

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**ANDIJON MASHINASOZLIK
INSTITUTI**

“MASHINASOZLIK” FAKULTETI

**“OLIIY MATEMATIKA”
KAFEDRASI**

“Oliy matematika” fanidan

**VEKTORLAR USTIDA AMALLAR.
SKALYAR KO'PAYTMA.**

mavzusida yozilgan

REFERAT

Bajardi:

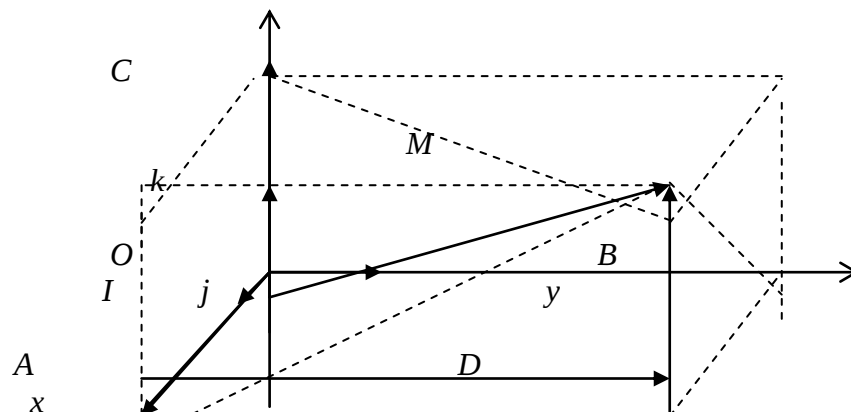
“Iqtisodiyot” yo'nalishi 2 - kurs talabasi Muminov M.

Andijon 2016

REJA:

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi.
2. Chiziqli bog‘langan va bog‘lanmagan vektorlar.
3. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.
4. Ortogonal vektorlar sistemasi.
5. Vektorlar sistemasining iqtisodiyotda qo‘llanilishi.
6. Tekislikda yo‘nalishni aniqlash.
7. Uchburchak yuzi.
8. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.

I. O'zaro perpendikulyar kesishuvchi uchta o'qlar, ularning kesishish nuqtasi bo'lgan koordinata boshi va birlik masshtabga ega bo'lgan tartiblangan sistema fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi deyiladi. OX - abtsissa, OY - ordinata va OZ -applikata o'qlari deyiladi. Natijada $OXYZ$ koordinatalar fazosi hosil bo'ladi. Bu fazoda ixtiyoriy M nuqta olib, $\overline{OM}$ vektorni hosil qilamiz. Bu vektor **radius-vektor** deyiladi.



$\overline{OM}$ vektorni o'qlarga proektsiyalaymiz. Bu vektorni o'qlardagi proektsiyalarini $np_x \overline{OM} = x$, $np_y \overline{OM} = y$, $np_z \overline{OM} = z$ deb belgilaymiz. Shu x, y, z lar M nuqtaning koordinatalaridir, ya'ni $M(x, y, z)$. OX, OY, OZ o'qlarda uzunligi bir birlikka teng bo'lgan i, j, k birlik vektorlarni yoki ortlarni tanlab olamiz, $|i| = |j| = |k| = 1$

Teorema. Har qanday vektorni koordinata o'qlardagi ortlar bo'yicha yoyish mumkin.

Isbot. FAZO fazoda ixtiyoriy $\overline{a}$ vektor berilgan bo'lib, x, y, z bu vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari bo'lsin.

$\overline{a} = \overline{OM}$ deb olamiz.

Vektorlarni qo'shish qoidasiga asosan:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DM}$$

Lekin $\overline{AD} = \overline{OB}$, $\overline{DM} = \overline{OC}$ bo'lgani uchun

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \quad (1)$$

Vektorni songa ko'paytirish qoidasiga asosan:

$\overline{OA} = xi$; $\overline{OB} = yj$; $\overline{OC} = zk$ bo'lgani uchun

$$\overline{a} = xi + yj + zk \quad (2)$$

ni hosil qilamiz.

