aytilgan S.V.Manakov va N.Flashkaning izlanishlari bu masalani yanada oydinlashtirishga imkon yaratdi[11].

Tadqiqotning ilmiy yangiligi: Mazkur bitiruv ishida Toda zanjiri uchun saqlanish qonunlari o‘rganilgan. Bundan tashqari KdF[12] va nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun Gardner almashtirishi va Lax juftligining qo‘llanishlari ko‘rsatilgan. Nochiziqli Shredinger tenglamasining lokal sohada saqlanish qonunlari keltirilgan.

Tadqiqot predmeti va ob’ekti. Bitiruv malakaviy ishda oddiy differensial tenglamalar, oliy matematika, matematik fizika tenglamalari, funksional analiz,

differential operatorlarning spektral nazariyasi predmetlari usullaridan foydalaniladi. Tatqiqotning ob'ekti noxiziqli Shredinger tenglamasining saqlanish qonunlari.

Tadqiqotning ilmiy ahamiyati. O'rganilgan natijalar amaliy ahamiyatga ega bo'lib, qattiq jismlar mexanikasi, kristallografiya va Kvant mexanikasining masalalarida muhim tadbiqlarga ega.

1-§. Toda zanjiri uchun tenglamalar sistemasi.

Maxsus Fermi – Past – Ulam(FPU) zanjiridan kelib chiqqan holda Toda zanjiri oddiy nochiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin.

$$m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = V'(q_{n+1} - q_n) - V'(q_n - q_{n-1})$$

Toda zanjiri uchun $m=1$ bo‘lgan holni qaraymiz va sakrash natijasidagi potensial energiyani

$$V'(\Delta) = V_{TODA} = e^{\Delta}$$

ko‘rinishida izlaymiz. U holda

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}$$

ga ega bo‘lamiz. Yuqoridagi tenglamaga ekvivalent bo‘lgan quyidagi tenglamalar sistemasini kiritamiz:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{dq_n}{dt} \quad b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{q_{n+1} - q_n}{2}} \right)$$

Endi quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{\frac{q_{n+1} - q_n}{2}} \right) \cdot \left(\frac{dq_{n+1}}{dt} - \frac{dq_n}{dt} \right) = b_n (a_{n+1} - a_n)$$

$$\frac{da_n}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{1}{2} \cdot (e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}) = 2(b_n^2 - b_{n-1}^2)$$

Bunda agar $b_{-1} = b_N = 0$ deb olsak, u holda

$$\frac{da_0}{dt} = 2b_0^2; \quad \frac{da_{N-1}}{dt} = -2b_{N-1}^2$$

$$\frac{da_k}{dt} = 2b_k^2 - 2b_{k-1}^2 \quad k = \overline{0, N-2}$$

va

$$\frac{db_k}{dt} = b_k(a_{k+1} - a_k) \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Endi Toda zanjiri uchun $N \times N$ o'lchamli va haqiqiy bo'lgan Yakobi matritsasini quramiz:

$$L := \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{N-2} & a_{N-1} \end{bmatrix}$$

Biz barcha b lar uchun $b_k > 0$ bo'lsin deb qabul qilamiz. L simmetrik matritsadan qiya – simmetrik bo'lgan $N \times N$ o'lchamli B matritsani quramiz:

$$B := L_+ - L_- := \begin{bmatrix} 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -b_0 & 0 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{N-3} & 0 & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{N-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Bunda “+” plus ishorasi L ning yuqori uchburchak qismi va “-” minus ishorasi L ning pastki uchburchak qismini bildiradi.

Teorema(Flashka, Manakov): *Toda zanjiri tenglamalariga ekvivalent bo‘lgan matritsali tenglama uchun*

$$\frac{dL}{dt} + [L, B] = 0$$

o‘rinli bo‘ladi. Bunda $[L, B] := LB - BL$.

