ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ВА КОММУНИКАЦИЯЛАРИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ ВАЗИРЛИГИ
ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида
УДК 681.03

ЮЛДАШЕВ ШЕРЗОД АМОНОВИЧ

Мураккаб шаклли уч ўлчовли геометрик объектларни компьютерли моделлаштиришнинг усул ва воситалари

Мутахассислик: 5А330501 – Компьютер инжиниринги
(Амалий дастурий лойиҳаларни лойиҳалаш)

Магистр академик даражасини олиш учун ёзилган
ДИССЕРТАЦИЯ

Ҳимояга рухсат этилди
“Ахборот технологиялари”
кафедраси мудири
т.ф.н., Каримова В.Э._______
“__” ______________ 2015 й.

Илмий раҳбар:
т.ф.н., Назирова Э.Ш.______
“__” ______________ 2015 й.

Тошкент 2015

МАЗМУННОМА

Ҳозирги вақтда юртимизда ахборот коммуникация технологиялари (АКТ) дан кенг фойдаланишда катта ҳажмдаги ишлар амалга оширилмоқда. Айниқса, асосий эътибор миллий дастурий воситалар ва дастурий таъминотларни ишлаб чиқишга қаратилган. Бу орқали эса четдан валюта орқали кириб келаётган дастурий воситаларга бўлган талабни камайтириш ҳамда миллий дастурий маҳсулотлар орқали жаҳон АКТ бозорига чиқишдир.

Ушбу магистрлик диссертация иши фракталлар ва уларнинг хоссалари ҳамда уларни қуриш алгоритмларини ўрганишга бағишланган. Фракталларни қуришда фойдаланиладиган В.Л.Рвачевнинг R-функция алгебра–мантиқий усули кўриб чиқилган.

Тадқиқот объекти – геометрик фракталлар. Тадқиқот предмети – R-функция ва ундан фойдаланган ҳолда ишлаб чиқилган ҳар хил геометрик фракталлар.

Бу мақсадга эришиш учун қуйидаги вазифалар бажарилди:

- Мураккаб шаклли геометрик шаклларни қуришда фракталларни ўрни, аҳамияти ва таҳлил қилинган;
- R-функция асосида рекуррент тенгламалардан фойдаланган ҳолда мураккаб геометрик объектларнинг классик фракталлари қурилган;
- R-функциянинг алгебра – мантиқий усули ёрдамида геометрик объектларнинг компьютерли уч ўлчовли моделини чизувчи моделлаштириш усул ва воситаларини дастурий таъминоти ишлаб чиқилган.

Серпинский гиламининг уч ўлчамли шакли Серпинский губкаси уч ўлчовли модели чизилган ва уни ихтиёрий ўқ бўйича буриш мумкин.

ABSTRACT

At this time in our country is carried out extensive work on the use of information - communication technologies (ICT). In particular, special attention is paid to the development of national software and security. This ensures reduced need progam funds received from abroad for foreign currency in and out of national software products to the global ICT market.

Master's thesis is devoted to the study of fractals and their properties, as well as construction of algorithms. When constructing fractals used algebraic-logical R-function V.L.Rvacheva.

The object of research - geometric fractals. Subject of research - R-function and developed different geometrical fractals using these functions.

To achieve these goals the following tasks:

- The analysis of the place of fractals in the construction of complex geometric shapes;
- Build a classic fractals complex geometric objects using recursive equations based on the R-functions;
- Using algebraic-logical R-functions, has developed software tools and modeling techniques, which draw three-dimensional computer models of geometric objects.

Painted three-dimensional model of the Sierpinski sponge gives a three-dimensional shape of the Sierpinski carpet and which can turns along any axis.

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Магистрлик диссертация мавзусининг асосланиши ва унинг долзарблиги. Ҳозирги вақтда юртимизда ахборот коммуникация технологиялари (АКТ) дан кенг фойдаланишда катта ҳажмдаги ишлар амалга оширилмоқда. Бу ишларни амалга ошириш давлат томонидан ҳуқуқий жиҳатдан мустаҳкамланган. Бу борада Ўзбекистон Республикаси Президентининг Фармонлари, Қонунлари ва қарорларини, Вазирлар Маҳкамасининг бир нечта қарорларини мисол сифатида келтириш мумкин [1-7].

Бу Қонунлар, фармонлар ва қарорларнинг аоссий мазмуни республикамизда АКТни ривожлантириш ҳамда бу орқали аҳоли турмуш тарзини яхшилашдан иборат.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, ҳозирги вақтда асосий эътибор миллий дастурий воситалар ва дастурий таъминотларни ишлаб чиқишга қаратилган. Бу орқали эса четдан валюта орқали кириб келаётган дастурий воситаларга бўлган талабни камайтириш ҳамда миллий дастурий маҳсулотлар орқали жаҳон АКТ бозорига чиқишдир.

Ҳозирги 21 асрда техника ривожланиб бораётган вақтда дунёдаги ихтиёрий объектнинг нафақат расмини чизиш имконияти мавжуд, балки унинг математик формуласини ҳам ишлаб чиққан ҳолда ҳам уларнинг расмини чизиш имконияти кенгайиб ва ривожланиб бормоқда. Бундай амалларни амалга оширишда бизга фракталлар ёрдамга келади.

Фрактал бу шундай шаклки, ундан фойдаланган ҳолда геометрик объектларни шаклини чизиш мумкин. Фрактал шундай хоссага эгаки, унинг ихтиёрий қисми фракталнинг кичик қисмидан ташкил топади.

Биз қанчалик расмни катталаштирсак бизга ҳар доим унинг минатюра кўринишидаги нусхасини кўришимиз мумкин. Қисқача қилиб айтганда, фрактал шундай чексиз мураккаб шаклки, унинг объектларини яқиндан ва узоқдан кўриш имкониятига эга бўламиз.

Фрактал объектнинг классик мисол сифатида ер шаримизни келтиришимиз мумкин. Агарда биз унга космосдан қарайдиган бўлсак, у бизга шар бўлиб кўринади.

Биз унга яқинлашган сари, унда биз океанлар, материклар, қирғоқлар ва тоғлар занжирини кўришимиз мумкин. Агарда биз расмни янада катталаштирадиган бўлсак, тоғлар янаям кичикроқ деталларга бўлинади: қияликлар, ер бўлаклари, ўз масштабига кўра мураккаб ва тенг эмас. Худди шундай тоғлар ҳам.

Тупроқни бир қисмини янаям катталаштирадиган бўлсак, унинг ҳар бир зарраси ҳам фракталдан ташкил топган. Назарий жиҳатдан олганда, дунёдаги барча нарсалар фрактал саналади. Масалан, булут, кислороднинг кичик зарралари ва бошқалар.

Диссертация ишини бажариш давомида бу ишлар билан бир нечта магистрлик ишлари қилинганлигини кўриб чиқдим. Жумладан, физика-математика фанлари доктори Ш.А.Назиров раҳбарликларида иккита М.Эржанов ва Г.Х.Ташмухамедовалар магистрлик ишлари қилинган [27-28].

М.Эржановнинг магистрлик диссертация иши рекурсив алгоритмлар асосида тугунлар, нақшлар, безаклар ва ҳар хил шаклларни чизувчи дастурий таъминотни ишлаб чиқишга бағишланган бўлса [27], Г.Х.Ташмухамедованинг магистрлик диссертация иши эса фракталларни қуришни мантиқий усулларини ишлаб чиқишга бағишланган [28]. Ушбу магистрлик ишларини ўрганиб чиққан ҳолда мен бу диссертация ишимда юқоридаги диссертантлар томонидан ишлаб чиқилган фракталларга уч ўлчамли тус беришга, яъни z ўқини қўшган ҳолда бу ишларни кенгайтиришга ҳаракат қилдим.

Демак, ушбу магистрлик диссертация иши фракталлардан фойдаланган ҳолда мураккаб шаклли уч ўлчовли геометрик объектларни компьютерли моделлаштиришнинг усул ва воситаларини ишлаб чиқишга бағишланган.

Уч ўлчамли фракталларни ишлаб чиқишда фойдаланилган дастурий алгоритмик воситадан фан ва техниканинг тўқимачилик, самолётсозлик, кемасозлик соҳаларида фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот объекти ва предмети. Тадқиқот объекти – геометрик фракталлар. Тадқиқот предмети – R-функция ва ундан фойдаланган ҳолда ишлаб чиқилган ҳар хил геометрик фракталлар.

Тадқиқот мақсади ва вазифалари: диссертация ишининг асосий мақсади фракталларни тенгламаларини қуришда ишлатиладиган воситалар ва R-функциянинг алгебро-мантиқий усуллари асосида геометрик фракталларни қурувчи дастурий таъминотни ишлаб чиқишдан иборат.

Бу мақсадга эришиш учун қуйидаги вазифаларни бажариш лозим:

- Фракталлар ва унинг хоссаларини ўрганиш;
- Фракталларни тенгламаларини қурувчи усулларни таҳлил чиқиш;
- R-функция асосида рекуррент тенгламалардан фойдаланган ҳолда классик фракталларни қуриш;
- R-функция асосида бу фракталларни уч ўлчовли шаклини чизувчи дастурий таъминотни ишлаб чиқиш.

Тадқиқот усуллари. R-функциянинг алгебра-мантиқий усуллари асосида геометрик фракталларни математик моделлаштириш, замонавий дастурлаш тиллари ва воситаларидан фойдаланган ҳолда фракталларнинг растрли шаклини ишлаб чиқиш.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. R-функциянинг алгебра-мантиқий усули асосида уч ўлчовли фракталларни ишлаб чиқиш тадқиқотнинг илмий аҳамияти бўлса, дастурий таъминотдан тўқимачилик саноатида ҳар хил шаклларни чизишда, кино саноатида ҳар хил махсус эффектларни чизишда ва архитектура ва қурилишда ҳар хил декорациялар, безаклар ва нақшларни ишлаб чиқишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги. R-функция алгебра-мантиқий усули асосида фракталларни қуришнинг ишлаб чиқилган дастурий таъминоти ва алгоритми.

Шу вақтгача ишлаб чиқилган Серпинкий гилами ва салфеткаси асосида уларнинг уч ўлчамли моделини қурувчи дастурий таъминот ишлаб чиқилган.

Ишнинг аппробацияси. Ишнинг асосий натижалари "ТАТУ хабарлари" журналининг 2014 йилдаги 4-сонида «Айланалардан ҳосил бўлган фракталларни тенгламаларини қуриш» номли мақоласи [15], ТАТУнинг 60 йиллигига бағишлаб 2015 йилнинг 21-22 май куни бўлиб ўтган "Радиотехника, телекоммуникация ва ахборот технологиялари: муаммолари ва келажак ривожи" халқаро илмий-техник конференциясида «Фрактал геометрия объектларини тенгламаларини қуриш усуллари» номли маърузаси [16], Ўзбекистон миллий университетида бўлиб ўтган "XXI аср-интеллектуал авлод асри". Аниқ ва техника фанлари. Тошкент ва Тошкент шаҳар ҳудудий илмий - амалий конференцияси материалларида [17] ва "Ахборот технологиялари" кафедрасининг илмий семинарларида муҳокама қилинган.

Магистрлик диссертация ишининг тузилиши ва ҳажми. Магистрлик диссертация иши кириш, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Диссертациянинг асосий қисми 71 бетдан иборат. Магистрлик диссертация иши 62 расм ва 32 та адабиётлардан фойдаланилган.

I БОБ. УЧ ЎЛЧОВЛИ ГЕОМЕТРИК ОБЪЕКТЛАРНИ ҚУРИШДА ФРАКТАЛЛАРНИНГ ЎРНИ ВА АҲАМИЯТИ

1.1 Фрактал турлари ва уларнинг аҳамияти

Фрактал сўзи лотинча «fractus» сўзидан олинган бўлиб, «бўлакланган», «қисмлардан ташкил топган» деган маънони англатади ва у «fraction, fractional» (бўлув, бўлинма) терминларидан келиб чиққан.

Фрактал термини америка олими Бенуа Мандельброт томонидан 1975 йили киритилган.

Фрактал геометриянинг пайдо бўлиши 1977 йили нашрдан чиққан, Бенуа Мандельброт томонидан ёзилган «The Fractal Geometry of Natur» (Табиатнинг фрактал геометрияси) номли китоб билан боғлиқ [8]. Мандельброт ушбу китобида 1875−1925 йилларда шу соҳада ишлаган бир неча олимларнинг (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф ва бошқалар) илмий изланишлари натижаларидан кенг фойдаланган.

Бенуа Мандельброт бутун дунёга янги неевклид геометрияси бўлмаган нарсани таклиф қилди. Неевклидда паралеллик алгоритмидан воз кечиб бўлмас эди. Бу алгоритм анъанавий евклид геометриясида қабул қилинган. Бу алгоритмни ўрнига Я.И.Лобачевский - Я.Боя бошқа аксиомани таклиф қилишди.

Бенуа Мандельброт силлиқ бўлмаган, ғадир будурли, арраланган ва бошқа хусусиятларга эга бўлган евклид бўлмаган геометрияни ишлаб чиқди. Унда чиройли жило берилган ва сайқалланган объектлар математик жуфтликлар ёрдамида шакллантирилади.

Бундан ташқари айнан табиатдаги кўпгина катта объектлар “нотўғри” объектлар асосида ташкил этилар экан. Б.Мандельбротни ўзи яратган шаклнинг морфологик назариясини тавсифлаб берган.

Демак, фрактал нима ўзи деган савол туғилади? Афсуски умуман олганда бундай тушунча мавжуд эмас. “Фрактал” терминини ўзи лотинчадан олинганда fractus (синган, бузилган) маъноларни билдиради. Ундан эса fraction, fractional - каср, майдаланган терминлари пайдо бўлган.

Математик нуқтаи назардан қараганда фрактал бу аввалломбор майдаланган ўлчамлар тўплами деса ҳам бўлади. Мандельбротнинг биринчи таърифи бўйича фрактал топологик ўлчамга эга бўлган тўплам. Иккинчи таърифида эса фрактал бу геометрик структура бўлиб, унинг қисмлари ҳам геометрик структуранинг бир қисми бўлади.

Фрактални математик тушунчаси сифатида объектларни олиш мумкин. Объектлар ҳар хил катта ва кичик масштабга эга. Демак, улар табиатда иерархик тамойил асосида такшкиллаштирилади. Бу тушунчанинг асосида битта муҳим ҳақиқат бор: фрактал объектлари бир-бирига ўхшаш, яъни уларни маълум бир ўзгаришлар билан ўзгартириш орқали уларни шаклини микроскоп билан ихтиёрий катталаштирган ҳолда кўришимиз мумкин.

Биз биламизки, чизиқ бир ўлчовли, текислик икки ўлчовли ва фазодаги фигура уч ўлчовли бўлади. Фрактал эса чизиқ ҳам эмас, текислик ҳам эмас, агар мумкин бўлса уларни ўртасидаги нарса деса ҳам бўлади.

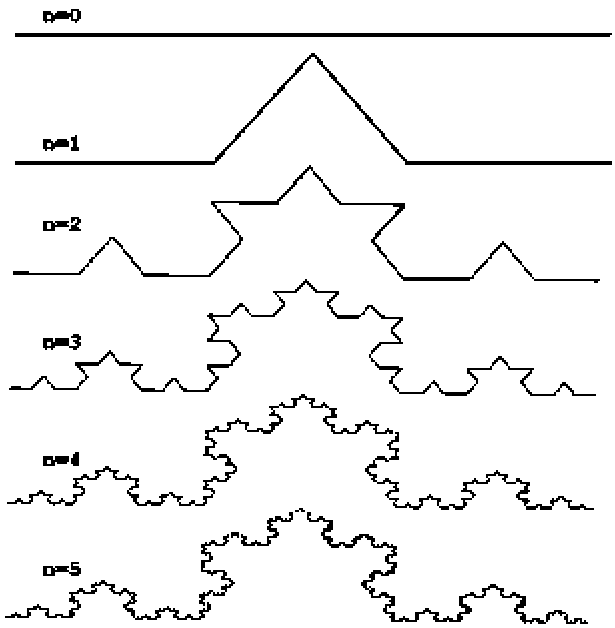
Томонлари l га тенг бўлган квадратнинг юзи l^2 га, қирралари l га тенг бўлман квадратнинг ҳажми эса l^3 га, n – ўлчовли гиперкубни юзи эса l^n га бўлади. Объектни ўлчами (даража кўрсаткичи) соҳанинг ички қисми қайси қонун асосида ўсаётганлигини кўрсатади. Умуман олганда нарсани ўлчами ошиб борган сари фракталнинг ҳажми ҳам ошиб боради. Лекин унинг ўлчами бутун бўлмайди, балки касрли бўлади. Шунинг учун фрактал фигуранинг чегаралари чизиқ эмас: фигурани ўзи кичик масштабда такрорланади ва спирал бўлиб кўринади ҳамда уни масштабини катталаштирганда кўринадики унинг қирралари худди ўпирилиб тушганга ўхшайди. Бундай геометрик такрорланувчанлик маштабли инвариантлик ёки масштабли ўзига хослик (инглизчада, scaling) дейилади. У ўз навбатида фрактал фигуранинг бўлакларини ўлчамини аниқлайди. Биз яшаётган уч ўлчовли дунёда учта нарса суюқлик, газ ва қаттиқ жисм биз учун таркиби битта нарса саналади. Булутнинг ёки тутуннинг ўлчами қанақа, унинг аниқ чегаралари, уларни ҳавода ҳаракатланишида уларни емирилиши қандай? Уларни биз билмаймиз. Маълумки, уларни ўлчами иккидан катта, лекин учдан кичик. Худди шундай қилиб, реал объектларни, масалан, қирғоқни чизиқларини ёки дарахтни шахларини шаклини аниқлаш мумкин. Масалан, инсоннинг қон айланиш тизимининг ўлчамини тартиби 2,7 га тенг экан. Барча фракталлардан ташкил топган объектлар тартибсиз, чалкаш, тоқ, синган ва бошқа тузилишда бўлади.

Шундай қилиб, фракталлар назариясининг асосий тушунчаларидан бири бу унинг бўлагининг ўлчами ва масштаб жиҳатдан ўзига хослигидир.

Фракталларни қуйидаги турларга ажратиш мумкин:

- геометрик фракталлар;
- алгебраик фракталлар;
- стохастик фракталлар;
- L-тизим фракталлар.

Геометрик фракталлар бу аниқ фракталлар ҳисобланади. Икки ўлчамли ҳолатда синган генератор ёрдамида олиш мумкин. Ҳар бир кесма алгоритмининг бир қадамида мос масштабдаги синиқ генератор билан алмаштирилади. Натижада процедурани чексиз такрорланиши натижасида геометрик фрактал ҳосил бўлади.



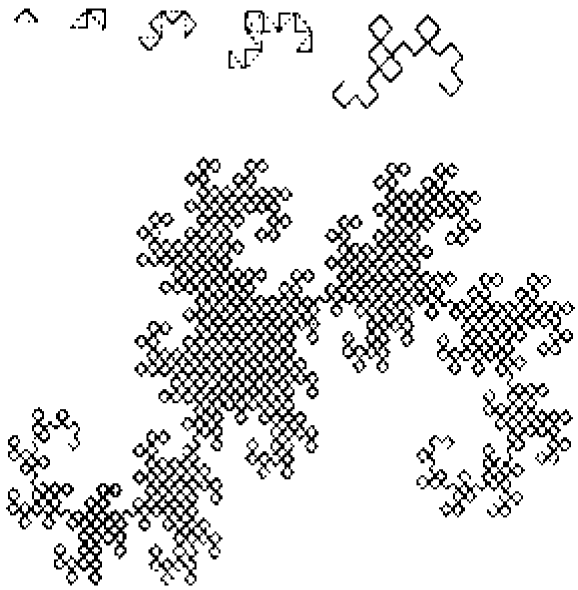
1.1-расм. Кох эгри чизиғини қуриш.

Кох эгри чизиғини триада кўринишидаги фракталини кўриб чиқамиз. Эгри чизиқни қуриш бир ўлчамли кесмани қуришдан бошланади (1.1-расм). Бу Кох эгри чизиғининг 0-авлоди саналади. Кейин ҳар бир бўлим (0-авлодда битта кесма) элемент билан алмаштирилади, Бу 1-расмда **n=1** орқали берилган. Бундай алмаштириш натижасида Кох эгри чизиғининг кейинги 1-авлоди ҳосил бўлади. 1-авлодда бу эгри чизиқ узунлиги 1/3. Бўлган тўртта тўғри чизиққа бўлинади. 3-авлодни ҳосил қилишда шу ишлар такрорлани боради, яъни ҳар бир бўлим кичиклаштирилган ҳолда алмаштирилиб борилади.

Демак, ҳар бир кейинги авлодни ҳосил қилиш учун олдинги бўлимнинг барча авлодлари кичиклаштирилган элементлар билан алмаштирилиб борилади.

n-авлоднинг эгри чизиқлари ихтиёрий ҳолатда **n** нинг олдинги фрактали саналади.

1.2-расмда эгри чизиқнинг бешта авлоди берилган. **n** ни қийматини чексизликка интилтирган ҳолда Кох эгри чизиғининг фракталини қурамиз..



1.2-расм. Хартера-Хейтуэя "аждарҳосини қуриш

Бошқа фрактал объектини қуриш учун қуриш қоидасини ўзгартириш керак. Масалан, булурни қурувчи элемент сифатида бир бири билан тўғри бурчак остида бирлагтирилган иккита тенг кесма бўлсин. 0-авлодда бирлик кесмани ушбу элемент билан алмаштирамиз. Фақатгина улаган тўғри бурчак тепада бўлиши лозим.

Кейинги авлодни қуришда қуйидаги қоидаларга амал қилинади: кейинги бўлимларни ҳар бири олдинги бўлимнинг тўғри бурчаги билан боғланиб кетавериши лозим.

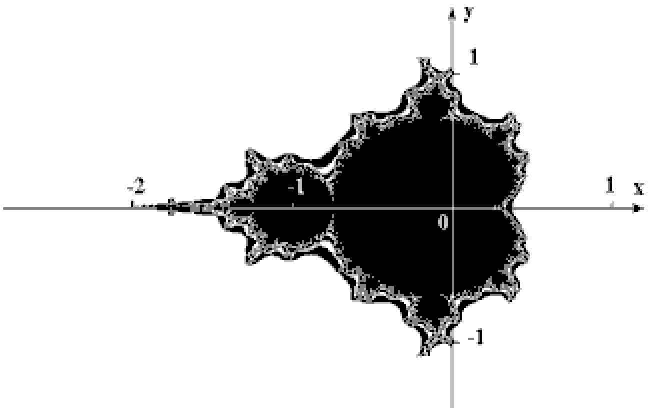
1.2-расмда эгри чизиқнинг дастлабки бир нечта авлодлар ва 11-авлод берилган. Буларнинг ҳаммаси юқоридаги қоида асосида қурилган. Бу фрактал эгри чизиғи одатда Хартер-Хейтуя аждарҳоси ҳам деб аталади.

Машинали графикада фракталлар дарахтсимон, тўпсимон ва бошқа шаклдаги расмларни олишда фойдаланиш мумкин.

Икки ўлчамли геометрик фракталлар катта ҳажмдаги текстураларни ишлаб чииқшда фойдаланиш мумкин

Алгебраик фракталлар. Бу фракталларни энг катта гуруҳи саналиб, уларнинг чизиқли бўлмаган жараёнлари ёрдамида n-ўлчамли фазо учун ҳам ҳосил қилиш мумкин. Ҳозирги вақтда икки ўлчамли фракталлар яхши ўрганилган.

Маълумки, чизиқли бўлмаган динамик тизимлар бир қанча устун томонларга эга. Динамик тизимлар бир нечталик итерациялардан кейин бошланғич ҳолатига боғлиқ бўлади.



1.3-расм. Мандельброт тўплами.

Агарда фазомиз икки ўлчамли бўлса, у ҳолда унинг соҳаси ҳар хил рангда тасвирланади. Яъни рангли шаклда шакллантирилади.

