

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СВЯЗИ, ИНФОРМАТИЗАЦИИ И
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 004.31

АХМЕДОВА НИГИНА БАХТИЯРОВНА

Мультимедийная программа визуализации реакции-диффузии

5А330202 – Информатика и Мультимедийные технологии

Диссертация на соискание академической степени магистра

Научный руководитель
д.ф.м.н. профессор
Арипов М.М.

Ташкент-2014

Введение	3
Глава I. Задачи диффузионного типа	10
1. Математическая модель теплопроводности	10
2. Некоторые уравнения диффузионного типа	15
3. Граничные условия в задачах диффузионного типа	17
Вывод по главе I	23
Глава II. Исследование свойств уравнения реакции диффузии	24
1. Уравнение теплопроводности с градиентной нелинейностью	24
2. Теорема сравнения решений и глобальное существование решения	26
3. Исследование свойств решений задачи теплопроводности с градиентной нелинейностью с поглощением или источником	33
Выводы по главе II	39
Глава III. Разработка комплекса программы	40
1. Вычислительные схемы и методы	40
2. Аппроксимация краевой задачи процесса нелинейной реакции-диффузии	45
3. Методы визуализации	47
4. Структура и состав пакета прикладных программ	52
Выводы по главе III	59
Заключение	60
Список литературы	61
Приложения	65

Введение

Актуальность темы. Актуальностью данной работы является построение устойчивых разностных схем и способы линеаризации с дальнейшей визуализацией приближенного решения нелинейных математических моделей с применением современных компьютерных технологий и методов визуализации. Мультимедийные технологии являются основополагающими в связке математических моделей и их наглядности.

В настоящее время мультимедиа-технологии являются бурно развивающейся областью информационных технологий. Технология мультимедиа – это современный инструмент, позволяющий создавать сложные информационные структуры, программные системы, используя многообразные формы представления информации таких, как текст, звук, графика, мультипликация, видеоизображения и пространственное моделирование. В этом направлении активно работает значительное число крупных и мелких фирм, технических университетов и студий.

Как отметил Президент И.А.Каримов «высокими темпами растут высокотехнологичные и рыночные виды услуг, такие как услуги связи и информатизации – на 24,5 процента, по компьютерному программированию – на 18 процентов»[1].

В XX веке были заложены основы новой методологии научных исследований - математического моделирования и вычислительного эксперимента, а так же их визуализации. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его математической моделью и исследовании этой модели современными вычислительными средствами. Методология математического моделирования находится в состоянии непрерывного развития, охватывая все новые сферы - от разработки больших технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Математические модели реальных исследуемых процессов сложны и как правило, включают в себя системы нелинейных дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений. Ядро математической модели составляют уравнения с частными производными.

Изучение нелинейных математических моделей различных физических, биологических, химических и других явлений и процессов является одним из актуальных направлений современной математической физики. В качестве примеров отметим такие физические теории, как нелинейная квантовая механика, нелинейная электродинамика и оптика, нелинейная теория плазмы, нелинейная акустика, нелинейная теплопроводность и другие теории, в основе математических моделей которых лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Исследование линейных математических моделей физических процессов являются удобными для исследования, так как для лежащих в их основе линейных дифференциальных уравнений в частных производных разработаны общие методы их решения [16]. В прикладных задачах реальные физические процессы нелинейные, и для их адекватного описания следует использовать нелинейные математические модели, в основе которых лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Нелинейные модели математической физики, описывая явления и процессы в более широком диапазоне изменения физических параметров, обладают значительно большей емкостью информации об этих явлениях и процессах. Линейные модели обычно являются частными случаями нелинейных моделей. Исследования показывают, что нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. Интересно, с точки зрения приложений, изучить такие классы нелинейных дифференциальных

уравнений, в которых неизвестная функция и производная этой функции входят степенным образом. Такие типы нелинейностей часто встречаются в задачах теории фильтрации, диффузии, теплопроводности, магнитной гидродинамики, нефтедобывающей отрасли.

Именно такие модели более точно описывают физику процесса и поэтому их исследования показывают, что имеют место новые эффекты, связанные с нелинейностью изучаемого процесса. Так были найдены эффекты конечной скорости распространения возмущений, локализации решения и различные режимы протекания процессов. Впервые эффект конечной скорости распространения возмущений был получен, применительно к задаче нелинейной теплопроводности, в работе Я.Б. Зельдовича и А.С. Компанейца [5], для задачи нелинейной фильтрации в работе Г.И. Баренблатта [13], а для уравнения нелинейной диффузии Peletier L. A., которые независимо друг от друга получили этот эффект. В дальнейшем математические вопросы были исследованы в работах А.С. Калашникова [6-7], В.А. Галактионова [8-9] и Б. Кнерра [15].

Развитие современной вычислительной техники, численных методов решения нелинейных задач математической физики и такого направления математического моделирования, как вычислительный эксперимент, позволяют эффективно решать широкий класс задач для уравнения нелинейной теплопроводности с нелинейностями общего вида. Мультимедийные возможности пакетов прикладных программ Mathcad, Maple, Mathematica, MatLab и Visual Studio 2012 (C#) дают возможность решать и визуализировать решения многих математических задач. Однако для решения нелинейных задач в общей постановке они непригодны, что требует их дополнения новыми модулями программ, и приходится перепрограммировать задачу с учетом её специфики.

Только одни вычисления и расчеты конкретных задач лишь в редких случаях позволяют выявить общие свойства и закономерности исследуемой

модели. Отметим, что основной особенностью в изучении нелинейных свойств является получение различных оценок решения, а затем на их основе численно реализовать задачу. В этом большую роль сыграли автомодельные и приближенно-автомодельные подходы, представленные в работах А.А. Самарского, С.П. Курдюмова, В.А. Галактионова, Л.К. Мартинсона, В. Кнегг, М.М. Арипова и др.

Одним из универсальных методов исследования решения нелинейных задач является теорема сравнения. Она расширяет возможности исследования свойств решений нелинейных параболических уравнений, так как найти подходящее решение дифференциального неравенства проще, чем какое-либо точное решение параболического уравнения, описывающего нелинейные процессы диффузии, фильтрации.

Разработанные А.А. Самарским и в его научной школе численные методы решения квазилинейных вырождающихся уравнений параболического типа позволили решить широкий класс задач для таких уравнений и подтвердить численными экспериментами конечную скорость распространения тепловых возмущений в нелинейных средах. Численные расчеты показали также, что тепловые волны в нелинейных средах являются устойчивыми структурами и могут наблюдаться в реальных процессах теплопереноса.

Одним из актуальных направлений прикладной математики является изучение нелинейных математических моделей физических процессов. Многие важные прикладные задачи описываются нелинейными уравнениями в частных производных с соответствующими граничными условиями и лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов. Получить решение нелинейных краевых задач в аналитической форме, особенно в многомерных случаях, удастся лишь в исключительных случаях. Поэтому прибегают к различным приближенным методам решений нелинейных задач, что достаточно широко представлено в работах А.А.

Самарского, С.П. Курдюмова, А.М. Михайлова, В.А. Галактионова, А.С. Калашникова, Г.И. Баренблатта, Ж. Л. Лионса, Р. О Кершнера, М. Бертса и многих других ученых. Показано, что одним из эффективных методов исследования свойств решений квазилинейных уравнений параболического типа являются автомодельный и приближенно-автомодельный подход и методы сравнения и визуализации.

Важной задачей для численного моделирования является изучение глобальной разрешимости задачи Коши и краевых задач, получение оценок решений, исследование асимптотики решений при больших значениях времени и поведения фронтов (свободной границы), не линеаризируя уравнение. Получение оценок различных решений и свободной границы приближенно или асимптотически дает возможность численно моделировать изучаемые процессы.

Актуальностью данной диссертационной работы также является в разработке вычислительных алгоритмов исследования нелинейных задач и разработке соответствующих программ с использованием возможностей объектно-ориентированного языка программирования Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD, что позволяет максимально автоматизировать процесс исследования.

Объектом исследования является нелинейные математические уравнения теплопроводности, уравнения реакции-диффузии.

Предметом исследования данной диссертационной работы является решение математических моделей нелинейных уравнений теплопроводности и реакции-диффузии.

Цель данной работы состоит в численном моделировании некоторых нелинейных задач теплопроводности с учетом поглощения или источника с использованием языка программирования Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD.

Задачи исследования:

- построение важной для численного моделирования оценки решений задач теплопроводности с поглощением или с источником;
- разработка устойчивых численных схем, алгоритмов и программ для указанных задач;
- разработка программного обеспечения, *позволяющего визуализировать задачи нелинейной теплопроводности* и создание мультимедийных приложений.

Общая методика выполнения работы основана на применении численных методов итерации, прогонки, алгоритма нелинейного расщепления. Методика исследований включает в себя обобщение и анализ существующих алгоритмов, полученных результатов, при решении нелинейных задач многими известными авторами. Разработка программного обеспечения при решении задач проводилась при использовании алгоритма нелинейного расщепления; численных схем; среда, для разработки программного обеспечения Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD с выводом на экран полученных результатов в виде двумерных графиков и таблиц.

Краткое содержание использованной литературы. Приближенными методам решений нелинейных задач достаточно широко представлено в работах А.А. Самарского, С.П. Курдюмова, А.М. Михайлова, В.А. Галактионова, А.С. Калашникова, Г.И. Баренблатта, Ж. Л. Лионса, Р. О Кершнера, М. Бертса и многих других ученых. Показано, что одним из эффективных методов исследования свойств решений квазилинейных уравнений параболического типа являются автомодельный и приближенно-автомодельный подход и методы сравнения и визуализации.

