

**ANDIJON MASHINASOZLIK
INSTITUTI**

“MASHINASOZLIK” FAKULTETI

**“OLIY MATEMATIKA”
KAFEDRASI**

“Oliy matematika” fanidan

FUNKSIYANING LIMIT QIYMATI.

mavzusida yozilgan

REFERAT

Bajardi:

TJICHAB yo'nalishi 2 –kurs talabasi Iminov N.A.

Andijon 2016

REJA:

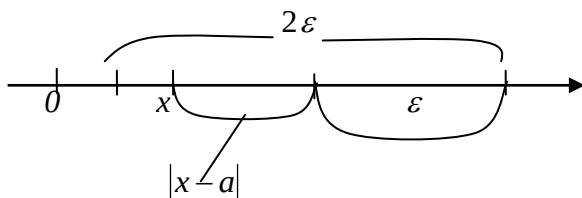
1. O'zgaruvchi miqdorning limiti.
2. Funksiyaning limiti.
3. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.
4. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning asosiy hossalari.
5. Limitlar haqidagi asosiy teoremlar.
6. Birinchi ajoyib limit.
7. e soni
8. Funksiyaning uzluksizligi.
9. Uzluksiz funksiyaning hossalari.

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o'tish amalidir. Bu amal analiz kursida turli ko'rinishlarda uchraydi. Bu bobda o'zgaruvchi miqdorning limiti tushunchasiga asoslangan sodda ko'rinishlar ko'riladi.

Agar masala shartida berilgan miqdor har xil sonli qiymatlarni qabul qilsa, bu miqdor **o'zgaruvchi miqdor** deyiladi.

1 - ta'rif. Agar $x-a$ ayirmaning absolyut qiymati x ning o'zgarishi jarayonida avvaldan berilgan har qanday masbat kichik son ε dan kichik bo'lsa va x ning bundan keyingi o'zgarishida ham bu sondan kichikligicha qolsa, a o'zgarmas son x ning limiti deyiladi.

Agar a o'zgarmas son x ning limiti bo'lsa x miqdor a ga intiladi deyiladi va bu $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ yoki $x \rightarrow a$ ko'rinishda yoziladi. Yuqorida aytilgan limit tushunchasining geometrik talqini quyidagidan iborat. Agar o'zgaruvchi x ning a o'zgarmas son limit nuqtasi bo'lsa, bunda oldindan berilgan markazi a va radiusi ε ga teng, x ning shunday qiymati topiladiki bu qiymatlar hammasi shu a nuqtaning ε atrofida yotadi.



Endi bir necha masalalarni ko'ramiz.

1 - misol. Aytaylik ushbu o'zgaruvchi x

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{3}{4}; \quad x_n = \frac{n}{n+1}; \dots$$

qiymatlari qabul qilinganda uning limiti $a=1$ bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan modullar ayirmasidan

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

ihtiyoriy musbat ε sonini olamiz. Bunda $|x_n - 1| < \varepsilon$ bajariladi agarda $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ va $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ bo'lganda.

Agar N biror natural sondan iborat bo'lib shu shartni qanoatlantirsa $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ va $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

U holda hamma $n \geq N$ lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|x_n - 1| = \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

Bu tengsizlik shuni ko'rsatadiki yuqoridagi x o'zgaruvchining limit qiymati 1 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2 - misol. O'zgaruvchi x qiyidagi qiymatlarni qabul qilganda

$$x_1 = 2; x_2 = 1\frac{1}{2}; x_3 = 1\frac{1}{n}; \dots x_n = 1\frac{1}{n}; \dots$$

uning limiti $a=1$ bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan, agar

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

Demak ixtiyoriy musbat ε soni uchun n nomerdan boshlab $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ bo'lib $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, yuqoridagi x o'zgaruvchining limiti 1 ga tengligini ko'rsatadi.

2 -ta'rif. Agar x o'zgaruvchi miqdor o'zini o'zgarish jarayonida avvaldan berilgan har qanday musbat son M dan katta bo'lsa va bundan keyingi o'zgarishda ham o'sha sondan kattaligicha qolsa x cheksiz katta miqdor deyiladi, ya'ni $|x| > M$.