Teorema: *Toda zanjiri tenglamalari uchun L matritsaning har bir λ_k qiymatlari o‘zgarmas sonidir. Ya’ni:*

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = 0.$$

Bizga ma’lumki,

$$S_1 := \text{Iz}(L) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$$

$$S_p = \text{Iz}(L^p)$$

$$S_p := \lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p + \dots + \lambda_N^p$$

Demak, Toda zanjiri uchun L Yakobi matritsasining darajali qiymatlari saqlanib qolgan sonlar bo‘ladi. Yani L matritsaning izi o‘zgarmas son ko‘rinishida bo‘ladi:

$$\frac{d}{dt} \text{Iz}(L^p) = 0$$

Shunday ekan L^p matritsaning izi – diagonal elementlarining yig‘indisi “diskret zichlik” bilan ifodalanadi:

$$Iz(L^p) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{p,n}$$

Bu yerda $\alpha_{p,n}$ L^p ning diagonal elementlari. Ma'lumki, shunday $\beta_{p,n}$ diskret qiymatlar(potoklar)ni ham mos ravishda topish mumkinki

$$\beta_{p,-1} = \beta_{p,N-1} = 0 \quad \text{va}$$

$$\frac{d\alpha_{p,n}}{dt} + \beta_{p,n} - \beta_{p,n-1} = 0$$

o'rinli bo'ladi. n uchun $n = 0, \dots, N-1$. Masalan, agar $p = 1$ bo'lsa $\alpha_{1,n} = \alpha_n$ va $\beta_{1,n} = -2b_n$.

Biz ko'rib turibmizki, diskret qiymatlar(potoklar) mavjudligining saqlanish haqidagi qonuni, biz izlagan qonunga olib keladi. Shunday usul bilan boshqa $\alpha_{p,n}$ diskret qiymatlar(potoklar) uchun ham natija olish

mumkin. Agar p ning o'sishi uchun $\frac{\epsilon^p}{p!}$ va barcha yig'indilarni qarasak, u holda p ning lokal sohada saqlanish qonunlari funksiya ko'rinishiga keladi:

$$\frac{d}{dt} \alpha_n(\epsilon) + \beta_n(\epsilon) - \beta_{n-1}(\epsilon) = 0,$$

bunda

$$\alpha_n(\epsilon) = (e^{gL})_{n,n}, \quad \beta_n(\epsilon) = \sum_{p=0}^n \frac{\epsilon^p}{p!} \beta_{p,n}.$$

Ya'ni:

$$N + \epsilon S_1 + \frac{\epsilon^2}{2} S_2 + \dots = Iz(I) + \epsilon \cdot Iz(I) + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot Iz(I^2) + \dots =$$

$$= Iz\left(I + \epsilon L + \frac{\epsilon^2}{2} L^2 + \dots\right) = Iz(e^{gL}).$$

2-§. KdF tenglamasi uchun Gardner almashtirishi.

Biz KdF tenglamasi

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

uchun lokal sohada cheksiz sonlarni topish mumkinligi to'g'risidagi saqlanish qonunini Gardner almashtirishi yordamida ko'rib chiqamiz. Izoh: yangi ω no'malumni kiritamiz

$$u = \omega + \epsilon \omega_x - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{6},$$

va Gardner almashtirishini KdF ga qo'ysak, ya'ni

$$u_t = \omega_t + \epsilon \omega_{xt} - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_t}{3}$$

$$u_x = \omega_x + \epsilon \omega_{xx} - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_x}{3}$$

$$u_{xxx} = \omega_{xxx} + \epsilon \omega_{xxxx} - \frac{\epsilon^2}{3}(\omega_x^2 + \omega \omega_{xxx})$$

$$u_{xxxx} = \omega_{xxxx} + \epsilon \omega_{xxxxx} - \frac{\epsilon^2}{3}(3\omega_x \omega_{xxx} + \omega \omega_{xxxx}),$$

Topilganlarni KdF ga qo'ysak

$$\omega_t + \epsilon \omega_{xt} - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_t}{3} + \left(\omega + \epsilon \omega_x - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{6} \right) \left(\omega_x + \epsilon \omega_{xx} - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_x}{3} \right) +$$

$$+ \omega_{xxx} + \epsilon \omega_{xxxx} - \frac{\epsilon^2}{3}(3\omega_x \omega_{xxx} + \omega \omega_{xxxx}) = 0$$

$$\omega_t + \epsilon \omega_{xt} - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_t}{3} + \omega \omega_x + \epsilon \omega \omega_{xx} - \frac{\epsilon^2 \omega^2 \omega_x}{2} + \epsilon \omega_x^2 - \frac{\epsilon^2 \omega \omega_x^2}{3} - \frac{\epsilon^2 \omega^2 \omega_{xx}}{6} +$$