Методы исследования: метод эталонных уравнений, метод нелинейного расщепления, теоремы сравнения решений, интегро-интерполяционный метод, метод прогонки, итерация.

Научная и практическая ценность. Разработанное автором программное обеспечение для решений уравнений с нелинейными коэффициентами, благодаря обобщенности, можно использовать не только при изучении и решении квазилинейных уравнений в качестве основы для дальнейших реализаций подобных ПО, но и для конкретных процессов, описываемых заданными уравнениями.

Научная новизна полученная в результате работы заключается в следующем:

- алгоритм нелинейного расщепления, построенный на основе различных автомодельных решений;
- задача аппроксимируется интегро-интерполяционным методом (метод баланса);
- разработан программный продукт в среде Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD для численного моделирования и визуализации процесса по времени.

Структура и объем работы: диссертационная работа состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, списка использованной литературы, приложения.

Глава I. Задачи диффузионного типа

1. Математическая модель теплопроводности

Предположим, что мы проводили простой эксперимент, который разбили на следующие шаги:

ШАГ 1. Берем достаточно длинный (скажем, $L = 2$ м) стержень (скажем, медный) 2 см в диаметре, у которого боковая поверхность (но не концы) теплоизолирована. Вместо стержня можно было бы использовать медную трубку, покрытую снаружи и изнутри какой-нибудь теплоизоляцией. Другими словами, тепло может протекать только через *торцы* стержня и не может протекать через его боковую поверхность.

ШАГ 2. Поместим теперь этот стержень в устройство с некоторой фиксированной температурой T_0 , (градусов С) на достаточно долгое время, так что температура внутри стержня станет такой же, как и температура устройства. Для простоты будем считать, что температура устройства $T_0 = 10^\circ\text{C}$.

ШАГ 3. Вытащим стержень из нашего устройства в некоторый момент времени, который удобно взять за нулевой $t = 0$, и присоединим к нему с концов два *термоэлемента*. Задача этих элементов — поддерживать на концах фиксированные температуры T_1 и T_2 (пусть, например, $T_1 = 0^\circ\text{C}$, и $T_2 = 50^\circ\text{C}$). Другими словами, два термостата постоянно контролируют температуру на концах стержня, и, если температура отклоняется от предписанных значений T_1 и T_2 , мощные нагревающие или охлаждающие элементы (устройства) приходят в действие для соответствующей коррекции температуры. Наш эксперимент иллюстрирует рис. 1.

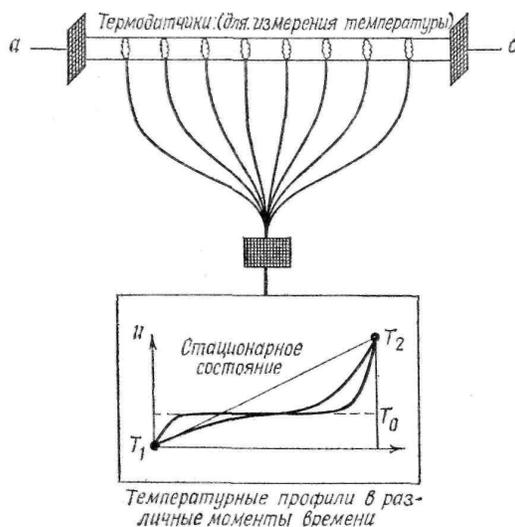


Рис. 1. Результат эксперимента.

Схема эксперимента: а — термоэлемент, который поддерживает заданную температуру T_1 на левом конце стержня; б—термоэлемент, который поддерживает заданную температуру T_2 на правом конце стержня.

ШАГ 4. Теперь мы проследим за профилем температуры в стержне с помощью некоторого устройства визуализации. Почему мы хотим осуществить именно такой эксперимент? Это уже другой вопрос и мы поговорим об этом позже. На этом можно закончить описание нашего эксперимента. Главная цель этого эксперимента — показать, как эта физическая задача и ее модификации могут быть смоделированы на языке параболических уравнений.

Описание нашей физической задачи требует трех типов соотношений.

Уравнения с частными производными, описывающего физическое явление теплопроводности.

Граничных условий, описывающих процессы теплообмена на границах.

Начальных условий, описывающих состояние системы в начале процесса.

Уравнение теплопроводности

Основное *одномерное* уравнение теплопроводности записывается в виде

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \quad (1.1)$$

Это уравнение связывает между собой величину u_t — *скорость изменения* температуры во времени (измеряется в град/с) и величину u_{xx} — *вогнутость* температурного профиля $u(x, t)$ (которая служит мерой отличия температуры в данной точке от температуры в соседних точках).

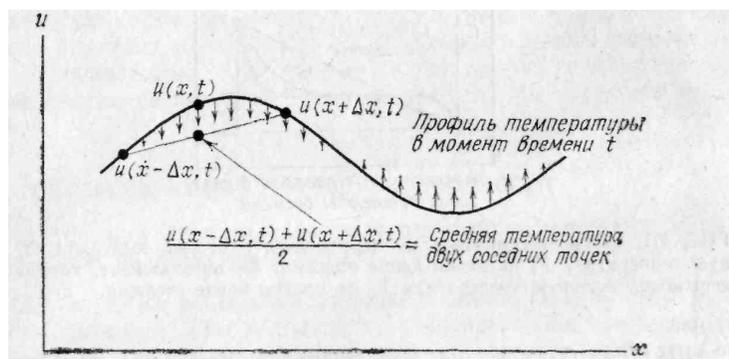


Рис. 2. Стрелками показано изменение температуры в соответствии с уравнением $u_t = \alpha^2 u_{xx}$

Это уравнение будет получено из *основного уравнения сохранения количества тепла* в следующих параграфах, а сейчас будем считать его заданным. Это уравнение говорит о том, что температура $u(x, t)$ (в некоторый момент времени t в некоторой точке x стержня) увеличивается ($u_t > 0$) или уменьшается ($u_t < 0$) в соответствии с тем, положительна или отрицательна вторая производная u_{xx} . Рис. 2. иллюстрирует изменение температуры в различных точках стержня.

Посмотрим, как можно интерпретировать величину u_{xx} на языке теплопроводности. Предположим, что мы аппроксимируем величину u_{xx} конечными разностями.

Это соотношение можно переписать в виде

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)].$$

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right]$$

Теперь можно дать следующую интерпретацию величине u_{xx} .

Если температура $u(x, t)$ меньше среднего значения температуры в двух соседних точках, то $u_{xx} > 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x положителен).

Если температура $u(x, t)$ равна среднему значению температур в двух соседних точках, то $u_{xx} = 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x равен нулю).

Если температура $u(x, t)$ больше среднего значения температуры в двух соседних точках, то $u_{xx} < 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x отрицателен).

Это все иллюстрируется (рис. 2). Другими словами, если температура в точке x больше, чем средняя температура в двух соседних точках $x - \Delta x$ и $x + \Delta x$ то температура в точке x будет уменьшаться. Следовательно, точная скорость уменьшения температуры, а именно величина u_t пропорциональна этой разности. Коэффициент пропорциональности a^2 определяется свойствами материала.

Граничные условия.

Для всех физических задач характерно присутствие некоторых границ. Значит, чтобы двигаться дальше, мы должны включить границы в математическую модель для адекватного описания физической задачи. В нашем эксперименте граничные условия (ГУ) очень просты. Поскольку

температура на концах $x = 0$ и $x = L$ все время поддерживается постоянной и равной соответственно T_1 и T_2 , можно записать

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) \\ 0 < t < \infty \\ u(L, t) = T_2 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Начальные условия.

Все физические процессы должны начинаться в некоторый момент времени (обычно принимаемый за нулевой $t = 0$), так что мы должны задать физические условия в этот момент. Поскольку мы стали следить за температурой с того момента, когда стержень обладал постоянной температурой T_0 , то имеем

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.3)$$

Теперь мы построили математическую модель эксперимента. Система соотношений (1.1), (1.2) и (1.3) называется *смешанной задачей* для уравнения теплопроводности и обычно записывается в виде

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = T_1 \\ 0 < t < \infty \\ u(L, t) = T_2 \end{array} \right.$$

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L$$

Интересно здесь то, что совсем не очевидно: существует ли *единственная функция* $u(x, t)$, которая удовлетворяет условиям (1.4), и будет ли эта функция описывать температуру в стержне? Таким образом, наша ближайшая задача — найти эту единственную функцию $u(x, t)$ из (1.4).

Теперь рассмотрим некоторые вариации основной задачи. Начнем с небольших модификаций уравнения теплопроводности.

2. Некоторые уравнения диффузионного типа

Пусть теплообмен через боковую поверхность пропорционален разности температур. Уравнение $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta (u - u_0)$ описывает теплопроводность в стержне с учетом не только диффузии тепла $\alpha^2 u_{xx}$ вдоль стержня, но и теплообмена через *боковую* поверхность стержня. Отток тепла ($\beta > 0$) или его приток ($\beta < 0$) пропорционален разности между температурой u стержня и температурой окружающей среды u_0 , β —постоянный коэффициент пропорциональности). Если коэффициент β велик по сравнению с α^2 , то поток тепла *вдоль стержня* будет мал по сравнению с потоком через *боковую поверхность* и, следовательно, тепло будет течь через боковую поверхность по закону $u_t = -\beta(u - u_0)$.

В химии, где величина u играет роль концентрации, уравнение $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0)$ означает, что скорость изменения u_t количества субстанции зависит как от диффузии $\alpha^2 u_{xx}$ (в направлении оси x), так и от возникновения ($\beta < 0$) или распада ($\beta > 0$) субстанции в химической реакции и пропорциональна разности между двумя концентрациями u и u_0 .

