

АНДИЖОН
МАШИНОСЗЛИК
ИНСТИТУТИ

АНДИЖАНСКИЙ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ
ИНСТИТУТ

V-секция

**III Международная
научно-практическая
конференция:
“Современные материалы,
техника и технологии
в машиностроении”**

посвященная 20 летию АО “Узавтосаноат”
и 5 летию Андижанского машиностроительного института

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ



19-21 апреля 2016 года, Андижан



**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

АНДИЖОН МАШИНАСОЗЛИК ИНСТИТУТИ

**«МАШИНАСОЗЛИКДА ЗАМОНАВИЙ МАТЕРИАЛЛАР, ТЕХНИКА
ВА ТЕХНОЛОГИЯЛАР»**

Халқаро илмий - техникавий анжумантўплами
(Профессор-ўқитувчилар, ёш олимлар, катта илмий ходим-изланувчилар,
магистрлар ва иқтидорли талабаларнинг халқаро илмий-техникавий анжуман
мақолалар тўплами)

BIR JINSLI O`ZGARMAS KOEFFITSENTLI CHEKLI AYIRMALI TENGLAMA

M.U.Qo`chqarov, N.A.Abduvaliyev, A.O`.Mirzayev
Andijon mashinasozlik institute

Ma`lumki, matematik modellash natijasida fizika, bioliogiya va texnikaviy xarakterdagi masalalarning modellarini ifodalovchi ko`plab differensial tenglamalarni analitik usulda yechish imkoniyatlari mavjud bo`lmaydi. Bu hollarda hisoblash matematikasi usullaridan foydalanish maqsadida hosil qilingan tenglama chekli ayirmalar yordamida chekli ayirmali tenglamalarga olib o`tiladi va bu tenglamani yechish asosida qaralayotgan differensial tenglamaning taqribiy yechimi topiladi va yo`l qo`yilgan xatolar baholanadi. Chekli ayirmali tenglamalar nazariyasining eng asosiy teoremlari hisoblangan Puankare va Perron teoremlarini talabalarga bayon qilish uchun dastlab ularga chiziqli chekli ayirmali tenglama va uni yechish haqida ma`lumotlar berish darkor. Mazkur ilmiy uslubiy maqolada ikkinchi tartibli o`zgarmas koefitsientli chiziqli chekli ayirmali tenglamalarni echish usullaridan birini ko`rsatish maqsadida differensial tenglamalar kursida talabalar uchun ma`lum bo`lgan bir jinsli bo`lgan ikkinchi tartibli o`zgarmas koefitsientli tenglamalarni echishga o`xshash bo`lgan bir jinsli bo`lgan ikkinchi tartibli o`zgarmas koefitsientli chekli ayirmali tenglamalarni yechish jarayoni bayon etilgan.

Bir jinsli o`zgarmas koefitsientli chekli ayirmali tenglama .

Ikkinchi tartibli o`zgarmas koefitsientli chekli ayirmali

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = 0 \quad (1)$$

tenglama berilgan bo`lsin.

Bu tenglamaning yechimi $y(k) = \lambda^k$ ko`rinishda izlaymiz.

Bu ifodani (1) ga qo`yib,  $\lambda^k$  ga qisqartirishdan so`ng

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani ikkita

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

yechimga ega.

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

Diskriminantning qiymatiga bog'liq ravishda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin.

1) $D = a_1^2 - 4a_2 > 0$. U holda (2) kvadrat tenglama ikkita haqiqiy

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \lambda_2 = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

ildizga ega bo'lgani uchun (1) tenglamaning ikkita xususiy erkli

$$y_1(k) = \lambda_1^k, y_2(k) = \lambda_2^k$$

yechimga ega.

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^k \lambda_2^k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_1^k \lambda_2^k \neq 0$$

bo'lgani uchun λ_1 va λ_2 chiziqli erkli.

U holda (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y_1(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k \quad (3)$$

ko'rinishga ega, bu yerda C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

2) $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$. Bu holda

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} = \lambda_0$$

bo'lib, (1) tenglamaning chiziqli erkli yechumlari sifatida

$$y_1(k) = \lambda_0^k, y_2(k) = k \lambda_0^k$$

yechimlarini olishimiz mumkin, $y_2(k) = k \lambda_0^k$ (1) tenglamaning yechimi

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = [(k+1)\lambda_0^k + a_1(k+1) + ka_2]\lambda_0^k = k\lambda_0^k(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2) + \lambda_0^{k+1}(2\lambda_0 + a_1) = 0,$$

bo'lishini ko'rsatamiz

chunki $\lambda_0 = -\frac{a_1}{2}.$

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1} & (k+1)\lambda_2^{k+2} \end{vmatrix} = \lambda_0^{2k+1} \neq 0$$

bo'lgani uchun $y_1(k) = \lambda_0^k$ va $y_2(k) = k\lambda_0^k$ chiziqli erkli. U holda (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(k) = (C_1 + C_2 k)\lambda_0^k, \lambda_0 = -\frac{a_1}{2} \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