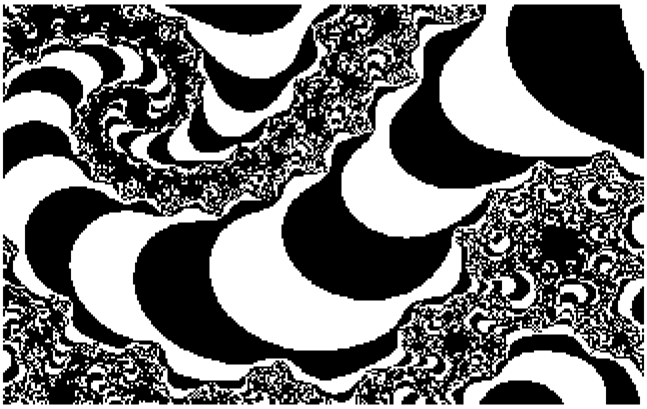
Рангни танлаш алгоритмини ўзгартирган ҳолда муракккаб шаклдаги кўп рангли тугунлардан ташкил топган мураккаб фрактални ҳосил қилишимиз мумкин.

Буни қизиқ томони шундаки, оддийгина алгоритмларни ўзгартирган мураккаб структурадаги чиройли шаклларни ҳосил қилишимиз мумкин.

Бунга мисол сифатида Мандельброт тўпламини келтиришимиз мумкин (1.3-расм). Уни қуриш алгоритми жудаям оддий ва у оддийгина итерацион айирмалардан ташкил топган:

$$\mathbf{Z}[i+1] = \mathbf{Z}[i] * \mathbf{Z}[i] + \mathbf{C},$$

Бу ерда **Z**i и **C** – комплекс ўзгарувчилар. Итерация ҳар бир тўғри бурчакли бошланғич **C** нуқтадан бошланади. Итерацион жараён токи **Z**[i] 2 радиусли айланадан чиқиб кетмагунча бажарилади. Айлананинг маркази (0, 0) нуқтада жойлашган. Итерациялар сонига мос равишда **Z**[i] нинг айлана ичига қолишини ҳисобга олган ҳолда **C** учун бирор бир ранг бериш мумкин. Агарда **Z**[i] етарли даражада кўп сонли итерацияларда айлана ичига қолиб кетса у ҳолда итерацион жараён тўхтатилади ва бу нуқталар қора рангга бўялади.



1.4-расм. Мандельброт тўпламидаги соҳанинг 200 марта катталаштирилган ҳолдаги соҳаси

Юқорида ёзилган алгоритм Мандельброт тўпламини ҳосил қилишда ишлатилади. Мандельброт тўпламига нуқталар тегишли бўлиб, чексиз сондаги итерациялар сонида ҳам унинг қиймати чексизга кетмайди. У нуқталар қора рангга ўтади.

Стохастик фракталлар. Яна бир маълум классик фракталлардан бири бу стохастик фракталлардир. Агарда итерацион жараёнда қандайдир параметр ўз қийматини ўзгартирса стохастик фракталлар ҳосил бўлади.

Бунинг натижасида эги бугри чизиқлар ҳосил бўлади. Икки ўлчамли фракталлар денгиз сиртини ва бирор бир жойнинг рельефини моделлаштиришда ишлатилади.

Табиат ўзини одатда фрактал шаклда намоён этади. Фракталларни тирик табиатда ҳам кўп кўришимиз мумкин: чиғаноқлар, дарахт шохлари, гулларни барглари ва гултожилари, ландшафтлар, булутлар ва бошқалар.

Бундан ташқари детерминирланган (алгебраик ва геометрик) ва детерминирланмаган (стохастик) фракталлар ҳам мавжуд.

L-тизим фракталлар. Биринчи L-тизим тушунчаси 1968 йилда Аристид Ландермайер томонидан фракталлар учун киритилди. Дастлаб L-тизим фрактал тилларни ўрганиш учун киритилган. Шунингдек, селекцияда биологик моделларни ўрганишда ҳам фойдаланилган.

Улар ёрдамида барчага маълум бўлган фракталларни қуриш мумкин. Масалан, Кох қор учқунини. Бу орқали L-тизим чексиз кўринишдаги янги фракталларни ҳосил қилишга йўл очиб берди. Бу эса уни компьютер графикасида кенг тадбиқ этилишига замин яратди. У орқали компьютер графикасида ўсимликлар ва дарахтлар фракталлар орқали қурилмоқда.

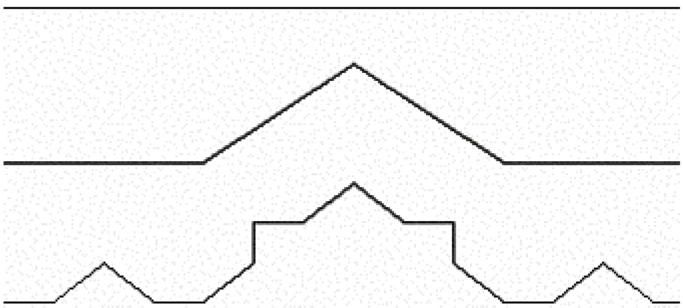
L-тизим сўзи Lindenmayer номидан олинган бўлиб, ҳозирги вақтда ҳар хил шаклдаги фракталларни қуришда фойдаланилмоқда. L-тизим кўпинча графиканинг тошбақаси деб аташади.

Аслини олганда L-тизим қандайдир фрактал саналмайди. Бу қандайдир дастурлаш тилининг грамматикаси ҳам дейиш мумкин.

L-тизимни қуриш дастлабки шаклни ва алмаштириш қоидасини беришни ўзи етарли.

Шундай қилиб, ҳар хил командалар, масалан, берилган бурчак остида буриш ёки берилган узунликка кўчириш орқали ҳар хил шаклларни ҳосил қилиш мумкин.

L-тизим ёрдамида оддий расмни қуришни кўриб чиқамиз .бунинг учун биз билган Кох эгри чизиғини фрактал тўпламини қараймиз.



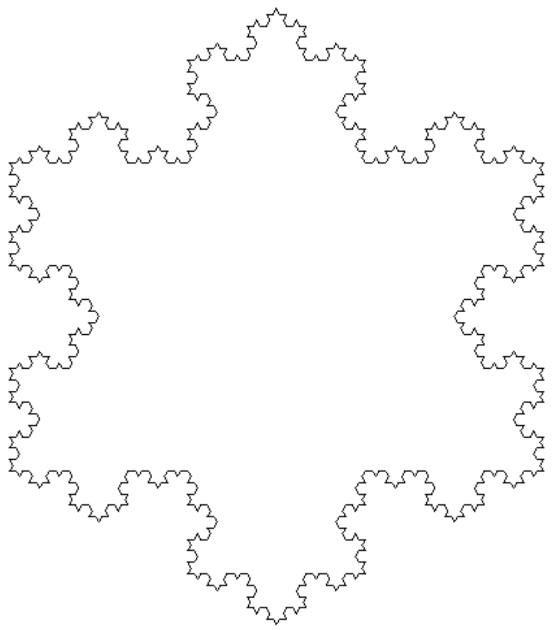
1.5-расм. Кох эгри чизиғи

Эгри чизиқни қуриш бирлик кесмадан бошланади. Бу аксиома дейилади ва фракталнинг 0-тартиби саналади. Кейин аксиома берилган элементни бир неча қоидаларга кўра чўртта тўғри чизиқ билан алмаштиради. Бу билан 1-тартибли фрактал қурилади. Кейинги тартибли фракталнӣ қуриш учун ҳар бир чизиқ олдигиси билан алмаштирилади.

Агарда эгри чизиқ қуришни кесмадан эмас учбурчакдан бошлайдиган бўлсак ва уни юқорида келтирилган қуриш орқали учбурчакнинг ҳар бир томонига қўллайдиган бўлсак Кож “қор парчасини” ҳосил қиламиз (1.6-расм).

Демак кўриниб турибдики, фракталлар нафақат математик жиҳатдан қизиқ бўлиши мумкин, балки улар керакли иловалардир. Фракталлар асосида қилинган пейзажлар ҳозирги вақтла илмий фантастик фильмларда қўлланилмоқда.

Бундан ташқари фракталлардан расмларни сиқишда ҳам кенг фойдſланилиб келинмоқда. Фракталлар орқали кўп маротабалаб сиқилган расмлар JPEG ва бошқа сиқиш методларига қараганда расмни сифатига камроқ таъсир этиб яхши натижалар бермоқда. Фракталлар ҳозирги вақтда тартибсиз динамик тизимлар билан ишлашда ҳам фойдаланилмоқда.



1.6-расм. Кох қор парчаси

1.2 Геометрик объектларни қуришда фракталлар геометрияси

Фрактал геометрияси Манделборт бўйича ҳақиқий табиат геометрияси бўлиб, одатий геометриядан фарқ қилади.

Фрактал - табиий шакллар аралашмаси бўлиб, аморф, ноаниқ шакллар, инсон ақлини ва қарашларини табиатга яқинлаштирувчи шакллар мажмуаси.

Менделброт табиий шаклларнинг математик аналогиясини ва фрактал ҳақидаги тушунчаларни, ундаги нуқта, чизиқ ва текисликлар табиий геометрик шакллардан тубдан фарқ қилишини кўриб чиқади.

Фракталга мисол сифатида Манделброт комплекс текислигидаги Жулиа Манделброт тўпламини кўриб чиқган.

Бир анча тузилмаларни тузиш асосида рекурент тизим – $z \rightarrow f(z, c)$, интеграция жараёни ётибди, унда z-комплекс ўзгарувчиси, c - комплекс константаси, f - чизиқли бўлмаган функция.

Агар x ва y координата текислигида $z=x+iy$ ўзгарувчи, $c=p+iq$ константа ва чизиқли бўлмаган функцияни қуйидагича танлаб олиш мумкин:

$$f(z,c)=z*z+c.$$

Агарда c=0 бўлса, барча z нуқталари 3 синфга бўлинади:

1. $|z|<1$ => z нинг аттрактор нуқтаси (0,0) нуқта;
2. $|z|=1$ => z нуқта радиуси 1 га тенг бўлган айлана ичида;
3. $|z|>1$ => з нинг аттрактор нуқтаси- чексизлик;

Агарда c нолга тенг бўлмаса, унда нолдан фарқли бўлган аттрактор юзага келади.

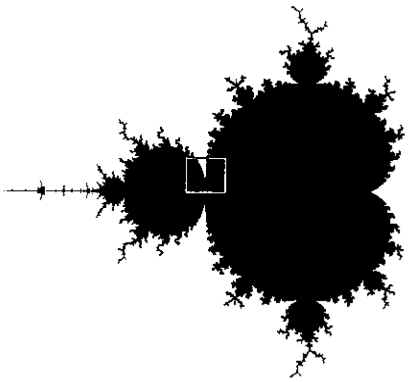
Аттракторлар - бу тортишув маркази, улар текисликка таъсир қилиш учун кураш олиб боради; ҳар қандай бошланғич нуқта ёки жараён вақтида у ёки бу аттракторга келади ёки чегарага келиб қолиб маълум вазифани бажаролмай туради. Кўрсаткичлари ўзгариши билан аттракторларнинг таъсир соҳаси чегараси ҳам ўзгариб боради.

Кўпгина Жюлиа ва Манделброт фракталлари рекурсив ҳолда тузилади. Турли хил F ва G функwиялари орқали, к- нуқтадан (к+1)-

текисликдаги нуқтага ўтишга имконият беради, у қуйидаги қонуният орқали:

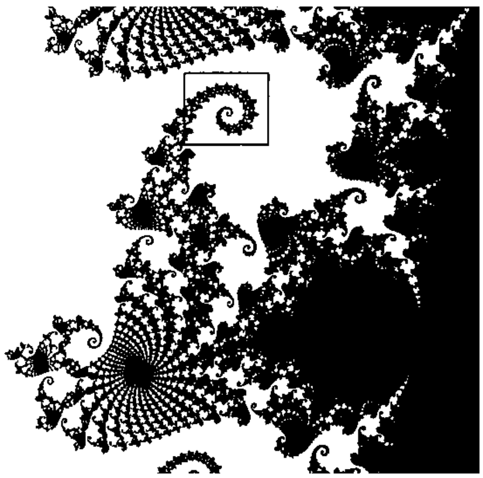
$$x(k+1)=F(x(k),\ y(k),p),$$
$$y(k+1)=G(x(k),\ y(k),q),$$

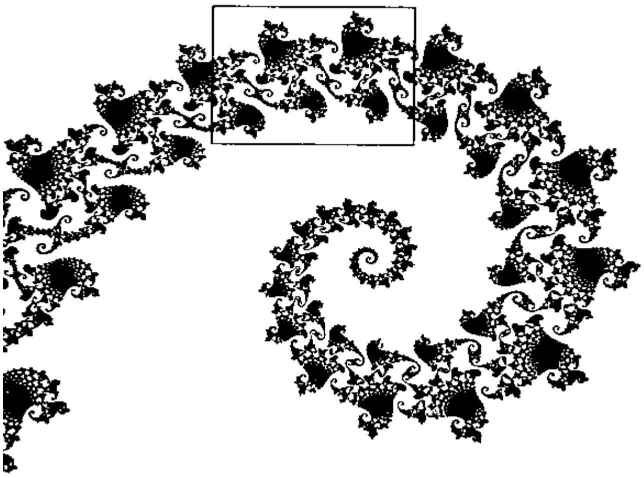
n ва q кўрсаткичлари ҳар танлаш (итерация) жараёнида доимий ҳисобланади (x(0),y(0))->(x(1),y(1))->...->(x(k),y(k))->... F ва G функциялари орқали турли хил чизиқли бўлмаган функцияларни кўриб чиқса бўлади. Агар (x,y) нуқталар жуфтлигидан ташкил топган текисликни олайлик. Қайд қилинган p ва q ларни ҳисобга олган ҳолда кўриб чиқилса, унда кўпгина Жулиа тўпламини ҳосил қилиш мумкин. Агар, аксинча бошланғич қиймат сифатида (x,y) жуфтликларининг қийматлари қайд қилинса ва унинг ҳолати қилинган p ва q параметрларининг турли хил қийматларида кузатилади, бу ҳолда кўпгина Манделброт тўпламини тасвирлари ҳосил бўлади.



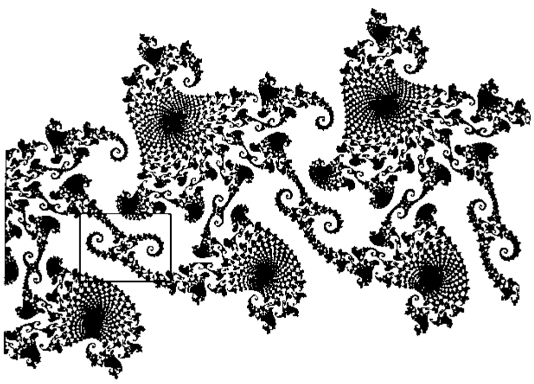
а)

б)





в) г)



д) е)

1.7-расм Манделброт тўпламининг қисмлари турли хил масштабларда

1.7-расмнинг а) дан топтиб е) расмигача Манделброт тўпламининг турли хил қисмлари ҳар хил шаклларда берилган.

Франталлар тўпламининг ўлчамидан фойдаланиш тушунчасини Манделброт таклиф этган.

Оддий тушунчада геометрик тўплам ўлчами ўзгаришлар сонига тенг, унинг ёрдамида геометрик объектдаги нуқталарни аниқлаш мумкин.

Ўз вақтида “кўп ўлчамлилик” жуда катта баҳсга сабабчи бўлган. Масалан, текисликнинг ўлчами иккига ва евклид фазосининг ўлчами учга тенг. Лекин тўрт, беш ёки олти ўлчамли фазоларни тасаввур қилиш жудаям мураккаб

Предметларни ўлчаш сони - “чизиқли фикрлаш” дан “фрактал”га ўтиш, янги интеграллашган бирликларни киритишга боғликдир.

Фрактал геометрияси “бўлаклаш” тушунчаси миқёсида фикрлашга мажбурлайди, яъни бўлаклаб ўлчаш.

Манделброт бирликни аниқлашни махсус йўлини топди. Айрим ҳолда бизни бирликлар ҳақидаги классик тасаввуримизга мос келиши мумкин. Умуман олганда эса, фрактал предметларни киритиш ва ўлчаш имкониятини беради.

Бирлик тушунчасини аниқлаштириш учун ноаниқ евклид фазосида S нуқталар тўпламини кўриб чиқамиз.

Бу тўпламни навбат билан тўғри чизиқ, квадрат, кубик билан қоплаб чиқамиз. Бунинг учун $h(\delta) = \gamma(d)\delta^{d}$ қоплаш функциясини оламиз. Бунда d=1 тўғри чизиқ бўлакларга мос келади, d=2 да эса квадратга, d=3 эсада кубикка. γ- бизнинг ҳолатимизда геометрик коеффициент бирга тенг.

$M_d=\Sigma h(\delta)$ тўпламни ўлчамини кўриб чиқамиз. Ўлчам умумий олганда шундай тушунчаки, у узунлик, майдони ва ҳажми каби тушунчаларни ўртасида ётади.

$\delta\to 0$ да M_d нинг ўлчами бирга тенг ёки d-ўлчамга боғлиқ равишда чексизликка тенг бўлиши мумкин. Масалан, текисликдаги (d=1) кесманинг қисмини қоплаш учун унинг ўлчами чексизликка тенг. Текисликни маълум сондаги кесмалар билан қоплаш мумкин эмас.

Текисликни бирор бир қисмини кубик (d=3) билан қоплайдиган бўлсак унинг уўлчами нолга кетади, чунки текисликнинг ҳажми нулга тенг.

Коха шаклини бўлаклар (d=1) билан қоплаётганимизда, ўлчам (шакл узунлиги) чексизликка интилади. Коха шаклини квадратлар (d=2) билан қоплаётганимизда ўлчам (шакл юзи) нолга интилади. Бу ҳақиқат d=1 ва d=2 лар орасида d катталиги мавжуд бўлишига асосий таклиф беради, унда ўлчам ўз қийматини нолдан чексизликка ўзгартиради.

Хаусдорфа –Безикович миқдорида D тўплам S критик миқдор ҳисобланиб, бунда M_d ўлчами ўз қийматини нолдан чексизликка ўзгартиради.

$$M_d=\Sigma\gamma(d)\delta^d \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ бунда } d>D;$$

$$M_d=\Sigma\gamma(d)\delta^d \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \infty \text{ бунда } d<D.$$

Текислик холатида Хаусдорфа –Безиковичнинг ўлчами иккига тенг. Кох шаклида бу миқдор бутун ҳисобланмайди, балки фрактал ҳисобланади. Кох шаклининг ўлчами узунлик ҳам эмас ва юза ҳам эмас, балки улар орасида жойлашган қиймат.

Мураккаб шаклнинг мўлчамини (бирлик) евклид текислигида аниқлаш учун, уни квадрат тўпламлари билан $l\to 0$ томонда қопланади ва турли хил l қийматларда N(l) квадратлар сони ҳисобланади. Сўнгра даражали функция ўлчами қидирилади. Бунинг учун иккилик логарифмик координатада квадратлар сони бўглиқлиги тузилади, квадратнинг узунлик тарафидан шакл қопланади. Шундай график ҳосил бўладики, қирғоқ узунлигининг танланган қадам функциясида боғлиқ ҳолда ҳосил бўлган графикига ўхшайди. Бу графикнинг бурилиш бурчаги бўйича фракталнинг ўлчами аниқланади.

Ўлчамни бошқа кўринишда ҳам киритиш мумкин. Ўрганилаётган тўпламни n-ўлчамли фазони қирралари ε га тенг бўлган кубиклар билан қоплаймиз. i-рақамли кубикни тўпламга тушиш эҳтимоллигини P_i билан белгилаймиз. Кейин D_q билан умумлашган ўлчамни топиш формуласини келтириб чиқарамиз.

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\sum_i P_i^q}{\log\varepsilon} \tag{1.1}$$

Бу ерда ўлчам сифатида барча кубиклар суммаси олинади. Фазодаги нуқталар тартиблилигининг даражаси турли q да ҳар хил турдаги бирликлар ҳосил бўлади, улар ўрганилаётган тўпламларни ҳарактерлайди.

1.3 Геометрик объектларнинг қуришда фрактал ўлчами

Маълумки, кесманинг текисликдаги ўлчами бирга, квадратники иккига, уч ўлчовли текисликда шарники учга тенг бўлади. Шу билан бирга математикада шундай нуқталар маълумки, уларнинг ўлчамлари бутун сонлар билан эмас балки ҳақиқий мусбат сонлар билан аниқланади. Шу маълумотлардан фрактал ўлчамлар тушунчаси шаклланган.

Фракталларнинг ҳақиқий сонларни қабул қилмайдиган тўплари бўйича мисолларни кўриб чиқамиз. Аттрактор дифференциал тенгламаларнинг фрактал ўлчамларини баҳолаш муҳим аҳамиятга эга. Бу ерда аттрактор тушунчаси остида $t \to +\infty$ ҳолатдаги дифференциал тенгламанинг жавоби интиладиган кўпгина нуқталар тушунилади.

1. X ўқидаги кўпгина нуқталарнинг фрактал ўлчами. A тўплам чекланган дейилади, агарда $x \in A$ учун шундай R сон мавжуд бўлсаки, унинг учун $|x| \le R$ ўринли бўлса. $B_\varepsilon(x_0)$ билан $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ оралиқдаги интервални белгилаймиз. $B_\varepsilon(x_0)$ ни ε - айлананинг x_0 нуқтасидаги қиймати деймиз. $B_\varepsilon(x_i)$ $i = 1,2...,M,$ айланалар A тўпламни қоплайди, агарда уларни бирлаштирганда унинг ичида A тўплам ётса:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_\varepsilon(x_i)$$

A тўпламнинг ε-фрактал d-тўплам чегараси деганда қуйидаги сон тушунилади:

$$\mu(A, d, \varepsilon) = \min\ M \cdot \varepsilon^d \equiv \varepsilon^d N(\varepsilon)$$

Бу ерда $N(\varepsilon) = \min M$ га тенг. Чунки $\min M$ F тўпламни қоплаб олишига қараб танланади.

Масалан: агар $A_1 = [0,1]$ x ўқидаги бирлик кесма бўлсин. У ҳолда $N(\varepsilon) = [1/2\varepsilon] + 1$ га тенг. Бу ерда $[1/2\varepsilon]$ энг катта бутун сонни англатади. У $1/2\varepsilon$ дан кичик ёки тенг. М – бутун мусбат тўплам бўлса, у ҳолда унинг $N(\varepsilon)$ минимуми мавжуд. А тўмламнинг фрактал ўлчами қуйидагига тенг.

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \mu(A, d, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \varepsilon^d N(\varepsilon) \equiv \mu_F(A, d). \tag{1.2}$$

Кўп ҳолларда

$$\mu_F(A, d) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^d N(\varepsilon) \tag{1.3}$$

Масалан, $A_1 = [0,1]$ да d=1 бўлса

$$\mu_F(A_1, 1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^1 N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = \frac{1}{2}$$

d>1 бўлганда

$$M_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^d \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = 0$$

d<1 бўлганда

$$\mu_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^d \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = +\infty$$

Умуман олганда x ўқидаги берк, чегараланган А тўпламни аниқлаб олиш осон бўлади агар $\mu_F(A, d') < +\infty$ $\mu_F(A, d) = 0$ бўлса. $\mu_F(A, d) = +\infty$.

Шундан $\mu_F(A, d) = 0$ да $d > d_0$ ва $\mu_F(A, d) = +\infty$ да $d < d_0$ бўлса $d_0 \in [0, +\infty]$ сони мавжуд бўлади, $\mu_F(A, d_0)$ сони $[0, +\infty)$ ярим ўқидаги исталган сон бўлиши мумкин. $d_0 = \inf d$ учун ‘са $\mu_F(A, d) = 0$ бўлади.

Таъриф. (1.2) тенгламада А тўпламни қониқлантирадиган ўлчам деб шундай d_0 сонга айтиладики. $d_F(A) : d_F(A) = d_0 = \inf d$ га тенг булади.