Guruhlasak,

$$\left(\omega_t + \left[\frac{1}{2} \omega^2 - \frac{\epsilon^2}{18} \omega^3 + \omega_{NN} \right]_x \right) \left(1 - \frac{\epsilon^2}{9} \right) + \\ + 8 \left[\omega_t + \left[\frac{1}{2} \omega^2 - \frac{\epsilon^2}{18} \omega^3 + \omega_{NN} \right]_x \right] = 0$$

har bir yig'indini nolga tenglasak,

$$\omega_t + \left[\frac{1}{2} \omega^2 - \frac{\epsilon^2}{18} \omega^3 + \omega_{NN} \right]_x = 0$$

ko'rinishidagi tenglama hosil bo'ladi. Bundan tashqari ω ixtiyoriy

ϵ parametr ga ham bog'liq. Biz ko'rib turibmizki, ω – lokal sohada saqlanuvchi solishtirma og'irlik funksiyasini ifodalaydi va bu moslik funksiyalar sinfidan hosil qilinadi.

Shu bilan bir vaqtda bunga o'xshash ko'rinishni endilikda biz Toda zanjiri muammosi uchun ham yaratamiz, Gardnerning almashtirishining sistemali hosil bo'lishini ko'rib chiqamiz. Boshqacha aytganda Gardner hosil qilganidek, matematik struktura hosil qilamiz, qaysiki ma'noda, biz uni KdF uchun fundamental asos deb qabul qila olsak.

Biz quyida chiziqli bo'lmagan KdF tenglamalarining fundamental ko'rinishlarini ko'rib chiqamiz. Chiziqli tenglama yuqoridagi KdF tenglamasining xususiy holini keltirib chiqaradi.

Quyidagi operatorlarni qaraymiz:

$$L = -6 \frac{d^2}{dx^2} - u;$$

$$B = -4 \frac{d^3}{dx^3} - u \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} u_x$$

$$L\phi = \lambda\phi, \quad L\phi = -6\phi_{xxx} - u\phi$$

va chiziqli tenglamaning o'sishi

$$\phi_t = B\phi = -4\phi_{xxx} - u\phi_x - \frac{1}{2}u_x\phi.$$

Endi quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\phi) = \frac{dL}{dt}\phi + L\phi_t = \frac{dL}{dt}\phi + LB\phi$$

va

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\phi) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda\phi) = \lambda\phi_t = \lambda B\phi = B(\lambda\phi) = BL\phi$$

bundan

$$BL\phi - \frac{dL}{dt}\phi + LB\phi$$

$$\frac{dL}{dt}\phi + LB\phi - BL\phi = 0$$

$$\frac{dL}{dt} + [L, B] = 0.$$

Yuqorida tilga olingan ikki chiziqli (Laks juftligi) muammolar ϕ uchun ham yechilishi mumkin, ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun. Boshqacha aytganda, har gal KdF ni qanoatlantiruvchi $\phi(x, t, \lambda)$ funksiya mavjud bo'lsa, u Laks juftligining ikkala tenglamasini ham bir vaqtda qanoatlantiradi. Bunda funksiya λ xos qiymatga ham bog'liq bo'ladi. Buni Gardnerning almashtirishi yordamida aniqlab olishimiz mumkin.

Berilgan $\phi(x, t, \lambda)$, funksiya uchun quyidagi tenglama o'rinli:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln(\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \ln(\phi).$$

Bundan lokal sohada saqlanish haqidagi qonunning quyidagi formasiga ega bo'lamiz.

$$D_t + F_x = 0$$

bu yerda

$$D(x, t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x} \ln(\phi), \quad F(x, t, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(\phi).$$

Bu –saqlanish qonuni lokal sohada trivial bo'lishi ham mumkin, chunki zichlik funksiya x ning tanlanishiga bog'liq. Lokal sohada saqlanish qonuni trivial bo'ladi, agarki $\ln(\phi)$ ning differensialini u ga nisbatan darajali ko'phad ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa. Ehtimol ϕ - differensial tenglamani qanoatlantirganligi sababli, u ning darajalari oldidagi koeffitsiyentlari qaytarilishi mumkin, chunki ϕ u ga nolokal tarzda bog'liq va bu notrivial saqlanish qonunini ifodalaydi.

