

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI**  
**OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**  
**ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**  
**FIZIKA MATEMATIKA FAKULTETI**

**III-KURS M3 GURUH TALABASI**  
**ABDULLAYEVA XURSHIDANING**

**“SONLI QATORLAR”**  
**mavzusida tayyorlagan**

**KURS ISHI**

**АНДИЖОН-2015**

## **R E J A**

- 1. Asosiy tushunchalar**
- 2. Yaqinlashuvchi qatorlar. Koshi teoremasi**
- 3. Musbat qatorlar**

**Xulosa**

**Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati**

## Asosiy tushunchalar

Biz mazkur bobda, sonli qatorlarni, ularning yaqinlashishi, uzoqlashishi, yaqinlashish alomatlari hamda yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini o'rganamiz.

Ushbu

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Quyidagi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

ifoda *qator* (*sonli qator*) deb ataladi. Uni  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots .$$

(1) ketma-ketlikning  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  elementlari qatorning hadlari deyiladi,  $a_n$  esa qatorning umumiy ( $n$ -chi) hadi deyiladi. (2) qatorning hadlaridan quyidagi

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

yig'indilarni tuzamiz. Ular qatorning *qisman yig'indilari* deyiladi.

Demak, (2) qator berilgan holda har doim bu qatorning qisman yig'indilaridan iborat ushbu  $A_n$ :

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

**2-ta'rif.** Agar  $n \rightarrow \infty$  da (2) qatorning qisman yig'indilaridan iborat  $A_n$  ketma-ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad (A \in R)$$

bo'lsa, (2) qator yaqinlashuvchi deyiladi.

Bu limitning qiymati  $A$  son (2) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**3-ta'rif.** Agar  $n \rightarrow \infty$  da (2) qatorning qisman yig'indilaridan iborat  $A_n$  ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa yoki bu limit mavjud bo'lmasa, u holda (2) qator uzoqlashuvchi deyiladi. Masalan:

1) Ushbu

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2.$$

2) Quyidagi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

qator uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty.$$

3) Quyidagi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

qator ham uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 - 1 + \dots + (-1) = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib,  $A_n$  ketma-ketlik limitga ega emas.

**1-misol.** Geometrik progressiya  $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$  hadlaridan tuzilgan

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin. Odatda bu qator *geometrik qator* deyiladi.

Ravshanki,

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \quad (q \neq 1)$$

Agar  $|q| < 1$  bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a}{1 - q}$$

bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $\frac{a}{1 - q}$  songa teng.

Agar  $q > 1$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$  bo'lib, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar  $q = 1$  bo'lsa,  $n \rightarrow \infty$  da  $A_n = na \rightarrow \infty$  bo'lib qator uzoqlashuvchi,  $q \leq -1$  bo'lganda esa  $A_n$  ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib geometrik qator  $|q| < 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $|q| \geq 1$  bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

**2-misol.** Quyidagi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (3)$$

qatorni uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatilsin. Bu qator *garmonik qator* deb ataladi.

(2) qatorning birinchi  $2^k$  ta ( $k \in N$ ) hadidan tuzilgan

$$A_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

qisman yig'indisini olib, unu quyidagicha yozib olamiz.

$$A_{2^k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Endi ushbu

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} &> \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ terms}} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} &> \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

tengsizliklarni etiborga olsak, unda

$$A_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki,  $A_{2^k}$  ketma-ketlik o'suvchi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2^k} = \infty$ . Shunday qilib, garmonik qator uzoqlashuvchi.

**3-misol.** Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

qatorni yaqinlashuvchiligi, yig'indisi  $\ln 2$  ga tengligi ko'rsatilsin.

Bu qatorning qisman yig'indisini yozamiz:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ma'lumki,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

bunda  $0 \leq x \leq 1$  uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlik o'rinli. Yuqoridagi formulada  $x=1$  deb topamiz:

$$\ln 2 = A_n + r_n(1),$$

natijada ushbu

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlikka kelamiz. Undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ln 2$$

kelib chiqadi. Demak, (4) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $\ln 2$  ga teng.

