

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
DASTURIY INJINIRING FAKULTETI
OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

MUSTAQIL ISH

Mavzu: Ikkinchi tartibli sirtlar.

Toshkent 2015

Mavzu: Ikkinchi tartibli sirtlar

Reja:

- 1. Sirt va uning tenglamasi**
- 2. Sfera**
- 3. Konus sirt**
- 4. Ellipsoid**
- 5. Giperboloidlar**
- 6. Paraboloidlar**
- 7. Foydalanilglaran adabiyot**

Ikkinchi tartibli sirtlar

1. Sirt va uning tenglamasi

Berilgan to'g'ri burchakli dekart kordinatlari sistemasida koordinatalari

$$F(x;y;z)=0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni **sirt** deb ataladi. (1) tenglama umuman **sirt tenglamasi** deb ataladi. Bu tenglama x , y , z o'zgaruvchilarning briga nisbatan yechiladi deb faraz qilamiz. Masalan, u tenglama z ga nisbata yechilishi mumkin bo'lsin, bu holda

$$z=f(x,y) \quad (2)$$

deb yozish mumkin, bunda $f(x,y)$ – x,y o'zgaruvchilarning funksiyasidir.

Sirtga berilgan yuqoridagi ta'rifga ko'ra sirt tenglamasi deb uch o'zgaruvchili shunday $f(x,y,z)=0$ yoki $z=f(x,y)$ tenglamaga aytiladiki, bu tenglamani sirtida yotgan har bir nuqtaning koordinatalari qanoatlantiriladi. Shunday qilib fazodagi nuqtalarning geometrik o'rni deb qaralgan har qanday sirt, bu nuqtalar koordinatalarini o'zaro bog'lovchi (1) tenglama bilan tasvirlanadi.

Aksincha, x ; y ; z ; o'zgaruvchilarni bog'lovchi har qanday (1) tenglama koordinatalari, bu tenglamani qanoatlantiradigan fazodagi nuqtalarning geometrik o'rnini, ya'ni sirtini aniqlaydi.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida o'zgaruvchi x ; y ; z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0 \quad (3)$$

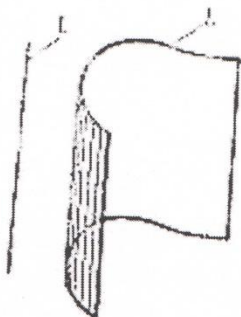
algebraik tenglama bilan tasvirlangan sirtlar **ikkinchi tartibli sirtlar** deb ataladi. Bu tenglamada A , B , C , D , E , F koeffisientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak.

2. Sfera

Ma'lumki fazoda markaz deb ataluvchi $O(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni **sfera** deb ataladi. Markazdan sferagacha bo'lgan masofa uning radiusi deyiladi. Ta'rifga ko'ra $O(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan sfera ustidagi ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqttagacha bo'lgan masofa R radiusi bo'lib, u qo'yidagicha hisoblanadi:

$R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ yoki $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2$ (5). Endi (5) tenglamada qavslarni ochamiz $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$. Bu x, y, z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamadan iborat.

3. Silindrik sirtlar

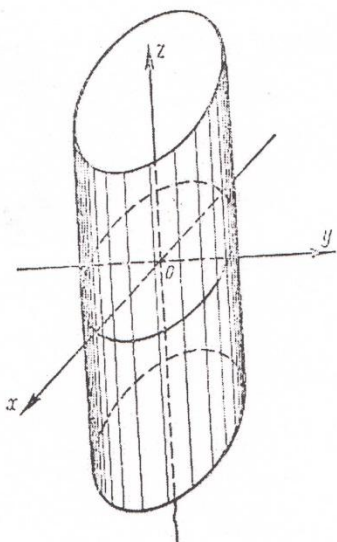


1-chizma

Berilgan l to'g'ri chiziqqa parallel va L chiziqni kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan **sirt silindrik sirt** deb ataladi. Bunda L chiziq silindrik sirtning yo'naltiruvchisi, l to'g'ri chiziq esa uning **yasovchisi** deyiladi (1-chizma).