Bu tenglik $\overline{a}$ vektorni koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi. Bu yozuvni

$$\overline{a} = (x; y; z) \quad (3)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Koordinata o'qlarining o'zaro perpendikulyarligidan $\overline{a}$ vektorning uzunligi x_i, y_j, z_k vektorlarga ko'rilgan parallelipedning diagonalini uzunligidan iborat bo'lishi kelib chiqadi va u quyidagi tenglik orqali ifodalanadi:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

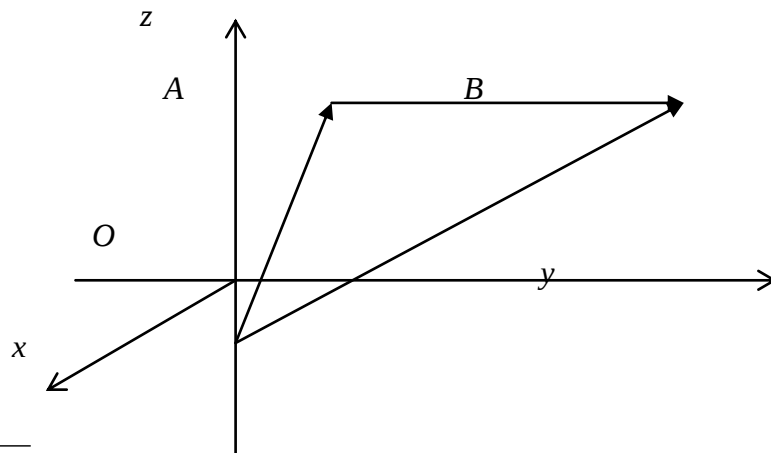
Vektor boshlang'ich va oxirgi no'qtasining berilishi bilan to'la aniqlangani uchun uning koordinatasini shu no'qtalar koordinatalari orqali ifodalash mumkin.

Aytaylik, berilgan koordinata sistemasida $\overline{O}$ vektorning boshi

$A(x_1; y_1; z_1)$ va oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ no`qtalarda bo`lsin.

U holda $\overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ $\overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ bo`ladi.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ tenglikdan $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ni yozish mumkin.



Bu yerdan $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ yoki koordinatalar shaklida

$$\overrightarrow{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \quad (5)$$

kelib chiqadi, ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor boshlang`ich va oxirgi bir qismli koordinatalarining ayirmalariga teng. Bu vektor uzunligi quyidagi formula bilan topiladi:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6)$$

(6) formula fazoda ikki $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ no`qtalar orasidagi masofani topish ham deb yuritiladi.

Endi koordinatalari bilan berilgan ikki vektorlar ustidagi amallarni ko`rib chiqamiz.

Ikkita

$$\overrightarrow{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

vektorlar va λ -ixtiyoriy haqiqiy son berilgan bo`lsin. U holda

$$\lambda \overrightarrow{a} = \lambda (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = \lambda x_1\mathbf{i} + \lambda y_1\mathbf{j} + \lambda z_1\mathbf{k} \quad \text{yoki}$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k} \quad \text{yoki} \quad (7,8)$$

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

II. 1-ta'rif. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ vektorning chiziqli kombinatsiyasi deb,

$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{a_m}$ yig`indiga aytiladi, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ haqiqiy sonlar, bu **chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari deyiladi.**

Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi vektorlardan tuzilgan bo`lib, u vektorni songa ko`paytirish va qo`shish amallari yordamida hosil bo`ladigan vektordir.

Misol. $\overrightarrow{a_1} = (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (-3; 2; 1)$ vektorlarni $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyasini tuzing.

Yechish.

$$2\overrightarrow{a_1} = 2(2; -1; 0) = (4; -2; 0)$$

$$3\overrightarrow{a_2} = 3(-3; 2; 1) = (-9; 6; 3)$$

$$2\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_2} = (4; -2; 0) + (-9; 6; 3) = (-5; 4; 3)$$

Misol. $\vec{a}_1 = (5; 4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2)$, $\vec{a}_3 = (-10; -1)$ vektorlarni $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-5$, $\lambda_3=2$ koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyasini tuzing.