Laks juftligidan foydalanib navbatdagidek F (potok)ni hisoblashimiz mumkin:

$$F = -\frac{\phi_t}{\phi} = 4 \frac{\phi_{xxx}}{\phi} + u \frac{\phi_x}{\phi} + \frac{1}{2} u_x =$$

Demak, biz lokal sohada KdF tenglamasining saqlanish qonunlari formasini Laks juftligi uchun hosil qildik :

$$D_t + \left[\frac{1}{3(u - 2\lambda)D} - \frac{1}{6}u_x \right]_x = 0.$$

Biz buni lokal sohada hosil qilingan saqlanish qonunlari deb tushunishimiz uchun D ning o'sishi λ parametrغا bog'liq va mulohazalarimizga ko'ra differensial ko'phadli u ning yoyilmasidagi barcha koeffitsiyentlari x ga bog'liqligini tasdiqlashga zarurat sezamiz (aniqrog'i lokal sohada solishtirma og'irlikning saqlanishi notrivial ekanligini).

Buni hosil qilish uchun biz D ni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani keltirib chiqaramiz:

$$D_x = (\ln(\Phi))_{xx} = \left(\frac{\Phi_x}{\Phi} \right)_x = \frac{\Phi_{xx}}{\Phi} - \frac{\Phi_x^2}{\Phi^2} =$$

Bunday tenglama esa birinchi tartibli Riccati kvadrat tenglamasi hisoblanadi. Biz Riccati tenglamasining yechimi D uchun KdF tenglamasiga Gardner almashtirishi mavjud deb hisoblaymiz. Biz oddiy o'zgaruvchi va λ parametrni almashtirishni qaraymiz:

$$D = \frac{i\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}} \left(1 + \frac{\omega}{2\lambda} \right), \quad \epsilon = \frac{\sqrt{6}}{2i\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

U holda bu almashtirishlar Riccati tenglamasi uchun D ni beradi.

$$u = \omega + \epsilon \omega_x - \frac{\epsilon^2}{6} \omega^2.$$

Endi aniq bo'ldiki, w ning o'sishi ϵ ning kichik qiymatlariga va katta λ larda D ning o'sishiga ekvivalent ekan. Bu shuni ko'rsatadiki, KdF uchun Gardner almashtirishi to'g'ri Laks juftligini hosil qilar ekan.

3-§. Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun saqlanish qonunlari.

Lokal sohada saqlanish qonunlarini cheksiz sonlar uchun navbatdagi nochiziqli Shredinger tenglamasi bilan o'xshashligi haqidagi nazariyani tekshirish uchun biz quyidagilarni ko'rib chiqamiz, ma'lumki, bu yondashuv KdF uchun ham o'rinli bo'ladi.

Fokuslangan va defokuslangan(yig'ilgan) nochiziqli Shredinger tenglamasining maxsus holi nol – qayrilish holatida muayyan bir vaqtda ikkita birinchi tartibli chiziqli tenglamalardan iborat bo'ladi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda & q \\ r & -i\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix},$$

va

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda^2 + \frac{iqr}{2} & \lambda q - \frac{iq_x}{2} \\ \lambda r + \frac{ir_x}{2} & -i\lambda^2 - \frac{iqr}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}.$$

ixchamlasak

$$D = \frac{\partial}{\partial x} \ln(\Phi_1), \quad F = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(\Phi_1),$$

yuqoridagi munosabatdan foydalansak

$$D_t + F_x = 0,$$

va lokal sohada saqlanish qonunlari haqidagi λ ga xos bo'lgan o'sishni qabul qilishga harakat qilamiz.

Birinchidan, mavjud F (potok)ning hosil qilinishini e'tiborga olamiz.

Laks juftligidagi F ni biz quyidagicha ifodalaymiz:

$$F = -\frac{\Phi_{1t}}{\Phi_1} = -i\lambda^2 - \frac{1}{2}iqr + \left(\frac{1}{2}iq_x - \lambda q\right)\frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Endi, D ni hosil qilamiz:

$$D = i\lambda + q\frac{\Phi_2}{\Phi_1},$$

va F ni D bo'yicha quyidagicha tasvirlaymiz:

$$F = i\lambda^2 - \frac{1}{2}iqr + \left(\frac{1}{2}iq_x - \lambda q\right)\frac{D - i\lambda}{q} =$$

Shunday qilib biz ta'kidlagan lokal sohada saqlanish qonunlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$D_t + \left[\frac{\lambda q_x}{2q} - \frac{1}{2} i q r - \left(\lambda - \frac{i q_x}{2q} \right) D \right]_{,x} = 0.$$