Aytaylik

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning dastlabki  $m$  ta hadini tashlash natija-sida hosil bo'lgan ushbu

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (5)$$

qator  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning (  $m$  – chi hadidan keyingi ) *qoldig'i* deyiladi.

## 2. Yaqinlashuvchi qatorlar. Koshi teoremasi

### 1<sup>0</sup>. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

qator berilgan bo'lsin. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u ma'lum xossalarga ega bo'ladi.

**1–xossa.** Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning istalgan (5) qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

(2) qator berilgan bo'lsin. Biror  $m$  natural sonni tayinlab, (5) qatorning qisman yig'indisini  $\overline{A}_k$  bilan belgilaylik:

$$\overline{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Ravshanki ,

$$\overline{A}_k = A_{m+k} - A_m \quad A_n = A_m + \overline{A}_{n-m} \quad (n > m) \quad (6)$$

bunda  $A_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  bo'ladi.

(2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m+k} = A. \quad (A - \text{chekli son})$$

bo'ladi.  $k \rightarrow +\infty$  da (11.6) tenglikdan limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A_k} = A - A_m.$$

Bu esa (5) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Endi (5) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A_k} = \overline{A} \quad (\overline{A} - \text{chekli son})$$

bo'ladi. (6) tenglikda  $n \rightarrow +\infty$  da limitga o'tsak, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{A} + A_m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (2) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Shunday qilib, qatorning dastlabki chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish uning yaqinlashuvchiligi xususiyatiga ta'sir qilmaydi.

**1–natija.** Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning qoldig'i

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

$m \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.

Haqiqatan ham (2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi  $A$  bo'lsin, u holda

$$A = A_m + r_m, \quad r_m = A - A_m$$

bo'lib,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = A - A = 0$$

bo'ladi.

**2–xossa.** Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi  $A$  bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c a_1 + c a_2 + \dots + c a_n + \dots \quad (.7)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $cA$  ga teng bo'ladi ( $c \neq 0$  –  $n$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son).



(7) qatorning qisman yig'indisini  $A_n^1$  bilan belgilasak, u holda

$$A_n^1 = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^1 = cA$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (7) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi  $cA$  ga teng ekanini bildiradi.

Bu xossa yaqinlashuvchi qatorlarda ushbu

$$c(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

munosabatning o'rinli bo'lishini ifodalaydi.

**3-xossa.** Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda  $A$  va  $B$  ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (8)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $A+B$  ga teng bo'ladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak, bu qatorning

qisman yig'indilari ( $A_n$  va  $B_n$  lar) uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$  tengliklar o'rinli bo'ladi. (8) qatorning qisman yig'indilarini  $C_n$  bilan belgilab topamiz:

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A + B.$$

Keyingi tenglikdan xossaning isboti kelib chiqadi.

**2–natija.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + lb_n)$$

qator ham yaqinlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + lb_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + l \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi (bunda  $c, l - n$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas sonlar).

**4–xossa.** Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning umumiy hadi  $a_n, n \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.

(2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  ( $A$  – chekli son).

Agar

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda limitlar xossalariga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$$

bo'lishini topamiz.

**Eslatma.** Qatorning umumiy hadi  $n \rightarrow \infty$  da nolga intilishdan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

**Masalan.** Garmonik qator  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ning umumiy hadi  $a_n = \frac{1}{n}$  bo'lib, u  $n \rightarrow \infty$  da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida keltirilgan 4–xossa qator yaqinlashishning *zaruriy shartini* ifodalaydi.

**2<sup>0</sup>. Koshi teoremasi.** Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lib,

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

uning qisman yig'indisi bo'lsin.

**1–teorema.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $\forall \varepsilon > 0$

olinganda ham shunday  $n_0 \in N$  topilib,  $\forall n > n_0$  va  $m = 1, 2, 3, \dots$  lar uchun

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega bo'lib, undan amaliy masalalarni hal etishda foydalanish qiyin bo'ladi.

