

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

**FIZIKA MATEMATIKA FAKULTETI MATEMATIKA
YO'NALISHI 3-KURS M3 GURUH TALABASI
NO'MONOV HOSILJONNING MATEMATIK
ANALIZ FANIDAN**

**Elementar funksiyalarni
darajali qatorga yoyish**

KURS ISHI

Andijon-2015

Mavzu: Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish

Reja:

I. Kirish.

II. Asosiy qism:

1. Teylor qatori
2. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish
3. Eyler fo'rmulalari

III. Xulosa.

Kirish

“Men bu davlatning bugungi boyligiva tez rivoj topishi, eng nufuzli va eng qudratli davlatlar safigakirish sabablarini, avvalo, shu mamlakatning, shu xalqlarning o‘z intellektual boyligidan oqilona foydalanishi, bu mamlakatlarda yashayotgan insonlarning o‘z burchiga,o‘z vazifasiga vijdonan va masuliyat bilan qarashida deb bilaman”

I.A. Karimov.

Ushbu kur ishini “Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish” deb nomlangan bo‘lib, bu mavzu ichida asosan Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish va eyler formulalarini yoritish ko‘zda tutilgan.

Mavzuning dolzarbligi. Mavzu asosan bo‘lajak o‘qituvchining o‘rgangan bilim, ko‘nikma, malakalarini umumlashtirish, Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish va eyler formulalarini yoritish, va o‘rganishdan iborat. amaliyotda foydalanishi to‘g‘risida yoritib berishdir.

Mavzuning o‘rganish jarayoni . Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyishga doir masalalar o‘rganib chiqildi.

Bunda avvalo nazariy qismi berildi. So‘ngra misollar va ularni yechilishlari berligan.

Ishning maqsad va vazifalari. Nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiqu va undan foydalanishni ko‘rsatish.

Ob‘yekti va predmeti. Mavzuni Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish va eyler formulalari, ba‘zi elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish hisoblash tashkil etadi. Predmenti o‘quv adabiyotlari, darsliklardagi ma‘lumotlarni tashkil etadi.

Amaliy ahamiyati. Kurs ishi mavzusi Talabalarga uslubiy qo'llanma sifatida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Kurs ishiga Reja ,kirish, 3 ta bob, xulosa va adabiyotlar ro'yxati berilgan.

I Teylor qatori

II Funksiyani Teylor qatoriga yoyish

III Eyler fo'rmulalari

1- § Teylor qatori

Ilgari ko'rgan misollarda x ning darajalari bo'yicha ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

ko'rinishdagi darajali qatorlarni uchratgan edik.

Ikki had $x \rightarrow x_0$ ning (x ning o'rniga) darajalari bo'yicha yozilgan umumiyroq ko'rinishli darajali qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

ni ham qaraydilar. Bunday qator (1) ko'rinishdagi qatordan uncha farq qilmaydi, chunki (o'zgaruvchini belgilash aniqligicha) unga o'zgaruvchini oddiy $x = x_0 = y$ almashtirish bilan keltiriladi.

Keyinchanlik darajali qatorlarning xossalarini to'liq o'rganamiz, ular ko'p jihatdan, ko'p xadlarning xossalariga o'xshaydi. Darajali qatorning kesmalari ko'p xadlardan iboratdir, shuning uchun darajali qatorlar taqribiy hisoblashlar uchun qulay vosita bo'la oladi. Bularning hammasi, avvaldan berilgan funktsiyani $x \rightarrow x_0$ ning (xususan x ning) darajalari buyicha yeyish mumkinligi xakidagi masalaning ya'ni uni (2) yoki (1) ko'rinishdagi qator yigindisi sifatida yozish mumukinligi haqidagi masalaning qanchalik katta ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

Biz bu yerda elementar funksiyalarning shunday yoyilmalari bilan shug'ullanamiz. Qo'yilgan bu masalaning qanday hal qilish mumkinligini to'liq o'rganilgan Teylor fo'rmulasi ko'rsatib beradi. Haqiqatdan, ko'rilayotgan $f(x)$ funksiya $[x_0, x_0 + H]$ yoki $[x_0 - H, x_0]$ ($H > 0$) oraliqda istalgan tartibli xosilalariga ega (shu bilan ularning hammasi -uzluksiz)

deb faraz qilaylik. U holda aytilganga ko'ra, x ning bu oraliqdagi barcha qiymatlari uchun

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) \quad (3)$$

fo'rmla o'rinli bo'ladi, bu yerda to'ldiruvchi (qoldiq) had keltirilgan ko'rinishlardan biri bilan tasvirlanishi mumkin.