Шунинг учун $d_F(A_1) = 1$. $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, A)$ га қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин

$$0 < C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \le N(\varepsilon) \le C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$$

Бу ерда C_1ва С ўзгармаслар ε га боғлиқ эмас. Шу ҳолатда фрактал ўлчами $\mu_F(A,d)$ учун ушбу тенгсизлик мавжуд

$$0 < C_1 \le d_F(A,d) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup N(\varepsilon)\varepsilon^d \le C < +\infty$$

Бу ердан кўриниб турибдики

$$d = d_F(A)$$

га тенг.

Шундай қилиб, (1.3) бажарилган бўлса, (1.3) даги d кўрсаткич $d_F(A)$ тўпламнинг фрактал ўлчамига тенг бўлади. Агар (1.3) даги барча бўлакларини логарифмини олсак қуйидагига эга бўламиз

$$\log C_1 + d\log\frac{1}{\varepsilon} \le \log N(\varepsilon) \le \log C + d\log\frac{1}{\varepsilon}$$

Бу ерда

$$\frac{\log C_1}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + d \le \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \le \frac{\log C}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + d$$

Бу тенгсизликларда $\varepsilon \to 0+$ чегарасига ўтсак қуйидагини оламиз

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

Мисол. Тўпламнинг фрактал ўлчамлар.

$$A = \left\{\frac{1}{n}, n = 1,2,...\right\} \cup \{0\}$$

$B_{\varepsilon_p}\left(\frac{1}{k}\right), k = 1,2,... p$ чегараларидаги $\frac{1}{2},..., \frac{1}{p-1}, \frac{1}{p}$ нуқталарнинг қопланишини кўриб чиқамиз

$$\varepsilon_p = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{p(p-1)}$$

$$B_{\varepsilon_p}\left(\frac{1}{k}\right) = \left\{\frac{1}{k} - \varepsilon_p < x < \frac{1}{k} + \varepsilon_p\right\}$$

Аниққи, бу чегаралар кесишмайди ва (1.1) фоймулага асосланиб в=1/2

$$\mu(A, 1/2, \varepsilon_p) \ge p \cdot \varepsilon_p^{1/2} = p \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{p^{1/2}(p-1)^{1/2}}$$

Кўриниб турибдики фрактал ўлчами

$$\mu_F(A,1/2) \geq \frac{1}{3} \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{p^{1/2}(1-p)^{1/2}} = \frac{1}{3}$$

га тенг, Албатта $\mu_F(A,1/2) > 0$.

бўлганда

$A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{p}\} \cup \{\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \ldots\} \cup \{0\}$ - аввалги айлананинг чегаралари $B_{\varepsilon_p}\left(\frac{1}{k}\right),\quad k = 1,2\ldots, p,$ га тенг, $B_{\varepsilon_p}(x_i)$ тўйиниш нуқталари. Бу ерда

$$i = 1,\ldots,\left[\frac{1}{p+1}/2\varepsilon_p\right]+1,\qquad x_i \in \left[0, \frac{1}{p+1}\right], \varepsilon_p = \frac{1}{9}\frac{1}{p(p-1)}$$

га тенг.

Кўриниб турибдики, барча А тўплам ε_p-айланалар қопланди. Бунда қуийдаги тенглик ўринли

$$p + \left[\frac{9p(p-1)}{2(p+1)}\right] + 1 = M_p \leq Cp.$$

Шундан А тўпламларни қоплайдиган энг кичик сон $B_{\varepsilon_p}(x_j)$ чегарасидаги ε_p сон бўлиб, унга қуйидаги га тенг

$$N(\varepsilon_p) \leq M_p = p + \left[\frac{9p(p-1}{2(p+1)}\right] + 1 \leq Cp$$

Бунда c p га боғлиқ эмас га боғлиқ эмас.

Шунингдек

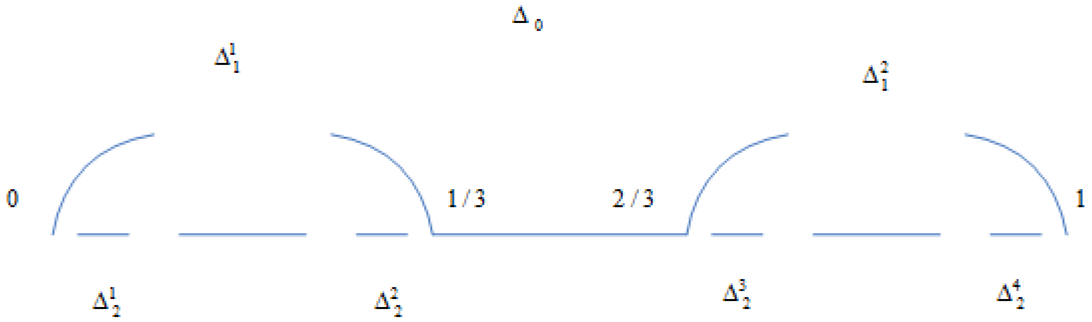
$$N(\varepsilon_p)\cdot\varepsilon_p^{1/2} \leq Cp\varepsilon_p^{1/2} = Cp\frac{1}{3p^{1/2}(p-1)^{1/2}}$$

$$\mu_F(A,1/2) = \lim_{\varepsilon\to 0+} N(\varepsilon_p)\cdot\varepsilon_p^{1/2} \leq \frac{C}{3} \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{p^{1/2}(p-1)^{1/2}} = \frac{C}{3}$$

бўлади.

Кантор тўплами ва унинг фрактал ўлчами

Кантор тўплами К=А $[0,1]=\Delta_0$ кесмадан қуйидаги келтирилган конструкция билан олинади. Биринчи қадамда $[0,1]=\Delta_0$ кесмадан $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ интервални олиб ташлаймиз. Шунда иккита $\Delta_1^1=\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\Delta_1^2=\left[\frac{2}{3},1\right]$ кесма ҳосил бўлади. Иккинчи қадамда $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ва $\left[\frac{2}{3},1\right]$ кесмаларидан учтадан ўртасини, яъни $\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$ ва $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2},\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}\right)$ ни олиб ташлаймиз. 2^2 кесмада $\Delta_2^1=\left[0,\frac{1}{3^2}\right],\Delta_2^2=\left[\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}\right],\Delta_2^3=\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\right],\Delta_2^4=\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2},1\right]$лар қолади. Шу тариқа ҳар бир қадамда биз кесманинг учтадан ўрта қисмини олиб ташлаймиз.



1.8-расм. Кантор тўпламини ясаш.

Кантор тўпламида юқорида кўрсатилган ҳар бир кесмаларнинг кесишиш нуқталари мавжуд

$$K=\Delta_0\cap\{\Delta_1^1\cup\Delta_1^2\}\cap\{\Delta_2^1\cup\Delta_2^2\cup\Delta_2^3\cap\Delta_2^4\}\cap\ldots;$$

К- берк тўплам. Қуйида аниқ амин бўлиш мумкинки К [0,1] нуқтадаги кўплаб х нуқталарнинг учлик тақсимлашдан ҳосил бўлган кўриниши

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cdot 3^{-i}, \text{ бу ерда } \alpha_i=0 \text{ ёки } \alpha_i=2$$

га тенг.

Теорема. К кантор тўпламининг $d_F(K)$ фрактал қиймати

$$d_F(K) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

га тенг.

Бу теоремани исботини қуйида келтирамиз. Бунинг учун кантор тўпламнинг ўзига-ўзи ўхшашлигини оламиз: К тўпламнинг бир қисми $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ кесмада жойлашган. Бу қисмини K_1^1 деб белгилаймиз, у К дан ҳар бир нуқтани $\frac{1}{3}$ га кўпайтириш орқали ҳосил бўлади.Шу каби K_1^2 қисмини $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ кесмада оламиз. Шу каби давом эттирсак умумий К 1 нуқтасида марказни уч марта сиқишимиздан ҳосил бўлади.

ε нуқтаси $N(\varepsilon, K)$ чегарасининг К ни қоплайдиган энг кичик нуқтаси бўлса, $N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1\right)$ ва $N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2\right)$ сонлари K_1^1 ва K_1^2 ни ўз-ўзини такрорлаши ҳусусияти учун қоплайди

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2\right) = N(\varepsilon, K)$$

бу ердан $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ бўлганда

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2\right) = 2N(\varepsilon, K)$$

Исботнинг охирги қисмини соддалаштириш учун

$$N(\varepsilon, K) \sim C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$$

деб ҳисоблаймиз. Бу ерда ~ белгиси чап ва ўнг томондаги муносабатлар $\varepsilon \to 0+$ 1 га интилишини кўрсатади.

Бу муносабатлардан

$$sC\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \sim 2N(\varepsilon, K) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right) \sim C\left(\frac{1}{\varepsilon / 3}\right)^d$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^d \sim 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \text{ ва } d = \frac{\log 2}{\log 3}$$

га тенг.

1-боб бўйича хулоса

Биринчи бобда фрактал терминининг пайдо бўлиши, унинг ҳозирги вақтдаги тутган ўрни, фракталларнинг турлари, геометрик шаклларни қуришда фракталлардан фойдаланиш, Кантор тўплами ва унинг фрактал ўлчамлари ҳақида фикр юритилган.

II БОБ. ГЕОМЕТРИК ОБЪЕКТЛАРНИ ҚУРИШДА R-ФУНКЦИЯ АЛГЕБРО-МАНТИҚИЙ УСУЛИНИ ҚЎЛЛАНИШИ

2.1. Геометрик объектларни қуришда R-функция усулини қўлланилиши

Фрактал тенгламаларини қуришда В.Л.Рвачевнинг R - функция усулидан фойдаланамиз. Қуйида бу R - функция ҳақида таърифини келтириб ўтамиз.

Функциялар ичида $y = f(x_1,..., x_n)$ $\left(x_i \in (-\infty,\infty)\right)$ га ўхшашлари ҳам учрайди. Бу функциялар аргументни белгисига қараб аниқланади. Бундай функцияларга мисол сифатида

$$\begin{aligned}
&u_1 = xyz,\\
&u_2 = 1 + x^2 + y^2 + z^2,\\
&u_3 = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}},\\
&u_4 = xy + z - |z - yx|
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ва бошқаларни келтириш мумкин.

Қуйида u_1, u_2, u_3 ва u_4 функцияларининг белгиларига қай даражада боғлиқлиги келтирилган:

x	-	-	-	-	+	+	+	+
y	-	-	+	+	-	-	+	+
z	-	+	-	+	-	+	-	+
u_1	-	+	+	-	+	-	-	+
u_2	+	+	+	+	+	+	+	+
u_3	-	+	+	+	+	+	+	+
u_4	-	+	-	-	-	-	-	+

Солиштириш учун функциянинг қиймати нафақат унинг аргументини белгисига боғлиқ, балки унинг абсолют қийматига ҳам боғлиқ бўлади.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= xyz + 1, \\
v_2 &= \sin xy, \qquad (2.2) \\
v_3 &= x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2}.
\end{aligned}
$$

«Мусбатлик» ва «манфийлик» ларини бирор бир сифатида қарашимиз мумкин. u_1 - u_4 функциялари ҳам шундай сифатларга эга бўлган функциялардир. v_1 - v_3 функциялари эса бундай сифатларга эга бўлмаган функциялар.

Ҳақиқий сонларни мусбат ва манфийларга ажратишдан ташқари яна бошқа кўплаб сифатлар орқали уларни бўлиш мумкин.

Масалан, А сифатли сонларни модули бўйича бирдан кичикларини олишимиз, қолганларини эса В сифат билан олишимиз мумкин. Яъни А – рационал сонлар, В - эса иррационал сонлар ва бошқалар. Булардан ташқари яна бир қанча ёки чексиз сифатли градациялар билан ҳақиқий сонларни маълум қисмларга ажратишимиз мумкин.

Ҳақиқий сонларни сифатига кўра бўлишимиздан қатъий назар у Г тўпламларга ажралади. Бу бўлинишнинг асосий вазифаси шундан иборатки, унда тўпламларнинг $\Re$(Г) функцияси ҳосил бўлади. Улар ўзларининг хоссаларига кўра берилган қиймати бўйича ўз тўпламига тегишли бўлади.

$\Re$ (Г) тўпламдан ташкил топган функциялар одатда R-функциялар дейилади. Мос равишда ҳақиқий сонлар Г та тўпламларга бўлинган бўлади.

Агарда бўлинишларнинг сифати Г бўлса, уларни рақамласак, у ҳолда уларнинг аргументларини сифатлари ўзларини рақамланган тўпламлариги тегишли бўлади.

Шундай қилиб, бир вақтнинг ўзида R-функция билан берилган ва бир нечта мантиқий функциялар аргументларига эга бўлса, у ҳолда биз R-функцияни қараётган бўламиз.

Бу мантиқий функцияни берилган функциянинг кузатувчиси деб атаймиз.

Берилган таъриф R-функцияни тасаввур қилишдаги энг қисқа вариант саналади. R-функция ҳақида асосий маълумот [9-11] да келтирилган.

X ўқидаги сонларни мусбат ва манфий сонларга ажратамиз. Нол сони мусбат сонларга киради.

Бошқача олиб қараганда нул сони сонлар ўқини уч қисмга бўлишига хизмат қилади деб қараса ҳам бўлар эди.

Икки қийматли предикатни қараймиз

$$S_2(x) = (x \geq 0) = \begin{cases} 0, & если \quad x < 0, \\ 1, & если \quad x \geq 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

R-функциянинг юқорида келтирилган таърифидан келиб чиққан ҳолда сонлар ўқини $y = f(x_1,..., x_n)$ функция $x_i \in (-\infty, \infty)$ ёрдамида икки (- ∞, 0) ва [0, ∞) қисмга ажратамиз ва уни R-функция деб атаймиз. Агарда шундай мантиқий функция $Y = F\ (X_1, \ldots, X_n)$ учун қуйидаги шарт бажарилса.

$$S_2[f(x_1,..., x_n)] = F[S_2(x_1),..., S_2(x_n)]. \qquad (2.4)$$

Кўриниб турибдики, бу мантиқий функцияларда R-функциянинг кўплаб тўпламлари мавжуд.

Масалан, R-функция учун $w_1=xy$ нинг кузатувчи функцияси $X \sim У$ мантиқий функцияси саналади.

Ҳақиқатан,

$$S_2(xy) = S_2(x) \sim S_2(y). \qquad (2.5)$$

Бу мантиқий функция R-функция учун кузатувчи функция саналади:

$$\begin{aligned} w_2 &= xy(1 + x^2 + y^2), \\ w_3 &= (1 - 2^{-x})(3^y - 1) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

R-функцияларнинг барчаси битта ягона кузатувчи мантиқий функцияга эга. Уларни R-функциянинг тугунлари тўплами деб атаймиз.

n аргументли функциянинг мантиқий функциялари сони 2^{2^n} га тенг. Худди шундай R-функциянинг *n* аргументига боғлиқ бўлган ҳар хил 2^{2^n} та тугуни мавжуд

Қуйида R-функция асосида сонлар ўқини мос равишда мусбат ва манфий қисмларга ажратамиз.

R_α тизим:

$$x \wedge_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-конъюнкция)},$$

$$x \vee_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-дизъюнкция)}, \qquad (2.7)$$

$$\bar{x} = -x \qquad \text{(R-инкор)},$$

бунда α = α *(x, y)* – ихтиёрий функция бўлиб, 1< α(x,y) $\leq$1 шартни қаноатлантиради.

R-конъюнкция $x \wedge_\alpha y$ тугунга тегишли, унинг кузатувчи мантиқий функцияси сифатида $X \wedge Y$ конъюнкция олинади.

Томонлари $|x|$ ва $|y|$ га ва улар орасидаги бурчак cos(α) га тенг бўлган учбурчакни оламиз.

У ҳолда унинг учинчи томони $\sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha |x||y|}$ га тенг.

Агарда x ва y – мусбат сон бўлса, у ҳолда $x + y$ иккита томонни йиғиндиси бўлади ва у учинчи томондан катта. Шунинг учун $x \wedge_\alpha y > 0$.

Агарда x ёки y дан бири манфий бўлса, бошқаси мусбат бўлса, у ҳолда $x + y$ айирма бўлади ва у учинчи томондан кичик бўлади. Шунинг учун $x \wedge_\alpha y < 0$.

Кўриниб турибдики, қачонки $x < 0$ ва $y < 0$ бўлса у ҳолда $x \wedge_\alpha y < 0$ бўлади. Агарда бир вақтда $x > 0$ и y >0 бўлса у ҳолда $x \wedge_\alpha y > 0$ бўлади.

Шунинг учун

$$S_2(x \wedge_\alpha y) \equiv S_2\left[\frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy})\right] \equiv S_2(x) \wedge S_2(y), \qquad (2.8)$$

Бу исботлаш зарур эди.Худди шундай

$$S_2(x \vee_\alpha y) \equiv S_2\left[\frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy})\right] \equiv S_2(x) \vee S_2(y). \qquad (2.9)$$

ни ҳам чиқариш мумкин. Кўриниб турибдики, $S_2(\bar{x}) \equiv S_2(-x) \equiv \overline{S_2(x)}$.

R_α тизимнинг хусусий холи сифатида қуйидаги R-функциянинг кўришимиз мумкин.

R_0 тизим:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (2.10)$$
$$\bar{x} = -x.$$

Бу тизим α ≡ 0 бўлганда R_α дан олинади ва R-функциянинг энг оддий тизимларидан бири саналади.

R_1 тизим:

$$x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y),$$
$$x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y), \qquad (2.11)$$
$$\bar{x} = -x.$$

Бу тизим α ≡ 1 бўлганда R_α дан олинади. Унинг характерли томонларидан бири сифатида $x \wedge_1 y \equiv$ min (x, y) ва $x \vee_1 y \equiv$ max (x, y) ни олишимиз мумкин.

R_0 ва R_1 тизимларнинг R-амалларидан фойдаланган ҳолда унинг бир қанча мантиқий ва дифференциал хоссаларини келтириш мумкин.

R-амалларни x = 0, y = 0 бўлганда $x \wedge_0 y$ ва $x \vee_0 y$ ларни дифференциаллаб бўлмайди.

R-амалларни x = y бўлганда $x \wedge_1 y$ ва $x \vee_1 y$ ларни ҳам дифференциаллаб бўлмайди.

R-функциянинг тўлиқ дифференциалланадиган m-тартибли R_0^m тизими қуйидагича:

$$x \wedge_0^m y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}},$$
$$x \vee_0^m y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}, \qquad (2.12)$$

m = 0 бўлганда бу тизим R_0 тизимга айланади.

R_p тизимни ҳам келтириб ўтишимиз мумкин:

$$x \wedge_p y \equiv x + y - [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}},$$

$$x \vee_p y \equiv x + y + [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.13)$$

$$\overline{x} = -x,$$

бунда p > 1.

R_α, R_1 R_0^m ва R тизимларнинг бир нечта хоссаларини келтирамиз.

Бу ерда шу ситемага тушувчи $\wedge*$ билан R-конъюнкцияларни $\wedge_0$, $\wedge_0^m$, $\wedge_1$,…, ихтиёрий $\vee*$ билан R-дизъюнкцияларни $\vee_0$, $\vee_0^m$,… тушунамиз.

Бундан ташқари буларни ҳисоблаймиз α(x,y) ≡ α($x,$-y) ≡ α(x,y).

1. $x \wedge * y \equiv y \wedge * x.$
2. $x \vee * y \equiv y \vee * x.$
3. $\overline{x \wedge * y} \equiv \overline{x} \vee * \overline{y}.$
4. $\overline{x \vee * y} \equiv \overline{x} \wedge * \overline{y}.$
5. $x \wedge * y = 0$ бўлади фақат қачонки $y = 0, x \geq 0$ёки $x = 0, y \geq 0$ бўлса.
6. $x \vee * y = 0$ бўлади фақат қачонки $x = 0, y \leq 0$ ёки $y = 0, x \leq 0$ бўлса.
7. $\overline{\overline{x}} \equiv x.$
8. $(x \wedge_1 y) \wedge_1 z \equiv x \wedge_1 (y \wedge_1 z) \equiv x \wedge_1 y \wedge_1 z.$
9. $(x \vee_1 y) \vee_1 z \equiv x \vee_1 (y \vee_1 z) \equiv x \vee_1 y \vee_1 z.$
10. $x \wedge_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \vee_1 (x \wedge_1 z).$
11. $x \vee_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \wedge_1 (x \vee_1 z).$
12. $x \wedge_1 x \equiv x.$
13. $x \vee_1 x \equiv x.$
14. $x \wedge_1 \overline{x} \equiv -|x|.$
15. $x \vee_1 \overline{x} \equiv |x|.$

R-функциянинг бундай тизимларидан фойдаланган ҳолда R-функцияни осонгина қуриш мумкин.

Тугун одатда берилган кузатувчи мантиқий функция $F(X_1,\ldots,X_n)$ орқали қаралаётга тугунга тегишли бўлган R-функция қурилади. Бунда

$F(X_1,\dots,X_n)$ функцияни $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $\overline{X}$ мантиқий функциялар орқали қуриш мумкин.

Мисол. Қуйида аниқланган мантиқий функция орқали R-функцияни қуриш талаб этилган бўлсин

$$Y = (X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge \overline{X}_3) \vee (X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge X_3) \vee X_3 .$$

Биринчи навбатда мантиқий функцияни X_3 ўзгарувчини конъюнкциянинг биринчи ва иккинчи элементар амаллари бўйича қисқартирамиз. Натижада қуйидагини оламиз

$$Y = (X_1 \wedge \overline{X}_2) \vee X_3 .$$

R-функцияни қуриш учун R_0 тизимдан фойдаланамиз

$$y = (x_1 \wedge_0 \overline{x}_2) \vee_0 x_3 \equiv (x_1 + \overline{x}_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee_0 x_3 \equiv$$
$$\equiv (x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee_0 x_3 \equiv x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3 +$$
$$+ \sqrt{(x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2} .$$

Геометрик объектларни тенгламаларини қуриш. R-функция ёрдамида геометрик объектларнинг тенгламаларини ω = 0 кўринишдаги каноник тенгламаларини қуриш мумкин. Бунда ω функция $\Re$ (Н) тўпламга тегишли бўлади. Н-амалга ошириладиган функция бўлиб, дифференциаллик жиҳатидан узлуксиз ҳамда *Н*- функциянинг асосий тизими саналади.

Ω соҳанинг чегараларини чизувчи $\partial\Omega$ тенгламани қуришни кўриб чиқамиз. У ўз навбатида Ω_i ($\omega_i \geq 0$), $\omega_i \in \Re$(Н), i = 1, 2 шартларни қаноатлантирувчи Ω_i ($i = 1, 2$) бир нечта соҳалардан ташкил топган.

Бу ҳолда **Ω** соҳанинг предикат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\Omega \equiv (\omega_1 \geq 0) \wedge (\omega_2 \geq 0) = 1. \qquad (2.14)$$

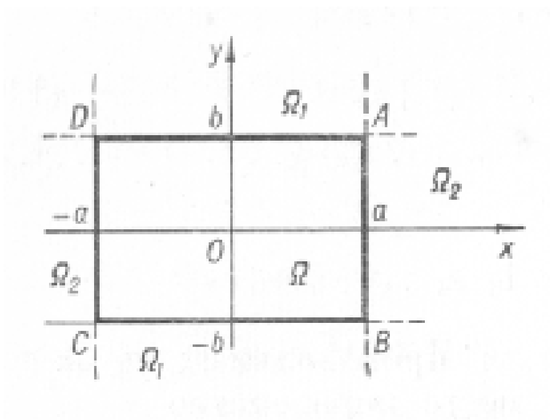
R-конъюнкциянинг $x \wedge_\alpha y$, $x \wedge_0^m y, \ldots$, хоссаларидан фойдаланган ҳолда бу предикат функцияни қуйидаги тенглама билан алмаштириш мумкин

$$\Omega \equiv (\omega_1 \wedge^* \omega_2 \geq 0) = 1, \qquad (2.15)$$

бунда $\wedge^*$ - R-конъюнкция. Шундай қилиб, агарда $x \wedge^* y \in \Re$(H) бўлса, уҳолда $\omega = \omega_1 \wedge^* \omega_2$ ни олишимиз мумкин. Натижада **Ω**:**Ω**=($\omega \geq 0$) соҳани аниқловчи $\omega \geq 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шунинг учун, агарда $\omega_1, \omega_2 \in C^2$ да R-конъюнкциядан фойдалансак у ҳолда қуйидаги аниқлаймиз

$$x \wedge_0^m y = (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$$



2.1-расм. Белгиланган соҳа.