To'g'ri burchakli dekart koordinatlari sistemasida $f(x,y)=0$ (6) tenglama yasovchisi oz o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtni ifoda qiladi. Shunga ko'ra $f(x,z)=0$ tenglama yasovchi

oy o'qqa yasovchisi ifoda



2-chizma

aniqlangan yasovchisi o'qlari a va b iborat silindirga chizma).

2.

parallel silindrik sirtni va $t(y,z)=0$ esa ox o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtni qiladi.

Misollar:

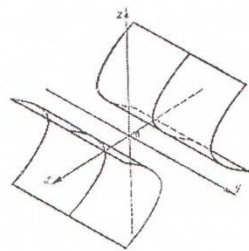
1. Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama bilan sirt **elliptik silindir** deb ataladi. Uning oz o'qiga parallel, yo'naltiruvchisi yarim b bo'lgan xoy tekislikda yotuvchi ellispdan Xususiyl holda $a=b$ bo'lsa to'g'ri doiraviy ega bo'lamiz. Uning tenglamasi $x^2 + y^2 = a^2$ (8) ko'rinishda bo'ladi (2-

Ushbu

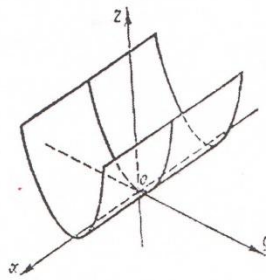
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt **giperbolik silindir** deb ataladi. Bu sirtning yasovchi oy o'qqa parallel, yo'naltiruvchi esa oxz tekislikda joylashgan, haqiqiy yarim o'qi a va mavhum yarim o'qi b ga teng bo'lgan giperboladir (3-chizma).

1. Ushbu $y^2 = 2pz$ tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt **parabolik silindir** deb ataladi. Bu sirtning yasovchisi ox o'qqa parallel bo'lib yo'naltiruvchisi esa parabolan iborat bo'ladi (4-chizma).



3-chizma.

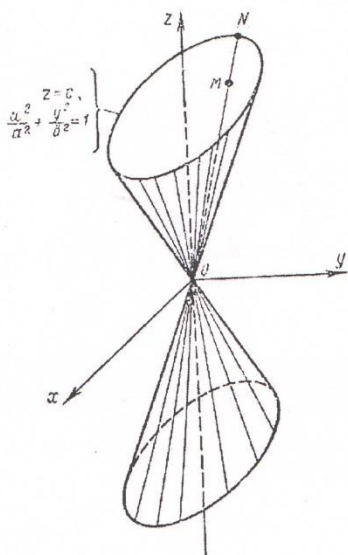


4-chizma.

Masalan, S aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2+z^2=25$ sirlarning kesishishi natijasida hosil bo'ladi va u

$$\begin{cases} z=3 \\ x^2+y^2+z^2=25 \end{cases} \quad (11)$$

sistema orqali beriladi.



5-chizma

Ikkinchi tomndan, bu aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2=16$ silindirik sirlarning kesishish chizig'i deb ham qaralishi mumkin. Bu holda S aylana

$$\begin{cases} z=3 \\ x^2+y^2=16 \end{cases} \quad (12)$$

sistema orqali beriladi. Ko'rinib turibdiki, (11) va (12) sistemalar teng kuchlidir.

Sirlarning shakli va ulchamlarini o'rganishda ularni koordinat tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish va keimda hosil bo'lgan chiziqlarning koordinata tekisliklariga proyeksiyalarni qarash muhim ahamiyatga ega.

3. Konus sirt

Berilgan L chiziqlini kesuvchi va berilgan P nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt *konus sirt* deb ataladi. Bunda L chiziq konus sirtning *yunaltiruvchisi*, konus sirtini tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarning har biri unng *yasovchisi*, P esa konus sirtning *uchi* deyiladi (5-chizma).