Внутренний источник тепла.

Неоднородное уравнение $u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$ соответствует случаю когда внутри стержня есть тепловой источник (расположенный вдоль всего стержня и действующий во все моменты времени t). Например, может быть, через стержень проходит проволока с электрическим током и сопротивление является постоянным источником тепла $f(x, t) = K$.

Уравнение конвективной диффузии.

Предположим, что примесь распространяется вдоль потока, движущегося со скоростью v . Очевидно, что концентрация $u(x, t)$ примеси изменяется как функция x (положительное направление оси x выбрано вдоль

потока) и времени t . Скорость изменения концентрации u_t определяется уравнением конвективной диффузии

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - vu_x$$

Слагаемое $\alpha^2 u_{xx}$ описывает вклад диффузии, а vu_x — конвективная компонента. Что важнее, диффузия или конвекция, зависит от отношения величин α^2 и v . Вы, вероятно, наблюдали за дымом, поднимающимся из дымовой трубы. Частицы дыма *конвективно* поднимаются за счет движения горячего воздуха и в то же время *диффундируют* за счет вихревых движений воздуха. В дополнение к этим модификациям уравнения теплопроводности можно изменить *граничные условия* на концах стержня в соответствии с физической ситуацией.

Уравнение теплопроводности $u_t = \alpha^2(x)u_{xx}$ с переменным коэффициентом $\alpha(x)$ соответствует задаче, в которой диффузия зависит от x (т.е материал *неоднороден*)

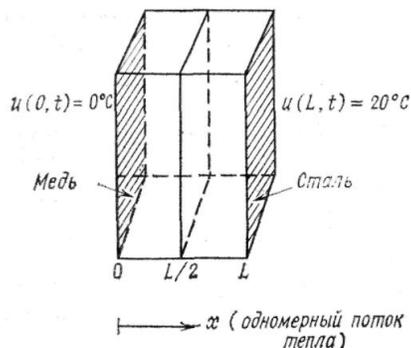


Рис. 3. Уравнение теплопроводности в неоднородной среде.

Например, медная и стальная пластины приведены в соприкосновение, как показано на рис.3. Пусть с левой стороны в меди поддерживается температура $u(0, t) = 0^\circ \text{C}$, а справа в стали—температура $u(L, t) = 20^\circ \text{C}$, тогда уравнение, описывающее теплопроводность в этой системе, имеет вид

$$u_t = a^2(x)u_{xx}, \quad 0 < x < L$$

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & 0 < x < L/2 \\ a_2, & L/2 < x < L \end{cases},$$

a_1 -коэффициент диффузии в меди

a_2 -коэффициент диффузии в стали.

3. Граничные условия в задачах диффузионного типа

В этом разделе покажем, как в задачах теплопроводности и диффузии возникают разнообразные граничные условия, и введем важное понятие потока тепла. Обсудим три важнейших типа граничных условий:

1. $u = g(t)$ (на границе задана температура),

2. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ (задана температура окружающей среды; n –

вектор *внешней нормали* к границе),

3. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ (задан тепловой поток через границу)

В задачах теплопроводности обычно используют граничные условия трех основных типов. В этом параграфе приводятся примеры того, как различные физические условия эксперимента приводят к граничным условиям различных типов. Граничные условия первого рода (на границе задана температура). Рассмотрим тепловой поток в одномерном стержне, изображенном на рис. 4, и предположим, что температура концов изменяется по законам $g_1(t)$ и $g_2(t)$.

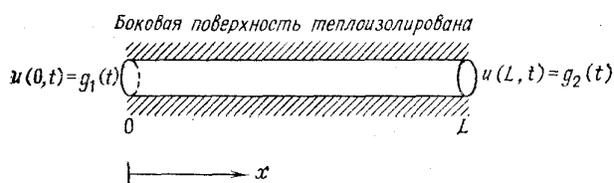


Рис. 4. Температура задана на границе.

Как уже упоминалось выше, каждое из устройств, которые поддерживают на концах заданную температуру, состоит из термостата и нагревательного элемента для поддержания соответствующего теплового режима. Задачи с граничными условиями первого рода встречаются очень часто. В некоторых случаях задача состоит в том, чтобы найти *управления граничными условиями*, т. е. такие граничные температуры $g_1(t)$ и $g_2(t)$ которые заставят температуру внутри стержня изменяться заданным образом. Например, в металлургии часто необходимо выбрать управления граничными условиями так, чтобы при изменении со временем температуры металла внутри печи *градиент* температуры был невелик.

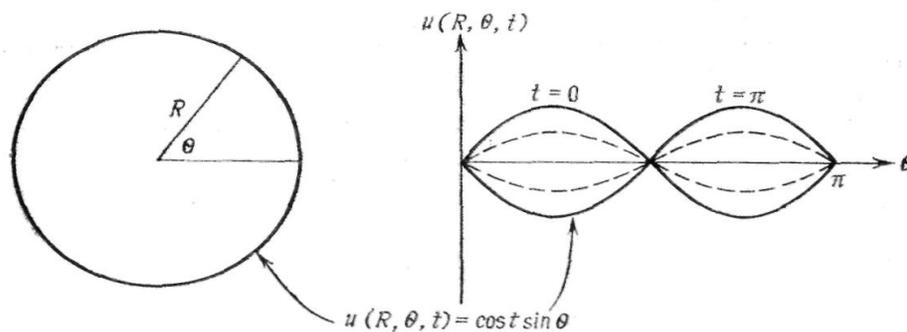


Рис. 5. Колебания температуры на границе.

Граничные условия первого рода возникают и в многомерных задачах теплопроводности. В качестве примера можно привести интересную задачу определения температурного поля внутри круглого диска радиусом R (см. рис. 5), когда граничная температура задана в полярных координатах формулой

$$u(R, \theta, t) = \cos t \sin \theta$$

Конечно, для решения задачи необходимо знать начальную температуру, но в данном случае начальные условия перестают влиять на решение через

очень небольшой промежуток времени и результирующая температура внутри диска будет определяться только значениями температуры на границе. Граничные условия второго рода (задана температура окружающей среды) Предположим, что мы опять рассматриваем теплоизолированный медный стержень, но теперь откажемся от заданного температурного режима на концах стержня. Вместо этого приведем концы стержня в соприкосновения с двумя средами. Пусть температура одной из них $g_1(t)$, а другой — $g_2(t)$. Другими словами, предположим, что левый конец стержня заключен в контейнер с жидкостью, температура которой меняется по закону $g_1(t)$. А правый конец помещен в другую жидкость с температурой $g_2(t)$ (рис. 6).

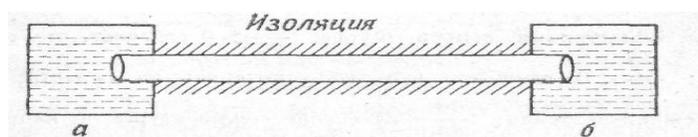


Рис. 6. Конвективный теплообмен через границы: *a* — жидкость при температуре $g_1(t)$; *б*—жидкость при температуре $g_2(t)$.

Задавая граничные условия этого типа, мы не можем считать граничные температуры стержня такими же, как у жидкости. Но мы знаем закон Ньютона: если температура одного из концов стержня меньше, чем температура соответствующей жидкости, тепло будет втекать в стержень со скоростью, пропорциональной разности температур. Другими словами, для одномерного стержня с границами $x = 0$ и $x = l$, ньютоновский закон теплообмена формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(вытекающий поток тепла при } x = 0 \text{ равен } h [u(0, t) - g_1(t)],) \\ \text{(вытекающий поток тепла при } x = l \text{ равен } h [u(l, t) - g_2(t)].) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

где h — коэффициент теплообмена, который показывает, сколько калорий протекает через границу за одну секунду при разности температур в

один градус. Вытекающий поток равен числу калорий, проходящих через конец стержня в одну секунду. Отметим, что вытекающий поток тепла будет положителен на том конце стержня, где температура стержня выше температуры окружающей среды. Уравнения (1.5) вместе с известным законом теплопроводности Фурье можно теперь использовать для получения

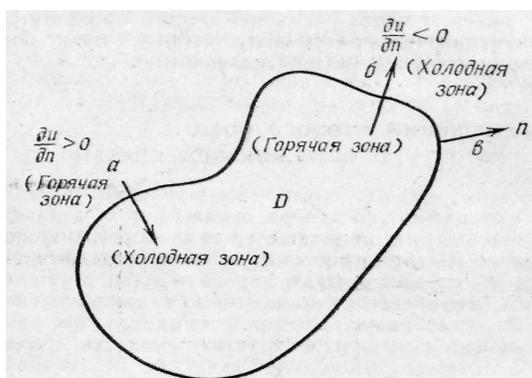


Рис. 7. Иллюстрация закона Фурье 1.

Иллюстрация закона Фурье: $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ означает, что тепло втекает в область;

$\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ означает, что тепло вытекает из области; n - направление внешней нормали; $\frac{\partial u}{\partial n}$ — изменение температуры в направлении n ;

$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{-\partial u}{\partial(-n)}$ — производная в направлении внутренней нормали есть взятая с противоположным знаком производная по внешней нормали граничных условий. Закон Фурье дает второе представление (первое содержится в (1.5)) для выходящего потока тепла. Приравнивая эти два выражения для потока, получим искомые граничные условия. Сформулируем закон Фурье (установленный экспериментально): Поток тепла, проходящий через границу области, пропорционален нормальной производной температуры в направлении внутренней нормали. Этот закон утверждает,

что если температура быстро возрастает в направлении *внешней* нормали к границе D (рис.7), то поток будет течь *из окружающей среды в область D* .