$m \geq n$ бўлганда, ω функцияни оламиз. Бу функция C^n тўпламга тегишли ва n марта узлуксиз дифференциалланадиган функция.

Одатий ҳолатлар $\omega_1 > 0$ ва $\omega_2 > 0$ тенгсизлик $\boldsymbol{\Omega_1}$ ва **Ω** соҳаларнинг ички қисмини аниқлайди.

Шундай қилиб, ω = 0 тенглама **Ω** соҳанинг чегарасини англатади.

Мисол. Оддий соҳа берилган бўлсин:

$\Sigma_1 = \left(a^2 - x^2 \geq 0\right)$ - $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасидаги вертикал полоса,

$\Sigma_2 = \left(b^2 - y^2 \geq 0\right)$ - $y = \pm b$ тўғри чизиқлар орасидаги горизонтал полоса,

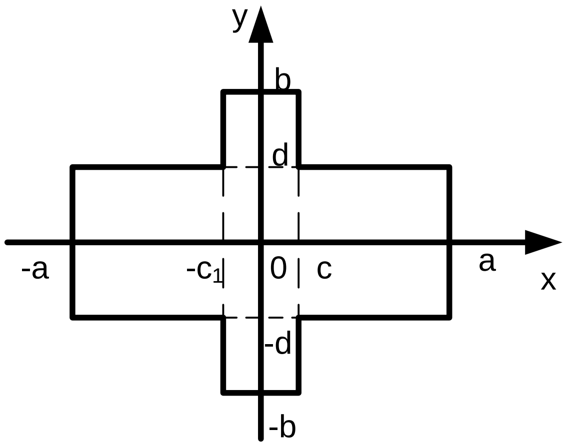
$\Sigma_3 = \left(c^2 - x^2 \geq 0\right)$ - $x = \pm c$ тўғри чизиқлар орасидаги вертикал полоса,

$\Sigma_2 = \left(d^2 - y^2 \geq 0\right)$ - $y = \pm d$ тўғри чизиқлар орасидаги горизонтал полоса.

Ω соҳа чегараси эса мураккаб мантиқий функция орқали аниқланади

$$\Omega = \left(\Sigma_1 \wedge_1 \Sigma_2\right) \wedge_1 \left(\Sigma_3 \vee_1 \Sigma_4\right) \geq 0 \tag{2.16}$$

Кўриниб турибдики, бу соҳа чегараси крестга ўхшаш соҳани ҳосил қилади. Бунда $a > c, b > d$ га тенг.



2.2-расм. Крест соҳаси

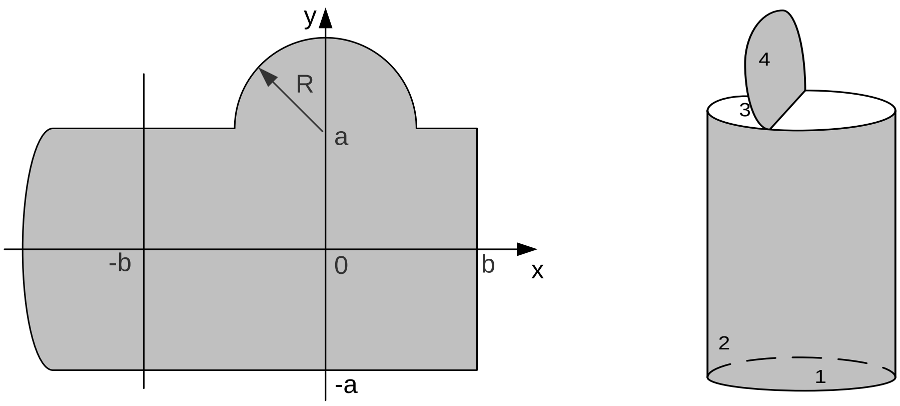
Юқорида келтирилган усулни қўллаган ҳолда тенгламани чегарасини ёзиш қийин эмас. Агарда соҳа бир нечта $\Omega_i=(\omega_i \geq 0)$ (i=1,…,n) соҳалар бирлашмасидан ташкил топса уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\omega \equiv (...((\omega_1 \wedge {}^*\omega_2) \wedge {}^*\omega_3) \wedge {}^*...) \wedge {}^*\omega_n = 0. \tag{2.17}$$

Шунинг учун соҳанинг таянч соҳаларини гуруҳлаштириш лозим. Улар R-конъюнкциянинг ҳар хил жойлаштиришлари орқали ҳосил қилиш мумкин.

Энди эса соҳанинг чегарасини тенгламасини қуришни қараймиз.

Мисол. Қуйида 2.3-расмда келтирилган а) чизманинг чегарасини тенгламасини тузиш керак бўлсин.



а) б)

2.3-расм. Соҳалар

Бу соҳанинг чегарасини $x=-b$ тўғри чизиқдан ўнгда ётган соҳани кўришимиз мумкин.

Ω соҳа чегараси тенгламасини қуриш учун қуйидагиларни танлаймиз

$$\Sigma_1=\left(a^2-y^2\geq 0\right);\ \Sigma_2=\left(b-x\geq 0\right);\Sigma_3=\left(R^2-x^2-(y-a)^2\geq 0\right).$$

У ҳолда $\Omega=\left(\Sigma_1\wedge\Sigma_2\right)\vee\Sigma_3$ га тенг ва $\partial\Omega$ нинг чегарасини тенгламасини қуйидаги кўринишда оламиз

$$\omega\equiv\left(\left(a^2-y^2\right)\wedge_0(b-x)\right)\wedge_0\left(R^2-x^2-(y-a)^2\right)=0.$$

$\Sigma_4=\left(x+b\geq 0\right)$ соҳанинг берилган элементи ва (2.16) формула бўйича қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$\left[\left(\left(a^2-y^2\right)\wedge_0(b-x)\right)\vee_0\left(R^2-x^2-(y-a)^2\right)\right]^2\vee_0\left(\overline{x+b}\right)=0$$

Мисол. Энди 2.3-расмнинг б) чизмасини уч ўлчовли форматда тасвирланишини кўриб чиқамиз

Расмда кўриниб турибдики, бу чизма асоси (2.1), цилиндрнинг ён томонлари (2.2), юқори асосининг чап томони (2.3) ва юқори асосининг ўнг томони (2.4) ва уни тепага 90^0 бурчак остида бурилган.

Таянч соҳаларни танлаймиз:

$\Sigma_1=\left(R^2-x^2-y^2>0\right)$ - OZ ўқи бўйича R радиусли чексиз цилиндр;

$\Sigma_2=\left(z>0\right)$-тепадаги ярим фазо;

$\Sigma_3 = (z - h > 0)$ - $z = h;$ текисликдан тепада жойлашган ярим фазо;

$\Sigma_4 = (y > 0)$ - ўнг ярим фазо;

$\Sigma_5 = \left(R^2 - x^2 - y^2 - \left(z - h^2\right) > 0\right)$ - маркази $(0,0,h)$ нуқтада бўлган R радиусли сфера;

(1) соҳани $z = 0$ текисликнинг қисми бўлиб, уни Σ_1 билан белгилаймиз. Унинг тенгламасини (2.16) формула орқали аниқлаймиз:

$$\omega_1 \equiv z^2 \vee_0 \left(\overline{R^2 - x^2 - y^2}\right) = 0$$

(2) соҳани эса чексиз цилиндрнинг белгиланган

$$\Sigma_2 \wedge \overline{\Sigma_3} = \left(z \wedge_0 \overline{(z-h)} \geq 0\right)$$

(3) соҳадаги қисми деб оламиз. (2.16) формулда орқали ундан қуйидаги тенгламани оламиз

$$\omega_2 \equiv \left(R^2 - x^2 - y^2\right)^2 \vee_0 \overline{\left(z \wedge_0 \overline{(z-h)}\right)} = 0 .$$

(2.3) соҳа - $z = h$ текисликнинг қисми бўлиб, $\Sigma_1 \wedge \overline{\Sigma_4}$ соҳани белгилайди:

$$\omega_3 \equiv (h - z)^2 \vee_0 \left[\overline{\left(R^2 - x^2 - y^2\right) \wedge_0 \overline{y}}\right] = 0 .$$

(2.4) соҳа эса - $y = 0$ текисликнинг қисми бўлиб, уни $\Sigma_5 \wedge \Sigma_3$ билан белгилаймиз:

$$\omega_3 \equiv y^2 \vee_0 \left[\overline{\left(R^2 - x^2 - y^2 - (z-h)^2\right)^2 \wedge_0 (z-h)}\right] = 0$$

.

Бизни қизиқтирувчи соҳанинг чегарасини $\omega \equiv \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 = 0$ кўринишда ёки $\omega \equiv \left(\omega_1 \wedge_0 \omega_2\right) \wedge_0 \left(\omega_3 \wedge_0 \omega_4\right) = 0$ кўринишда ёзишимиз мумкин.

Бу формулалар асосида биз белгиланган соҳанинг чегарасини аниқлаймиз. Бу формулалардан R-операция символларини олиб ташлаган ҳолда натижавий элементар функцияни олишимиз мумкин

2.2. Айлана геометрик объектини фрактал тенгламалари асосида қуриш

Бизга мураккаб соҳа Γ чегарали мураккаб $\Omega \subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. Уни назарий тўпламларнинг амаллари ёрдамида, яъни кесишиш, бирлаштириш ва қўшиш амалларининг комбинациясининг кичик соҳалари асосида $\{\Omega_k\}_{k=1}^m$ ҳосил қилиш мумкин.

Агарда бизга барча $(x,y) \in \Omega_i$ улар учун $\omega_k > 0$ ва $(x,y) \notin \overline{\Omega}_k = \Omega_k \bigcup \Gamma_k$ лар учун $\omega_k < 0$ соҳанинг $\{\omega_k(x,y) = 0\}_{k=1}^m$ чегаралари маълум бўлса, у ҳолда R-функция ёрдамида унинг чегарасини Γ $\omega(x,y) = 0$ қуриш мумкин. Бу ерда ω функция Ω соҳа ичида мусбат, унинг ташқарисида манфий ва Γ чегарада нулга тенг.

R-функция тизимининг энг кенг тарқалганларидан бири бу $\Re_0$ тизим саналади. Унда алгебраик амаллар қуйидаги кўринишда бўлади

$$f_1 \wedge f_2 \equiv f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad f_1 \vee f_2 \equiv -(\overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2), \quad \overline{f} \equiv -f.$$

Айлананинг ташқи тенгламаси қуйидагича аниқланади:

$$\omega_{00} = \omega_{00}(R,x,y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0)$$

Айланаларни бирлаштирувчи тенглама эса қуйидаг кўринишда бўлади

$$\omega_0 = \omega_{00} \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R-a)^2 \geq 0)$$

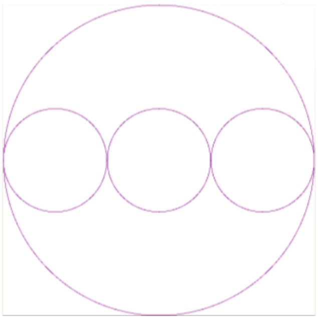
Бу ерда ***a*** - айлананинг қалинлиги (айлананинг қалинлиги *2a* га тенг),

R - ташқи айлана радиуси, $\alpha = \frac{2\pi}{k}$; k – ҳар бир итерациядан кейинги айланалар сони (k=2,3,4,....).

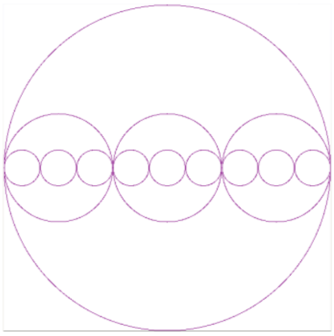
Бунга итерация процедурасини қўшган ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
&\omega_n(R,x,y) = \omega_0(R,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{3},x,y) \vee_0 \\
&\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{3}, x-\frac{2R}{3}\cos(0), y-\frac{2R}{3}\sin(0)) \vee_0 \\
&\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{3}, x-\frac{2R}{3}\cos(\alpha), y-\frac{2R}{3}\sin(\alpha)) \vee_0 \\
&\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{3}, x-\frac{2R}{3}\cos(2\alpha), y-\frac{2R}{3}\sin(2\alpha)) \vee_0 \ldots \vee_0 \\
&\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{3}, x-\frac{2R}{3}\cos((k-1)\alpha), y-\frac{2R}{3}\sin((k-1)\alpha)) \geq 0; \\
&n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned} \qquad (2.18)$$

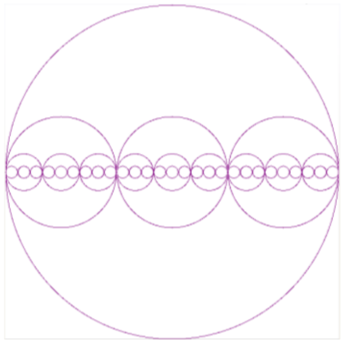
Ҳисоблаш тажрибаси натижалари 2.4-2.17 расмларда келтирилган.



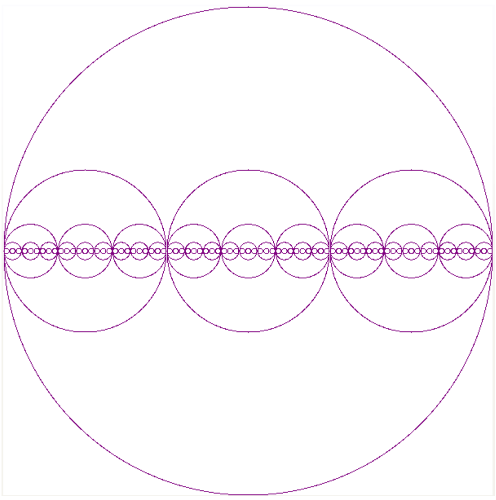
2.4-расм. n=1, k=2



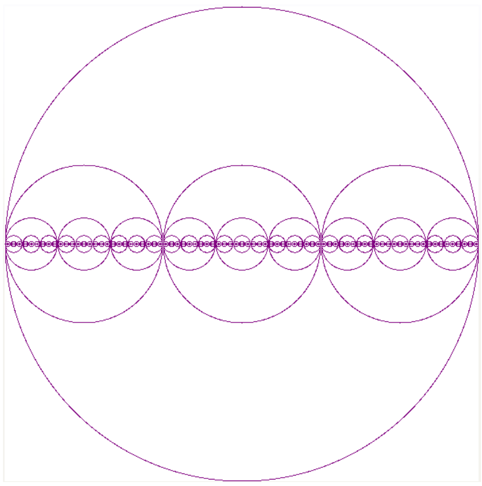
2.5-расм. n=2, k=2



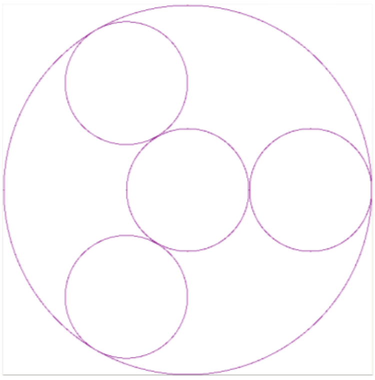
2.6-расм. n=3, k=2



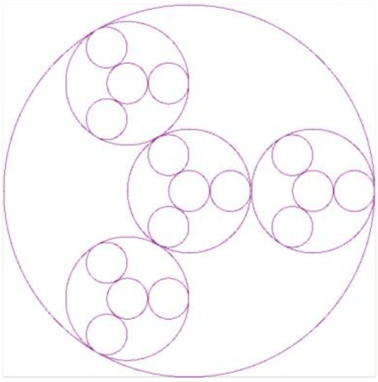
2.7-расм. n=4, k=2



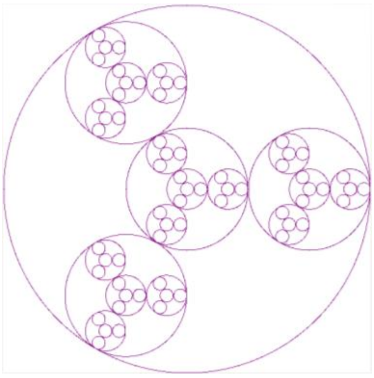
2.8-расм. n=5, k=2



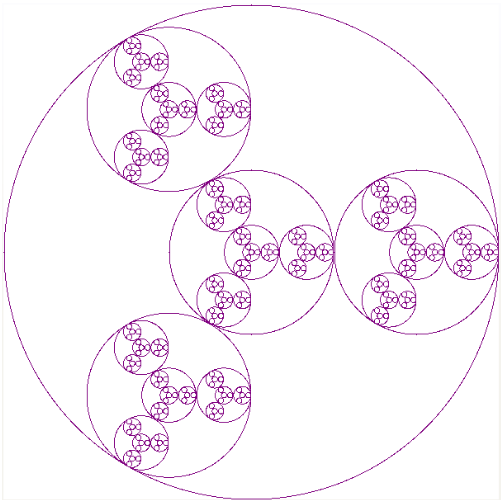
2.9-расм. n=1, k=3



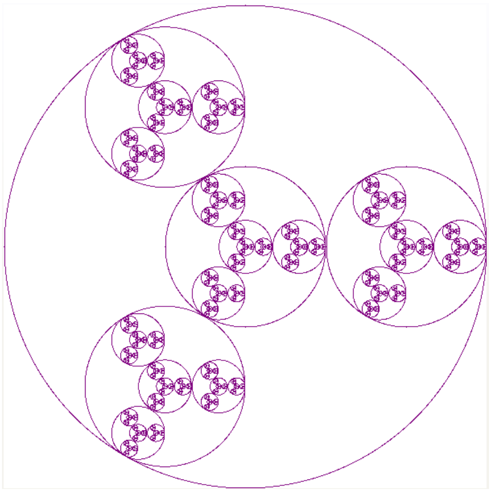
2.10-расм. n=2, k=3



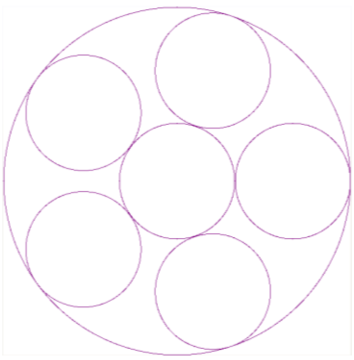
2.11-расм. n=3, k=3



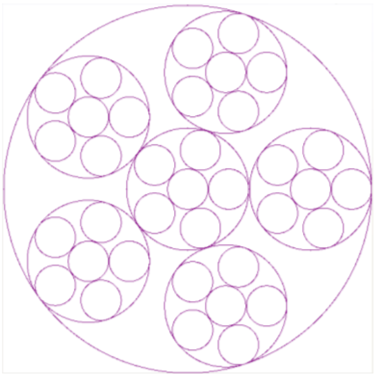
2.12-расм. n=4, k=3



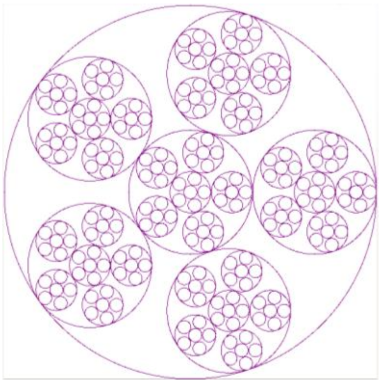
2.13-расм. n=5, k=3



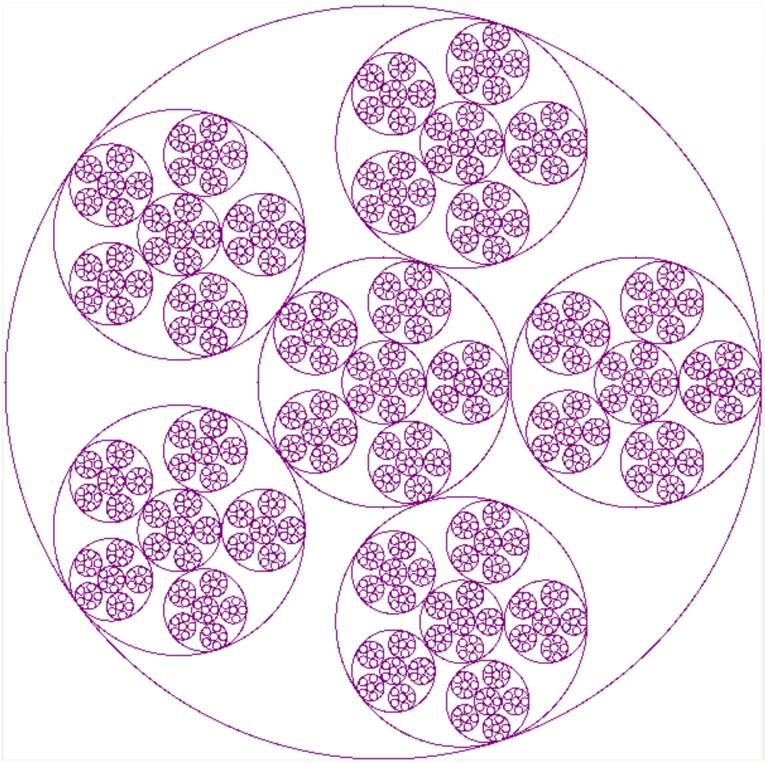
2.14-расм. n=1, k=5



2.15-расм. n=2, k=5

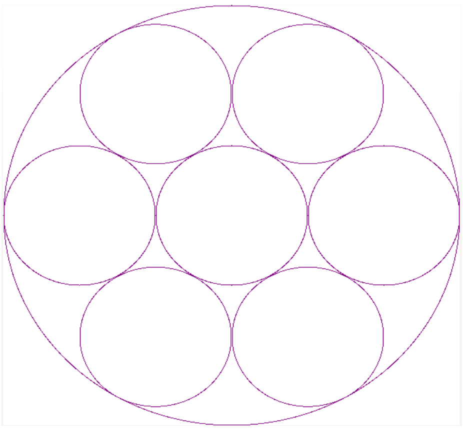


2.16-расм. n=3, k=5

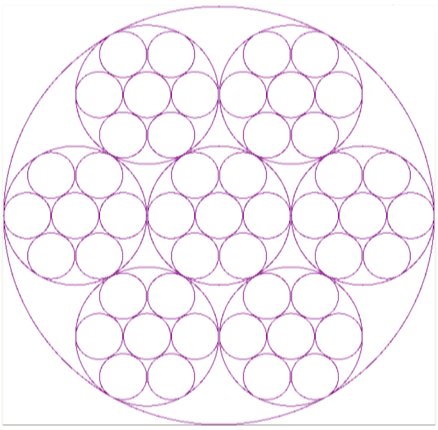


2.17-расм. n=4, k=5

Энди (1) да k=6 даги ҳолатни қараймиз**.** Бу ҳолатда халқали фрактал монополини ҳосил қиламиз (2.18 – 2.19 расм)

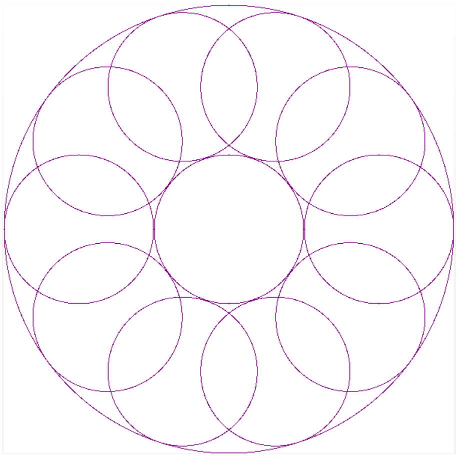


2.18-расм. n=1, k=6

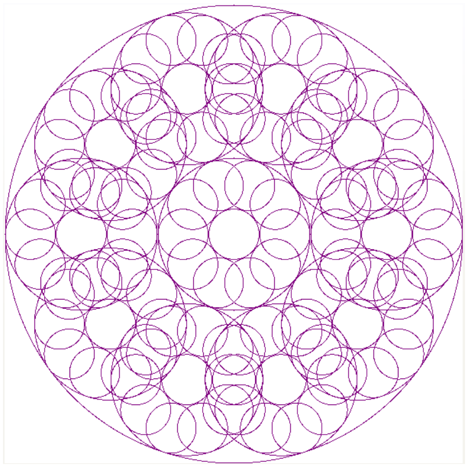


2.19-расм. n=2, k=6

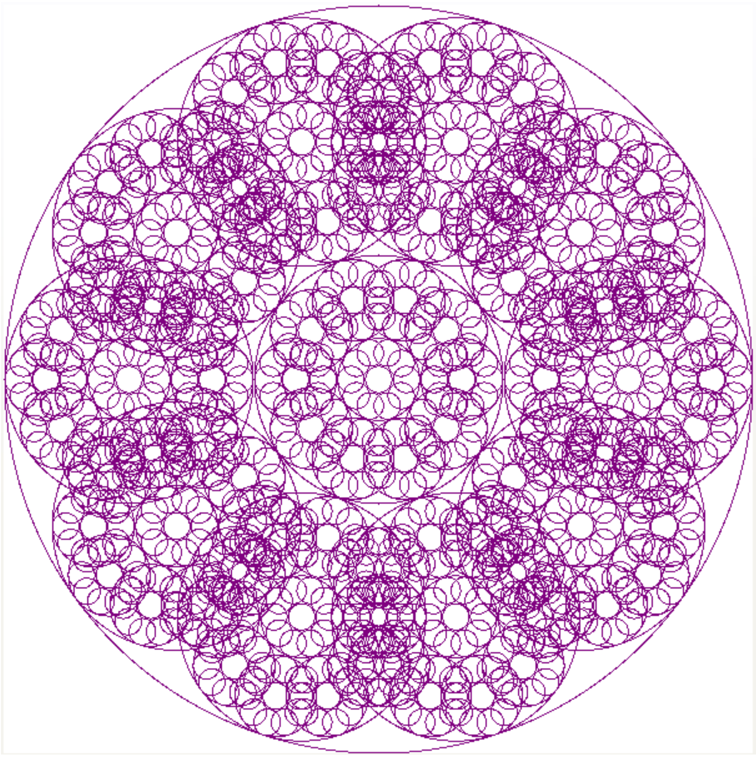
Агарда k<6 бўлса, ички айланалар бир-бирига тегмайди, агар k=6 бўлса ички айланалар бир – бирига тегади, агарда k>6 бўлса у ҳолда ички айланалар бир-бири билан кесишади (2.20 – 2.22 расм).