3 -misol. O'zgaruvchi x quyidagi qiymatlarni qabul qilsin.

$$x_1 = -2; x_2 = 4; x_3 = -8; x_n = (-2)^n, \dots,$$

Bu holda x cheksiz katta miqdor deyiladi, chunki $n > N = [\log_2 M]$ bo'lganda $|(-2)^n| > M$ bo'ladi, bu yerda $[x]$ simvol x ning butunqismini bildiradi.

II. Faraz qilamiz $X = \{x\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin, a nuqta uning limit nuqtasi va shu to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan deb ko'ramiz.

1 -ta'rif. (Geyne ta'rifi) Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\} (x_n \neq a, n=1, 2, \dots)$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b chekli (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) limiti deb aytiladi va uni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yoki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$ kabi belgilanadi.

1 - misol. Ushbu $f(x) = x^5$ funksiyaning $x \rightarrow 2$ dagi limiti 32 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. 2 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\} (x_n \neq 2, n=1, 2, \dots)$ ketma-ketlikni olamiz. Mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik quyidagi $\{f(x_n)\} = \{x_n^5\}$ ko'rinishda bo'ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarustidagi arifmetik amallarga binoan

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^5 = 2^5 = 32$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = 32$$

2 - misol. Ushbu $f(x) = \cos 1/x$ ($x \neq 0$) funksiyaning $x \rightarrow 0$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. 0 ga intiluvchi ikki turli

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}, \quad \{x''_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\}$$

ketma-ketlikni olaylik, u holda

$$f(x'_n) = \cos \frac{(4n+1)\pi}{2} = 0$$

$$f(x''_n) = \cos 2n\pi = 1$$

bo'lib $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0$, bo'ladi. Bu esa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud emasligini ko'rsatadi.

2 -ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda b son $f(x)$ **funksiyaning a nuqtadagi ($x \rightarrow a$ dagi) limiti deb** ataladi.

3 - misol. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiyaning $x = \pi/2$ nuqtadagi limiti 1 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. Demak $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra δ ni $\delta = \varepsilon$ deb olsak u holda $|x - \pi/2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|\sin x - 1| = \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| = \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta = \varepsilon$$

munosabat beriladi. Bundan, ta'rifga ko'ra $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$ ekani kelib chiqadi. Faraz qilamiz $x \{x_n\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi va shu to'plamda $y = f(x)$ funksiyasi aniqlangan bo'lsin.

3 -ta'rif. (Geyne ta'rifi). Agar x to'plamining nuqtalaridan tuzilgan va bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa shu b son $f(x)$ **funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti** deb aytiladi.

4 -ta'rif. (Koshi ta'tifi) Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topilsaki, argument x ning $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ qiymatlari uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ **funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti** deb aytiladi. Funksiyaning o'ng (chap) limitlari quyidagicha belgilanadi.

$$\lim_{x_n \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ yoki } f(a+0) = b$$

$$\lim_{x_n \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ yoki } f(a-0) = b$$

4 - misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ \frac{\cos x}{2}, & \text{agar } x < 0 \end{cases} \quad \text{bo'lsa}$$

Funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o'ng va chap limitlarini toping.

Yechish. Yuqoridagi funksiya limiti ta'rifidan foydalanib shularni hosil qilamiz:

$$\lim_{x_n \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x_n \rightarrow +0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x_n \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x_n \rightarrow +0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

III. Agar funksiyaning argumenti x cheksizlikka va aniq ishorali cheksizlikka intilsa, funksiyaning limit qiymatini quyidagicha ta'riflaymiz.

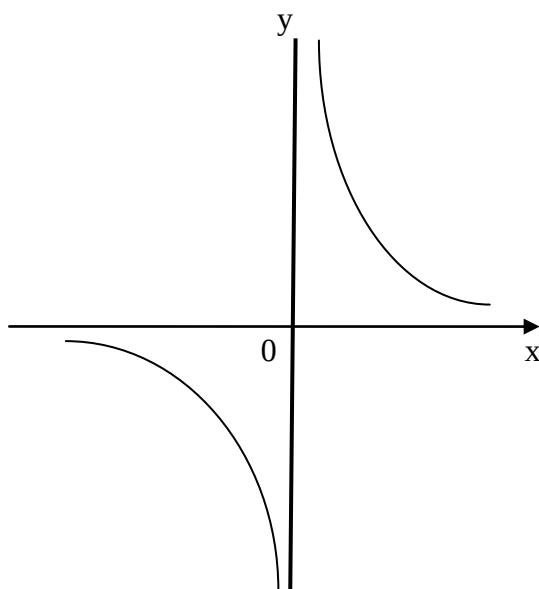
1 -ta'rif. Agar argument qiymatlardan tuzilgan ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos ketma-ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b son $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ **funksiyaning limit qiymati** (yoki $x \rightarrow \infty$ da funksiya limiti) deyiladi.