Endi biz nochiqli Shredinger tenglamasi uchun ham Gardner almashtirishiga munosabatga zarur bo'lamiz. Bu xuddi KdF kabi hosil qilinadi, D uchun Riccati tenglamasini hosil qilamiz. Laks juftligidan

$$D_x = \left(\frac{\phi_{1,x}}{\phi_1} \right) = \left(i\lambda + q \frac{\phi_2}{\phi_1} \right)_{,x} =$$

Shundan so'ng biz yuqoridagi $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ ni D bilan bog'liq ifodasidan foydalanamiz:

$$D_x = q r + (q_x - t\lambda q - qD) \frac{D - t\lambda}{q} =$$

$$= \left(q r - t\lambda \frac{q_x}{q} - \lambda^2 \right) + \frac{q_x}{q} D - D^2.$$

Bu D uchun Riccati tenglamasi hisoblanadi.

Lokal sohada saqlanish qonunlariga ega bo'lish uchun biz D ni λ ga nisbatan "yoyib" qaraymiz.

KdF dagi kabi $\lambda \rightarrow \infty$ da yoyamiz. Bu limitda tenglikning bosh argumenti $D \approx t\lambda$ ga keladi, shunday $D = t\lambda(1 + v)$ ifodani qaraymiz $\lambda \rightarrow \infty$ bo'lgani uchun v ning kichik miqdor bo'lishini ko'ramiz. Riccati tenglamasi ga nisbatan quyidagi tenglamaga aylanadi:

$$i\lambda v_x = qr + \left(i\lambda \frac{q_x}{q} + 2\lambda^2\right)v + \lambda^2 v^2.$$

Endi yuqoridagi ifoda uchun λ^{-2} qiymatga proporsional bo'lgan v ni tanlash kerak.

Shunday qilib, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$v = -\frac{\omega}{2\lambda^2},$$

va tenglama esa

$$qr = \omega + \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{q_x}{q} \omega - \omega_x \right) - \frac{1}{4\lambda^2} \omega^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

Va nihoyat, biz

$$\epsilon = \frac{i}{2\lambda}$$

deb olib λ parametrni o'zgartirishimiz mumkin.

Bu esa bizga Gardnerga o'xshash akslantirishni hosil qilishga imkon beradi, endi Riccati tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$qr = \omega + \epsilon \left(\frac{q_x}{q} \omega - \omega_x \right) + \epsilon^2 \omega^2.$$

Biz buni "Shredinger nochiziqli tenglamasi uchun Gardner almashtirishi yoki akslantirishi" deb atashimiz mumkin.

Keling bu akslantirishni ko'rib chiqamiz, bu lokal sohada saqlanish haqidagi trivial bo'lmagan qonunni qanday qanoatlantirishini ko'ramiz. Yoyilma almashtirishi

$$\omega \sim \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

va yig'ish imkoniyati ϵ ga muvofiq, biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$\omega_0 = qr,$$

va

$$\omega_1 = -\left(\frac{q_N}{q} \omega_0 - \omega_{0,N}\right)$$

va $k \geq 2$ uchun bizda rekursiya munosabati mavjud

$$\omega_k = -\left(\frac{q_N}{q} \omega_{k-1} - \omega_{k-1,N}\right) - \sum_{j=0}^{k-2} \omega_j \omega_{k-2-j}.$$

Trivial bo'lmagan zichlik $\omega_0 = qr$ bilan bog'liq bo'lgan saqlanishlar sonini biz bazan norma deb ataymiz, chunki, biz fokuslashning maxsus holatini va defokuslash(yig'ish) holatini qaraganda:

fokuslash holati: $r = q^*$, defokuslash(yig'ish) holati: $r = -q^*$,

biz quyidagilarni ko'ramiz:

$$I_0[q] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} |q(x,t)|^2 dx$$

bu kvadrat L^2 normaga proporsional. Ikkinchi saqlangan zichlik

$$\omega_1 = (qr)_x - q_N r = qr_N.$$

$r = \pm q^*$ bo'lganda murakkab ishorali $\omega_1 = \pm qq_N^*$ ni ko'ramiz. Endi biz uni quyida real va mavhum qismlarga ajratishimiz mumkin:

$$\Re(\omega_1) = \pm \frac{1}{2}(qq_N^* + q^*q_N) = \pm \frac{1}{2}(|q|^2)_x,$$

ko'rinadiki, saqlanish haqidagi trivial qonun hosil bo'ldi va

$$\Im(\omega_1) = \pm \frac{1}{2i}(qq_N^* - q^*q_N).$$

Kvant mehanikasida bu ifodani impuls zichlik interpretatsiyasi mavjud va shunday qilib biz mos saqlanish soniga murojaat qilamiz:

$$I_1[q] = \pm \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (q(x,t)q_N(x,t)^* - q(x,t)^*q_N(x,t)) dx.$$