Bunda biz, n ni har qancha katta qilib olishimiz, ya'ni bu yoyilmani $x-x_0$ ning istalgan yuqori darajalari uchun ham yozishimiz mumkin.

Tabiiyki, bu aytilgan cheksiz yoyilma

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (4)$$

bo'lsin. Bu qatorning qoldiq hadini $r_n(x)$ deylik:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \quad (5)$$

1-teorema. (5) darajali qator $(-r, r)$ da $f(x)$ ga yaqinlashishi uchun ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

Taylor formulasida, $\forall x \in (-r, r)$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** Aytaylik, (5) darajali qator $(-r, r)$ da yaqinlashuvchi, ya'ni $f(x)$ bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x), \quad (x \in (-r, r))$$

bo'ladi, bunda

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ravshanki, $\forall x \in (-r, r)$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ bo'lishidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Etarliligi. Aytaylik, $\forall x \in (-r, r)$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

bo'ladi. ►

Odatda, bu munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funktsiya Teylor qatoriga yoyilgan deyiladi.

2- § Funktsiyani Teylor qatoriga yoyish

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya biror $(-r, r)$ da istalgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lsin.

2-teorema. Agar $\exists M > 0$, $\forall x \in (-r, r)$, $\forall n \geq 0$ da

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

bo'lsa, $f(x)$ funktsiya $(-r, r)$ da Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (3)$$

◀ Ma'lumki, $f(x)$ funktsiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x),$$

bunda,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Teoremaning shartidan foydalanib topamiz:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in (-r, r)).$$

Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Demak, $\forall x \in (-r, r)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lib, undan qaralayotgan $f(x)$ funktsiyaning Teylor qatoriga yoyilishi kelib chiqadi. ►

a) Ko'rsatkichli va giperbolik funktsiyalarni Teylor qatorlarini topamiz.

Aytaylik,

$$f(x) = e^x$$

bo'lsin. Ravshanki, $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ ($n \in N$) bo'lib, $\forall x \in (-\alpha, \alpha)$ da ($\alpha > 0$)

$$0 < f(x) < e^\alpha, \quad 0 < f^{(n)}(x) < e^\alpha$$

bo'ladi. Binobarin, 2-teoremaga ko'ra $f(x)=e^x$ funktsiya $(-\alpha, \alpha)$ da Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formulada foydalanib topamiz:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0!=1). \quad (4)$$

$\alpha > 0$ ixtiyoriy musbat son. Demak, (4) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi.

(4) munosabatda x ni $-x$ ga almashtirib topamiz:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ma'lumki giperbolik sinus hamda giperbolik kosinus funktsiyalari quyidagicha

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ta'riflanar edi.

Yuqoridagi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

formulalardan foydalanib topamiz:

$$\operatorname{sh}x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Bu $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ funktsiyalarining Teylor qatorlari bo'lib, ular ifodalangan darajali qatorlarning yaqinlashish radiuslari $r = +\infty$ bo'ladi.

b) Trigonometrik funktsiyalarning Teylor qatorlarini topamiz.

Aytaylik, $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Ravshanki, $\forall x \in R, \forall n \in N$ da

$$|f(x)| \leq 1, |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

bo'lib, $f(0), f'(0)=1, f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$ ($n \in N$) bo'ladi. Demak, 2-teoremaga ko'ra $f(x) = \sin x$ funktsiya Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formulaga binoan

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots \quad (5)$$

bo'ladi.

Aytaylik,

$$f(x) = \cos x$$

bo'lsin. Bu funktsiya uchun $\forall x \in R, \forall n \in N$ da

$$|f(x)| \leq 1, |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

bo'lib,

$$f(0)=1, f'(0)=0, f^{(2n)}(0)=(-1)^n, f^{(2n+1)}(0)=0 \quad (n \in N)$$

bo'ladi. Unda 2-teoremaga ko'ra $f(x) = \cos x$ funktsiya Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formulaga binoan

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \quad (6)$$

bo'ladi.

(5) va (6) darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi.

v) Logarifmik funktsiyaning Teylor qatorini topamiz.

Aytaylik,

$$f(x) = \ln(1+x)$$

bo'lsin. Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \in N)$$

bo'lib,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

bo'ladi. Bu funktsiyaning Teylor formulasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x) \quad (7)$$

ko'rinishga ega.

$f(x) = \ln(1+x)$ funktsiyaning Teylor qatoriga yoyishda 1-teoremdan foydalanmiz. Buning uchun (7) formulada $r_n(x)$ ning 0 ga intilishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Aytaylik, $x \in [0,1]$ bo'lsin. Bu holda Lagranj ko'rinishida yozilgan

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

qoldiq had uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

tenglik bajariladi.