### 3. Musbat qatorlar

**1<sup>0</sup>. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi sharti.** Biror (2) qator berilgan bo'lsin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

Agar  $a_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) bo'lsa, u holda (2) qator musbat hadli qator yoki, qisqacha, *musbat qator* deb ataladi.

**2–teorema.** Ushbu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qisman yig'indilari ketma–ketligi yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

**Zarurligi.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsin:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  ( $A$  – chekli son). U holda  $A_n$  ketma–ketlik yaqinlashuvchi binobarin chegaralangan, jumladan u yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

**Yetarliligi.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning qisman yig'indilari ketma–ketligi  $A_n$  yuqoridan chegaralangan bo'lsin.

Qatorning har biri hadi manfiy bo'lmagani uchun

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni  $A_n$  ketma-ketlik usuvchi. Shuning uchun 3-bobdagi 7-teoremaga ko'ra  $A_n$  ketma-ketlik chekli limitga ega:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Bu esa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

**4-misol.** Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$$

qatorni (uni umumlashgan garmonik qator deyiladi)  $\alpha > 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Ravshanki qisman yig'indilardan tuzilgan

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ketma-ketlik o'suvchi. Demak  $A_n < A_{2n+1}$  ( $n=1,2,\dots$ ) Ayni paytda

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} = 1 + \left( \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{(2n)^{\alpha}} + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} \right) < 1 + \\ &+ \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{2}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{2}{(2n)^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n \end{aligned}$$

bo'ladi.

Oxirgi ikki munosabatdan ushbu

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan  $\alpha > 1$  bo'lganda

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1} - 1} \quad (n=1,2,\dots)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa  $A_n$  ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. 2-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchidir.

**3-natija.** Musbat qatorning qisman yig'indilaridan iborat ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

**2<sup>0</sup>. Musbat qatorlarni taqqoslash haqida teoremlar.** Ma'lum musbat qatorning yaqinlashuvchanligi yoki uzoqlashuvchanligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan biror munosabatda bo'lgan (taqqoslangan) ikkinchi

musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin. Ular quyidagi teoremlar bilan ifodalanadi.

Ikkita musbat  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator berilgan bo'lsin.

**3–teorema.**  $n$  ning biror  $n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ) qiymatidan boshlab barcha  $n \geq n_0$  lar uchun

$$a_n \leq b_n \quad (9)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Agar: a)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator uzoqlashuvchi bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Qatorning yaqinlashuvchi ( uzoqlashuvchi ) bo'lishiga uning chekli sondagi dastlabki hadlarining ta'siri bo'lmaydi. Shu sababli (9) tengsizlik  $n_0 = 1$  dan boshlab o'rinli bo'lsin, deb qarash mumkin. Demak,  $a_n \leq b_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) tengsizlik o'rinli. U holda berilgan qatorlarning qisman yig'indilari

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned}$$

uchun ushbu

$$A_n \leq B_n \quad (n=1,2,\dots) \quad (10)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Avval  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda 2–teoremaga ko'ra

$B_n$  ketma–ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi:  $B_n \leq M$  ( $n=1,2,\dots$ ).

Bundan (10) tengsizlikka asosan  $A_n \leq M$  ( $n=1,2,\dots$ ) tengsizlik ham o'rinli ekani kelib chiqadi. Demak,  $A_n$  ketma–ketlik ham yuqoridan chegaralangan.

U holda yana o'sha 2–teoremaga ko'ra  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Endi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda  $A_n$  ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan. (10) tengsizlikka asosan  $B_n$  ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Bundan esa  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

**5-misol.** Quyidagi  $\sin \frac{\pi}{1^2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{3^2} + \dots + \sin \frac{\pi}{n^2} + \dots$

qatorning yaqinlashuvchiligi tekshirilsin.

Bu qator hadlari uchun

$$0 < \sin \frac{\pi}{n^2} < \frac{\pi}{n^2} \quad (n=1,2,\dots)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  qatorning mos hadidan kichik. 3-teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchi.