Yechish.

$$\vec{a}_1 \lambda_1 = 3\vec{a}_1 = (15; 12)$$

$$\vec{a}_2 \lambda_2 = -5\vec{a}_2 = (5; -10)$$

$$\vec{a}_3 \lambda_3 = 2\vec{a}_3 = (-20; -2)$$

$$\vec{a}_1 \lambda_1 + \vec{a}_2 \lambda_2 + \vec{a}_3 \lambda_3 = (15; 12) + (5; -10) + (-20; -2) = (0; 0)$$

Demak, ba'zida koeffitsiyentlarni shunday tanlash mumkinki, berilgan vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi nol vektorga teng bo'lsin. Koeffitsiyentlarni bunday tanlash har qanday vektorlar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lavermaydi. Bunda hamma koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo'la olmaydi deb faraz qilinadi.

2-ta'rif. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ chekli sondagi vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlar topilsaki, ular uchun

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = 0 \quad (9)$$

tenglik bajarilsa, u holda berilgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ sistema **chiziqli bog'langan sistema** deyiladi.

3-ta'rif. Agar (9) tenglik faqat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, u holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ sistema, **chiziqli erkli yoki chiziqli bog'lanmagan sistema** deyiladi.

4-ta'rif. Agar x_i ($i = 1, k$) sonlar uchun

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \quad (10)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi yoki $\vec{a}$ vektor x_i $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlarning **chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi**.

Masalan, $\vec{a} = (6; 4; 4)$ vektor $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (3, 2, 1)$ va $\vec{a}_3 = (1; -2; -3)$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, chunki

$$2\vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}$$

tenglik o'rinli, ya'ni

$$2\vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 = 2(1; 2; 3) + (3; 2; 1) + (1; -2; -3) = (6; 4; 4) = \vec{a}$$

III. Fazodagi chekli vektorlar sistemasining chiziqli bog'lanishi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlar sistemasining:

- a) kamida bitta vektori nol vektordan iborat bo'lsa;
- b) qandaydir 2 ta vektori proporsional bo'lsa, bu sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

2-xossa. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ sistema chiziqli bog'langan bo'lsa, istalgan $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$ sistema uchun

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \quad (11)$$

sistema ham chiziqli bog'langan bo'ladi.

3-xossa. Berilgan V fazoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, uning har qanday kism sistemasi ham chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

4-xossa. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlar sistemasining istalgan vektori bu sistema orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\overline{a_i} = 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + \dots + 1 \cdot \overline{a_i} + 0 \cdot \overline{a_{i+1}} + \dots + 0 \cdot \overline{a_m}$$

5-xossa. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lish uchun ulardan kamida bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarlidir.

5-ta'rif. P sonlar maydoni ustida ko'rilgan chiziqli fazoning biror chekli bo'lmagan vektorlar sistemasi o'zida kamida birorta chekli sondagi chiziqli bog'langan vektorlar sistemasini saqlasa, k vektorlar sistemasi ham o'zaro **chiziqli bog'langan deyiladi**. Agar k vektorlar sistemasining barcha chekli sondagi vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, k vektorlar sistemasi ham **chiziqli bog'lanmagan sistema deyiladi**.

6-ta'rif. Vektorlarning S sistemasi bazisi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi S' qism sistemasig aytildi:

1. S' chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi;
2. S sistemaning har bir vektori S' sistema vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

7-ta'rif. Agar V vektorlar fazosining o'zaro chiziqli bog'lanmagan shunday

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \dots, \overline{x_k} \quad (12)$$

vektorlar sistemasi mavjud bo'lsaki, V vektorlar fazosining qolgan barcha vektorlari $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ vektorlar sistemasi V **vektor fazoning bazisi deyiladi**.

8-ta'rif. V fazoning $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlari uchun

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} \quad (13)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ kortejga $\overline{a}$ vektorning $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ bazisga nisbatan **koordinata satri deyiladi**.

Agar 7-ta'rifni qanoatlantiruvchi (12) sistema chekli bo'lmasa, u holda bunday vektor fazoga cheksiz o'lchovli vektor fazo deyiladi.