2.20-расм. n=1, k=10



2.21-расм. n=2, k=10



2.22-расм. n=3, k=10

Энди катта айлана ичида иккита айлана жойлашганлик ҳолатини кўриб чиқамиз. Бу айланалар бир бирига тегади. Бундан ташқари ички айлана ичида ҳам яна иккита айлана жойлашади ва ҳоказо. Бундай фрактал тенгламасини қурамиз.

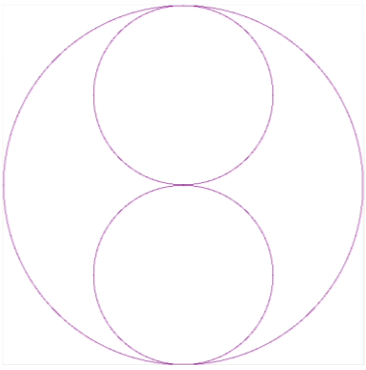
Бундай ҳолда берилган фракталнинг 1-қадамдаги тенгламаси қуйидагича бўлади

$$\omega\,(R,x,y)=(R^2-x^2-y^2\geq 0)\wedge_0(x^2+y^2-(R-a)^2\geq 0),$$

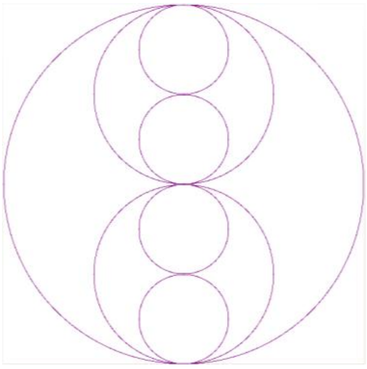
бу ерда *a*-айлана қалинлиги (айлана қалинлиги *2a* га тенг), *R*-ташқи айлана радиуси. Итерация процедурасини тадбиқ қилганимиздан сўнг қуйидагиларни оламиз

$$\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y-\frac{R}{2})\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y+\frac{R}{2})\geq 0;\ n=1,2,3,\ldots$$

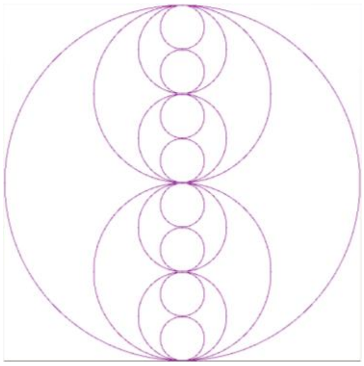
Ҳар хил *n* даги қийматларни ҳисоблаш натижалари 2.20-2.24 расмларда келтирилган.



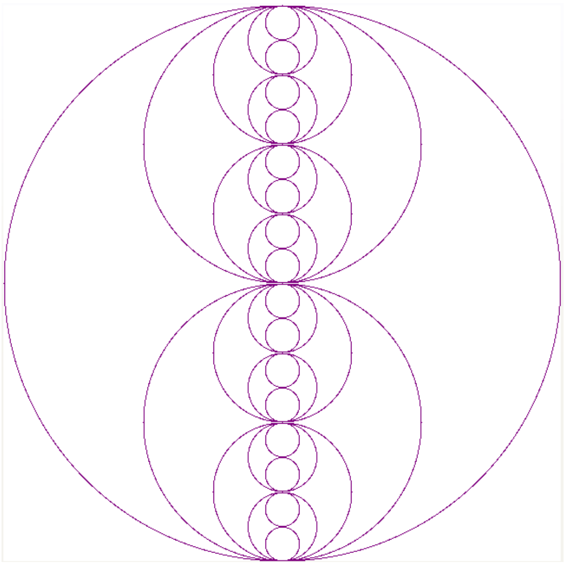
2.20-расм. n=1



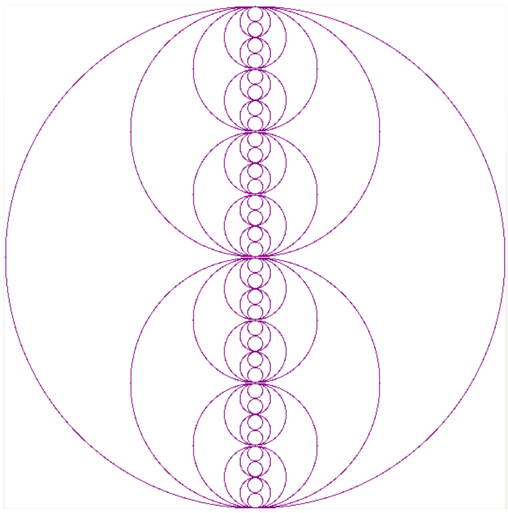
2.21-расм. n=2



2.22-расм. n=3



2.23-расм. n=4



2.24-расм. n=5

Энди эса ички айланалар кесишсин ва аста секинлик билан кичрайиб борсин. Бунинг учун (l) га кичрайиш коэффициентини киритамиз.

Худди биринчи масаланикидек, айланаларни кесишиши тенгламаларини киритамиз

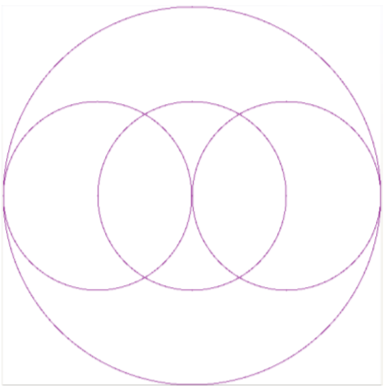
$$\omega_0(R,x,y) = (R^2 - x^2 - y^2 \ge 0) \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R-a)^2 \ge 0)$$

бунда ***a*** - айлана қалинлиги (айлана қалинлиги ***2a*** га тенг). $\alpha = \frac{2\pi}{k}$; ***k***-ҳар бир итерациядан кейинги ички айланалар сони (k=2,3,4,...), ***l*** – ҳар бир итерациядан кейинги ички айланаларнинг кичрайиш коэффициенти, l=2,3,4,..., ***R***-ташқи айлана радиуси.

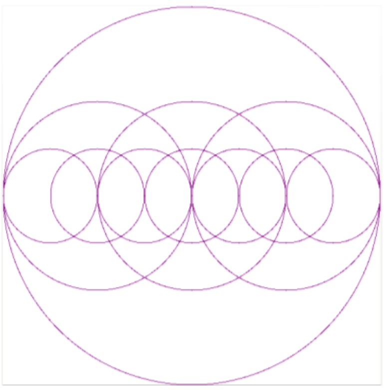
Итерация процедурасини тадбиқ қилган ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз

$$\omega_n(R,x,y) = \omega_0(R,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l},x,y) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(0), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(0)) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(\alpha)) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(2\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(2\alpha)) \vee_0 \ldots \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos((k-1)\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin((k-1)\alpha)) \ge 0;$$
$$n = 1,2,3,\ldots$$

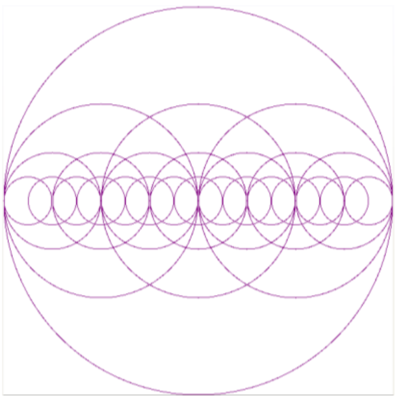
n, k, l нинг ҳар хил қийматларидаги ҳисоблаш натижалари 2.25-2.34 расмларда келтирилган