В нашей одномерной задаче закон Фурье принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{вытекающий поток тепла при } x=0 \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ равен} \quad (1.6) \\ \text{вытекающий поток тепла при } x=L \quad -k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ равен} \quad (1.7) \end{array} \right.$$

где k — теплопроводность материала, которая служит мерой того, как хорошо материал проводит тепло. Плохо проводящие материалы имеют коэффициент, близкий к нулю в единицах СГС, тогда как медь и алюминий имеют значения, значительно превосходящие нулевое значение.

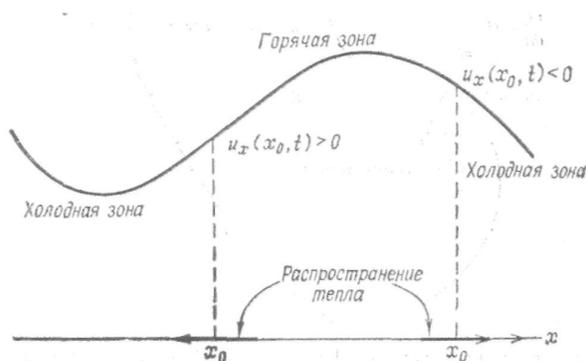


Рис.8. Иллюстрация закона Фурье 2.

Закон Фурье (1.6) в действительности описывает теплопроводность всюду внутри стержня, а не только на его границе; например, (см. рис. 8).

Поток, протекающий через точку x слева направо

Закон Фурье (1.7) гласит: если $u_x < 0$, то в точке x_0 тепло течет *слева направо*, если $u_x > 0$, то в точке x_0 тепло течет *справа налево* (тепло всегда течет от более высоких температур к более низким).

Наконец, если мы воспользуемся выражениями (1.5) и (1.6) для теплового потока, то получим искомые граничные условия для задачи, изображенной на рис. 6, в чисто математическом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{h}{k} [u(0,t) - g_1(t)] \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -\frac{h}{k} [u(L,t) - g_2(t)] \end{array} \right. \quad 0 < t < \infty$$

Очень часто константу h/k обозначают X и пишут граничные условия для теплового потока на границе в виде

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \lambda [u(0,t) - g_1(t)] \\ u_x(L,t) &= -\lambda [u(L,t) - g_2(t)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для случая более высокой размерности получаются аналогичные граничные условия. Например, если граница круглого диска омывается движущейся жидкостью, температура которой $g(0, t)$, то граничные условия запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, t) = -\frac{h}{k} [u(R, \theta, t) - g(\theta, t)]$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, t)$ представляет внешнюю нормальную производную (в положительном направлении оси r) от величины u , вычисленную в точке (R, θ) границы. Такие граничные условия мы будем называть *линейными* (поскольку они линейны по u и u_r), но неоднородными, потому что в правой части стоит функция $g(\theta, t)$.

Вывод по главе I

В данной главе были рассмотрены нелинейные модели реакции диффузии, теплопроводности, фильтрации и т.д. Такие модели встречаются и исследуются в различных сферах науки и на основе таких моделей лежат нелинейные дифференциальные уравнения. Исходя из рассмотренной главы выяснено, что в некоторых частных случаях нелинейные дифференциальные уравнения можно решить аналитическим способом, а в остальных случаях решаются приближенными методами. В следующих главах будут приведены методы исследования качественных свойств решения нелинейных задач реакции-диффузии.

Глава II. Исследование свойств уравнения реакции диффузии

1. Уравнение теплопроводности с градиентной нелинейностью

Рассмотрим задачу для уравнения нелинейной теплопроводности общего вида

$$Lu \equiv -u_t + P(u) \nabla (|x|^m K(\nabla u) \nabla u) + \varepsilon \gamma(t, x) F(u) = 0, \quad x \in R^N \quad (2.1)$$

где $P(u) \geq 0$, $K(\nabla u) \geq 0$, $F(u) \geq 0$ при $u \geq 0$ достаточно гладкие функции, $m \neq 0$, $N \geq 1$, $0 < \gamma(t, x) \in C(Q)$, $\varepsilon = \pm 1$, $P(0) = 0$, $K(0) = 0$, $F(0) = 0$ в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N, \quad (2.2)$$

где $\nabla(\cdot) - \text{grad}(\cdot)$, коэффициент $|x|^m$, где $m > 0$ – характеризует неоднородность среды.

Хотя уравнение (2.1) описывает многие физические явления [2, 4, 6, 7], для определенности будем считать, что $u(t, x)$ означает температуру в точке x в каждый момент времени $t > 0$.

Предположим, что

$$u_0(x) \geq 0, \quad |x|^m K(\nabla u_0) \nabla u_0 \in C(R^N), \quad x \in R^N, \quad (2.3)$$

$$\text{mes sup } u_0(x) < +\infty, \quad \sup u_0(x) < +\infty, \quad x \in R^N.$$

$P(u)$ – может квалифицироваться как коэффициент проницаемости среды.

Будем также считать, что $K(\nabla u)$ – коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры степенным образом: $K(\nabla u) = |\nabla u|^{n-1}$. Здесь $n > 1$ – параметр нелинейности, значения которого различны для различных физических явлений и который характеризует нелинейность среды. При

исследовании конкретного объекта значение n должно определяться экспериментами.

Функция $F(u)$ – мощность объемных источников ($\varepsilon = +1$) или поглощения ($\varepsilon = -1$), которая зависит от температуры.

В основном, если не оговорено особо, будем изучать обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) в классе функций $u(t, x) \geq 0$, обладающее свойством $u(t, x) \in C(Q)$, $|x|^m K(\nabla u) \nabla u \in C(Q)$. Именно с точки зрения приложений такие решения имеют смысл [7].

Задача (2.1), (2.2) является основой для моделирования различных процессов нелинейной диффузии тепла, магнитной гидродинамики, фильтрации газа и жидкости, нефти и газа, в теории неньютоновских жидкостей и т.д.

Дифференциальные уравнения, описывающие процессы теплопроводности, различные процессы нефтепромысловой механики – фильтрация, тепловые методы воздействия, трубопроводный транспорт нефти и газа, спуск буровой колонны, движение промывочной жидкости в циркуляционной системе и т.д. составляют на базе применения законов сохранения.

Под принципами сохранения понимается сохранение веществ, свойств и отношений.

Явление переноса тепла отмечается во всех звеньях бурения, нефтедобычи и транспорта и описывается законом Фурье

$$\bar{Q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где \bar{Q} – плотность теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура.

Это уравнение относится к однородным и изотропным средам, для которых коэффициент теплопроводности одинаков во всех направлениях (изотропность) и во всех точках (однородность).

Впервые при изучении математической модели в нефтепромысле нелинейный закон фильтрации был предложен в [6]

$$v_x = k_1 \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n,$$

нужно отметить, что этот нелинейный закон фильтрации неинвариантен относительно поворота осей координат. Согласно [6], модуль градиента инвариантен относительно поворота осей координат

$$v_x = A(|grad p|)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

По этой причине в уравнении (2.1) коэффициент теплопроводности зависит от модуля градиента. Поэтому в дальнейшем будем основываться на этом предположении.

Нелинейные диффузионные процессы представляют большой интерес для нефтепромысловой механики. Это смешивающиеся вытеснения, могут иметь место как при использовании растворителей для увеличения нефтеотдачи, так и в случае вытеснения глинистого раствора цементным при цементировании скважин. Диффузионные процессы происходят и в стволе газовой скважины при ее остановке.

2. Теорема сравнения решений и глобальное существование решения

Рассмотрим задачу для уравнения нелинейной теплопроводности общего вида

$$Lu \equiv -u_t + P(u) \nabla \left(|x|^m K(\nabla u) \nabla u \right) + \varepsilon \gamma(t, x) F(u) = 0, \quad x \in R^N \quad (2.4)$$

где $P(u) \geq 0$, $K(\nabla u) \geq 0$, $F(u) \geq 0$ при $u \geq 0$ достаточно гладкие функции, $m \neq 0$, $N \geq 1$, $0 < \gamma(t, x) \in C(Q)$, $\varepsilon = \pm 1$, $P(0)=0$, $K(0)=0$, $F(0)=0$ в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N, \quad (2.5)$$

где $\nabla_x(\cdot) = \text{grad}(\cdot)$, коэффициент $|x|^m$, где $m > 0$ – характеризует неоднородность среды.

Хотя уравнение (2.4) описывает многие физические явления [26], для определенности будем считать, что $u(t, x)$ означает температуру в точке x в каждый момент времени $t > 0$.

Предположим, что

$$u_0(x) \geq 0, \quad |x|^m K(\nabla u_0) \nabla u_0 \in C(R^N), \quad x \in R^N, \quad (2.6)$$

$$\text{mes supp } u_0(x) < +\infty, \quad \sup u_0(x) < +\infty, \quad x \in R^N.$$

$P(u)$ – может квалифицироваться как коэффициент проницаемости среды.

Будем также считать, что $K(\nabla u)$ – коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры степенным образом: $K(\nabla u) = |\nabla u|^{n-1}$. Здесь $n > 1$ – параметр нелинейности, значения которого различны для различных физических явлений и который характеризует нелинейность среды. При исследовании конкретного объекта значение n должно определяться экспериментами.

Функция $F(u)$ – мощность объемных источников ($\varepsilon = +1$) или поглощения ($\varepsilon = -1$), которая зависит от температуры.