9-ta'rif. Chekli vektorlar sistemasining rangi deb undagi chiziqli bog'lanmagan vektorlarning maksimal soniga aytiladi.

IV. 10-ta'rif. Agar V vektor fazoning biror

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n} \quad (14)$$

vektorlari sistemasining istalgan ikki vektorlari o'zaro ortogonal bo'lsa, (14) sistema ortogonal vektorlar sistemasi deyiladi.

Masalan: $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1)$ vektorlar sistemasi ortogonaldir, chunki

$$e_1 \cdot e_2 = (1; 0; 0) \cdot (0; 1; 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$e_1 \cdot e_3 = (1; 0; 0) \cdot (0; 0; 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$e_2 \cdot e_3 = (0; 1; 0) \cdot (0; 0; 1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

11-ta'rif. Agar ortogonal sistema qaralayotgan fazoning bazisi bo'lsa, bunday sistemaga **ortogonal bazis deyiladi**.

V. Vektorlar sistemasi iqtisodiyotda keng qo'llaniladi. Masalan, ishlab chiqariladigan mahsulot turlari, hajmlari va baholari vektorlar sistemasini tashkil qiladi.

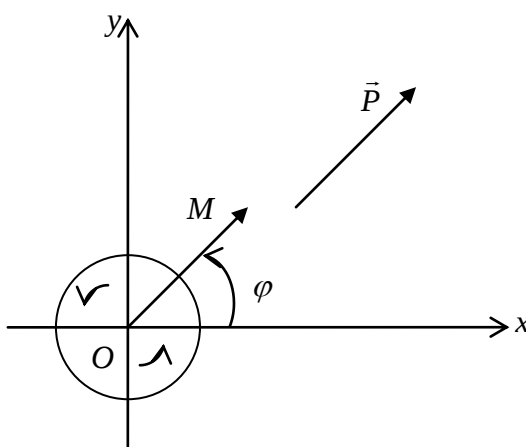
Har bir mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun xom-ashyo sarfi vektor tashkil qiladi.

Ishlab chiqarishni optimal rejasini tuzish vektorlar sistemasini qo'llashga asoslanadi.

VI. Ma'lumki, har bir vektorning yo'nalishini uning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari to'la aniqlab beradi. Masalan, tekislikdagi vektorni qarasak, u Ox va Oy o'qlari bilan mos ravishda α va β burchaklar tashkil etadiki, bu burchaklar uchun $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ munosabat o'rinlidir. Shu sababli, berilgan vektor yo'nalishini faqat bitta burchak yordamida ham aniqlasa bo'ladi deyish mumkin, lekin bunda tekislikda musbat aylanma yo'nalish kiritilgan bo'lishi shart.

Ta'rif. O'zaro parallel bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar aniqlagan **tekislikdagi aylanma yo'nalish** deb, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa (ya'ni π dan kichik) burilish burchagiga aytamiz.

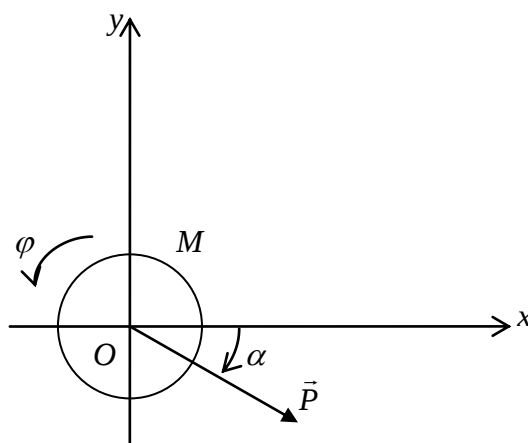
Musbat yo'nalish deb $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlar aniqlagan aylanma yo'nalishni tushunamiz.



1-rasm

Faraz qilaylik, $\vec{P}$ -tekislikning ixtiyoriy vektori bo'lsin. Uning boshini koordinata boshi O ga ko'chirib, $O\vec{M}$ radius-vektor bilan ustma-ust tushiramiz. φ - $\vec{P}$ vektorni Ox o'qi bilan tashkil etgan burchagi, ya'ni Ox ni musbat yo'nalishda burganda $O\vec{M}$ bilan ustma-ust tushish burchagi bo'lsin.