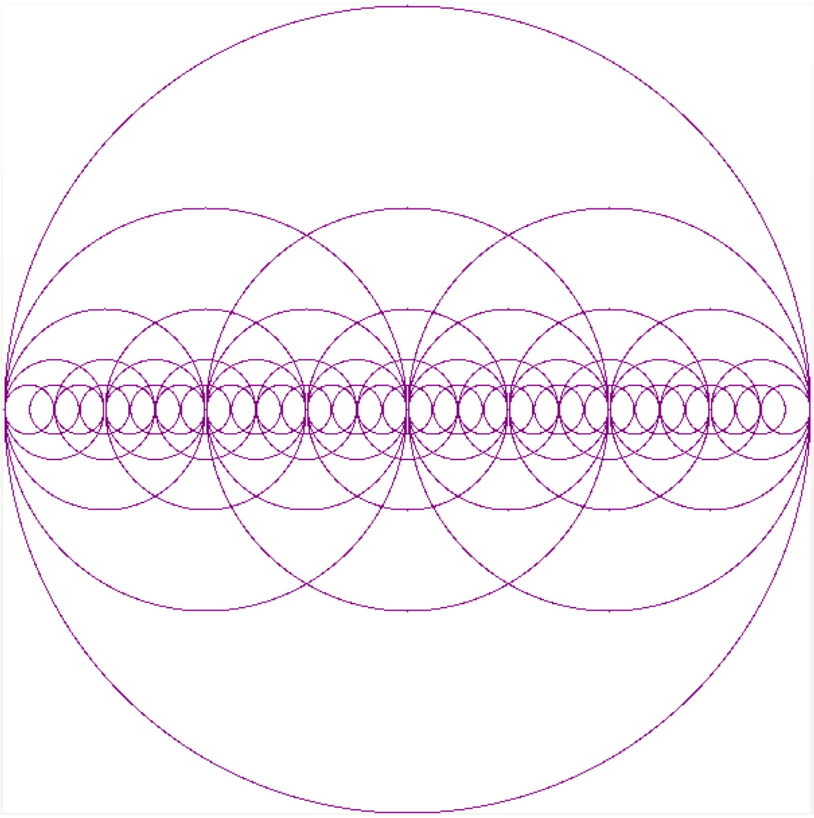
2.25-расм. n=1, k=2, l=2



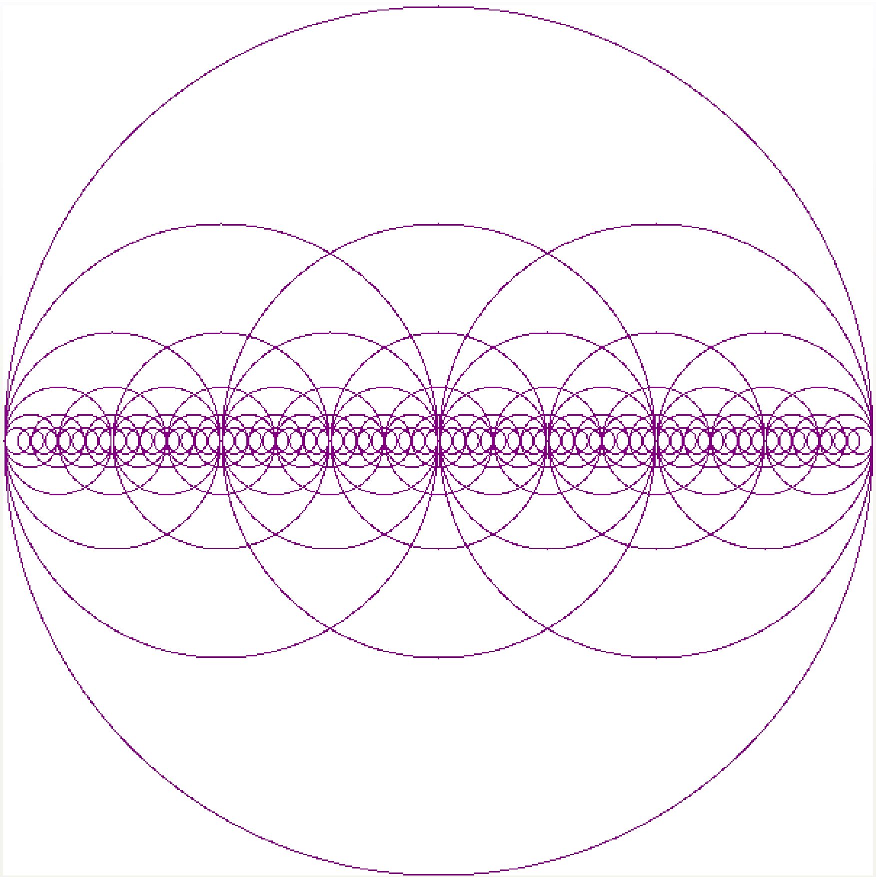
2.26-расм. n=2, k=2, l=2



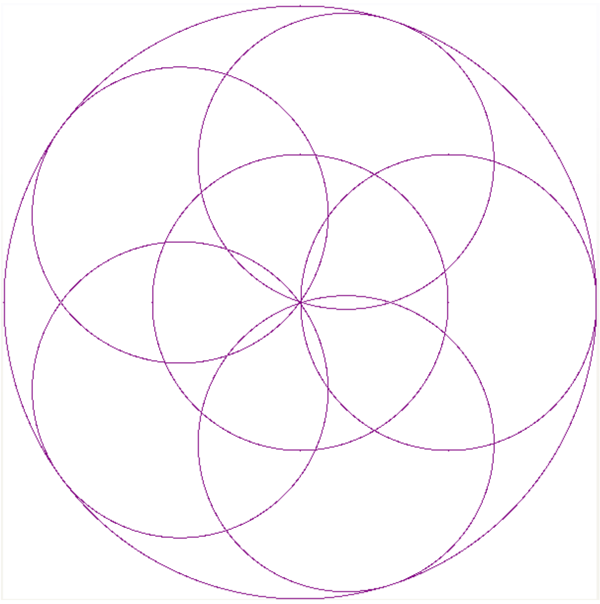
2.27-расм. n=3, k=2, l=2



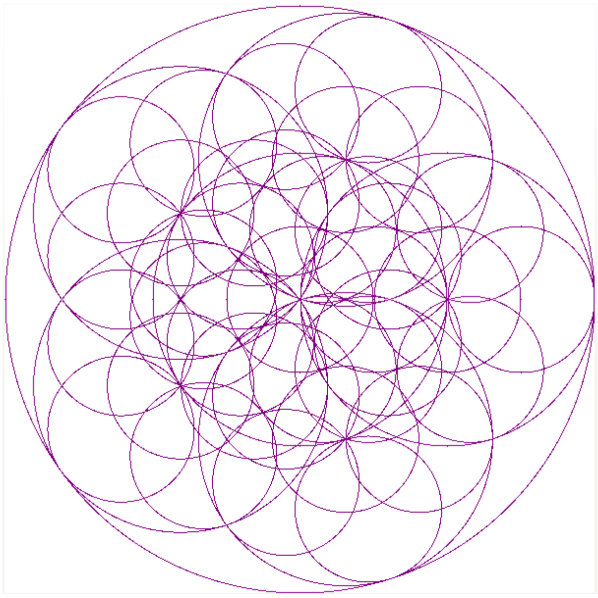
2.28-расм. n=4, k=2, l=2



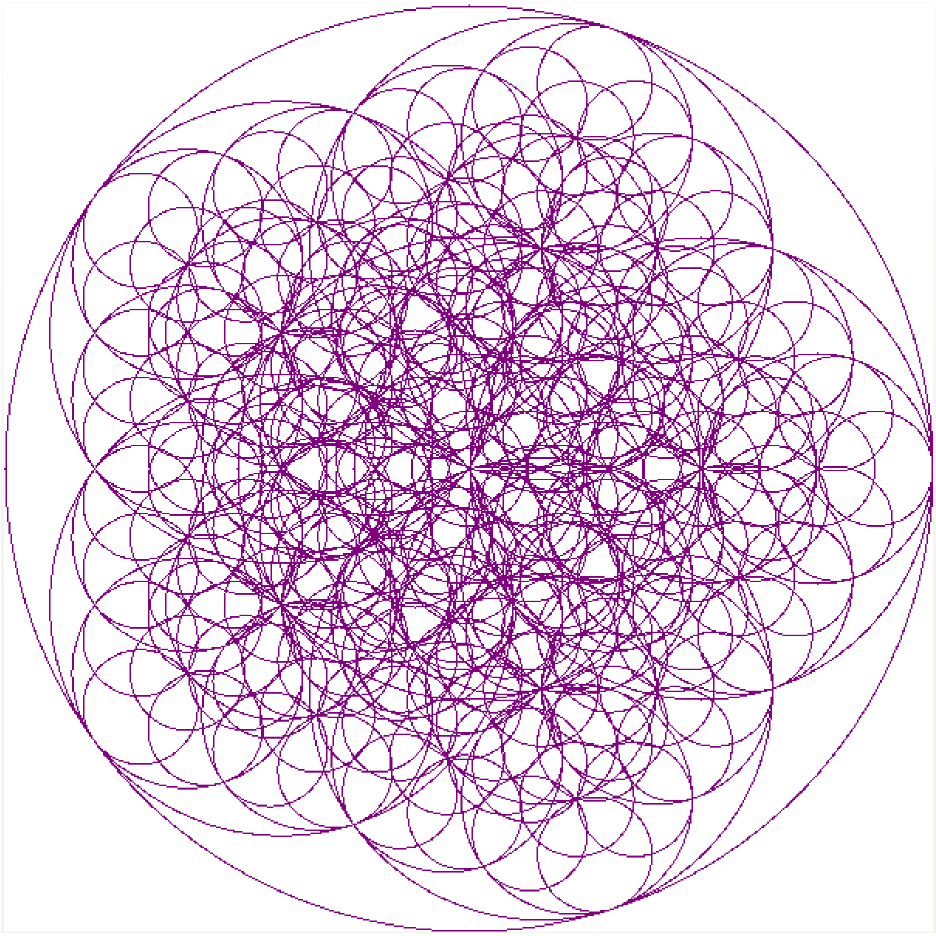
2.29-расм. n=5, k=2, l=2



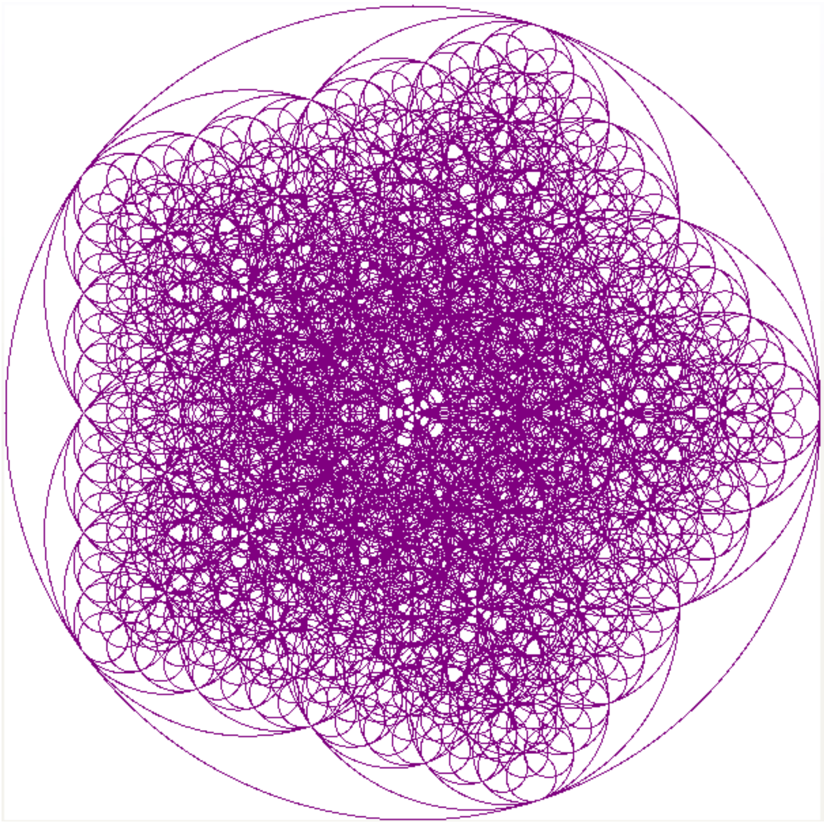
2.30-расм. n=1, k=5, l=2



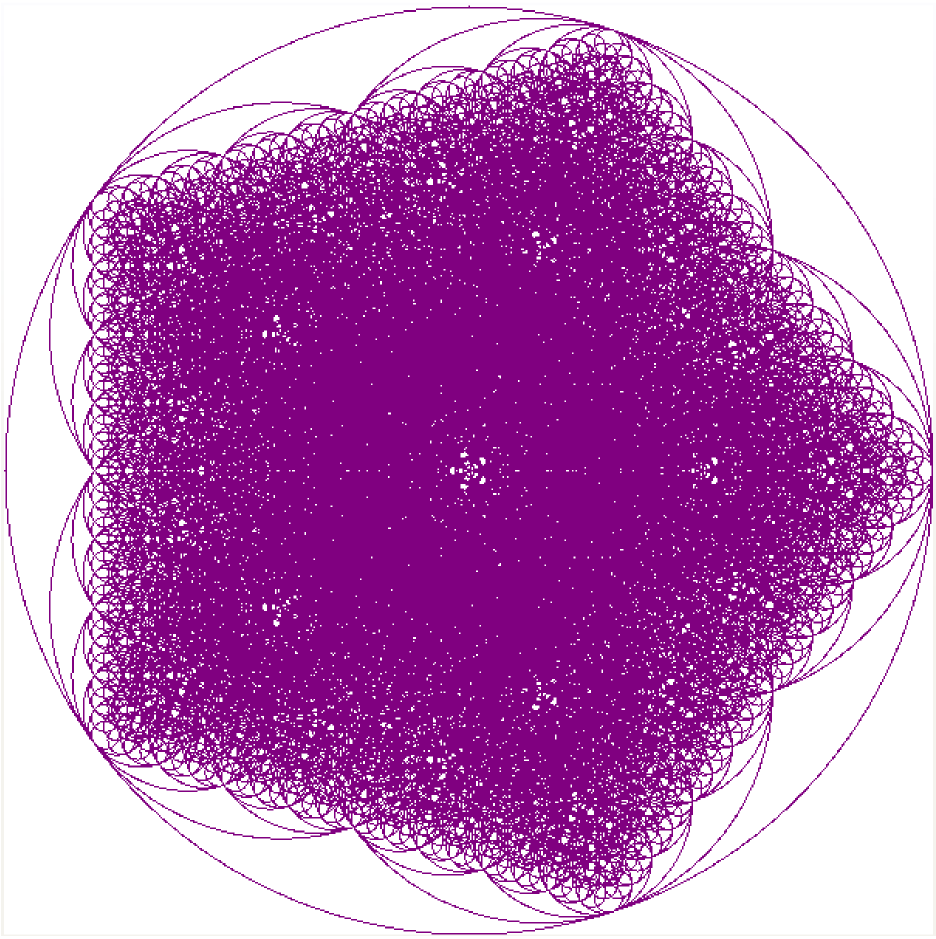
2.31-расм. n=2, k=5, l=2



2.32-расм. n=3, k=5, l=2

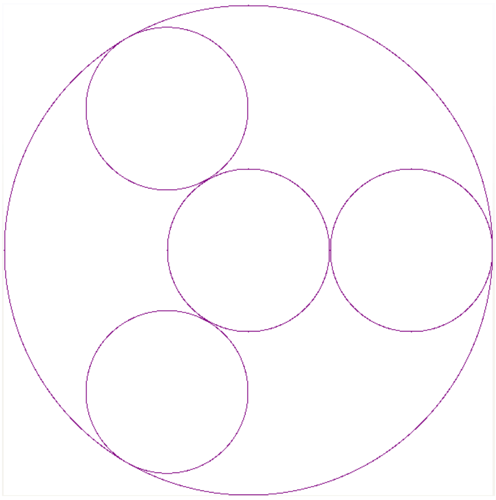


2.33-расм. n=4, k=5, l=2

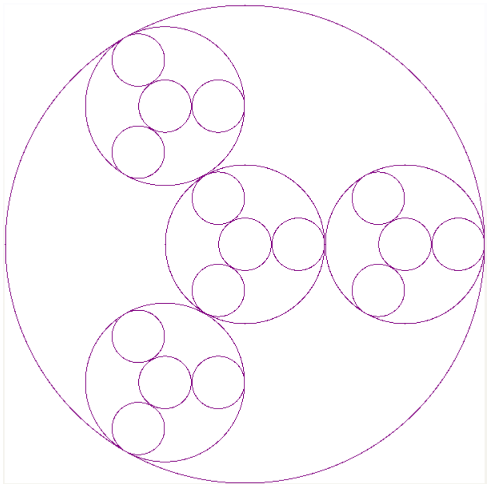


2.34-расм. n=5, k=5, l=2

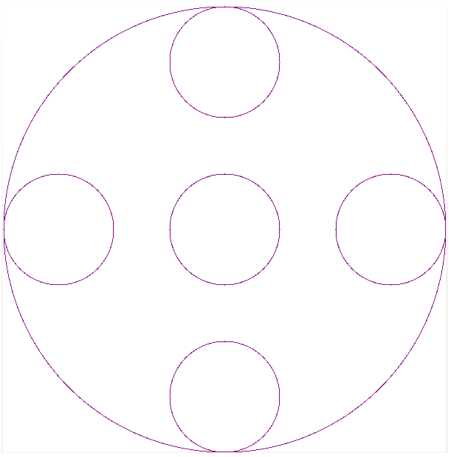
Шуни таъкидлаш лозимки, $l=3$ бўлганда фракталлар тартибланган айланаларнинг кесишмасидан шакллантирилади. Бу натижалар 35-40 расмларда берилган



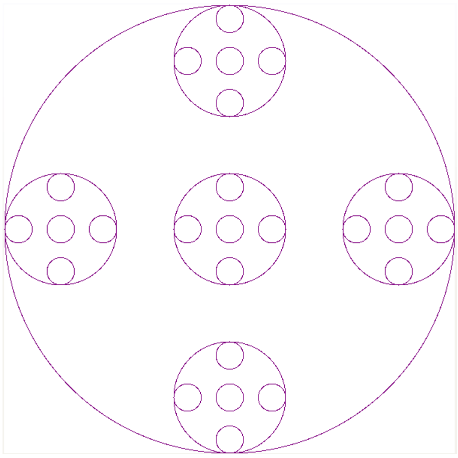
2.35-расм. n=1, k=5, l=3



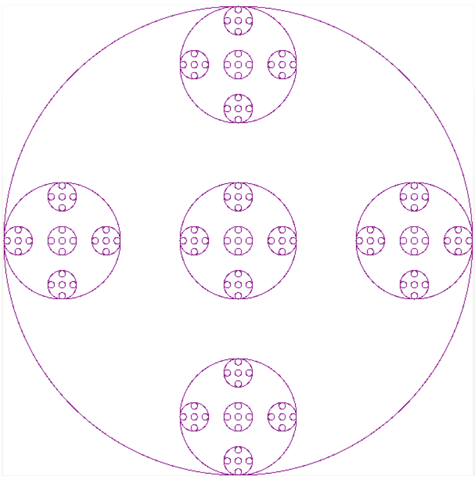
2.36-расм. n=2, k=5, l=3

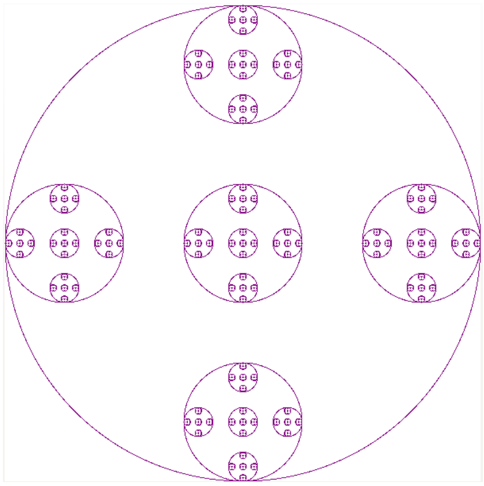


2.37-расм. n=1, k=4, l=4



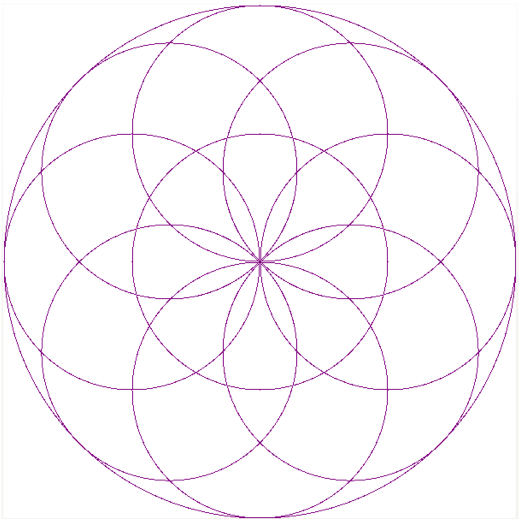
2.38-расм. n=2, k=4, l=4



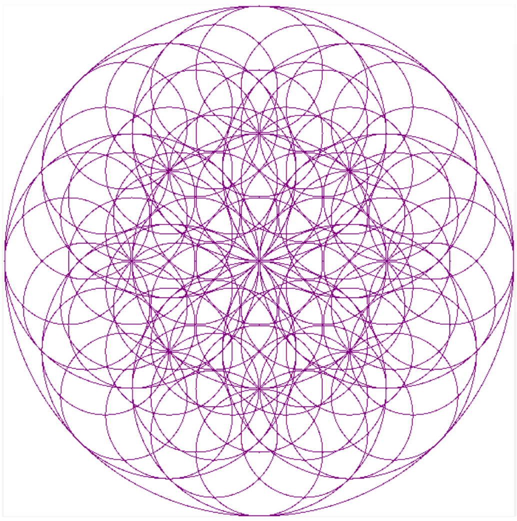


2.39-расм. n=3, k=4, l=4 2.40-расм. n=4, k=4, l=4

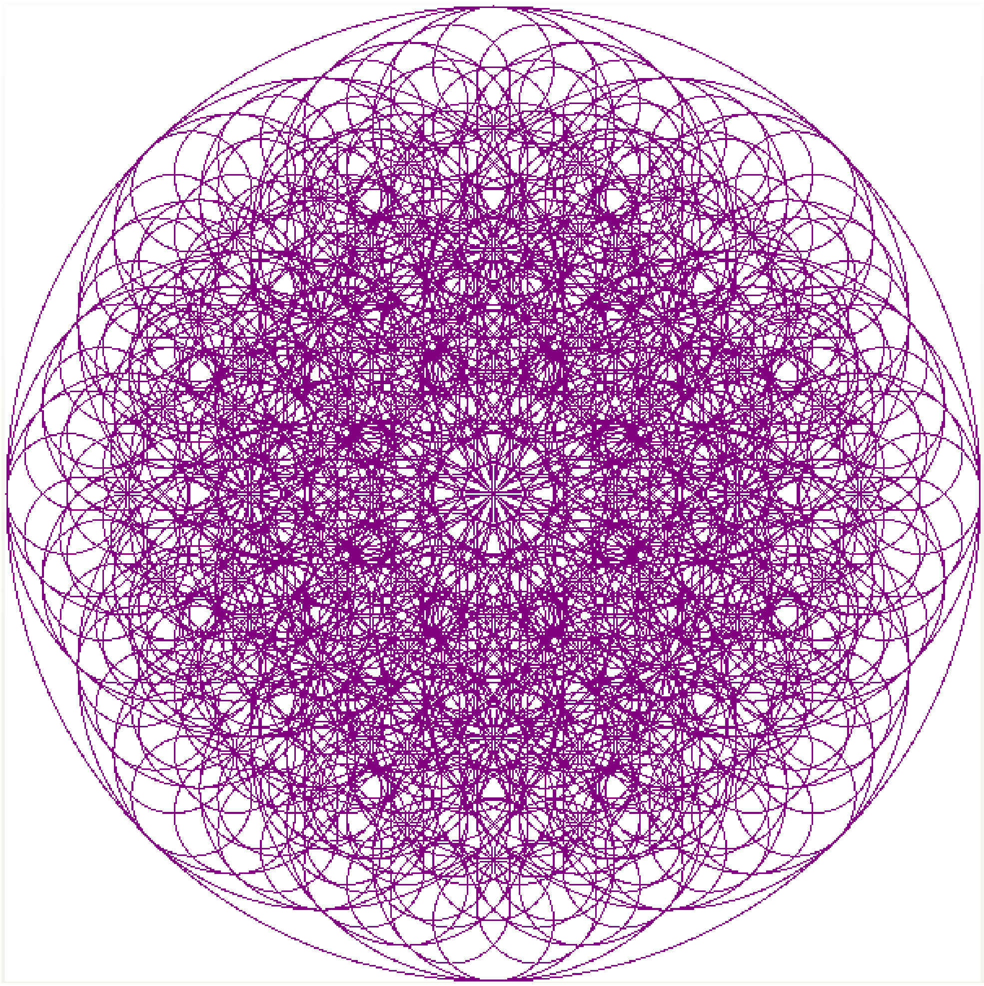
Итерацион фракталлар $k=8$, $l=2$ ва $n=\overline{1,2,3}$,бўлгада олингандаги фракталлар 2.41-2.43 расмларда келтирилган.



2.41-расм. n=1, k=8, l=2

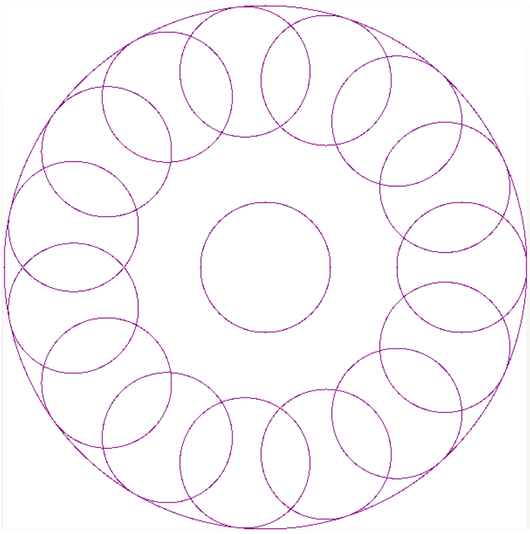


2.42-расм. n=2, k=8, l=2

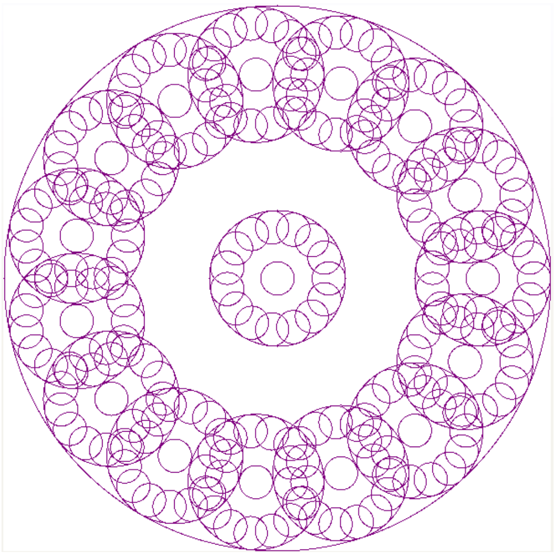


2.43-расм. n=3, k=8, l=2

$k=15,\ l=4$ ва n нинг ҳар хил қийматларидаги ҳисоблаш натижалари 2.44-2.45 расмларда келтирилган.



2.44-расм. n=1, k=15, l=4



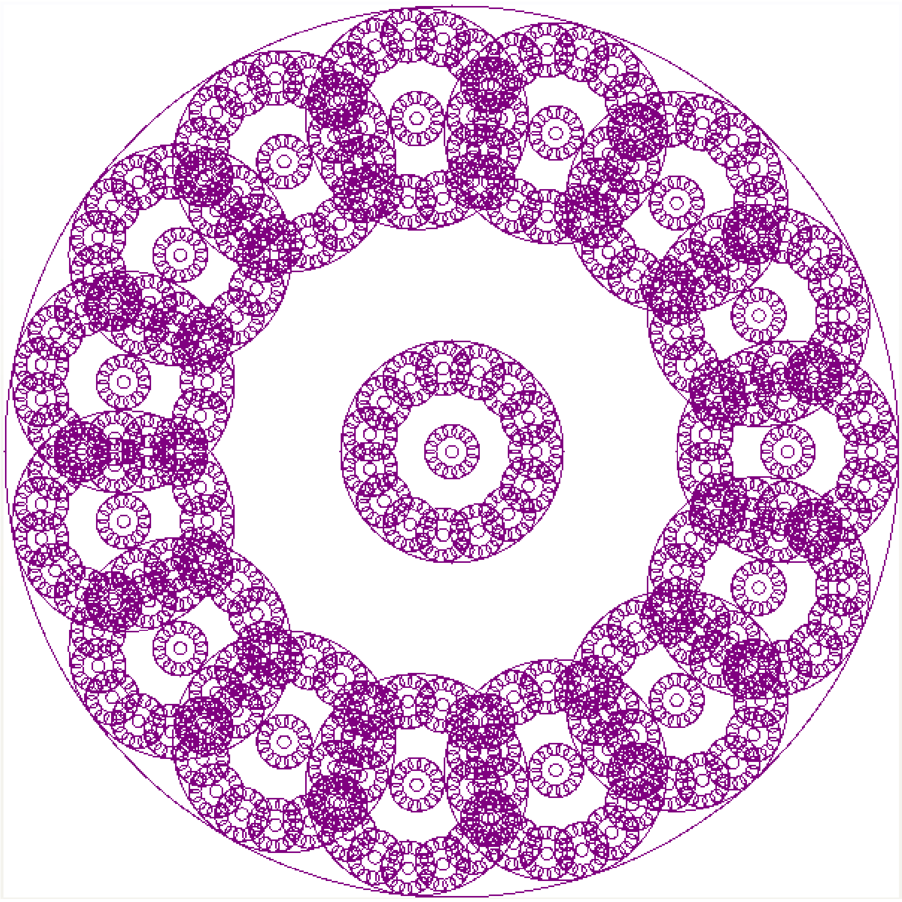
2.45-расм. n=2, k=15, l=4

Кўриниб турибдики, айланалар тенгламаларидан ва R-функциянинг алгебро-мантиқий усулларидан фойдаланган ҳолда айланаларни уринишлари ва кесишишларидан турли туман фракталларни қуриш мумкин. Бу фракталлар жудаям чиройли. Улардан тўқимачилик саноатида, телекоммуникацияда, керамик ва фарфор биноларда нақш ва безакларни чизишда фойдаланиш мумкин.

Бу геометрик объектларни чизиш учун алгоритм ишлаб чиқилган. Алгоритм асосида рекуррент функция ишлаб чиқилган.

```
function circle(n, r, x, y : Integer) : Boolean;
var r1, a1, dx, dy : Integer;
  w00, w10, w11, w12, w13, w14, w15, w16 : Boolean;
begin
Result := false;
if n = 0 then
 begin
  Result := (r*r - x*x - y*y >= 0) and ((r-2)*(r-2) - x*x - y*y <= 0);
 end
else if n=1 then
 begin
 r1 := Round(1 * r / 3);
 a1 := Round(2 * r / 3);
```

```
 dx := Round(sqrt(3) * r1);
 dy := r1;
 w00 := circle(0, r, x, y);
 w10 := circle(0, r1, x, y);
 w11 := circle(0, r1, x, y-a1);
 w12 := circle(0, r1, x, y+a1);
 w13 := circle(0, r1, x+dx, y-dy);
 w14 := circle(0, r1, x+dx, y+dy);
 w15 := circle(0, r1, x-dx, y+dy);
 w16 := circle(0, r1, x-dx, y-dy);
 Result := w00 or w10 or w11 or w12 or w13 or w14 or w15 or w16;
 end
else
 begin
 r1 := Round(1 * r / 3);
 a1 := Round(2 * r / 3);
 dx := Round(sqrt(3) * r1);
 dy := r1;
 w00 := circle(n-1, r, x, y);
 w10 := circle(n-1, r1, x, y);
 w11 := circle(n-1, r1, x, y-a1);
 w12 := circle(n-1, r1, x, y+a1);
 w13 := circle(n-1, r1, x+dx, y-dy);
 w14 := circle(n-1, r1, x+dx, y+dy);
 w15 := circle(n-1, r1, x-dx, y+dy);
 w16 := circle(n-1, r1, x-dx, y-dy);
 Result := w00 or w10 or w11 or w12 or w13 or w14 or w15 or w16;
 end;
end;
```



2.46-расм. n=3, k=15, l=4

2-боб бўйича хулоса

Иккинчи бобда R-функция усулини ўрганишга бағишланган бўлиб, унда ҳаётда учраб турадиган объектларни шаклларини геометрик формуласини ёки тенгламасини тузишда нималарга эътибор бериш кераклиги кўриб ўтилган.

Бобда шунингдек R-функция асосида фрактал тенгламалари ёрдамида айланаларни чизиш усуллар кўриб чиқилган ва айланаларни бир бири билан кесишишлари ва кесишмасликлари ҳисобга олинган ҳолда уларнинг шакллари автоматик шакллантирилган.

III БОБ. R-ФУНКЦИЯНИНГ АЛГЕБРО-МАНТИҚИЙ УСУЛИ АСОСИДА МУРАККАБ ШАКЛЛИ ГЕОМЕТРИК ОБЪЕКТЛАРНИ ҚУРУВЧИ ДАСТУРИЙ ТАЪМИНОТ

3.1. Геометрик объектларни тенгламаларини қуришда R-функция усули

R-функция усулларидан фойдаланган ҳолда бир қатор геометрик объектларни тенгламаларини қуришни кўриб чиқамиз.

1. R-функция усулларидан фойдаланган ҳолда Кох эгри чизиғини тенгламасини қуришни қараймиз (3.1-расм).

3.1-расм. Кох эгри чизиғи

Бу эгри чизиқни $-3a \le x \le 3a$ интервалда қуришни кўриб чиқамиз. У ҳолда

$$\omega_0 = -y \ge 0; \quad \omega_{00} = \omega_0 \wedge_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0;$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0; \; f_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0;$$

Бу ерда ω_{00} тенг ёнли учбурчакнинг тенгламаси бўлади. Агар биз ω_{00} нинг ўрнига қуйидаги тенгламани қўйсак

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0;$$

У ҳолда биз 3.1-расмдаги б) расмни ҳосил қиламиз. Худди шундай кейингилари ҳам шу асосда қурилади: *newf*: = F-F++F-F

Демак

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0;$$

$$\omega_{21} = \omega_1\left(3\left(x + 2a\right), 3y\right) \ge 0;$$

$$\omega_{22}=\omega_1\left(3\left(\frac{x+a/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),\ 3\left(-\left(x+a-2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)-\Bigg)\geq 0;$$

$$\omega_2=(\omega_{21}(x,y)\vee_0\omega_{22}(x,y))\wedge_0(-x,y)\vee_0\omega_{22}(-x,y))\geq 0;$$

$$\omega_{kl}=\omega_{k-1}(3(x+2a),3y)\geq 0;$$

$$\omega_{k2}=\omega_{k-1}\left(3\left(\frac{x+\alpha/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),3\left(-\left(x+a/2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right)\geq 0;$$

$$\omega_k=\left(\omega_{k1}(x,y)\vee_0\omega_{k2}(x,y)\right)\wedge_0\left(\omega_{k1}(-x,y)\vee_0\omega_{k2}(-x,y)\right)\geq 0(k=3,4,...).$$

3.1-расмда $\omega_k(x,y)\geq 0$ функциянинг расмлар даражасига қараб Кох эгри чизиғини k нинг ҳар хил қийматларидаги кўринишлари келтирилган.

2. Серпинский гилами қуйидаги кўринишда қурилади. Берилган квадрат бир хил 9 та квадратга бўлинади ҳамда улардан энг марказидагиси бўялмайди (3.2-расм). Қолган барча квадратлар худди шундай процедура асосида амалга оширилади. Бу жараённи чексизликка ўтказган ҳолда натижавий Серпинский гиламининг фракталини ҳосил қиламиз.

Унинг касрли ўлчами *D*=lg 8/lg3 ≈ 1.893 га тенг. Агар чексиз жараённи *k*-қадамда тўхтатсак, у ҳолда *k*-даражали қисм фрактални ҳосил қиламиз.

Серпинский гиламининг қисм фрактали чегараларининг функцияси [10-11] га кўра қуйидаги кўринишда бўлади

$$f_1=\frac{a^2-x^2}{2a}\geq 0,\quad f_2=\frac{b^2-y^2}{2b}\geq 0,$$

бу ерда $\omega_0=f_1\wedge_0 f_2\geq 0$ - нолинчи даражали қисм фрактал. Бу хоссалардан фойдаланган ҳолда ёрдамчи функцияни кўриб чиқамиз.