Uchinchi saqlangan zichlik

$$\omega_2 = (qr_x)_x - q_x r_x - (q[r])^2 = qr_{xx} - (q[r])^2.$$

Bu yana $r = \pm q^*$ bo'lganda murakkablashadi, shunday qilib biz uni real va mavhum qismini ajratishimiz mumkin:

$$\Re(\omega_2) = \pm \frac{1}{2}(qq_{xx}^* + q^*q_{xx}) - |q|^4 = \pm \frac{1}{2}(qq_{xx}^* + q^*q_{xx})_x \mp |q_x|^2 - |q|^4,$$

va

$$\Im(\omega_2) = \pm \frac{1}{2i}(qq_{xx}^* - q^*q_{xx}) = \pm \frac{1}{2i}(qq_x^* - q^*q_x)_x,$$

Ko'rinadiki, bu saqlanish haqidagi trivial qonunni beradi. Shuning uchun ham yangi saqlanish soniga ega bo'lamiz:

$$I_2[q] = - \int_{-\infty}^{\infty} (\pm |q_x(x,t)|^2 + |q(x,t)|^4) dx.$$

Bu saqlangan miqdor – Gamiltonian miqdoridir. Shunday qilib NLS tenglamasini Gamiltonian funksionaliga va o'zlashtiruvchi Poisson turkumiga nisbatan cheksiz o'lchamli Gamiltonian sistemasi ko'rinishida yozish mumkin. Bu protsedura ixtiyoriy miqdor uchun va $r = \pm q^*$ bo'lganda ham bajarilishi mumkin, lokal sohada saqlanish haqidagi notrivial qonun ham real miqdor uchun hosil qilinadi.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida nochiziqli Shredinger tenglamasining saqlanish qonunlari o'rganilgan. Shuningdek, Toda zanjiri uchun saqlanish qonunlari KdF

tenglamasi uchun Gardner almashtirishi va uning natijalari to'g'risida ma'lumotlar keltirilgan.

Toda zanjiri uchun tenglamalar sistemasining ko'rinishlari keltirilgan. Tenglamalarning lokal sohada saqlanish qonunlari funksiya ko'rinishiga keltirilgan holda tasvirlangan. Bundan tashqari, lokal sohada KdF tenglamasining saqlanish qonunlari formasini Laks juftligi uchun hosil qilish ko'rsatilgan.

Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun ham Gardner almashtirishining ko'rinishlari keltirilgan. Laks juftligidan foydalanib tenglamaning lokal sohada saqlanish qonunlari keltirilgan. Saqlangan miqdorlar uchun formulalar tasvirlangan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys.Rev. Lett. – 1967. – v.19. – pp. 1095-1097.

2. Kay J., Moses H. The determination of the Scattering potential from the spectral measure function II // Nuovo Cimento.
– 1956. – v.3, № 1.-pp.56-84.
3. Фаддеев Л.Д. Свойства S – матрицы одномерного уравнения Шредингера // Труды института им. В.А.Стеклова. – Москва,
1964. – Т.73. – С.314-336.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. - 329 с.
5. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.:Наука, 1984.- 240 с.
6. Deift P., Trubowitz E. Inverse scattering on the line // Comm. Pure and Appl. Math. – 1979. – v.32. – pp. 121-251.
7. Алимов Ш.А. О работах А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля// Успехи мат.наук. – 1976.-Т.31, № 6. – С.
8. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math. –1968. – v.21. – pp.467-490.
9. С.В.Манаков. ЖЭТФ. 1974. Т.67. №2(8). С. 543.
10. Flaschka H. The Toda lattice. Existence of integrals // Phys. Rev.- 1974. – v.B9, № 4. – pp. 1924-1925.
11. Эскина М.С. Прямая и обратная задачи рассеяния в частных разностях\\ ДАН СССР. – Москва, 1966. – Т.166, № 4. – С.809-812.
12. Mel'nikov V.K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-

consistent source // Phys. Lett. A – UK, 1988. – v. 128. – pp. 488-492.

Internet saytlari:

1. www.ziyonet.uz
2. www.math.uz
3. www.math.net
4. www.math-net.ru