φ deb nainki aylanish burchagini, balki 2π dan oshiq qiymatlarni ham qabul qiladigan burchakni tushunamiz, ya'ni bu yo'nalishni necha marotaba 2π burchakka burmaylik, natijada yana dastlabki yo'nalishga qaytamiz.



2-rasm

φ manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkin, ya'ni Ox o'qni manfiy yo'nalishda aylantirib $\vec{P} = \overrightarrow{OM}$ vektor bilan ustma-ust tushirish mumkin. Lekin bunda φ burchak endi $\vec{P}$ vektorning Ox o'q bilan tashkil etgan burchagi bilan bir xil bo'lmaydi. Masalan, 2- rasmdagi holatda α π dan kichik bo'lgan musbat burchak, φ esa yo $-\alpha$, yoki $2\pi - \alpha$ ga teng. Shu sababli, agar α, β lar mos ravishda $\vec{P}$ vektorning Ox va Oy o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari bo'lsa, u holda φ

$$1\text{-chorakda bo'lsa: } \alpha = \varphi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$2\text{-chorakda bo'lsa: } \alpha = \varphi, \quad \beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$3\text{-chorakda bo'lsa: } \alpha = 2\pi - \varphi, \quad \beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$4\text{-chorakda bo'lsa: } \alpha = 2\pi - \varphi, \quad \beta = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

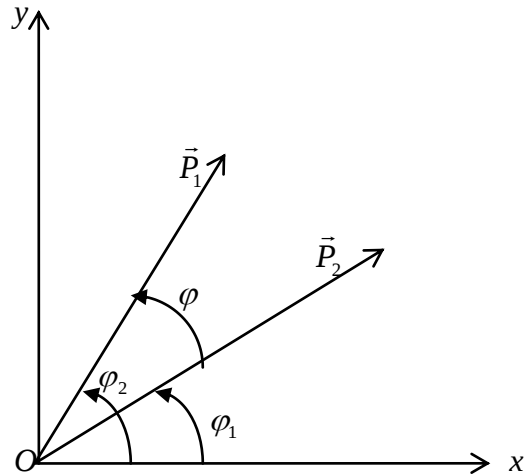
Agar $\vec{P} = \{X, Y\}$ bo'lsa, u holda

$$X = |\vec{P}| \cos \varphi, \quad Y = |\vec{P}| \sin \varphi, \quad |\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ekanligini e'tiborga olsak ,

$$\cos \varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (1)$$

kelib chiqadi. (1) formulalar $\vec{P}$ vektorning yo'nalishini to'la aniqlab beradi. φ ni qiymatini (1) ning bitta formulasidan, masalan $\sin \varphi$ orqali aniqlasa bo'ladi, lekin bu vektorning yo'nalishini aniqlash uchun yetarli emas, buning uchun $\cos \varphi$ ning ishorasini ham bilish kerak bo'ladi.



3-rasm

Faraz qilaylik, $\vec{P}_1 = \{X_1, Y_1\}$ va $\vec{P}_2 = \{X_2, Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar orasidagi burchakni, agar u $\vec{P}_1$ dan $\vec{P}_2$ ga qarab o'lchansa, $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ ko'rinishda ifodalaymiz; agar bu burchak yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, bu burchakni musbat qiymatlar bilan ifodalaymiz, aks holda bu burchak kattaligini manfiy qiymatlar bilan ifodalaymiz. $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar orasidagi burchakni topaylik. Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarning Ox o'q bilan tashkil etgan burchaklari mos ravishda φ_1 va φ_2 bo'lsa, u holda