3) $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$. U holda (2) kvadrat tenglama kompleks qo'shma

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{|D|}}{2} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{|D|}}{2} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}$$

yechimga ega, bu yerda $\rho = \sqrt{a_2}, \varphi = \arctg \frac{\sqrt{|D|}}{-a_1}.$

Bu holda

$$y_1(k) = \rho^k \cos k\varphi, y_2(k) = \rho^k \sin k\varphi$$

bo'ladi. U holda (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(k) = (C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi)\rho^k \quad (5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

1- misol.

$$y(k+2) - 4y(k+1) + 5y(k) = 0$$

tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechilishi. Bu holda tenglamaning umumiy yechimini $y_1(k) = \lambda^k$ ko'rinishda izlaymiz. Natijada

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Uning ildizlari $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(k) = C_1 + C_2 \cdot 4^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

ko'rinishga ega, chunki $y_1(k) = 1; y_2(k) = 4^k$ chiziqli erkli yechimlardir.

2- misol.

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k-2) = 0, k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Bu tenglamaning yechimini $y(k) = \lambda^k$ ko'rinishda izlaymiz.

U holda xarakteristik tenglama

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0,$$

$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ ikki karrali kompleks ildizlarga ega. Xarakteristik tenglama $\lambda_1^k, n\lambda_1^k, \lambda_2^k, n\lambda_2^k$ ildizlarga ega bo'lgani uchun, berilgan tenglama

$$y_1(k) = e^{i\frac{\pi}{2}}, y_2(k) = ke^{i\frac{\pi}{2}}, y_3(k) = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4(k) = ke^{-i\frac{\pi}{2}}$$

xususiy yechimlarga ega bo'ladi.

$$\lambda_1 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \lambda_2 = -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$y(k) = (C_1 + C_2 k) \cos\frac{k\pi}{2} + (C_3 + C_4 k) \sin\frac{k\pi}{2}$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin.

3-misol.

$$(k+1) - 2my(k) + y(k+1), k=1,2,3,\dots m > 0$$

tenglamani yeching.

Yechishi. Quyidagi hollarni qaraymiz.

a) $m < 1$ u holda $m = \cos \alpha$, $\alpha \neq 0$ deb olishimiz mumkin, u holda

$$y(k+1) - 2\cos \alpha y(k) + y(k-1) = 0$$

ko`rinishga keladi. Bu tenglama yechimini

$$y(k) = \lambda^k \quad \lambda^2 - 2\cos \alpha + 1 = 0$$

$$D = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha < 0$$

bo`lgani uchun ildizlari

$$\lambda_{1,2} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i}$$

bo`lgani uchun

$$\lambda_{1,2}^k = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^k = e^{\pm i k \alpha} = \cos k \alpha \pm i \sin k \alpha.$$

ekanligini e`tiborga olsak,

$$y_1(k) = \cos k \alpha, \quad y_2(k) = \sin k \alpha$$

xususiyy yechimga ega bo`lamiz. Umumiy yechim

$$y(k) = C_1 \cos k \alpha + C_2 \sin k \alpha.$$

b) $m > 1$ u holda $m = \cosh \alpha$ deb olsak, berilgan tenglama

$$y(k+1) - 2\cosh \alpha y(k) + y(k-1) = 0$$

ko`rinishga keladi. Uni xususiyy yechimini  $y(k) = \lambda^k$  ko`rinishda izlash

$$\lambda^2 - 2\cosh \alpha \cdot \lambda + 1 = 0$$

kvadrat tenglamani beradi. Uning ildizi $\lambda_{1,2} = \cosh \alpha \pm \sinh \alpha = e^{\pm \alpha}$ bo`lgani uchun

$$y_1(k) = \cosh k \alpha, \quad y_2(k) = \sinh k \alpha$$

xususiyy ildiz chiqadi.

Umumiy yechimga ega

$$y(k) = C_1 \cosh k\alpha + C_2 \sinh k\alpha$$

c) $m=1$ bo'lsin. Bu holda berilgan tenglama

$$y(k+1) - 2y(k) + y(k-1) = 0$$

ko'rinishida bo'lib, uning xususiy yechimi $y(k) = \lambda^k$ ko'rinishida izlash

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

kvadrat tenglamani beradi. Bu kvadrat tenglamani $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ildizga ega bo'lgani uchun xususiy yechim $y_1 = 1$, $y_2 = k$

umumiy yechim

$$y(k) = C_1 + C_2 k$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Гельфанд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиз, 1962.