Aytaylik, $x \in [-\alpha, 0]$ bo'lsin, bunda $0 < \alpha < 1$.

Bu holda Koshi ko'rinishida yozilgan

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n (1-\theta_1)^n \cdot x^{n+1}}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

qoldiq had uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'ladi.

Demak, $\forall x \in (-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (8)$$

bo'ladi.

(8) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = 1$ ga teng.

Agar yuqoridagi $\ln(1+x)$ ning yoyilmasida x ni $-x$ ga almashtirilsa, unda

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

formula kelib chiqadi.

g) Darajali funktsiyaning Teylor qatorini topamiz.

Aytaylik,

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in R)$$

bo'lsin. Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in N)$$

bo'lib,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

bo'ladi. Bu funktsiyaning Teylor formulasi ushbu

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

ko'rinishga ega.

Endi $n \rightarrow \infty$ da $r_n(x) \rightarrow 0$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki, Teylor formulasidagi qoldiq hadning Koshi ko'rinishi quyidagicha

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!} x^n \alpha \cdot x(1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n$$

($0 < \theta < 1$) bo'lar edi.

Aytaylik, $x \in (-1,1)$ bo'lsin. Bu holda:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)] x^n = 0 \text{ bo'ladi,}$$

chunki, limit ishorasi ostidagi ifoda yaqinlashuvchi ushbu

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

qatorning umumiy hadi;

$$2) |\alpha \cdot x| (1-|x|)^{\alpha-1} < \alpha \cdot x (1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha \cdot x| (1+|x|)^{\alpha-1};$$

$$3) \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \leq \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan foydalanib, $\forall x \in (-1,1)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishini topamiz. 1-teoremaga ko'ra

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (9)$$

bo'ladi.

Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusi $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin N$ bo'lganda 1 ga teng:

$$r = 1.$$

(9) munosabatda $\alpha = -1$ deb olinsa, unda ushbu

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

formula hosil bo'ladi. Bu formulada x ni $-x$ ga almashtirib topamiz:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

3- § Eyler formulalari

Hozirgina topilgan ajoyib yoyilmalar kayfitsentlarining ko'rinishi ular orasida qandaydir bog'lanish borligi fikrini tug'diradi, lekin – agar haqiqiy sonlar sohasida qolsak – bunday bog'lanishni topib bo'lmaydi. Eyler bu bog'lanishni mavhum ko'rsatkichli darajaga kiritish yo'li bilan topgan.

Bayon qilayotga kursimizda faqatgina haqiqiy sonlar va haqiqiy o'zgaruvchilar qaralsada, biz bu yerda – asosiy yo'ldan chetlanib – Eyler formulalarini keltiramiz. Bu formulalar haqiqiy argumentli trigonometrik funksiyalarni sof mavhum argumentli ko'rsatkichli funksiya orqali ifodalanadi.

Agar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

da haqiqiy son x o'rniga mavhum son yi ni qo'ysak, ushbu

$$\begin{aligned} e^{yi} &= 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!}i + \dots \end{aligned}$$

munosabatni hosil qilamiz yoki haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib yozsak,

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots \right)$$

bo'ladi.

Qavslardagi ifodalar $\cos y$ va $\sin y$ funksiyalarning bizga ma'lum bolgan yoyilmalarning huddi o'zi. Shunday qilib,

$$e^{+yi} = \cos y + i \sin y \quad (14)$$

bu yerda y ni $-y$ ga almashtirib,

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y$$

ekanligini topamiz.

Bu ikki munosabatni hadma – had qo'shib va ayirib Eylerning mashhur formulalarini hosil qilamiz.

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \quad (15)$$

(14) va (15) formulalar analizda keng qo'llaniladi.

Endi aytilganning mantiqiy ma'nosini tushinishga harakat qilaylik. Natural ko'rsatgich n ga bo'g'liq bo'lgan kompleks o'zgaruvchi

$$z_n = x_n + iy_n$$

ni qarashdan boshlaylik. Bunday o'zgaruvchilarning limiti haqiqiy o'zgaruvchining limiti kabi ta'riflanadi; kompleks son $c = a + ib$ va o'zgaruvchi z_n berilgan bo'lsin. Agar, avvaldan har qanday musbat son ε berilganda ham, hamma vaqt shunday no'mer N ni topish mumkin bo'lsaki, $n > N$ bo'lganda $|z_n - c| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $c = a + ib$ kompleks son o'zgaruvchan z_n ning limiti deyiladi.