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Bundan

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \sin \varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

yoki

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1,$$

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \quad (2)$$

$$\sin \varphi = \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \quad (3)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. (2) formulaning o'ng tomoni vektorlarning koordinatalariga nisbatan simmetrik bo'lsa, (3) formulaning o'ng tomoni, $\vec{P}_1$ bilan $\vec{P}_2$ ning o'rinlarini almashtirganda, o'z ishorasini teskarisiga almashtiradi. Shu sababli,

$$\begin{aligned} (\vec{P}_2, \vec{P}_1) &= -(\vec{P}_1, \vec{P}_2) + 2k\pi \\ \cos(\vec{P}_2, \vec{P}_1) &= \cos(\vec{P}_1, \vec{P}_2), \quad \sin(\vec{P}_2, \vec{P}_1) = -\sin(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Misol. $\vec{Q}=\{3; 4\}$ vektor bilan $\vec{Q} \wedge \vec{P}=60^\circ$ burchak tashkil etuvchi, uzunligi 2 bo'lgan $\vec{P}$ vektorni toping.

Yechish. Agar $\varphi=Ox$, $\vec{Q}$ desak, u holda $\varphi+60^\circ=Ox$, $\vec{P}$ bo'ladi. Shu sababli, $\cos \varphi=\frac{3}{5}$, $\sin \varphi=\frac{4}{5}$ ekanligi uchun

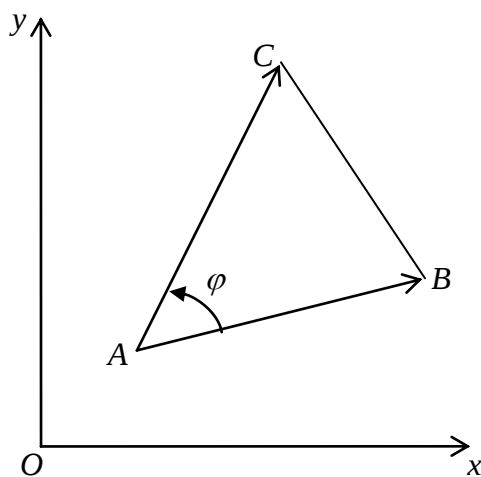
$$X=2 \cos (\varphi+60^\circ)=2\left(\cos \varphi \cos 60^\circ-\sin \varphi \sin 60^\circ\right)=$$

$$=2\left(\cos \varphi \frac{1}{2}-\sin \varphi \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{4}{5} \sqrt{3}=\frac{3-4 \sqrt{3}}{5},$$

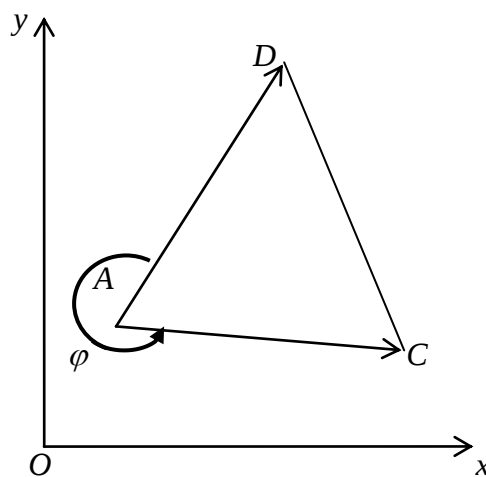
$$Y=2 \sin (\varphi+60^\circ)=2\left(\sin \varphi \cos 60^\circ+\cos \varphi \sin 60^\circ\right)=$$

$$=2\left(\frac{4}{5} \frac{1}{2}+\frac{3}{5} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4+3 \sqrt{3}}{5}$$

VII. Boshlari A nuqtaga keltirilgan $\vec{P}_1=A\vec{B}=\{X_1, Y_1\}$ va $\vec{P}_2=A\vec{C}=\{X_2, Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.



a)



b)

4-rasm

B va C uchlarini birlashtirib ABC uchburchakni hosil qilamiz. Shu uchburchak yuzini hisoblaylik. Agar $\varphi=(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ bo'lsa, ma'lumki

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right| \sin \varphi$$

(4)

Bu yerda, agar $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ vektorlar aniqlaydigan aylanma yo'nalish Oxy tekislikning musbat aylanma yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa (4-rasm, a)), yuza qiymati musbat, aks holda (4-rasm, b)) manfiy bo'ladi.