**4-teorema.** Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k \leq \infty)$$

limit mavjud bo'lsin. Agar: a)  $k < \infty$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b)  $k > 0$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

a)  $k < \infty$  bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganida ham shunday  $n_0 \in \mathbb{N}$  son topiladiki, barcha  $n > n_0$  lar uchun

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$$

ya'ni

$$(k - \varepsilon)b_n < a_n < (k + \varepsilon)b_n \quad (11)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Shartga ko'ra  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi. Shuning uchun  $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)b_n$  qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda (11) tengsizlikdan va 3-teoremadan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

b)  $k > 0$  bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Agar  $0 < k_1 < k$  olsak, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  limit o'rinli ekanidan va  $k > k_1$  bo'lishidan, shunday

$n_0 \in \mathbb{N}$  son topiladiki,  $n > n_0$  bo'lganda  $\frac{a_n}{b_n} > k_1$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak  $n > n_0$  bo'lganda  $b_n < \frac{1}{k_1} a_n$  tengsizlik bajariladi. Bundan 3-teoremaga

asosan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

**4–natija.** Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

limit o'rinli bo'lib,  $0 < k < \infty$  bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi, yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo'ladi.

**6– misol.** Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Bu qatorni garmonik qator  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  bilan taqqoslaymiz. Bu ikki qator umumiy hadlarni nisbatining limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Demak, 4–natijaga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

**5–teorema.**  $n \in N$  ning biror  $n_0$  qiymatidan boshlab barcha  $n > n_0$  lar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (12)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Agar :  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Avval aytganimizdek (11.12) tengsizlik  $n=1,2,\dots$  qiymatlarda bajariladi deb hisoblash mumkin. Shunday qilib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n=1,2,\dots)$$

tengsizlik o'rinli deb qaraymiz. Unda quydagi

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan ushbu

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (13)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$  qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Natijada (13) tengsizlik va 3–teoremaga asosan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.



(12) tengsizlik o'rinli bo'lganda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorning ham uzoqlashuvchiligi kelib chiqishi shunga o'xshash isbotlanadi.

**3<sup>0</sup>. Musbat qatorlar uchun yaqinlashuvchilik alomatlari.** Biz yuqorida musbat qatorlarni taqqoslash teoremlarini keltirdik. Garchi bu teoremlar yordamida tekshiriladigan qator hadlarini ikkinchi qator hadlari bilan taqqoslab, qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi masalasi hal bo'lsa ham taqqoslash teoremlari ma'lum noqulayliklarga ega. Bunday noqulayliklardan biri berilgan qator bilan taqqoslanadigan qatorni tanlab olishning umumiy qoidasi yo'qligidir.

Berilgan qatorni geometrik hamda umumlashgan garmonik qatorlar bilan taqqoslab, qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini ifodalaydigan alomatlarini keltiramiz:

**a) Koshi alomati.** Musbat qator  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  berilgan bo'lsin. Agar  $n \in N$  ning biror  $n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ) qiymatlardan boshlab barcha  $n \geq n_0$  qiymatlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{a_n} \geq 1)$$

tengsizlik o'rini bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Avval  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator uchun  $n \geq n_0$  bo'lganda  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$  tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlik ushbu  $a_n \leq q^n$  tengsizlikka ekvivalentdir. 3-teoremaga ko'ra  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  ya'ni  $a_n \geq 1$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda berilga qatorning har bir hadi uzoqlashuvchi  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  qatorning

mos hadidan kichik bo'lmaydi. Yana o'sha 3-teoremaga ko'ra,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Amaliy masalalarni hal qilishda ko'pincha, Koshi alomatining quyi-dagi limit ko'rinishidan foydalaniladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator  $k < 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $k > 1$  bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

**7-misol.** Quyidagi  $1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n + \dots$  qatorning yaqinlashuvchiligi ko'rsatilsin.