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

bo'lgani uchun

Ravshanki z_n ning $c = a + ib$ ga intilishi uchun, uning haqiqiy va mavhum tashkil etuvchilari x_n va y_n lar mos ravishda, a va b larga intilishlari, yani $x_n \rightarrow a$ va $y_n \rightarrow b$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Endi kompleks qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (C)$$

ni ko'raylik. Agarr bu qatorning hususiy yig'indisi

$$c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

n ning o'sishi bilan biror kompleks son C ga intilsa, unga yaqinlashuvchi, qator deyiladi. C esa qatorning yig'indisi deyiladi. Bu yerda qatnashgan hamma sonlarni ularning haqiqiy va mavhum tashkil etuvchilarga ajrataylik;

$$C = A + iB, \quad c_n = a_n + ib_n, \quad C_n = A_n + iB_n$$

bu yerda

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Yuqorida aytilganiga ko'ra, C_n ning C ga intilishi uchun A_n va B_n larning mos ravishda A va B larga bir vaqtda intilishi zarur va yetarli, yani kompleks qator (C) ning C yig'indiga yaqinlashishi, haqiqiy qatorlar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A) \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

ning mos ravishda A va B yig'indilariga ayrim – ayrim yaqinlashishiga teng kuchlidir. Bunday, xususan, yaqinlashuvchi kompleks qatorlarning – haqiqiy qatorlarga o'xshash – guruppalash hossalarga ega ekanligi kelib chiqadi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

qator hadlarining mo'dullaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$|a_n| \leq |c_n|, \quad |b_n| \leq |c_n|$$

tengsizliklar o'rinli bo'lgani sababli,

$$\sum_1^{\infty} |a_n|, \quad \sum_1^{\infty} |b_n|.$$

qatorlar ham yaqinlashuvchi bo'ladi, bundan (A) va (B) qatorlarning va, demak, (C) qator ham yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Bu holda (C) ga absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi. Masalan, ushbu

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (16)$$

qator z ning istalgan kompleks qiymatida absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki bu qator hadlarining modullaridan tuzulgan haqiqiy qator yaqinlashuvchidir;

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \dots + \frac{|z|^n}{n!} + \dots$$

Absolyut yaqinlashuvchi (C) qator o'rin almashtirish xossalalariga ega, chunki bu hossaga (A) va (B) qatorlar egadir. Nihoyat, absolyut yaqinlashuvchi kompleks qatorlarga nisbatan qatorlarni ko'paytirish haqidagi teorema ham o'rinlidir; haqiqiy qator bo'lgan hol uchun keltirilgan isbot yuqorida aytilgan ko'rsatmalardan so'ng – bu yerda so'zma – so'z qaytarilishi mumkin.

Endi umumiy holda z kompleks bo'lganda, e^z darajani ta'riflash haqidagi masalani qo'yaylik. z haqiqiy bo'lgan hol uchun bu daraja ilgari ta'riflangan edi; avvalgi no'merda uning

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

yoyilma o'rinli ekanligini isbotlagan edik. Ko'rsatgich z mavhum bo'lganda e^z daraja hali ta'riflangan emas; eslatilgan yoyilma o'xshatib, hozirgi hol uchun, ta'rif bo'yicha, e^z ni (16) qatorning yig'indisiga teng deb olamiz

(yig'indining mavjudligi avvaldan ma'lum) shu bilan birga bunda, ko'rsatkichli funksiyaning asosiy hossasi

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

ning saqlanishi g'oyat muhimdir, bunga e^z va $e^{z'}$ larni beruvchi qatorlarni ko'paytirib ishonch hosil qilish oson.

Shunday qilib yuqorida (11) yoyilmada x ni yi ga almashtirib, biz, daraja tushungasining ko'rsatib o'tilgan kengaytirilishidan foydalandik. bayonimizning ohirida quidagini qayd qilib ketaylik; agar $z = x + iy$ bo'lsa, u holda ko'rsatkichlar qoidasiga ko'ra, $e^z = e^x \cdot e^{yi}$ va, demak (14) ni etirofqa olib

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (17)$$

Ekanini topamiz.

Arktangenisning yoyilmasi. $y = \arctg x$ funksiyaga yuqorida isbotlangan teoremani tadbiq qilib bo'lmaydi. Haqiqatdan, uning n hosilasi uchun topilgan

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^{(n)} y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \quad (18)$$

ifoda, hamma $y^{(n)}$ lar uchun umumiy chegaraning mavjud bo'lishini taminlaydi.