В основном, если не оговорено особо, будем изучать обобщенное решение задачи (2.4), (2.5) в классе функций $u(t, x) \geq 0$, обладающее свойством $u(t, x) \in C(Q)$, $|x|^m K(\nabla u) \nabla u \in C(Q)$. Именно с точки зрения приложений такие решения имеют смысл.

Задача (2.4), (2.5) является основой для моделирования различных процессов нелинейной диффузии тепла, магнитной гидродинамики,

фильтрации газа и жидкости, нефти и газа, в теории неньютоновских жидкостей и т.д. [1, 20].

Дифференциальные уравнения, описывающие процессы теплопроводности, различные процессы нефтепромысловой механики – фильтрация, тепловые методы воздействия, трубопроводный транспорт нефти и газа, спуск бурильной колонны, движение промывочной жидкости в циркуляционной системе и т.д. составляются на базе применения законов сохранения.

Под принципами сохранения понимается сохранение веществ, свойств и отношений.

Явление переноса тепла отмечается во всех звеньях бурения, нефтедобычи и транспорта и описывается законом Фурье

$$\bar{Q} = -\lambda \text{ grad } T ,$$

где \bar{Q} - плотность теплового потока; λ - коэффициент теплопроводности; T – температура.

Это уравнение относится к однородным и изотропным средам, для которых коэффициент теплопроводности одинаков во всех направлениях (изотропность) и во всех точках (однородность).

Впервые при изучении математической модели в нефтепромысле нелинейный закон фильтрации был предложен в [6]

$$v_x = k_1 \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n ,$$

нужно отметить, что этот нелинейный закон фильтрации инвариантен относительно поворота осей координат. Согласно [6], модуль градиента инвариантен относительно поворота осей координат

$$v_x = A (|\text{grad } p|)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} .$$

По этой причине в уравнении (2.4) коэффициент теплопроводности зависит от модуля градиента. Поэтому в дальнейшем будем основываться на этом предположении.

Нелинейные диффузионные процессы представляют большой интерес для нефтепромысловой механики. Это смешивающиеся вытеснения, могут иметь место как при использовании растворителей для увеличения нефтеотдачи, так и в случае вытеснения глинистого раствора цементным при цементировании скважин. Диффузионные процессы происходят и в стволе газовой скважины при ее остановке.

Ниже приводим определение обобщенного решения уравнения (2.4) в случае, когда в нем $P(u) \equiv 1$.

Определение 1.3.1. Неотрицательная, непрерывная и ограниченная функция $u(t, x) \geq 0$, удовлетворяющая условию Гельдера, называется обобщенным решением уравнения (1.1) в области $[0, T] \times \Omega$, если для любой непрерывной вместе с производными f_t, f_x, f_{xx} в $[0, T] \times \Omega$ финитной функции $f(t, x)$, равной нулю при $x \in \Gamma(\Omega)$ и при $t = T$, выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(-uf_t + |x|^m K(\nabla u) \nabla u \nabla f + \varepsilon \gamma(t) F(u) f \right) dx dt - \int_{\Omega} u_0(x) f(0, x) dx = 0 \quad (2.7)$$

(Ω – ограниченная область в R^N , $\Gamma(\Omega)$ – граница области Ω).

Определение 1.3.2. Уравнение вида (2.4) называется «вырождающимся», если оно является параболическим при $u(t, x) > 0$ и

$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| > 0$, и вырождается в уравнение первого порядка при $u(t, x) = 0$ или

$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0$.

В области, где $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0$ или $u(t, x) = 0$, задача (2.4),(2.5) может не иметь классического решения [5]. Поэтому удовлетворение уравнению решения понимается в обобщенном смысле (в смысле удовлетворения интегральному тождеству). Обобщенными являются, например, решения обладающие свойством непрерывности решения и потока и удовлетворяющие интегральному тождеству (2.7).

Определение 1.3.3. Обобщенным решением задачи Коши (2.4),(2.5) называется обобщенное решение уравнения (2.4) в области Q , которое удовлетворяет начальному условию (2.5).

Причиной введения обобщенного решения является наличие вырождения в (2.4) т.е., $K(0) = 0$.

Определение 1.3.4. Если в задаче (2.4),(2.5) функции $K(\nabla u)$ и $P(u)$ такие, что для $\forall t > 0$ существует функция $l(t) > 0$, такая, что $u(t, x) \equiv 0$ в $|x| \in (l(t), +\infty)$, то говорят, что имеет место конечная скорость распространения возмущений.

Для случая, когда $\gamma(t, x) = 1$, $P(u) = I$ задача Коши достаточно хорошо изучена в работах [4, 5, 6].

Немаловажное место в теории нелинейных уравнений занимает исследование неограниченных решений, или по-другому, режимов с обострением. Нелинейные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми по времени: решение неограниченно возрастает в течение конечного промежутка времени.

Определение 1.3.5. Решения, удовлетворяющие условию $\max_{x \in R^1} u(t, x) \rightarrow +\infty, t \rightarrow T_0^-$, называются режимами с обострением (или неограниченными).

Определение 1.3.6. Неограниченное решение задачи (2.4),(2.5) называется локализованным, если для $0 < t < T < +\infty$ существует $0 < L < +\infty$, что $u(t, |x|) \equiv 0$ в $|x| \in (L, +\infty)$.

Определение 1.3.7. Функция $u_+(t, x)$ ($u_-(t, x)$) называется верхним (нижним) решением задачи (2.4),(2.5), если в Q удовлетворяется условие

$$L(u_+(t, x)) \leq 0 \quad (L(u_-(t, x)) \geq 0),$$

$$\text{и } u_0(x) \leq u_+(0, x) \quad (u_0(x) \geq u_-(0, x)).$$

Определение 1.3.8. Свободной границей (фронтом волны) называется точка с координатой $x_\phi(t)$, $t > 0$, такая что

$$u(t, |x|) = 0, \quad |x| \geq x_\phi(t); \quad u(t, |x|) > 0, \quad |x| < x_\phi(t). \quad (2.8)$$

Функция $x_\phi(t)$ определяет глубину проникновения переднего фронта возмущений в нелинейную среду.

Определение 1.3.9. Решение $u(t, x)$ при каждом $t \in (0, +\infty)$ является финитным по x , если выполняется условие

$$u(t, x) \equiv 0, \quad x \geq l(t), \quad \text{и } u(t, x) > 0 \quad \text{при } |x| \leq l(t), \quad t \in (0, +\infty).$$

Отметим, что ниже мы будем часто пользоваться теоремами сравнения решений, которые играют важную роль при исследовании нелинейных задач. Найдя частное решение автомодельного или приближенно-автомодельного уравнения, затем можно использовать его для сравнения решений, что даст возможность, не зная решения задачи, получить оценку решений через известную функцию, что является весьма важным для численного решения нелинейных задач. Поэтому в нелинейных задачах при изучении свойств решений, важную, а иногда решающую роль играют частные решения.

Теорема 1.3.1. (Сравнения решений). Пусть $u_1(t, x) \geq 0$, $u_2(t, x) \geq 0$, неотрицательные обобщенные решения уравнения (2.4) в $(0, +\infty) \times R^N$, удовлетворяющие условиям

$$u_2(0, x) \geq u_1(0, x), \quad x \in R^N \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} u_2(t, 0) \geq u_1(t, 0) \\ u_2(t, b) \geq u_1(t, b) \end{cases}, \quad t \in (0, T) \quad (T > 0) \quad (2.10)$$

Тогда $u_2(t, x) \geq u_1(t, x)$ в $(0, +\infty) \times R^N$.

Отметим, что в этой теореме требуется знание решений задачи, что является в общем случае неизвестным. В такой формулировке теорема сравнения решений с точки зрения практики не совсем полезна.

Поэтому мы часто будем пользоваться, весьма важной с точки зрения приложений, следующими теоремами сравнения решений.

Теорема 1.3.2. Пусть $D = \{(x, t) : |x| < l(t), t > 0\}$, где функция $l(t) \geq 0, t > 0$, в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ определено неотрицательное обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (2.4),(2.5) и функции $u_{\pm}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}((0, \infty) \times D) \cap C([0, \infty) \times \bar{D})$, где $u_{\pm}(t, x) \geq 0$ непрерывные функции, удовлетворяющие соответственно неравенствам $Lu_{+} \leq 0, Lu_{-} \geq 0$ в $(0, +\infty) \times D$ и

$$u_{+}(0, x) \geq u_0(x) \geq u_{-}(0, x),$$

$$x \in R^N.$$

Тогда для решения задачи (1.1),(1.2) справедлива оценка

$$u_{+}(t, x) \geq u(t, x) \geq u_{-}(t, x) \quad \text{в } Q. \quad (2.11)$$

Функции $u_{+}(t, x)$, $u_{-}(t, x)$ соответственно называются верхними и нижними решениями задачи (2.4),(2.5).

Мы еще будем пользоваться следующей теоремой сравнения решений, впервые доказанной А. С. Калашниковым [15] в случае $P(u)=1$, $K(u)=u^{\sigma}$, $N=1$, $m=0$, $\gamma(t) = const$.

Теорема 1.3.3. Пусть функция $z(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(D) \cap C(\bar{D})$, $z(t, x) \equiv 0$ в $Q \setminus D$, $z > 0$ в D , $K(z) \nabla z \in C(Q)$ и $Lz \leq 0$ ($Lz \geq 0$) в D . Тогда $u(t, x) \leq z(t, x)$ ($u(t, x) \geq z(t, x)$) в Q если

$$u_0(x) \leq z(0, x) \quad (u_0(x) \geq z(0, x)),$$

$$x \in R^N.$$

Используя эту теорему, не решая задачу, мы можем оценить решение сверху и снизу, что является весьма важным при исследовании свойств нелинейных задач.