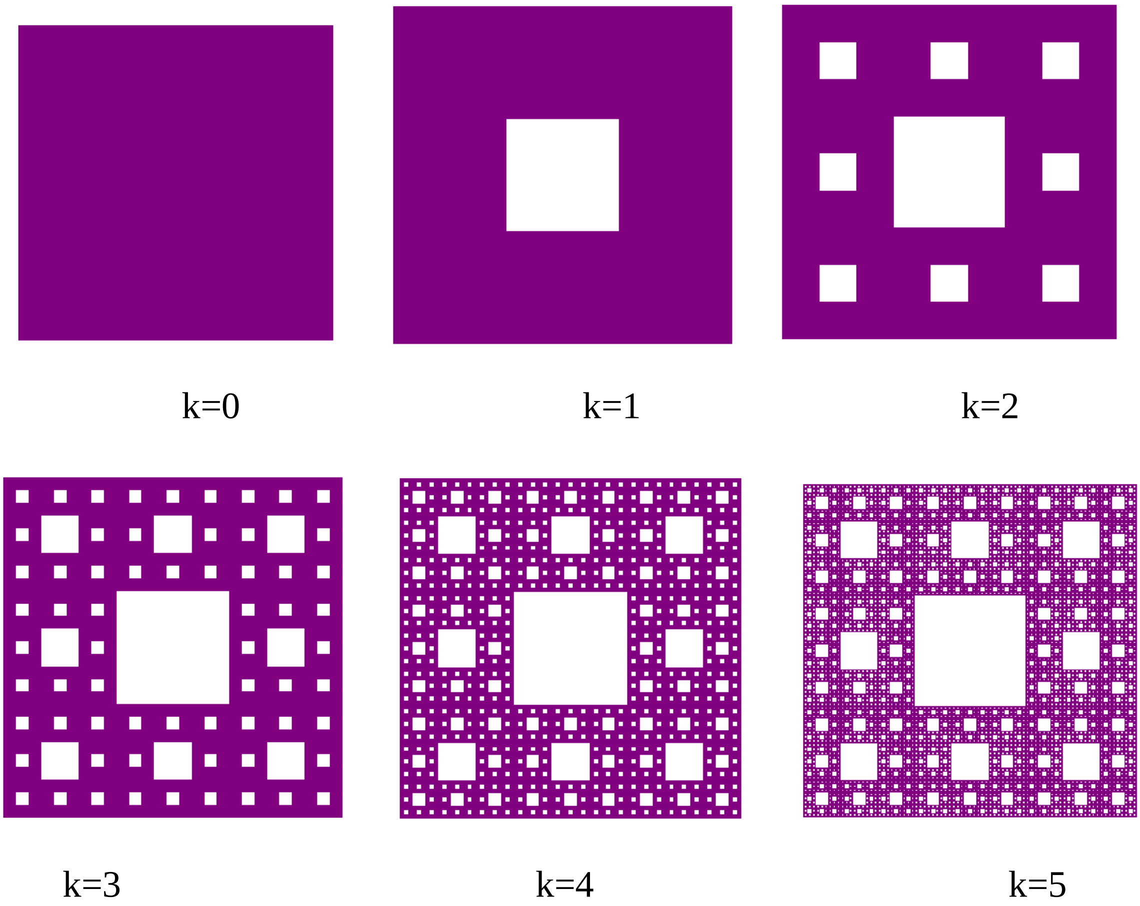
$$\omega_1(x,y)=\frac{\overline{\omega_0(3x,3y)}}{3}\geq 0,\quad \omega_k(x,y)=\frac{\omega_{k-1}(3\mu_{hx},3\mu_{hy})}{3}\geq 0...(k=2,3,...),$$

бу ерда

$$\mu_{hx}=\frac{h_x}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi x}{h_x}\right),\ \mu_{hy}=\frac{h_y}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi y}{h_y}\right),\ h_x=\frac{2a}{3},\ h_y=\frac{2b}{3}.$$

У ҳолда $K_\omega(x,y)=\omega_0(x,y)\wedge_0\omega_1(x,y)\wedge_0\omega_2(x,y)\wedge_0...\wedge_0\omega_k(x,y)\geq 0$.

3.2-расмда $K_{\omega_k}(x,y) \geq 0$ функциянинг k нинг ҳар хил қийматлари учун Серпинский гиламини шакллари берилган.



3.2-расм. Серпинскийни тўртбурчак гиламини кўриниши

Сирпинский гиламини ишлаб чиқишда қуйидаги рекуррент функциялардан фойдаланилган:

```
function serpinW(k,a,b:Integer;x,y:Real):Boolean;
var hx,hy,mx,my:Real;
begin
if k=0 then
 Result:=(a*a-x*x>=0) and (b*b-y*y>=0)
else if k=1 then
 Result:=not serpinW(0,a,b,3*x,3*y)
else
 begin
 hx:=2*a/3;hy:=2*b/3;
 mx:=hx/PI*ArcSin(Sin(PI*x/hx));
 my:=hy/PI*ArcSin(Sin(PI*y/hy));
```

```
 Result:=serpinW(k-1,a,b,3*mx,3*my);
 end;
end;
function serpinKk(k,a,b:Integer;x,y:Integer):Boolean;
var ii:integer;
begin
Result:=true;
for ii:=0 to k do
 Result:=Result and serpinW(ii,a,b,x,y);
end;
```

3. Серпинский салфеткаси учбурчак тенгламаси орқали қурилади. Бунинг учун тенг томонли учбурчак ўртасидан яни бир тенг томонли учбурчакни "кесиб" оламиз. Бу процедурани қолган учта учбурчакка (марказий учбурчакдан ташқари) тадбиқ қиламиз.

Агарда чизилган ихтиёрий учбурчакни олиб ва уни катталаштирсак бошланғич учбурчакни олишимиз мумкин.

Ҳар бир итерацияда олдинги расмни кичрайтирилган шакли бир бурчакдан қўшилиб бораверади. Агарда бу фракталени ҳосил қилишда чексиз итерацияларни амалга оширсак, у бутун текисликни қамраб олади.

Шунинг учун унинг фрактал ўлчами $\frac{\ln 9}{\ln 3} = 2.$ га тенг. Тенг томонли учбурчакнинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз

$$\omega_0(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right) + R \ge 0\text{, ёки } \omega_0(x,y) = -x1 + R \ge 0\text{,}$$

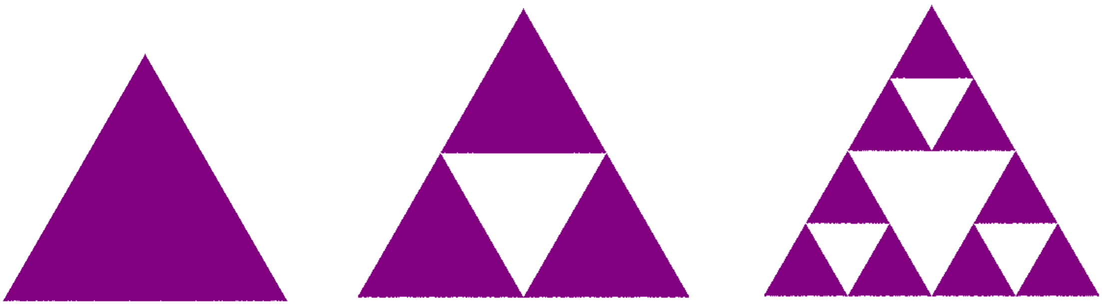
Бу ерда $x1 = r\cos\mu;\ \ y1 = r\sin\mu;\ \ \mu(\theta) = \frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right);\ \ r = \sqrt{x^2+y^2};\ \ \theta = arctg\frac{y}{x};\ \ R$ - ташқи айлана раидуси. У ҳолда

$$\omega_1(x,y) = \omega_0(-2(x1-R),\ 2y1)/2 \ge 0\text{,}$$

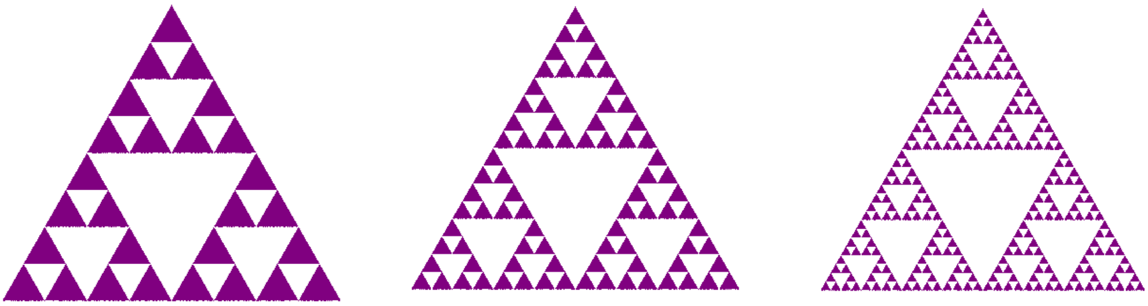
ва, ўз навбатида,

$$\omega_k(x,y) = \omega_{k-1}(2(x1-R),\ 2y1)/2 \ge 0,\ \ (k = 2,3,\ldots).$$

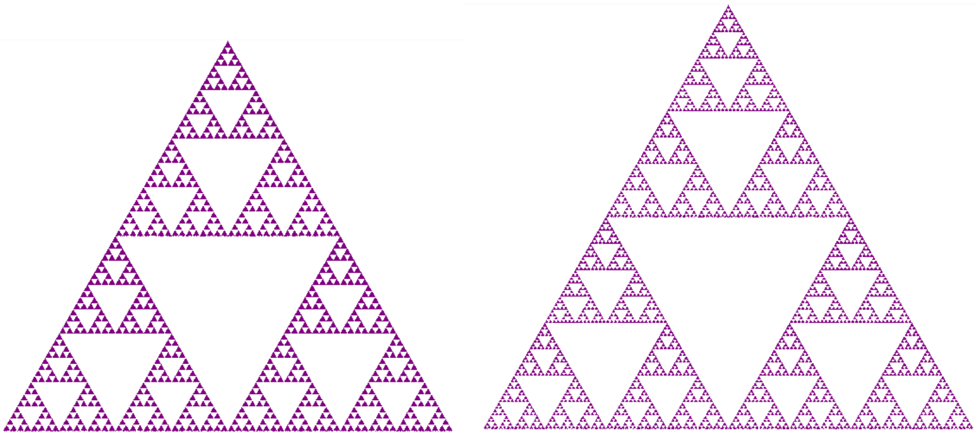
Лекин бу ғолда R-функция ишлатилмаяпди. 3.3-расмда $\omega_k(x,y)\geq 0$ функция учун Сирпинский салфеткасининг k нинг ҳар хил қийматларидаги кўриниши берилган.



n=0 n=1 n=2



n=3 n=4 n=5



n=6 n=7

3.3-расм. Серпинский салфеткаси

Юқорида келтирилган Серпинский салфеткасини ишлаб чиқишда қуйидаги рекуррент процедурадан фойдаланилган:

```
procedure salfetka_fast_draw(can:TCanvas;Color:TColor;k,a:Integer;x,y:Integer);
var x1,y1,x2,y2,x3,y3:Integer;
  r:Real;
begin
```

```
can.Pen.Color:=Color;
can.Brush.Color:=Color;
if k=0 then
 begin
 a:=a div 2;
 r:=a*sq3/3;
 x1:=x - a;
 y1:=Round(y + r);
 x2:=x + a;
 y2:=Round(y + r);
 x3:=x;
 y3:=Round(y - 2*r);
 line(can,x1,y1,x2,y2);
 line(can,x2,y2,x3,y3);
 line(can,x3,y3,x1,y1);
 can.FloodFill(x,y,Color,fsBorder);
 end else begin
 if(a>3) then
  begin
  a:=a div 2;
  r:=a*sq3/4;
  x1:=x - a div 2;
  y1:=Round(y + r);
  x2:=x + a div 2;
  y2:=Round(y + r);
  x3:=x;
  y3:=Round(y - r);
  salfetka_fast_draw(can,Color,k-1,a,x1,y1);
  salfetka_fast_draw(can,Color,k-1,a,x2,y2);
  salfetka_fast_draw(can,Color,k-1,a,x3,y3);
  end else
   salfetka_fast_draw(can,Color,0,a,x,y);
 end;
end;
```

3.2. Уч ўлчовли мураккаб шаклли геометрик объектларни чизиш

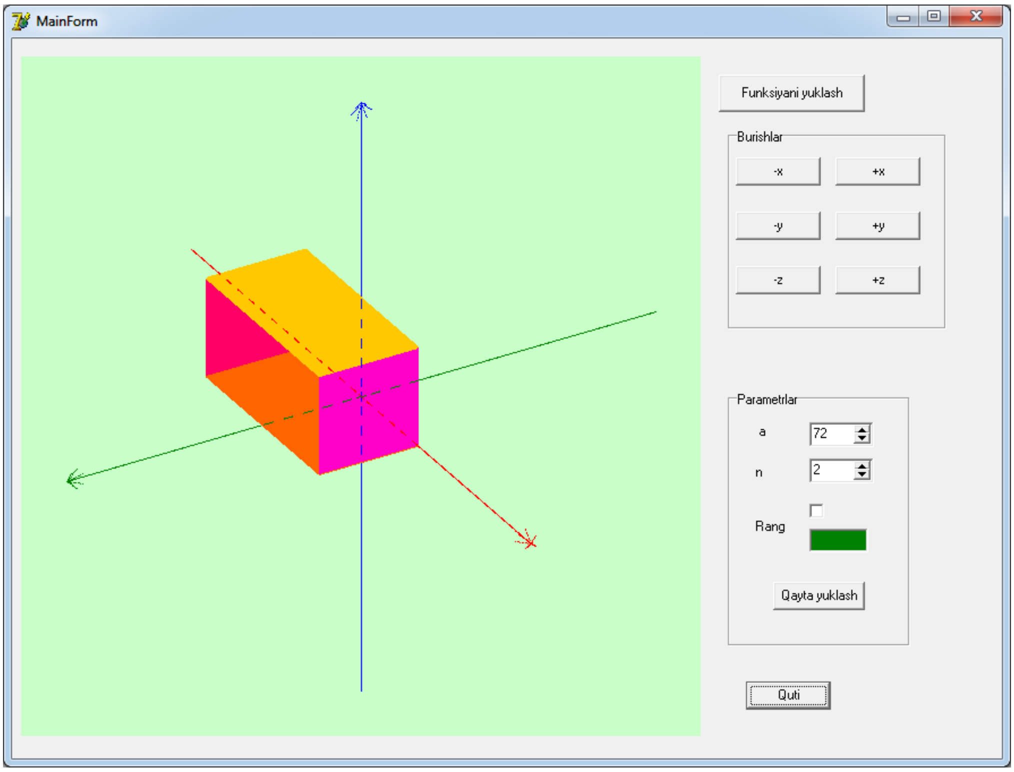
Магистрлик ишини натижавий дастурий таъминоти Borland Delphi 7.0 дастурий воситасида амалга оширилган.

Дастурий таъминотни ишлаб чиқишда юқорида номлари зикр этилган магистр битирувчиларининг магистрлик ишларини ўрганган ҳолда ушбу дастурий восита ишлаб чиқилган.

Биринчи навбатда фракталларни уч ўлчовли фазода шакллантириш учун, яъни учинчи ўқни акс эттириш учун мен биринчи навбатда оддий текисликни, яъни квадратни уч ўлчовли кўринишга ўтказдим.

Бунда квадрат чизилиб унга учунчи ўқ бўйича акслантириш амалга оширилди (3.3-расм).

Бу ҳосил бўлган уч ўлчовли объектни эса эса ихтиёрий x, y ва z ўқ бўйича буриш ва айлантириш имкониятини ўрганиб чиқдим (3.4-расм).

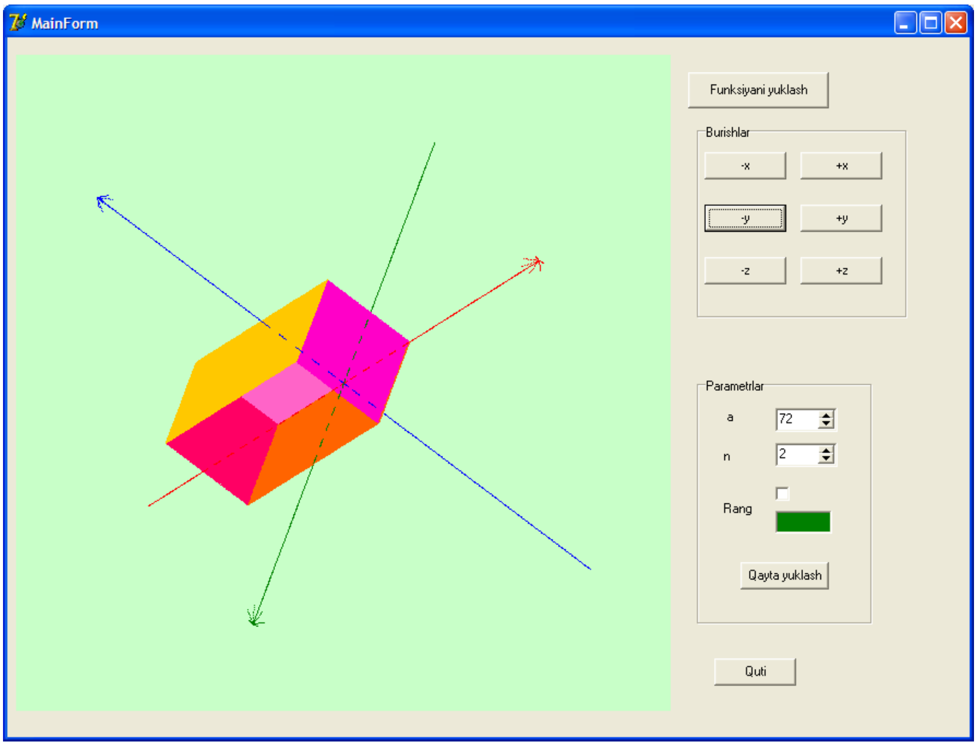


3.3-расм. Параллелепипед.

Юқоридаги параграфда Серпинский гилами ва салфеткасини фракталларини икки ўлчовли фазода, яъни текисликда кўриб чиққан эдик. Энди шу Серпинский гиламини уч ўлчовли фазода шакллантришни кўриб чиқамиз.

Олдинги параграфда Серпинский гиламини икки ўлчамли шаклини n = 0 дан 5 гача бўлган ҳолатлардаги икки ўлчамли шакллари келтирилган. Энди шу шаклларни уч ўлчамлиси учун амалга оширамиз.

Уч ўлчовли геометрик объектларни қуриш учун махсус *.dll файл ишлаб чиқилган. Махсус ишлаб чиқилган дастурга бу *.dll файлни юклаган ҳолда уч форматли расм чизилади.

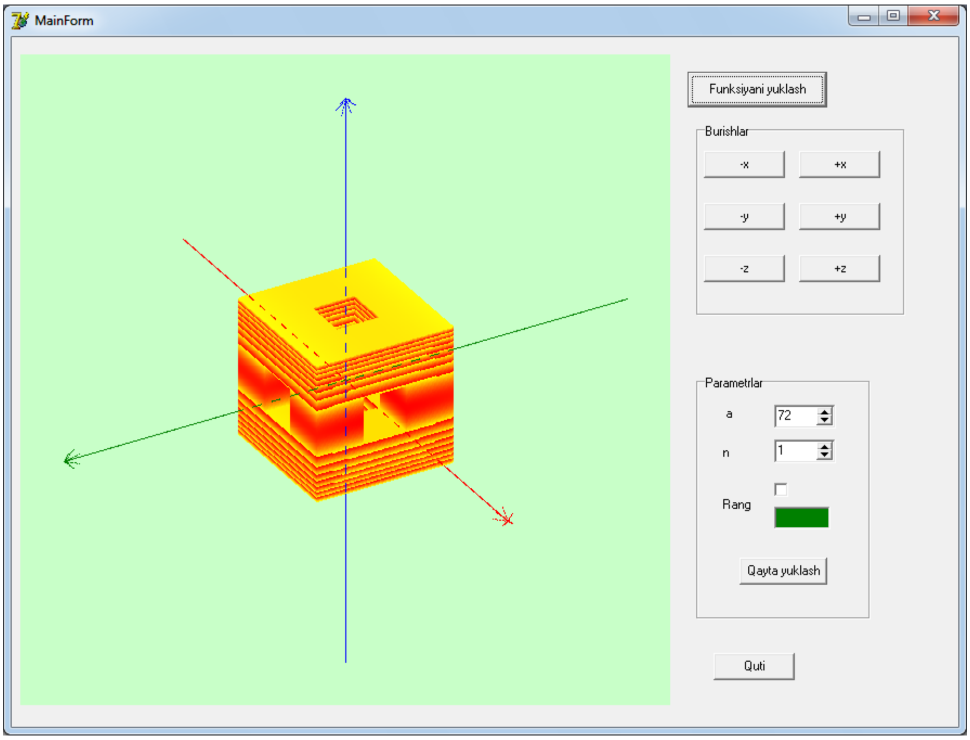


3.4-расм. Параллелепипедни ўқлар бўйича бурилиши.

```
function gubka(a, n, x, y, z : Integer) : Integer;
var ak, aa : Integer;
  r : boolean;
begin
 aa := a*a; //xx := x*x; yy := y*y; zz := z*z;
 if n = 0 then
 begin
  if (aa-x*x>=0) and (aa-y*y>=0) and (aa-z*z>=0) then
   Result := x*x + 100*z*z
  else
   Result := -1;
 end else begin
  ak := a div 3;
  r := (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z - 2*ak)>-1)  or
      (gubka(ak, n-1, x, y - 2*ak, z - 2*ak)>-1) or
      (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z - 2*ak)>-1)
    or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z)>-1)
   or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z)>-1)
   or  (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z + 2*ak)>-1)
   or  (gubka(ak, n-1, x, y - 2*ak, z + 2*ak)>-1) or
      (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z + 2*ak)>-1);
r :=r or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y, z - 2*ak)>-1)
or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y, z - 2*ak)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y, z + 2*ak)>-1)
or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y, z + 2*ak)>-1);  r :=r or
```

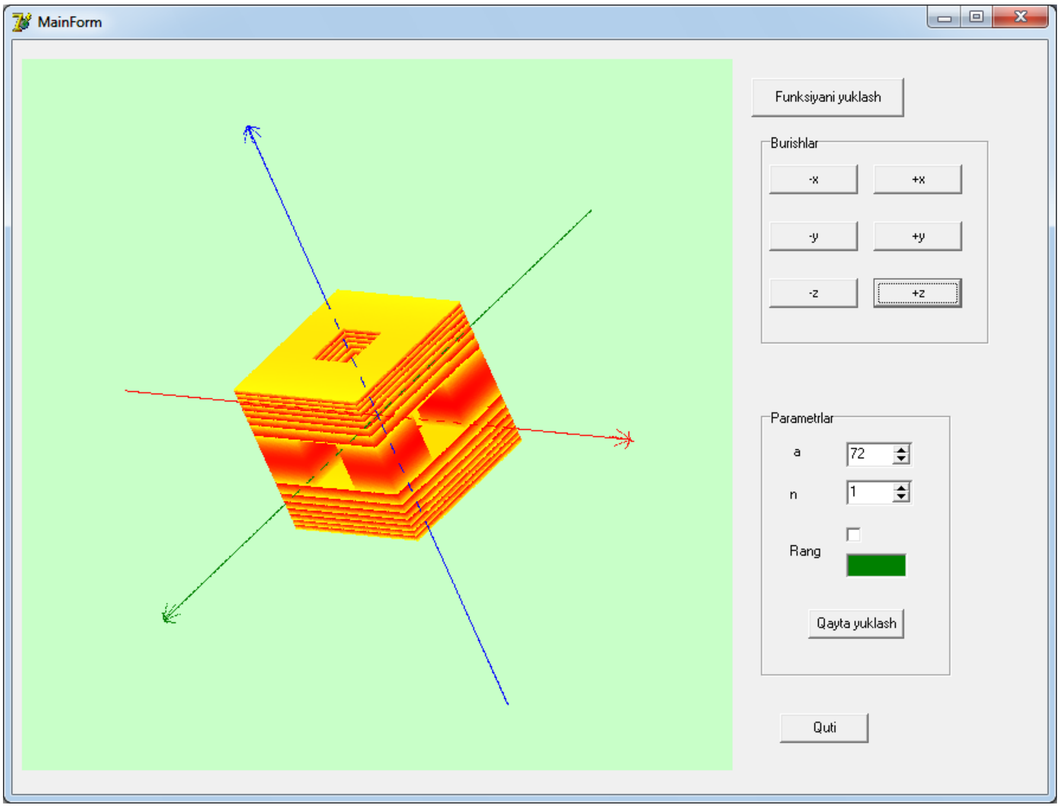
```
(gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z - 2*ak)>-1)  or
(gubka(ak, n-1, x, y + 2*ak, z - 2*ak)>-1) or
(gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z - 2*ak)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z + 2*ak)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x, y + 2*ak, z + 2*ak)>-1)
or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z + 2*ak)>-1);
  if r then
   Result := x*x + 100*z*z
  else
   Result := -1;
 end;
end;
```

3.2-расмдаги n=1 бўлган ҳолатдаги Серпинский гиламини уч ўлчамли ҳолати 3.5-расмда келтирилган. Одатда бу шаклни “губка” деб аташади.