$x \rightarrow \infty$ da funksiyaning limit qiymatini belgilash uchun quyidagi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ simvolikadan foydalaniladi.

2 - ta'rif. Agar argument qiymatlaridan tuzilgan va elementlari biror nomerdan boshlab, musbat (manfiy) bo'lgan ixtiyoriy cheksiz katta ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b son argument x musbat (manfiy) cheksizlikka intilsa $f(x)$ **funksiyaning limit qiymati** deyiladi. Bu holda simvolik belgilashlarni quyidagicha yozamiz.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b, \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \right)$$

1 - misol. Ushbu $f(x) = 1/x$ funksiyaning ko'ramiz bu funksiya $x \rightarrow \infty$ da 0 ga teng bo'lgan limit qiymatiga ega. Haqiqatdan ham, agar $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ argument qiymatlaridan tuzilgan cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa



1- rasm

U holda $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik va shuning uchun uning limiti 0 ga teng bo'ladi, ya'ni (1 rasm)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

3 - ta'rif. $y = f(x)$ funksiyasi belgilangan biror to'plamda **chegaralangan** deyiladi, agarda shunday musbat son ($M > 0$) mavjud bo'lsaki, shu to'plamga tegishli x argumentning hamma qiymatlari uchun $|f(x)| \leq M$ o'rinli bo'lsa, aks holda funksiya **chegaralanmagan** deyiladi. Shunday to'plam sifatida oraliq yoki segment va butun sonlar o'qini olish mumkin.

2 - misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalari $-\infty < x < +\infty$ da aniqlangan bo'lib, x ning ixtiyoriy qiymatida quyidsagilar o'rinli bo'ladi.
 $|\sin x| \leq 1$ va $|\cos x| \leq 1$

1 - teorema. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lsa va bunda b chekli sondan iborat bo'lsa u holda $f(x)$ funksiyasi $x \rightarrow a$ da chegaralangandir.

Isboti. Quyidagi tenglikdan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday δ topiladiki $a - \delta < x < a + \delta$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi.

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ yoki } ||f(x)| - |b|| < \varepsilon$$

Buning bajarilishi $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ da chegaralanganligini ko'rsatadi.

2 - teorema. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ bo'lsa, u holda $y = \frac{1}{f(x)}$ funksiya $x \rightarrow a$ da chegaralangan bo'ladi.

Isboti teorema shartiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $x = 0$ nuqtaning atrofida

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ yoki } ||f(x)| - |b|| < \varepsilon \\ -\varepsilon < |f(x) - |b|| < \varepsilon \text{ yoki } |b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$$

va oxirgi tengsizliklardan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon};$$

Agar $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$ desak shuni hosil qilamiz:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}$$

va oxirginatija shuni ko'rsatadiki $y = \frac{1}{f(x)}$ funksiyaning $x \rightarrow a$ da chegaralangandir.

IV. 1 - ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada ($x \rightarrow a$ da) **cheksiz kichik miqdor** deyiladi. Yozilgan ta'rifni quyidagicha aytish mumkin. Ixtiyoriy oldindan berilgan musbat $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ uchun, shunday $\delta > 0$ topiladiki, hamma x lar $|x - a| < \delta$ da $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Misol sifatida quyidagilarni ko'rish mumkin.

$$y = x^2, \text{ agarda } x \rightarrow 0 \text{ da}$$

$$y = x - 1, \text{ agarda } x \rightarrow 1 \text{ da}$$

$$y = x/x; \text{ agarda } x \rightarrow \infty \text{ da}$$

$y=2^x$, agarda $x \rightarrow -\infty$ da

Cheksiz kichik funksiyalar quyidagi hossalarga ega.

1. Ikkita cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi yoki ayirmasi yana kichik funksiya bo'ladi.

2. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga (xususan o'xgarmas funksiya) ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya.