3. Исследование свойств решений задачи теплопроводности с градиентной нелинейностью с поглощением или источником

В работе рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) + \varepsilon u^\beta \quad (2.12)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, x \in R^N \quad (2.13)$$

где $\nabla(\cdot) = \text{grad}_x(\cdot)$, $p \geq 2$, β - заданные вещественные числа, N - размер пространства, $\varepsilon = \pm 1$, $u = u(t, x) \geq 0$ искомое решение.

Уравнение (2.12) можно рассматривать как уравнение диффузии тепла в сплошной среде с коэффициентом теплопроводности $k = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \geq 0$, зависящим от градиента температуры $u = u(t, x) \geq 0$. При этом в среде имеется

объемное энерговыделения, $Q = u^\beta \geq 0$ - мощность источника тепла ($\varepsilon = +1$) или поглощения ($\varepsilon = -1$) в каждой точке пространства определяется величиной температуры.

Уравнение (2.12) встречается в различных приложениях [1, 2]. В работе [2] изучены некоторые общие свойства неограниченных решений задачи Коши, в частности свойства локализации. Также численно изучена асимптотическая устойчивость неограниченных автомодельных решений (2.12) при $\sigma > 0$, $\beta > 1$.

В данной работе получена асимптотика неограниченных решений уравнения (2.12) на основе анализа автомодельных решений используя метод нелинейного расщепления [3].

Построение автомодельного уравнения для (2.12) основано на расщепление исходного уравнения. Для этого сначала решим обыкновенное дифференциальное уравнение (без главной части в уравнения (2.12)),

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \varepsilon \bar{u}^\beta \quad (2.14)$$

Пологая в (1) $u(t, x) = \bar{u}(t) \bar{f}(\xi)$, где $\bar{u}(t) = (T - \varepsilon(\beta - 1)t)^{\frac{1}{\beta-1}}$ решения уравнения (2.14), $\varepsilon = \pm 1$, $\xi = \frac{|x|}{(\tau(t))^{\frac{1}{p}}}$, $\tau(t) = \int [\bar{u}(t)]^{p-2} dt$, получим автомодельное

уравнение

$$\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{\beta - (p-1)} \varepsilon (-f + f^\beta) = 0 \quad (2.15)$$

Теперь займемся изучением асимптотики решений уравнения (2.15).

Случае $\varepsilon = -1$, $\beta = \frac{1}{p-1}$.

Заметим, что функция

$$\bar{f}(\xi) = \left[\left(a - b \left| \xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)_+ \right]^{\frac{p-1}{p-2}}$$

$$\text{где } a = \frac{(p-1)(N(p-2)+p)}{N(p-2)+(p-1)(N(p-2)+p)}, \quad b = \left(\frac{1}{p(N(p-2)+p)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-2}{p},$$

$$\xi = \frac{|x|}{(\tau(t))^{\frac{1}{p}}},$$

$$z_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z > 0 \\ 0, & \text{если } z \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \xi < \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{p-1}{p}} \text{ удовлетворяет уравнению (2.15).}$$

Покажем, что она является асимптотической финитных решений уравнения (2.15).

Теорема 1. Пусть $\xi \rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{p-1}{p}}_-$, тогда финитное решение уравнения

(2.15) имеет асимптотику $f(\xi) \sim C \left(a - b \left| \xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}}$, где C - решения следующего

алгебраического уравнения

$$\left(\frac{1}{p-2} \right)^{p-1} w^{p-2} + \frac{(p-1)}{ab^{p-1}p^{p+1}} w^{-\frac{p-2}{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1}p^p} = 0.$$

Доказательство. Ищем решение уравнения (2.14) в следующем виде

$$f = \bar{f}(\xi)w(\eta) \tag{2.16}$$

$$\text{где } \bar{f}(\xi) = \left(a - b \left| \xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \quad \eta = -\ln \left(a - b \left| \xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \right), \quad \xi \rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{p-1}{p}}_- ,$$

что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения (2.15) при $\eta \rightarrow +\infty$. После подстановки (2.15) в (2.14) для $w(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right)^{p-1} + \left(\frac{N\psi(\xi)(p-1)}{p\nu(\xi)b} - \frac{p-1}{p-2} \right) \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right)^{p-1} + \frac{b(p-1)}{Z} \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right) + \\ - \frac{q}{Z} \left(\frac{\psi(\xi)}{\nu(\xi)} w - \frac{p-1}{\nu(\xi)} w^\beta \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

здесь $Z = p^p b^p$, $q = -\frac{p-1}{p(p-2)}$, $\psi(\xi) = e^{-\eta}$, $\nu(\xi) = \frac{a - e^{-\eta}}{b}$, где η определено

выше.

Очевидно, что при $\xi \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_-^{\frac{p-1}{p}}$ то $\frac{\psi(\xi)}{\nu(\xi)} \rightarrow 0$, $\frac{1}{\nu(\xi)} \rightarrow \frac{b}{a}$ и уравнения (2.17)

принимает следующие вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right)^{p-1} + \left(-\frac{p-1}{p-2} \right) \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right)^{p-1} + \frac{b(p-1)}{Z} \left(\frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1} \right) + \\ & + \frac{qb(p-1)}{Za} w = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пусть, $w \rightarrow A$, $0 < A < +\infty$, тогда $w_\eta = 0$ и (2.18) уравнения приводится к следующему уравнению:

$$\left(\frac{1}{p-2} \right)^{p-1} w^{p-2} + \frac{(p-1)}{ab^{p-1} p^{p+1}} w^{-\frac{p-2}{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1} p^p} = 0 \quad (2.19)$$

и решения этого уравнения $w \approx C > 0$.

Отсюда следует, что при $\eta \rightarrow \infty$ для $w(\eta)$ имеет асимптотику $w(\eta) \sim C > 0$. В силу (2.16) теорема доказано.

2. Случае $\varepsilon = +1$,

$$\beta = \frac{1}{p-1}.$$

Функция

$$\bar{f}(\xi) = \left[\left(a - b \left| \xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)_+ \right]^{\frac{p-1}{p-2}}$$

где $a = \frac{(1-p)(N(p-2)+p)}{N(2p-1)(p-2) - (p-1)(N(p-2)+p)}$, $b = \left(\frac{2p-1}{p(N(p-2)+p)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-2}{p}$,

$$\xi = \frac{|x|}{(\tau(t))^{\frac{1}{p}}}, \text{ при } \xi < \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{p-1}{p}} \text{ удовлетворяет уравнению (2.15).}$$

Теорема 2. Пусть $\xi \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_-^{p-1}$ и выполнены условия $p < \frac{2N-1}{N-1}$, тогда

финитное решение уравнения (2.15) имеет асимптотику $f(\xi) \sim C \left(a - b|\xi|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$,

где C - решения следующего алгебраического уравнения

$$\left(\frac{1}{p-2}\right)^{p-1} w^{p-2} - \frac{(p-1)}{ab^{p-1} p^{p+1}} w^{\frac{p-2}{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1} p^p} = 0$$

Теорема доказывается аналогично теорема 1.

3. Случае $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$, $\beta > 1$.

Функция

$$\bar{f}(\xi) = \left[\left(a - b|\xi|^{\frac{p}{p-1}} \right)_+ \right]^{\frac{p-1}{p-2}}$$

где $\xi = \frac{|x|}{(\tau(t))_p^{\frac{1}{p}}}$, при $\xi \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_-^{p-1}$ удовлетворяет уравнению (2.15).

Теорема 3. Пусть $\xi \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_-^{p-1}$, тогда финитное решение уравнения (2.15)

имеет асимптотику $f(\xi) \sim C \left(a - b|\xi|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$, где $C = \left(\frac{p-2}{bp^2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \frac{p-2}{bp}$

Теорема доказывается аналогично теореме 1.

Полученные асимптотики решений уравнения (2.15) даёт возможность провести численные расчеты для решения задачи (2.12),(2.13). При этом в качестве начального приближения для численных расчетов итерационным методом берется построенные выше функции. Благодаря теоремам сравнения решений, полученные приближенные решения является верхними или нижними решениям.

Вывод по главе II

В данной главе были исследованы асимптотики автомодельных решений нелинейных уравнений реакции-диффузии в случаях медленной и быстрой диффузии. На основе метода эталонных уравнений были получены главные члены асимптотики решений для приведенных выше обоих случаев и предложены хорошие начальные приближения для численных исследований задачи реакции-диффузии.

Глава III. Разработка комплекса программы

1. Вычислительные схемы и методы

Метод конечных разностей физически означает, что переход от непрерывной среды к её некоторой дискретной модели. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись. Такими свойствами, прежде всего являются законы сохранения. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называют консервативными (или дивергентными). Законы сохранения для всей сеточной области (интегральные законы сохранения) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем будем называть интегро - интерполяционным методом методом баланса.

Построим равномерную сетку по t и x

$$\overline{\omega}_{th} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, \tau m = T; x_i = \underline{X} + ih, i = 0, 1, \dots, n, h = \frac{\overline{X} - \underline{X}}{n}\}$$

Напишем уравнение баланса интегро - интерполяционным методом для прямоугольника $\left(x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}, t_j \leq t \leq t_{j+1} \right)$ (рис. 9).