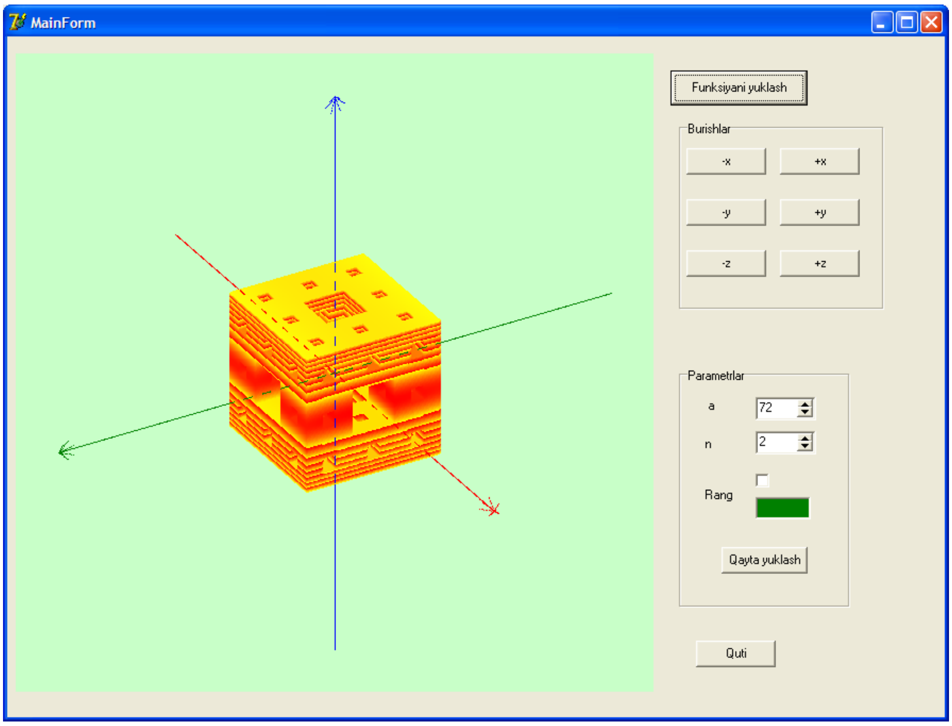
3.5-расм. Серпинский “губкаси” (n=1)

Бу шаклларни ихтиёрий ўқ бўйича буришни амалга ошириш мумкин.

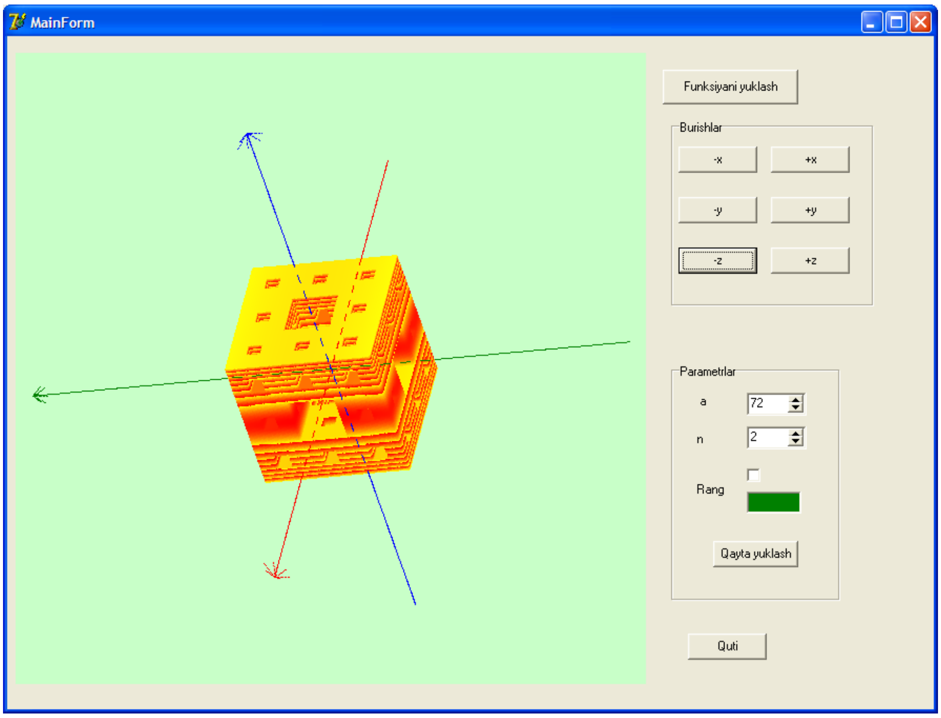


3.6-расм. Серпинский “губкаси”ни бурилган ҳолати (n=1)

3.2-расмдаги n=2 бўлган ҳолатдаги Серпинский гиламини уч ўлчамли ҳолати 3.7-расмда келтирилган.



3.7-расм. Серпинский “губкаси” (n=2)



3.8-расм. Серпинский “губкаси”ни бурилган ҳолати (n=2)

Бу ишлаб чиқилган дастурий восита фойдаланувчи учун қулай интерфейсга бўлиб, уни ишлатиш учун фойдаланувчи шахсий компьютерига хеч қандай дастрий восита ўрнатилиши талаб қилинмайди.

Юқори Серпинский “губкаси”нинг фақатгина иккита ҳолатлари n=1 ва n=2 келтирилган. Дастур n нинг каттарок қийматларида секин ишламоқда. Келажакда бу дастурни ҳозирги вақтдаги замонавий дастурий воситалардан бирига ўтказиш режалаштирилган

3-боб бўйича хулоса

R-функция асосида формулалар орқали Кох эгри чизиғи тенгламаси, Серпинский гилами ва салфеткаларини тенгламалари келтирилган ва улар асосида ишлаб чиқилган дастурий таъминот натижаларини расмлари келтирилган.

Бу бобда энг мухим жиҳати Серпинский гиламининг уч ўлчамли ҳолати Серпинский “губкаси” шакли чизилган ва уларнинг ихтиёрий ўқ бўйича айланиши ва ҳаракатланиши чизмалари келтирилган.

ХУЛОСА

Ушбу магистрлик диссертация ишининг мақсади фракталлар тенгламаларини қуришда ишлатиладиган воситалар, усуллар ва алгебро-мантиқий усулларни ўрганиш ҳамда R-функция асосида геометрик фракталларни қурувчи дастурий таъминотни ишлаб чиқишдан иборат эди.

Магистрлик тадқиқот ишини бажариш давомида фракталлар ва уларнинг классификацияси, турлари, уларнинг қуриш усуллари ва уларнинг аҳамияти ўрганилди.

Тадқиқот ишнинг асосий натижалари қуйидагилар:

- Мураккаб шаклли геометрик шаклларни қуришда фракталларни ўрни, аҳамияти ва таҳлил қилинган;
- R-функция асосида рекуррент тенгламалардан фойдаланган ҳолда мураккаб геометрик объектларнинг классик фракталлари қурилган;
- R-функция асосида ва мураккаб шаклли уч ўлчовли мураккаб геометрик объектларни компьютерли моделлаштиришнинг усул ва воситалари ёрдамида дастурий таъминот ишлаб чиқилган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Ўзбекистон Республикасининг “Ахборотлаштириш” тўғрисидаги Қонуни, Тошкент, 2003 йил 11 декабр. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 2004 й., 1-2-сон, 10-модда.
2. Ўзбекистон Республикасининг “Ахборот эркинлиги принциплари ва кафолатлари” тўғрисида Қонуни, Тошкент, 2002 йил 12 декабр. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 2003 й., 1-сон, 2-модда
3. Мамлакатимизнинг дастурий таъминот воситалари ишлаб чиқувчиларини рағбатлантиришни янада кучайтириш чора-тадбирлари тўғрисидаги ПҚ-2042, 20.09.2013. «Халқ сўзи», 2013 й., 187 (5861)-сон.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 04.02.2015 йилдаги ПФ-4702-сон “Ўзбекистон Республикаси Ахборот технологиялари ва коммуникацияларини ривожлантириш вазирлигини ташкил этиш тўғрисида” фармони. «Халқ сўзи», 2015 й., 25 (6208)-сон.
5. Ўзбекистон Республикаси Миллий ахборот-коммуникация тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисидаги ПҚ-1989, 27.06.2013
6. “Ахборот-коммуникация технологиялари соҳасида кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1942, 26.03.2013
7. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 21 мартдаги ПҚ-1730-сонли «Замонавий ахборот-коммуникация технологияларини янада жорий этиш ва ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» қарори. Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2012 й., 13-сон, 139-модда.
8. Mandelbrot *B.B.* Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension.- Paris: Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995; *Mandelbrot B.B.* Fractals: Forme, Chance and Dimension.- San - Francisco: Freeman, 1977.- 365 p.;

9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. Думка, 1982. - 552с. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. - 552с.

10.Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Монография. - Харков, ИПМаш НАН Украина, 2009. – 306.

11.Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции в фрактальной геометрии // Информационные технологии. -М.: Издательство "Новые технологии", 2011,N N 7.-С.24-27.

12.Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Метод R-функций в фрактальной геометрии // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Проблемы информационных технологий и телекоммуникаций». Том I., 15-16 март Ташкент 2012, с.60-62

13.Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Применение метода R–функций в фрактальной геометрии // В сб. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2012, вып 127. с. 51-61.

14.Назиров Ш.А., Эржанов М.О., Ташмухамедова Г.Х. Методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии. // В сб. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2014, вып 130. с. 11-38.

15.Назиров Ш.А., Эржанов М.О., Юлдашев Ш.А Построение уравнений фракталов из окружностей // ТАТУ хабарлари. Тошкент 2014 №131. 91-103 с.

16.Рахманов К.С., Юлдашев Ш.А. Метод построения уравнений объектов фрактальной геометрии // “Радиотехника, телекоммуникация ва ахборот технологиялари: муаммолари ва келажак ривожи” халқаро илмий-техник конференцияси. Тошкент, 2015 йил 21-22 май 161-165 бет.

17.Уч ўлчовли геометрик объектларнинг компьютерли алгоритмини қуриш // “XXI аср-интеллектуал авлод асри”. Аниқ ва техника фанлари.

Тошкент ва Тошкент шаҳар ҳудудий илмий - амалий конференцияси материаллари. 58-62 б.

18.Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе - 2005. - № 4. - С. 76-78.

19.Саква Д.Ю. Фракталы вокруг нас - http://sakva.narod.ru/.

20.Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. – М.: «Мир», 1993. 156с.

21.Федер Е. Фракталы. – М.: «Мир», 1991. 254 с.

22.Балханов В. К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления/ от.ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. - 224 с.

23.Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова, А.В. Лагутин, В.М. Тютюнник. Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях: учеб. пособие. – 2-е изд., стереотип. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.

24.Ричард М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. ПОСТМАРКЕТ МОСКВА 2000. – с. 350.

25.Кравченко В.Ф. Басараб М.А. Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R-функций построения. ЖТФ, 2003, том 29, вып. 24. –с. 89-94.

26.Ташмухамедова Г. Х. Разработка логического метода построения фракталов. Магистрлик диссертация иши. Тошкент 2014. 103 с.

27.Эржанов М.О. Программное обеспечения рисования узоров на базе рекурсивных алгоритмов. Магистрлик диссертация иши. Тошкент 2013. 86 с.

28.http://www.compuart.ru/.

29. http://profbeckman.narod.ru/

30.http://www.wikipedia.org/ - универсальная интернет-энциклопедия.

31.http://www.google.com/ - поисковая система.

32.http://www. delphimania.ru.

ИЛОВАЛАР

```
program fraktallar;

uses
 Forms,
 Main in 'Main.pas' {MainForm};

{$R *.res}

begin
 Application.Initialize;
 Application.Title := 'Fraktallar';
 Application.CreateForm(TMainForm, MainForm);
 Application.Run;
end.

uses Math;

function pokoxW(a,n:integer):Integer;
var i:integer;
begin
Result:=1;
for i:=1 to n do
 Result:=Result*a;
end;
function gilbertLen(deg:integer):integer;
begin
if deg>1 then
 Result:=2*gilbertLen(deg-1)+1
else
 Result:=0;
end;
Procedure Line(can:TCanvas;x1,y1,x2,y2:Integer);
begin
can.MoveTo(x1,y1);
can.LineTo(x2,y2);
end;
Procedure gilbertA(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
var leni:integer;
begin
if i>0 then
 begin
 leni:=len*gilbertLen(i);
 gilbertD(i-1,len, x+leni + len,y,can);Line(can,x+leni,y, x+leni + len, y);
 gilbertA(i-1,len, x,y, can);Line(can,x+leni,y+leni,x+leni,y+leni + len);
 gilbertA(i-1,len, x,y+leni + len,can);Line(can,x+leni,y+2*leni + len,x+leni + len,y+2*leni +
len);
 gilbertB(i-1,len, x+leni + len,y+leni + len,can);
 end;
end;
```

```
Procedure gilbertB(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
var leni:integer;
begin
if i>0 then
 begin
 leni:=len*gilbertLen(i);
 gilbertC(i-1,len, x,y+leni + len,can);Line(can,x,y+leni + len,x,y+leni);
 gilbertB(i-1,len,x,y,can);Line(can,x+leni,y+leni,x+leni + len,y+leni);
 gilbertB(i-1,len,x+leni + len,y,can);Line(can,x+2*leni + len,y+leni,x+2*leni + len,y+leni +
len);
 gilbertA(i-1,len, x+leni + len,y+leni + len,can);
 end;
end;
Procedure gilbertC(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
var leni:integer;
begin
if i>0 then
 begin
 leni:=len*gilbertLen(i);
 gilbertD(i-1,len, x,y,can);Line(can,x+leni,y,x+leni + len,y);
 gilbertC(i-1,len,x+leni + len,y,can);Line(can,x+leni + len,y+leni,x+leni + len,y+leni + len);
 gilbertC(i-1,len,x+leni + len,y+leni + len,can);Line(can,x+leni + len,y+2*leni +
len,x+leni,y+2*leni + len);
 gilbertB(i-1,len, x,y+leni + len,can);
 end;
end;
Procedure gilbertD(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
var leni:integer;
begin
if i>0 then
 begin
 leni:=len*gilbertLen(i);
 gilbertC(i-1,len, x,y,can);Line(can,x,y+leni,x,y+leni + len);
 gilbertD(i-1,len,x,y+leni + len,can);Line(can,x+leni,y+leni + len,x+leni + len,y+leni + len);
 gilbertD(i-1,len,x+leni + len,y+leni + len,can);Line(can,x+2*leni + len,y+leni + len,x+2*leni
+ len,y+leni);
 gilbertA(i-1,len, x+leni + len,y,can);
 end;
end;


procedure TMainForm.gkChange(Sender: TObject);
begin
if StrToInt(gk.Text)<0 then
 gk.Text:='0';
end;

procedure TMainForm.Button1Click(Sender: TObject);
begin
gimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
gimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
gimg.Canvas.Pen.Color:=gc.Color;
```

```
gilbertA(StrToInt(gk.Text),StrToInt(ga.Text),10,10,gimg.Canvas);
end;

procedure TMainForm.Button2Click(Sender: TObject);
begin
gimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
gimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
end;

procedure TMainForm.gcDblClick(Sender: TObject);
begin
cd.Color:=gc.Color;
if cd.Execute then
 gc.Color:=cd.Color;
end;


function koxW(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;
 function w1(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;
  begin
  w1:=koxW(k-1,a,3*(x+2*a),3*y);
  end;
 function w2(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;
  begin
  w2:=koxW(k-1,a,Round(3*((x+a/2)/2+(y-a*sq3/2)*sq3/2)),Round(3*(-(x+a/2)*sq3/2+(y-
a*sq3/2)/2)));
  end;
begin
if k=0 then
 Result:=(y<=0)// and (x>=-3*a) and (x<=3*a); len = 6a; a=len/6;
else if k=1 then
 Result:=koxW(0,a,x,y) or ((x*sq3-y+a*sq3>=0) and (-x*sq3-y+a*sq3>=0))
else
 begin
 Result:=(w1(k,a,x,y) or w2(k,a,x,y)) and (w1(k,a,-x,y) or w2(k,a,-x,y));
 end;
end;

function koxWs(n:Integer;k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;
var eta,ri:Real;
 a:Integer;
 function myu(fi:Real):Real;
 begin
 myu:=2*ArcSin(Sin(fi/2))/n;
 end;
begin
eta:=ArcTan2(y,x);
eta:=myu(n*eta);
ri:=sqrt(x*x+y*y);
a:=Round( 2*r*Tan(PI/n)/6 );
Result:=koxW(k,a,Round(ri*Sin(eta)),Round(ri*Cos(eta)-r));
end;
```

```
function koxWw(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;
begin
 Result:=not koxW(k,a,x,y);
end;
function koxWk(k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;
var eta,ri:Real;
 a:Integer;
 function myu(fi:Real):Real;
 begin
 myu:=ArcSin(Sin(fi/2))/2;//n=4;
 end;
begin
eta:=ArcTan2(y,x);
eta:=myu(4*eta);
a:=Round(r/3);//a = a/6
ri:=sqrt(x*x+y*y);
Result:=koxWw(k,a,Round(ri*Sin(eta)), -(Round(ri*Cos(eta)) - r));
end;

procedure TMainForm.Button4Click(Sender: TObject);
var i,j:Integer;
  k,a :Integer;
begin
kimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
kimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
k := StrToInt(kk.Text);
a := StrToInt(ka.Text);
for i:=1 to 600 do
 begin
 kpr.Progress:= i div 6;
 kimg.Repaint;
 Application.ProcessMessages;
 for j:=1 to 600 do
  if koxW(k,a,i-300,300-j) then
   kimg.Canvas.Pixels[i,j]:=gc.Color;
 end;
end;

procedure TMainForm.kcDblClick(Sender: TObject);
begin
cd.Color:=kc.Color;
if cd.Execute then
 kc.Color:=cd.Color;
end;

procedure TMainForm.Button7Click(Sender: TObject);
var i,j:Integer;
  n, k, a :Integer;
begin
kimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
kimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
```

```
n := StrToInt(kn.Text);
k := StrToInt(kk.Text);
a := StrToInt(ka.Text);
for i:=1 to 600 do
 begin
 kpr.Progress:= i div 6;
 kimg.Repaint;
 Application.ProcessMessages;
 for j:=1 to 600 do
  if koxWs(n,k,a,i-300,300-j) then
   kimg.Canvas.Pixels[i,j]:=kc.Color;
 end;
end;

procedure TMainForm.Button8Click(Sender: TObject);
var i,j:Integer;
  k,a :Integer;
begin
kimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
kimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
k := StrToInt(kk.Text);
a := StrToInt(ka.Text);
for i:=1 to 600 do
 begin
 kpr.Progress:= i div 6;
 kimg.Repaint;
 Application.ProcessMessages;
 for j:=1 to 600 do
  if koxWk(k,a,i-300,300-j) then
   kimg.Canvas.Pixels[i,j]:=kc.Color;
 end;
end;

procedure TMainForm.Button3Click(Sender: TObject);
begin
kimg.Canvas.Brush.Color:=clWhite;
kimg.Canvas.FillRect(Rect(1,1,600,600));
kpr.Progress:=0;
end;

function qutiW(k,a:Integer; x,y:Integer):Boolean;
var w0,w1,w2,w3,w4:Boolean;
begin
if k=0 then
 begin
 Result:= (a*a-x*x>=0) and (a*a-y*y>=0);
 end else
if k=1 then
 begin
 w0:=qutiW(0,a,x,y);
 w1:=qutiW(0,a,x-2*a,y-2*a);w2:=qutiW(0,a,x-2*a,y+2*a);
 w3:=qutiW(0,a,x+2*a,y-2*a);w4:=qutiW(0,a,x+2*a,y+2*a);
```

```
 Result:=w0 or w1 or w2 or w3 or w4;
 end else
 begin
 w0:=qutiW(k-1,a,x,y);
 w1:=qutiW(k-1,a,x-6*a,y-6*a);w2:=qutiW(k-1,a,x-6*a,y+6*a);
 w3:=qutiW(k-1,a,x+6*a,y-6*a);w4:=qutiW(k-1,a,x+6*a,y+6*a);
 Result:=w0 or w1 or w2 or w3 or w4;
 end;
end;

procedure box_fast_draw (can:TCanvas;k,a:Integer;xcen,ycen,height,width:Integer);
var i,j,color:Integer;
  ft_t:array[1..100,1..100]of boolean;
  procedure qutiWqutiW(k,a:Integer;x,y:Integer;ii,jj:integer);
  begin
   if k=0 then
    begin
    color:=7*(can.Pixels[x,y]+12);
    can.Brush.Color:=color;
    can.FillRect(Rect(x-a,y-a,x+a,y+a));//(a*a-x*x>=0) and (a*a-y*y>=0);
    end else if k=1 then begin
     if ft_t[ii,jj] then
      begin
      qutiWqutiW(k-1,a,x,y,ii,jj);
      qutiWqutiW(k-1,a,x-2*a,y-2*a,ii,jj);
      qutiWqutiW(k-1,a,x-2*a,y+2*a,ii,jj);
      qutiWqutiW(k-1,a,x+2*a,y-2*a,ii,jj);
      qutiWqutiW(k-1,a,x+2*a,y+2*a,ii,jj);
//      ft_t[ii,jj]:=false;
      end;
    end else begin
    qutiWqutiW(k-1,a,x,y,ii,jj);
    qutiWqutiW(k-1,a,x-6*a,y-6*a,ii-1,jj-1);
    qutiWqutiW(k-1,a,x-6*a,y+6*a,ii-1,jj+1);
    qutiWqutiW(k-1,a,x+6*a,y-6*a,ii+1,jj-1);
    qutiWqutiW(k-1,a,x+6*a,y+6*a,ii+1,jj+1);
    end;
  end;
begin
for i:=1 to 100 do
 for j:=1 to 100 do
  ft_t[i,j]:=true;
can.Brush.Color:=10 ;
can.FillRect(Rect(1,1,width,height));
qutiWqutiW(k,a,xcen,ycen,50,50);
end;

library ZGubka;

uses
 SysUtils,
 Classes;
```

```
{$R *.res}

function gubka(a, n, x, y, z : Integer) : Integer;
var ak, aa : Integer;
//  aa, xx, yy, zz : Integer;
  r : boolean;
begin
 aa := a*a; //xx := x*x; yy := y*y; zz := z*z; a-o'chami n-darajasi
 if n = 0 then
 begin
  if (aa-x*x>=0) and (aa-y*y>=0) and (aa-z*z>=0) then
   Result := x*x + 100*z*z
  else
   Result := -1;
 end else begin
  ak := a div 3;
  r :=   (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z - 2*ak)>-1)  or  (gubka(ak, n-1, x, y - 2*ak, z -
2*ak)>-1) or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z - 2*ak)>-1)
      or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z)>-1)    or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z)>-
1)
      or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y - 2*ak, z + 2*ak)>-1)  or  (gubka(ak, n-1, x, y - 2*ak, z +
2*ak)>-1) or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y - 2*ak, z + 2*ak)>-1);
  r :=r or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y, z - 2*ak)>-1)    or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y, z -
2*ak)>-1)
      or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y, z + 2*ak)>-1)    or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y, z + 2*ak)>-
1);
  r :=r or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z - 2*ak)>-1)  or  (gubka(ak, n-1, x, y + 2*ak, z -
2*ak)>-1) or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z - 2*ak)>-1)
      or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z)>-1)    or  (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z)>-
1)
      or (gubka(ak, n-1, x - 2*ak, y + 2*ak, z + 2*ak)>-1)  or  (gubka(ak, n-1, x, y + 2*ak, z +
2*ak)>-1) or (gubka(ak, n-1, x + 2*ak, y + 2*ak, z + 2*ak)>-1);
  if r then
   Result := x*x + 100*z*z
  else
   Result := -1;

 end;
end;

function CallFractal(a, n, x, y, z : Integer) : Integer; export; stdcall;
begin
 Result := gubka(a, n, x, y, z);
end;

exports
 CallFractal;
begin
end.
```