Endi (4) da $\sin \varphi$ o'rniga (3) ni qo'ysak:

$$S=\frac{1}{2}\left(X_1 Y_2-X_2 Y_1\right)=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{array}\right| \quad (5)$$

formulani hosil qilamiz.

Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarga tortilgan parallelogrammni ko'rsak, uning yuzi uchun

$$S = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi faraz qilaylik, ABC uchburchakning uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lsin. Berilgan uchburchakning yuzi $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuziga teng bo'ladi. Agar

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad \vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

ekanligini e'tiborga olsak, (5) formulaga ko'ra

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

yoki

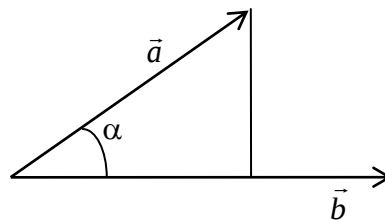
$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

VIII. Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz, ya'ni

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$$



5-rasm

Vektorning proyeksiyasini ta'rifiga ko'ra, $|\vec{a}| \cdot \cos \alpha$ (bu yerda $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$) $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektordagi proyeksiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (5-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. \vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a},$$

$$2^0. \vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$3^0. (\lambda \vec{a}) \circ (\mu \vec{b}) = (\lambda \mu) \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \quad (\lambda, \mu - \text{ixtiyoriy sonlar})$$

$$4^0. \vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

5⁰. $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

1⁰-xossaning isboti.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{b} \circ \vec{a}$$

2⁰, 3⁰, 4⁰-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5⁰-xossaning isboti. Zarurligi. $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ bo'lsin. U holda, $0 = \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ dan $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lgani uchun $\cos \alpha = 0$, o'z navbatida bundan $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a} \perp \vec{b}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarligi. Agar $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\cos \alpha = 0$, shu sababli

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ bo'ladi.}$$

5⁰-xossa vektorlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataladi.

4⁰ va 5⁰ - xossalarga asosan

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0$$

Endi agar $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \circ (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 \vec{i} \circ \vec{j} + \\ &+ x_1 z_2 \vec{i} \circ \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \circ \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 \vec{j} \circ \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \circ \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \circ \vec{j} + \\ &+ z_1 z_2 \vec{k}^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

Xususan, agar $\vec{a} = \vec{b}$ bo'lsa,

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

yoki

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib, fazoning ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d_{AB} ni quyidagicha topsa bo'ladi:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1-misol. (1, 1, 1) va (1, 2, 3) vektorlarning uzunligini toping.

Yechish.

$$|(1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |(1, 2, 3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

2-misol. $\vec{a} = (1, 0, 1)$ va $\vec{b} = (1, 2, 2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

Demak,

$$\cos \alpha = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Faraz qilaylik, berilgan $\vec{a}$ vektor x o'qi bilan α burchak, y o'qi bilan β burchak, z o'qi bilan γ burchak tashkil etsin. U holda

$$X = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha,$$

$$Y = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \beta,$$

$$Z = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma$$

ekanligidan

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (6)$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

kelib chiqadi.

(6) ni kvadratlarga ko'tarib, o'zaro qo'shsak,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1 \quad \text{munosabatni hosil qilamiz. (6) dan}$$

topiladigan $\cos \alpha$, $\cos \beta$ va $\cos \gamma$ qiymatlar $\vec{a}$ vektorning **yo'naltiruvchi kosinuslar** deb ataladi.

Agar $\vec{a} = \vec{e} = (l, m, n)$ ort bo'lsa, u holda

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$

bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 1,2 частях -М.: Наука, 2001.
2. Соатов Ё.У Олий математика. 1-5 Қисмлар. -Т.: О'Қитувчи, 1995.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под общей редакцией. А.П.Рябушко. в 3 ч. –Минск. «В». 2007.
4. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2 часть. - М.: Айрис Пресс, 2008.
5. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Oliy matematika misol va masalalarda, 1-qism. –Т.: O'zbekiston faylasuflar milliy jamiyati, 2007.
6. Бадалов Ф.Б., Шодмонов Ғ. Математик моделлар ва мухандислик масалаларини сонли ечиш усуллари. -Т.: ФАН, 2000.