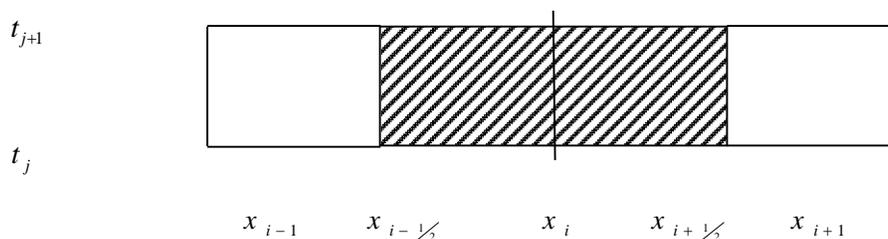


Рис.9. Схема для интегро-интерполяционного метода.

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} D \frac{\partial u}{\partial x} dt \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} - \\
&- \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(t, x, u) dx dt
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Так как коэффициенты D , v , F - непрерывные функции своих аргументов можно использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] dx \approx h [u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)] \\
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} D \frac{\partial u}{\partial x} dt \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \approx \\
&\approx \tau \left(d_{i+1, j+1} \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j+1})}{h} - d_{ij+1} \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} \right) \\
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \approx \\
&\approx \tau v(x_i, t_{j+1} | u(x_i, t_{j+1})) (u(x_{i+1}, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j+1})) \\
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(t, x, u) dx dt \approx \tau h F(x_i, t_{j+1}, u(x_i, t_{j+1}))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где d_{ij+1} - среднее значение коэффициента теплопроводности D в одной или нескольких точках, например,

$$\begin{aligned}
d_{ij+1} &= D \left(t_{j+1}, x_{i-1/2}, \frac{u(t_{j+1}, x_{i-1}) + u(t_{j+1}, x_i)}{2} \right), \\
d_{ij+1} &= \frac{2D(t_{j+1}, x_i, u(t_{j+1}, x_i)) D(t_{j+1}, x_{i-1}, u(t_{j+1}, x_{i-1}))}{D(t_{j+1}, x_{i-1}, u(t_{j+1}, x_{i-1})) + D(t_{j+1}, x_i, u(t_{j+1}, x_i))},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$d_{ij+1} = \frac{D(t_{j+1}, x_{i-1}, u(t_{j+1}, x_{i-1})) + D(t_{j+1}, x_i, u(t_{j+1}, x_i))}{2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) получим двухслойную консервативную схему:

$$\frac{y_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[d_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - d_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - w_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + f_i \quad (3.5)$$

где $y_i = y_{i,j+1} = y(t_{j+1}, x_i)$, $y_i = y_{i,j} = y(t_j, x_i)$, $d_i = d(t_{j+1}, x_i)$ с

условиями

$$y_i^0 = u_0(x_i), i=0,1,\dots,N; \quad y_0^j = \psi_1(t_j), \quad y_N^j = \psi_2(t_j), \quad j=0,1,\dots,M.$$

Полученная нами схема (3.5) нелинейно относительно функции y_i^j и для нахождения ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строим следующим образом:

метод простой итерации

$$\frac{y_{i-1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[d_{i+1}^{(s)} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - d_i^{(s)} \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] - w_i^{(s)} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} + f_i^{(s)} \quad (3.6)$$

метод Ньютона

$$\frac{y_{i-1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[d_{i+1}^{(s)} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - d_i^{(s)} \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] - w_i^{(s)} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} + f_i^{(s)} + \left(f_i^{(s)} \right)' \left(y_{i-1}^{(s+1)} - y_i^{(s)} \right) \quad (3.7)$$

Относительно функции $y^{(s+1)}$ разностные схемы (3.6)-(3.7) оказывается линейной. В качестве начальной итерации берутся функции y и w предыдущего шага по времени: $y^{(0)j+1} = y^j$. Для сходимости итерации требуют выполнения условия

$$\max_i \left| y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)} \right| \leq \varepsilon$$

Для систем алгебраических уравнений (3.6)-(3.7) удобна следующая форма записи разностного уравнения второго порядка

$$A_i y_{i-1,j} - C_i y_{i,j} + B_i y_{i+1,j} = -F_i, \quad i=1,2,\dots,n-1; \quad j=1,2,\dots,m \quad (3.8)$$

где A_i, C_i, B_i - коэффициенты перед $y_{i-1,j}, y_{i,j}, y_{i+1,j}$ соответственно, а F_i правая часть. Уравнению (3.8) присоединяем значение y из граничного условия при $i=0$ и $i=n$, а также при $j=0$ (начальное условие)

$$y_{0,j} = \psi_1(t_j) \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (3.9)$$

$$y_{n,j} = \psi_2(t_j) \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (3.10)$$

$$y_{i,0} = u_0(x_i) \quad i=0,1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Матрица системы уравнений (3.9)-(3.10) является трехдиагональной и она имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Порядок этой матрицы равен $n-1$ (если заданы краевые условия второго рода, то порядок матрицы будет $n+1$). У этой матрицы от нуля отличны только коэффициенты, стоящие на трех диагоналях - главной и двух соседних. Для систем линейных уравнений с матрицами такого типа есть эффективный метод решения (прямой метод) - метод исключения Гаусса, который приводит к формулам прогонки.

Предположим, что имеет место рекуррентное соотношение

$$y_{i,j} = \alpha_{i+1}y_{i+1,j} + \beta_{i+1} \quad (3.12)$$

с неопределенными коэффициентами α_i и β_i . Выражение $y_{i-1,j} = \alpha_i y_{i,j} + \beta_i$ подставим в (3.8)

$$(A_i \alpha_i - C_i) y_{i,j} + A_i \beta_i + B_i y_{i+1,j} = -F_i.$$

Воспользуемся соотношением (3.12)

$$[(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1,j} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} = -F_i.$$

Это уравнение выполнено для любых $y_{i,j}$, если

$$(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i = 0, \quad A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} + F_i = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу для α_{i+1} и β_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

Если коэффициенты α_i и β_i известны и известно значение $y_{n,j}$, то, двигаясь справа налево, мы определим последовательно все $y_{i,j}$. Уравнения для α_i и β_i - нелинейные, они связывают значения этих функций в двух соседних точках. Для α_i и β_i задача решается слева направо, для $y_{i,j}$ - в противоположном направлении. Для каждой из функций α , β , надо решать задачу Коши. Чтобы найти начальные значения этих функций, используем граничные условия. Так как формула (3.12) справедлива при $i = 0, 1, \dots, n-1$, то при $i=0$ имеем

$$y_{0,j} = \alpha_1 y_{1,j} + \beta_1,$$

с другой стороны,

$$y_{0,j} = \psi_1(t_j).$$

Поэтому

$$\alpha_1 = 0 \quad (3.15)$$

$$\beta_1 = \psi_1(t_j) \quad (3.16)$$

Таким образом, для функций α_i и β_i получаем задачу Коши: для α - (3.13), (3.15), для β - (3.14), (3.16). Эти формулы называются формулой прямой прогонки.

После того, как функции α_i и β_i найдены для всех $i=1,2,\dots,n$ необходимо найти граничное значение $y_{n,j}$. В нашем случае

$$y_{n,j} = \psi_2(t_j) \quad (3.17)$$

Таким образом, для определения $y_{i,j}$ получаем задачу Коши (3.12), (3.17). Эти формулы называются формулой обратной прогонки.

Изложенный здесь метод решения трехдиагональной матрицы называется методом правой прогонки. Этот метод устойчив при условии $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i=1,2,\dots,n-1$. Легко проверить, что для разностных схем (3.6)-(3.7) она выполнена.

2. Аппроксимация краевой задачи процесса нелинейной реакции-диффузии

Для простоты задачу (2.12)-(2.13) в одномерном случае перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u^\beta \quad (3.18)$$

с начальными

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.19)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(t, a) &= \phi_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ u(t, b) &= \phi_2(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь $\overline{G} = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in [a, b]\}$, $u_0(x)$ - начальное распределение.

Построим равномерную сетку по t и x

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, \tau m = T; x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}\}$$

и аппроксимируем задачу (3.18)-(3.29) методом баланса (интегро-интерполяционный метод)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[a_{i+1}(y^{j+1})(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - a_i(y^{j+1})(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}) \right] + \\ \quad + b_i(y^{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ y_0^j = \phi_1(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ y_n^j = \phi_2(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Система схем (3.21) нелинейна относительно функции y^{j+1} и w^{j+1} и для нахождения ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс, строим следующим образом:

- 1) $b_i(y^{j+1}) = \left(y_i^s \right)^\beta$ - метод Пикара,
- 2) $b_i(y^{j+1}) = y_i^{s+1} \left(y_i^s \right)^{\beta-1}$ - специальный метод,
- 3) $b_i(y^{j+1}) = \left(y_i^s \right)^\beta + \beta \left(y_i^s \right)^{\beta-1} \left(y_i^{s+1} - y_i^s \right)$ - метод Ньютона.

Относительно функции $y^{(s+1)j+1}$ разностные схемы (3.20)-(3.21) оказывается линейной. В качестве начальной итерации берутся функции $y^{(0)j+1}$ предыдущего шага по времени: $y^{(0)j+1} = y^j$. Для сходимости итерации требуют выполнения условия

$$\max_i \left| y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)} \right| \leq \varepsilon$$

Для решения линейной схемы (3.21), с условиями (3.19)-(3.20) на сетке, используется метод прогонки.

Разработан алгоритм и составлена программа в среде Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD. Результаты записываются в файл и выдаются в виде двумерного графика.