Misol uchun uchi koordinata boshida, yo'naltiruvchi esa $z=c$ tekislikda yotuvchi va yarim o'qlari a va b lar bo'lib

$$\begin{cases} z=c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (13).$$

ellipsdan iborat bo'lgan konus sirtini qaraymiz. Bu sirt *ikkinchi tartibli konus* deyiladi.

4. Ellipsoid

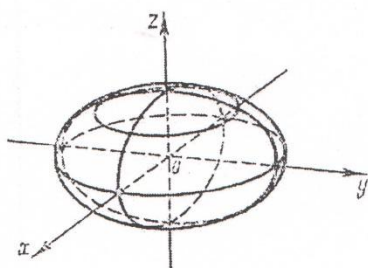
Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (14)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt **ellipsoid** deb ataladi. a, b, c sonlar **ellipsoidning yarim o'qlari** deb ataladi. Bu tenglamada x, y, z o'zgaruvchi koordinatalar juft darajada qatnashganligi uchun ellipsoid koordinata tekisliklariga simmetrik joylashgan bo'ladi. Ellipsoidning formasini tasavvur qilish uchun uni koordinata tekisliklar bilan kesamiz. Masalan, (14) ellipsoidni oxy tekislikka parallel bo'lgan $z=h$ tekislik bilan kessak kesimda ellipsis hosil bo'ladi. Haqiqatan

$$\left. \begin{array}{l} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{array} \right\}$$

tenglamalardan z ailikatani chiqarsak



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

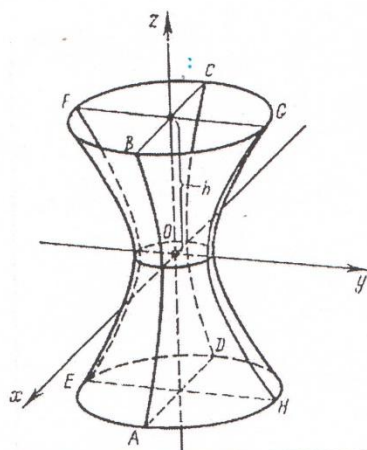
chiziq hosil bo'ladi. Bundan

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

6-chizma.

hosil bo'ladi. Bu esa yarim o'qlari qavs ichida turgan sonlardan iborat bo'lgan ellipsdan iboratdir. Ellipsoid boshqa koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish natijasida kesimda ellipslar hosil bo'lishini ko'rish qiyin emas. Ellipsoid 6-chizmada tasavirlangan ko'rinishga ega.

Ko'rinib turibdiki, ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kessak ham kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Xusussiy holda $a=b$ bo'lsa (14) tenglama ellipsoidni, $a=b=c$ bo'lsa sferani ifoda etadi.



5. Giperboloidlar

A. Bir pallali giperboloid

Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt **bir pallali giperboloid** deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $y=0$ tekislik bilan kessak, $0xz$ tekislikda yotadigan ABCD giperbola hosil bo'ladi. Uning tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Xuddi shuningdek bir pallali giperboloidni $x=0$ tekislik bilan kessak kesimda EFGH giperbola hosil bo'lib uning tenglamasi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

dan iborat bo'ladi (7-chizma).

Bir pallali giperboloidni $z=h$ tekislik bilan kesilsa teng-lamasi qo'yidagi ko'inishda bo'lgan BFCG ellips hosil bo'ladi:

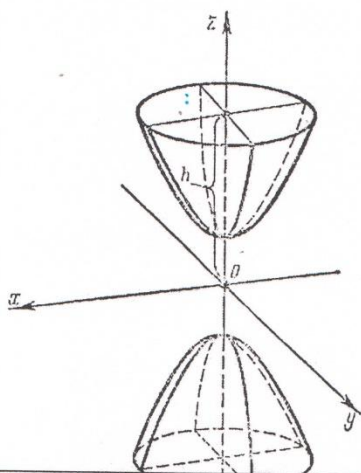
(18)

Agar $h=0$ bo'lsa eng kichik yarim o'qlara ega bo'lgan oxy tekislikda yotuvchi ellips hosil bo'ladi.