Berilgan qator uchun

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

Demak, Koshi alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

**b) D'alamber alomati.** Agar  $n \in N$  ning biror  $n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ) qiymatidan boshlab barcha  $n \geq n_0$  qiymatlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi)

bo'ladi.

Berilgan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator bilan birga yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \quad (0 < q < 1)$$

geometrik qatorni qaraylik. Ushbu  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  tengsizlikni

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

ko'rinishda yozib, so'ngra taqqoslovchi 5-teoremani qo'llaymiz. Shu teorema ko'ra  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  qatorning yaqinlashuvchiligidan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  bo'lganda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi ravshan.

Dalamber alomatini ham limit ko'rinishida ifodalash mumkin.

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo'lsa, u holda  $d < 1$  bo'lganda qator yaqinlashuvchi,  $d > 1$  bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

**8-misol.** Ushbu

$$1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchiligi tekshirilsin.

Bu qator uchun quyidagilarga egamiz:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Undan limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}.$$

Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

**v) Raabe alomati.** Ushbu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  musbat qator berilgan bo'lsin. Agar

$n \in N$  ning biror  $n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ) qiymatidan boshlab barcha  $n \geq n_0$  qiymatlar uchun

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1 \quad \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Avval  $n \geq n_0$  lar uchun  $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1$  tengsizlik bajarilsin, deylik. Bu tengsizlikni quyidagi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \quad (14)$$

ko'rinishda yozib, so'ng  $r > \alpha > 1$  tengsizlikni qanoatlantiradigan  $\alpha$  son olamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} = \alpha$$

Tanlanishiga ko'ra  $\alpha < r$  bo'lgani uchun shunday  $n'_0 \in N$  son topiladiki, barcha  $n \geq n'_0$  lar uchun

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} \leq r$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Undan ushbu

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geq 1 - \frac{r}{n} \quad (15)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi  $\max\{n_0, n'_0\} = \overline{n_0}$  deb olsak, barcha  $n \geq \overline{n_0}$  lar uchun (14) va (15) tengsizliklardan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \quad (16)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar (16) tengsizlikni ushbu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

ko'rinishda yozsak, unda berilgan qator hadlari bilan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  umumlashgan garmonik qator hadlari orasida (12) ko'rinishda munosabat borligini payqaymiz. Ma'lumki,  $\alpha > 1$  da umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchi. Demak, 5-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi barcha  $n \geq n_0$  lar uchun

$$n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Undan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(n-1)}}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun 5-teoremaga asosan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  garmonik qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan berilgan qatorning uzoqlashuvchi ekani kelib chiqadi.

Bu alomatni ham quyidagicha limit ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = g \quad (g = \text{const})$$

limit o'rinli bo'lsa,  $g > 1$  bo'lganda qator yaqinlashuvchi,  $g < 1$  bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

**9-misol.** Quyidagi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Bu qator uchun

$$n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left( 1 - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n}{1} \right) = \frac{3n^2 - 3n}{2n^2 + 4n + 2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{3}{2} > 1$$

bo'ladi. Demak, Raabe alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

**g) Integral alomat (Koshining integral alomati).** Ushbu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  musbat

qator berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik,  $[1, +\infty]$  oraliqda aniqlangan, uzluksiz, o'smaydigan hamda manfiy bo'lmagan  $f(x)$  funksiya uchun  $f(n) = a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bo'lsin. U holda berilgan qator quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

ko'rinishni oladi. Ravshanki,  $n < x < n+1$  bo'lganda

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

ya'ni  $a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$  tengsizliklar o'rinli. Keyingi tengsizliklarni  $[n, n+1]$  oraliq bo'yicha integrallab topamiz:

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \quad (17)$$

Endi berilgan qator bilan birga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{n+1} f(x) dx \quad (18)$$

qatorni ham qaraylik. Bu qatorning qisman yig'indisini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx. \quad (19)$$

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[1, +\infty]$  oraliqda  $F(x)$  boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin ( $F'(x) = f(x)$ ).  $[1, +\infty]$  oraliqda  $f(x) \geq 0$  bo'lgani uchun  $F(x)$  funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'ladi.  $F(x)$  funksiyaning yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral ko'rinishda yozish mumkin:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad F(1) = 0$$

Natijada (19) tenglik ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx = F(n+1)$$

ko'rinishga keladi. Demak, (18) qatorning qisman yig'indisi  $F(n+1)$  ga teng.