Tegishli teylor qatori

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

faqat $[-1;1]$ oraliqda yaqinlashuvchi bo'lgani sababli, bu oraliqdan tashqarida $\arctg x$ funksiyani shu qator bilan ifodalash haqida sozlashning hojati yo'q. Aksincha, $|x| \leq 1$ bo'lganda Lagranj fo'rmulasi (8) ga ko'ra (18) ni hisobga olib va $y_\theta = \arctg \theta x$ deb,

$$|r_n(x)| \leq \frac{\left| \cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin\left(n+1\right)\left(y_\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right|}{n+1} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan ravshanki, $r_n(x) \rightarrow 0$ va, demak, x ning $[-1;1]$ dagi barcha qiymatlari uchun ushbu,

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots \quad (19)$$

yoyilma o'rinlidir.

Garchi $\arctg x$ funksiyasi bu oraliqdan tashqarida ham aniq ma'noga ega bo'lsada, u yerda (19) yoyilma, qator yig'indiga ega bo'lmaganligi sababli o'rinli emasligini yana bir bor takidlaymiz.

$x = 1$ bo'lganda (19) qatordan, xususan, Leybnitsning mashhur

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} + \dots \quad (20)$$

qatori kelib chiqadi. Bu qator analiz tarixida π sonining yoyilmasini ifodalovchi qatordir.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

funktsiya Teylor qatoriga yoyilsin.

◀ Ma'lumki,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

bo'ladi.

Biz yuqorida

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

bo'lishini ko'rgan edik. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \\ - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right) &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

Demak,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right).$$

(10) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$ bo'lib, yaqinlashish to'plamsi $(-1,1)$ bo'ladi. ►

2-misol. Ushbu

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

funktsiya Teylor qatoriga yoyilsin.

◀ Ma'lumki,

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Unda

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

bo'ladi. Bu darajali qatorni hadlab integrallab topamiz:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)! \cdot (2n-1)} + \dots$$

Keyingi darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi. ►

3-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-6}$$

funktsiya Teylor qatoriga yoyilsin va bu qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

◀ Avvalo $f(x)$ funktsiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)} - \frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)}$$

Ma'lumki,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Bu formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n, \quad (r=2)$$

$$\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n \quad (r=3)$$

Demak,

$$\frac{2x-1}{x^2+x-6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$$

bo'ladi.

Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = 2$ bo'ladi. ►

Xulosa

Ushbu kurs ishi matematik analiz kursidagi o'zining ko'plab tadbirlariga ega bo'lgan Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish va eyler formulalariga bag'ishlangan bo'lib, u kirish qismi, asosiy qism, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat Asosiy qismning birinchi punktida Teylor qator va uning hossalari haqida tushuncha berilgan va ularni hisoblash yo'llari va misollar keltirilgan. Ikkinchi punktida esa elementar funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish haqida ma'lumotlar berilgan va misollari bilan keltirilgan. Uchinchi punktida Eyler formulalari haqida tushuncha berilgan. Bu punktida har bir elementar funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish ko'rib fo'rmulalari berilgan va ular misollar orqali mustahkamlangan va har bir bob ohirida berilgan ma'lumotlarni mustahkamlovchi misollar keltirilgan .

Mazkur Elementar funksiyalarni darajali qatorga yoyish va eyler formulalari kurs ishidan matematika ta'lim yo'nalishi bakalavrlari matematik analiz fanidan o'tkaziladigan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarida foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar

1. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 1-tom, Toshkent, «O`zbekiston», 1994,1995.
2. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H. Matematik analiz, 1 va 2 qismlar, Qarshi, «Nasaf», 2003.
3. Arxipov G., Sadovnichiy V., CHubarikov V. Lektsii po matematicheskomu analizu, Moskva, «Visshaya shkola», 1999.
4. Il'in V., Sadovnichiy V., Sendov B. Matematicheskiy analiz, Moskva «Nauka», 1979.
5. Kudryavtsev L. Kurs matematicheskogo analiza TT, 1, 1973.
6. Rudin U. Osnovi matematicheskogo analiza, Moskva «Mir», 1976.
7. Dorogovtsev A. Matematicheskiy analiz, Kiev, «Visshaya shkola», 1985.
8. Fixtengol'ts G. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, TT, I, II, Moskva "fizmat-lit", 2001.
9. Sa`dullaev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., Varisov A., G`ulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to`plami, 1 va 2- tomlar, Toshkent, «O`zbekiston», 1993, 1996.
10. Demidovich B. Sbornik zadach i uprajneniy po matematicheskomu analizu, Moskva, «Nauka», 1990.