V. 1 - teorema. O'zgarmas funksiyaning limiti o'ziga teng. $\lim c = c (c = \text{const})$.

2 - teorema. Limitga ega bo'lgan chekli sondagi o'zgaruvchi miqdorlaralgebraik yig'indisining limiti, bu o'zgaruvchilar limitining yig'indisiga teng.

$$\lim(U_1 + U_2 + \dots + U_k) = \lim U_1 + \lim U_2 + \dots + \lim U_k$$

3 - teorema. Limitga ega bo'lgan chekli sondagi o'xgaruvchi miqdorlar ko'paytmasining limiti bu o'zgaruvchilar limitlarini ko'paytmasiga teng

$$\lim(U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_k) = \lim U_1 \cdot \lim U_2 \cdot \dots \cdot \lim U_k$$

4 - teorema. Limitga ega bo'lgan ikki o'zgaruvchi miqdor bo'linmasining limiti, agar bo'luvchining limiti 0 ga teng bo'lmasa, bo'linuvchi va bo'luvchi limitlarining nisbatiga teng,

$$\text{ya'ni } \lim \frac{U}{V} = \frac{\lim U}{\lim V}; \quad (\lim V \neq 0)$$

Isboti. Agar $\lim U = a$, $\lim V = b \neq 0$ bo'lsa bundan $U = a + \alpha$, $V = b + \beta$ bo'ladi α, β cheksiz kichik miqdorligidan

$$\frac{U}{V} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)};$$

$$\text{yoki } \frac{U}{V} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}; \quad (*)$$

(*) dan a/b o'zgarmasligidan $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}$ cheksiz kichik miqdorligidan $\alpha b - \beta a$ -ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Kasrni maxraji $b(b + \beta)$ ni limiti $b^2 \neq 0$ ga teng, demak $\lim \frac{U}{V} = \frac{a}{b} \frac{\lim U}{\lim V}$;

VI. 1 - teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi limit qiymati mavjud bo'lib, u birga teng

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

Isboti. Agar $0 < x < \pi/2$ uchun $0 < \sin x < \tan x$ tenglikning o'rinaliligidan, tengsizlikni hamma had $\sin x$ ga teng bo'lib

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Oxirgi tengsizliklar x ning $-\pi/2 < x < 0$ shartini qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun ham o‘rinlidir. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\cos(x) = \cos(-x)$ va $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)}$ ekanini ko‘zda tutish etarli. $\cos x$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib $\cos x$, 1 va $\frac{\sin x}{x}$ funksiyalar uchun $x=0$ nuqtaning biror δ atrofida bir xil limit qiymatiga ega bo‘ladi.

Demak bunda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Teorema isbotlandi.

IV. Quyidagi o‘zgaruvchi miqdorni ko‘ramiz. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bunda n o‘suvi o‘zgaruvchi miqdor va $n=1, 2, 3, \dots$

1 - teorema. O‘zgaruvchi miqdor $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $n \rightarrow \infty$ intilganda limit qiymati mavjud bo‘lib u 2 va 3 son orasida yotadi.

Isbot. Nyuton binomi formulasidan quyidagilarni yozish mumkin.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned} \quad (1)$$

(1) ifodada algebraic almashtirishlardan so‘ng

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Oxirgi tenglik n ning o‘sib borishi o‘zgaruvchi miqdor $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ni o‘sib borishini ko‘rsatadi. Haqiqatdan, agar n ni $n+1$ ga almashtirsak $\frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ va h.k.

Bundan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Afar shuni e'tiborga olsak $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$ va h. k. (2) ifodadan yozish mumkin

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$$

Bundan

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} < \frac{1}{2^{n-1}};$$

Shu tengsizlikni yozish mumkin $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$ va o'ng tarafidagi ifoda geometrik progressiyani tashkil qiladi va $q=1/2$ $a=1$ progressiyani birinchi hadidan iborat.

Shuning uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3$$

Endi hamma n lar uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hosil qilamiz.

$$\text{Yuqoridagi (2) dan } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

shunday qilib quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (3)$$

Demak (3) o'zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar o'zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - o'suvchi va chegaralangan bo'lsa bu miqdor limit qiymata ega bo'ladi va bu limitni e deb belgilaymiz. (3) tengsizlikni shunday yozish mumkin: $2 \leq e \leq 3$

Bu esa teoremani isbotini beradi.