Agar  $n \rightarrow \infty$  da  $F(n+1)$  chekli songa intilsa, shu qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (17) tengsizlik hamda 5-teoremaga ko'ra qaralayotgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.  $n \rightarrow \infty$  da  $F(x) \rightarrow \infty$  bo'lsa, berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi integral alomatiga (Koshi alomatiga) kelamiz: Agar  $f(x)$  funksiya  $[1, +\infty]$  oraliqda aniqlangan, uzluksiz va o'smaydigan bo'lib,  $F(x)$  shu funksiya uchun boshlang'ich funksiya va  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator uchun  $f(x) = a_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) bo'lsa, u holda berilgan qator  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = A$  limit chekli bo'lganda yaqinlashuvchi, cheksiz bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

**10-misol.** Quyidagi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) deb olaylik. Ravshanki, bu funksiya  $[1, +\infty]$  da uzluksiz, kamayuvchi hamda shu oraliqda manfiy emas. Shu bilan birga  $x = n$  bo'lganda  $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ . Ravshanki,

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left. \frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right).$$

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1 \text{ bo'lsa,} \\ \infty, & \text{agar } \alpha < 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Agar  $\alpha = 1$  bo'lsa,  $x \rightarrow \infty$  da

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \rightarrow \infty$$

bo'ladi.

Demak, integral alomatiga ko'ra berilgan qator  $\alpha > 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $\alpha \leq 1$  bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

## XULOSA

Biz mazkur ishda, sonli qatorlarni, ularning yaqinlashishi, uzoqlashishi, yaqinlashish alomatlari hamda yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini o'rganamiz.

Matematik analiz fanining dastlabki elementlari hozirda akademik litsey va kollejlarda matematika kursida uchraydi. Shunday ekan, bunday ta'lim muassasalarida o'qituvchi bo'lib ishlashni maqsad qilgan talaba fanni puhta o'rganishi muhim.

Kurs ishni tayyorlash davomida matematik analiz fani qiziqarli fan ekanligini yana bir bor his qildim. Ayniqsa ishning mavzusi nazariyada eng ko'p o'rganilgan mavzulardan biridir. Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalarni integrallashda ularni hosilaga nisbatan yechilgan tenglamaga aylantirishga harakat qilinadi. Yoki yuqori tartibli differensial tenglamalarni integrallashda, ularning tartibi pasaytirilib hosilaga nisbatan yechilgan tenglamaga olib kelishga urinamiz. Hukosa qilib aytganda hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar differensial tenglamalar fanning negizi deb aytish mumkin. Fanning boshqa fanlar bilan chambarchas bog'langanligi, uning tadbiiq ko'lamini kengligidandir. Lekin bu fanga oid adabiyotlarni o'zbek tilida kam ekanligi va o'zimni rus tilini yahshi bilmasligim ishni tayyorlashim qiyin kechishiga sabab bo'ldi.



## ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 1-qism, Toshkent, «O'qituvchi», 1994;
2. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 2-qism, Toshkent, «O'zbekiston», 1995;
3. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent, 2005;
4. Фихтенгольц Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, Москва, «Физматлит», 2001;
5. Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В. Лекции по математическому анализу. Москва, «Высшая школа», 1999;
6. Дороговцев А. Математический анализ (спрочное пособие) Киев, «Высшая школа», 1985;
7. Хинчин А.Я. Восемь лекций по математическому анализу, Москва, «Наука», 1977;
8. Саъдуллаев А., Мансуров Х., Худойбергандов Г., Ворисов А., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар туплами Т. I, II, Тошкент, «Узбекистон», 1993, 1995