B. Ikki pallali giperboloid.

Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt **ikki pallali giperboloid** deyiladi.

Kooridanata tekisliklari ikki pallali giperboloid uchun simmetriya teiksliklaridan iborat. Bu sirtni oxz va oyz tekisliklari bilan kesilsa mos ravishda quyidagi giperbollar hosil bo'ladi.



$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

8-chizma.

Bu giper bolalar 8-chizmada tasvirlangan.

Agar ikki pallali giperbolaidni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} &= 1 \\ Z &= h \end{aligned} \right\}$$

tenglama bilan ifodalanuvchi ellipsis hosil bo'ladi.

6. Paraboloidlar

A. Elliptik paraboloid.

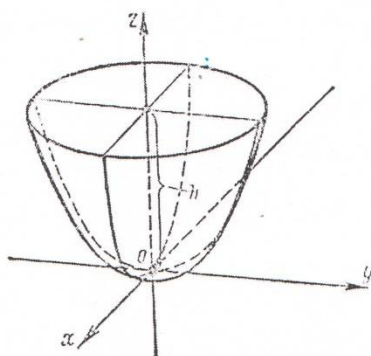
Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (20)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi. Bu tenglamada p va q lar bir xil ishorali deb hisoblanadi. Aniqlik uchun $p>0$, $q>0$ deb olinadi.

Elliptik parabolaidni oxz va oyz koordinata tekisliklari bilan kesish natijasida kesimda mos ravishda

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{x^2}{2p} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{y^2}{2q} \\ x &= 0 \end{aligned} \right\}$$



9-chizma

parabolalar hosil bo'ladi. Agar elliptik paraboloidni $z=h$ ($h>0$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} &= 1 \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ellipis hosil bo'ladi. Uning yarim o'qlari $a = \sqrt{2ph}$ $b = \sqrt{2qh}$ bo'ladi (9-chizma).

$$\text{Agar } p=q \text{ bo'lsa, } 2pz=x^2+y^2 \quad (22)$$

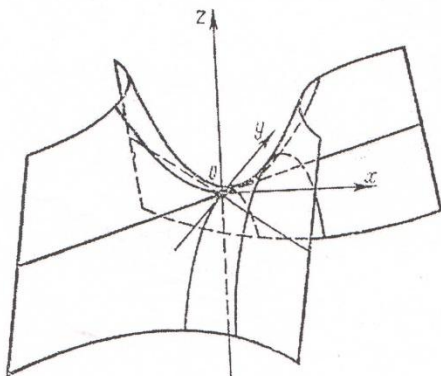
aylanma parabolaidda ega bo'lamiz.

B. Giperbolik parabolaidd

Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad (23)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt **giperbolik parabolaidd** deb ataladi. Aniqlik uchun $p>0$, $q>0$ deb hisoblandi. Bu sirtni oxz tekislik bilan kesilsa, natijada



10-chizma.

$$2pz=x^2, y=0 \quad (24)$$

parabola hosil bo'ladi (10 chizma).

Agar giperboloidni $x=h$ tekislik bilan kesilsa

$$\left. \begin{aligned} 2z &= \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \\ x &= h \end{aligned} \right\} \text{yoki} \quad \left. \begin{aligned} 2q(z - \frac{h^2}{2p}) &= -y^2 \\ x &= h \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

parabola hosil bo'ladi.

h ning har xil qiymmatlarda oyz tekislikka paralel bo'lgan tekisliklarda yotuvchi parabolalar oilasiga ega bo'lamiz.

Giperbolik parabolaiddni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2h \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziq haqiqiy o'qi $z=h$ tekislikda, $h>0$ bo'lganda, ox o'qqa paralel giperbolani, $h<0$ bo'lganda, esa haqiqiy o'qi oy uqqa paralel giperbolani tasvirlaydi. $h=0$ bo'lganda (26) tenglama $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ ko'rinishni oladi.

Bu tenglama esa $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ va $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ tenglamalarga ajraladi. Bular koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamalaridir.

7. Foydalanilgan adabiyotlar
testing.uz sayti