Bunda e irratsionalson va uning qiymati $e=2.7182818284\dots$ ga teng

2 - teorema. $f(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ da limit qiymati mavjud va u e soniga teng.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (4)$$

Isboti 1. Aytaylik $x \rightarrow +\infty$, va quyidagi shu tengsizlik o'rinli bo'lsa

$$n \leq x < n+1$$

Yozish mumkin $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$.

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Agar $x \rightarrow \infty$ da $n \rightarrow \infty$ intiladi. Endi quyidagi limitlarni topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

Demak shularga asosan

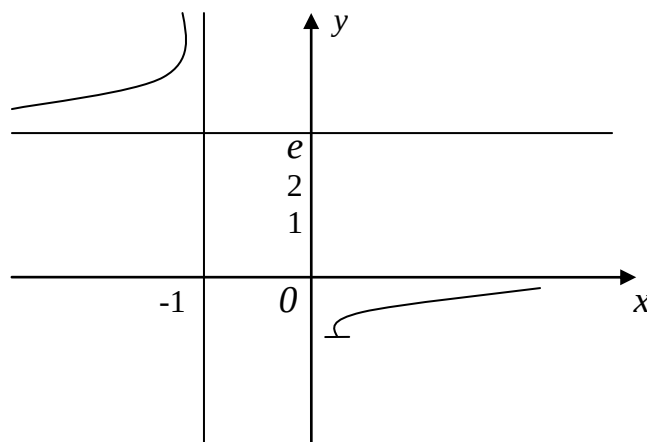
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (5)$$

2. Aytaylik, endi $x \rightarrow -\infty$. Agar yangi o'zgaruvchi $t = -(x+1)$ olsak yoki $x = -(t+1)$ desak $t \rightarrow +\infty$ da $t \rightarrow -\infty$ bo'ladi.

Yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)' \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Oxirgi ifoda teoremani isbotini beradi. Endi $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiyani grafigini ko'rsatamiz.



Agar (5) da $1/x = \alpha$ bo'lsa $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \neq 0$) va shuni hosil qilamiz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Yechish. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz va (5) da yozamiz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3$$

Agar $y = \log_e x$ funksiya uchun $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gat eng bo'lsa bu funksiya uchun $y = \ln x$ belgini ishlatamiz. Demak, asosi e bo'lgan logarifmlar natural logarifmlar deb ataladi, ular uchun $\ln x$ belgi ishlatiladi. O'nli va natural logarifmlar quyidagi munosabatlar bilan bog'langan

$$\lg N = \text{Min} N \quad (6)$$

$$\ln N = 1 / M \cdot \lg N \quad (7)$$

Bu yerda M natural logarifmlardan o'nli logarifmlarga o'tish moduli.

$$\lg N = 0.4343 \ln N \quad (8)$$

$$\ln N = 2.3031 \lg N \quad (9)$$

Misollar. Jadvaldan foydalanmasdan hisoblang.

$$1) \ln 100 = \ln 10^2 = 2 \ln 10 = 2 \cdot 2,303 = 4,606$$

$$2) \ln 0,001 = \ln 10^{-3} = -3 \ln 10 = -3 \cdot 2,303 = -6,909$$

$$3) \ln \sqrt{10} = \frac{1}{2} \ln 10 = \frac{1}{2} \cdot 2,303 = 1,151$$

IIIV. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ aniqlangan bo'lib $x_0 (x_0 \in R)$ to'plamining limit nuqtasi bo'lsin.

1 -ta'rif. (Koshi ta'rifi). $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = f(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti $x \in X$ ning $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik berilsa $f(x)$ **funksiya** x_0 **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

1 - misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{x+11}$ funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini ko'rsating.

Yechish. $\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta > 0$ soni $\delta = 4\varepsilon$ bo'lsin deb qaralsa, u holda $|x - 5| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+11} - 4| = \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+11} + 4|} < \frac{|x-5|}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon$$

bu esa ko'rilayotgan funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

2 - ta'rif. (Geyne ta'rif) Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona $f(x_n)$ ga intilsa, $f(x)$ **funksiya** x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ musbat o'rinli bo'lsa, ushbu

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ munosabat ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x - x_0$ ayirma argument orttirmasi $f(x) - f(x_0)$ esa funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy ($\Delta f(x_0)$) kabi belgilanadi: yani:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Demak $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ natijada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ munosabat } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \text{ ko'rinishiga ega bo'ladi.}$$

Shunday qilib $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

2 - misol. Ushbu $f(x) = \cos x$ funksiyaning $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $\forall x_0 \in R$ nuqtani olib unga Δx orttirmasi beraylik. Natijada

$f(x) = \cos x$ ham ushbu $\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0$ orttirmaga ega bo'lib, va $-\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$|\Delta y| = |\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

musbatga ega bo'lamiz. Bundan esa $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya $x \in R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 (x_0 \in X)$ to'plamning (o'ng va chap) limit nuqtasi bo'lsin. Bunda $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiya uchun quyidagi uch hodan bittasigina bajariladi:

1) chekli $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ chap va o'ng limitlar mavjud va

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (10)$$

tenglik o'rinli. Bu holda $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da uzluksiz bo'ladi.

2) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ lar mavjud, lekin (10) tengliklar bajarilmaydi u holda $f(x) \rightarrow X = X_0$ nuqtada **bir tur uzilish**ga ega deyiladi.

3) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ larning birortasi cheksiz yoki mavjud emas. Bu holda x_0 nuqtada **ikki tur uzilish**ga ega deyiladi.

4) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ **bo'lsa bunday uzilish, bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish** deyiladi.

3 - misol. Ushbu $f(x) = [x]$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega ekanligini ko'rsating.

Yechish. Demak

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$$

Bundan esa berilgan funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada, birinchi tur uzilishga ega ekanligi kelib chiqadi.

IX. Berilgan $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1 - teorema. Agar $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa u holda

$$f(x) \pm q(x), f(x) \cdot q(x), \\ \frac{f(x)}{q(x)}: (q(x) \neq 0), \forall x \in X$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1 - misol. Ushbu $f(x) = 3x^3 + \sin^2 x$ funksiyaning $x = R$ nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. $\varphi(x) = x$, $q(x) = \sin x$ funksiyalar R uzluksiz. Bundan $f(x)$ funksiyani $f(x) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + \sin x \cdot \sin x$ ko'rinishda yozamiz, u holda uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko'ra $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

Uzluksiz funksiyalarni global hossalari:

1) x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2) Agar $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ o'z

ishorasini saqlaydi.

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya X to'plamda $z = \varphi(y)$ funksiya Y to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

2 - teorema. (Murakkab funksiya uzluksizligi haqida). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $z = \varphi(y)$ funksiya x_0 ga mos kelgan $f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa $z = \varphi(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi uzluksiz funksiyalarning global hossalari teorema shakliga keltiramiz.

3 - teorema. (Bolsano-Koshining 1- teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, segmentning a va b nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday $c (a < c < b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya 0 ga aylanadi: $f(c) = 0$.

4 - teorema. (Bolsano-Koshining 2- teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib uning a va b nuqtalarida $f(a) = A$, $f(b) = B$ qiymatlariga ega va $A \neq B$ bo'lsa, A va B orasida har qanday C son olinganda ham a va b orasida shunday c nuqta topiladiki $f(c) = C$ bo'ladi.

5 - teorema. (Veyershtassning 1- teoremasi) Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda quyi chegaralariga erishadi.

2 - misol. Ushbu $f(x) = \frac{|x| - x}{x^2}$ funksiyaning uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki

$$|x| = \begin{cases} x & \text{agar } x \geq 0 \\ -x & \text{agar } x < 0 \end{cases} \text{ bo'lsa}$$

bundan foydalanib topamiz

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x > 0 \\ -\frac{2}{x} & \text{agar } x < 0 \end{cases} \text{ bo'lsa}$$

$x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bo'lib va $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$ munosabatlar o'rinlidir, bu esa ta'rifga ko'ra $x=0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun 2 tur uzilish nuqtasi ekanligini bildiradi.

ADABIYOTLAR

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 1,2 частях -М.: Наука, 2001.
2. Соатов Ё.У Олий математика. 1-5 Қисмлар. -Т.: О'Қитувчи, 1995.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под общей редакцией. А.П.Рябушко. в 3 ч. —Минск. «В». 2007.
4. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2 часть. - М.: Айрис Пресс, 2008.
5. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Oliy matematika misol va masalalarda, 1-qism. –Т.: O'zbekiston faylasuflar milliy jamiyati, 2007.
6. Бадалов Ф.Б., Шодмонов Ғ. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари. -Т.: ФАН, 2000.