3. Методы визуализации

Прежде всего стоит отметить, что решение данной задачи есть функция двух переменных (пространственная переменная и время). Из этого следует, что при визуализации поведения решения тестовой задачи необходимо воспроизводить его график в двухмерном пространстве. Это означает, что воспроизведение решения сталкивается с проблемой двумерной графики.

Для реализации имитационного процесса можно использовать следующие средства:

- подключение специальных графических библиотек, позволяющие работать с двухмерными объектами (OpenGL, Direct3D, AxOpenGL);
- использование уже «встроенных» компонент, таких как Chart;
- преобразование координат;
- рисование стандартными средствами.

Все эти средства имеют свои преимущества и недостатки. Например, подключение двухмерных библиотек требует постоянной перерисовки пространства и изменения масштаба при вновь изменяющихся входных параметрах. Однако имеет довольно простой механизм анимации изображения, основанный на механизме использования таймеров. Использование компоненты Chart лишено громоздкого алгоритма (а следовательно и кода) изменения масштаба, т.к. масштабирование у данной компоненты идет автоматически, однако плохо поддерживает анимационный

процесс (системная задержка действия sleep не распознается, а при использовании таймеров масштабирование идет медленнее, чем прорисовка графиков). Импорт компонент одинаково хорошо масштабирует пространство и поддерживает работу таймеров. Единственным недостатком этого метода является то, что пакет-поставщик компоненты должен присутствовать на вашем компьютере.

При разработке ПО, иллюстрирующего имитационный процесс поведения решения с течением времени использовалась среда Visual Studio 2012 (C#) и MathCad 11, поскольку численные расчеты, требуют постоянного ввода данных без перестройки структуры программы.

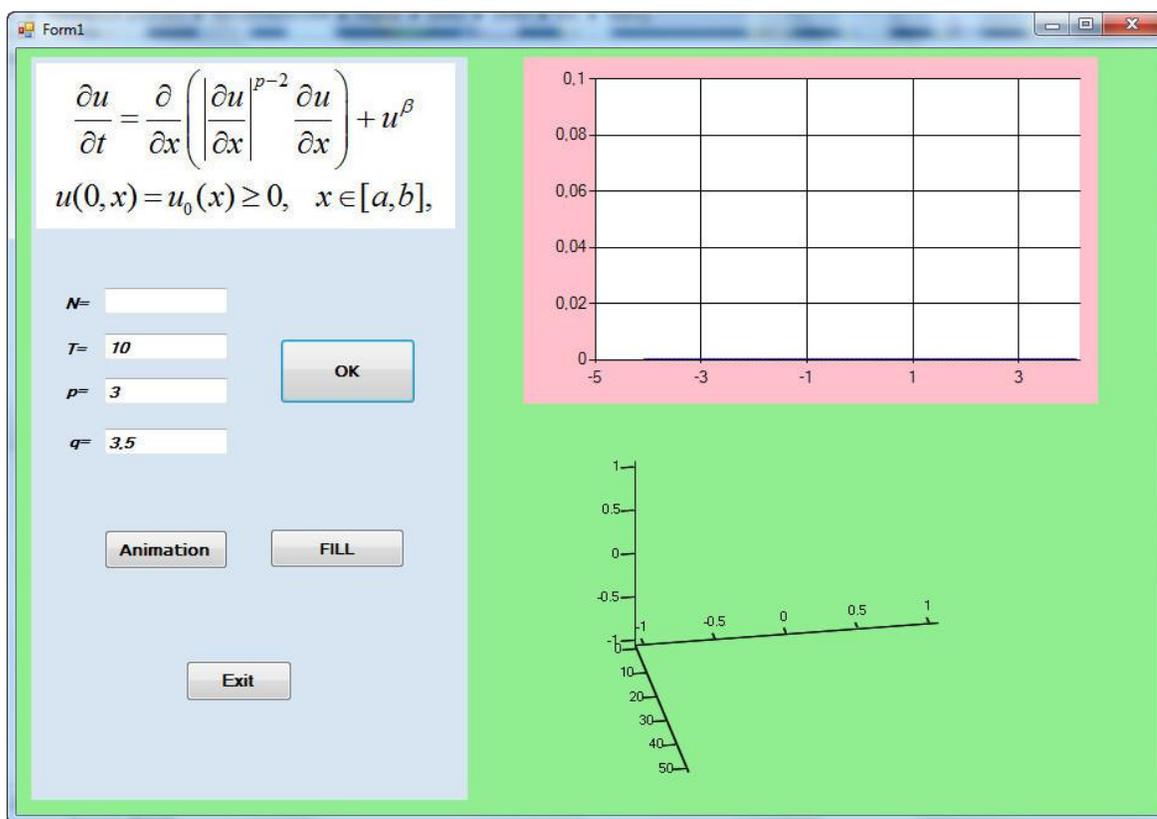


Рис. 10. Главное окно программы при введении значений параметров.

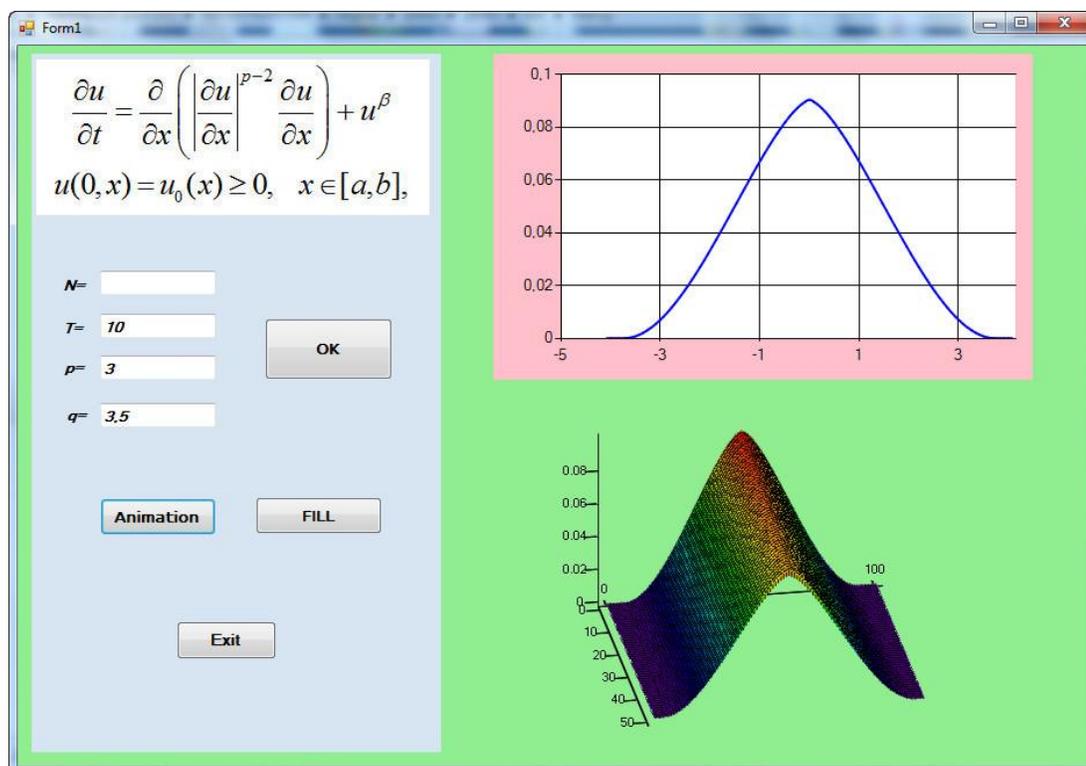


Рис. 11. Главное окно программы с полученным результатом.

Численные результаты ПО, приведены ниже.

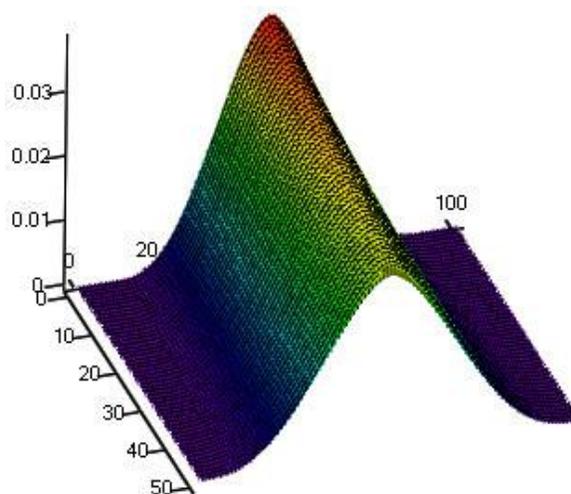


Рис. 12. Преобразование двумерной графики с параметрами $p = 2.5$, $\beta = 3.5$

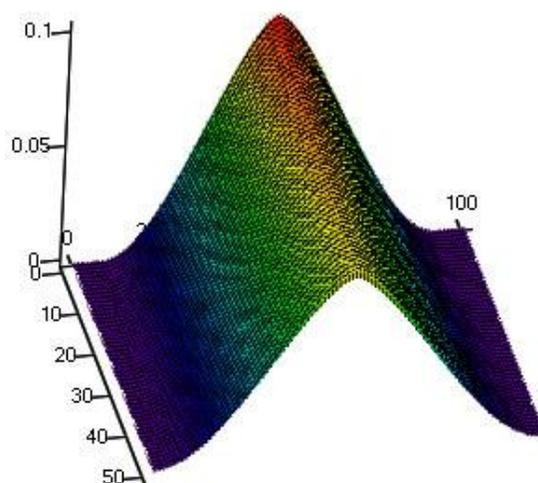


Рис. 13. Преобразование двумерной графики с параметрами
 $p = 3, \beta = 4$

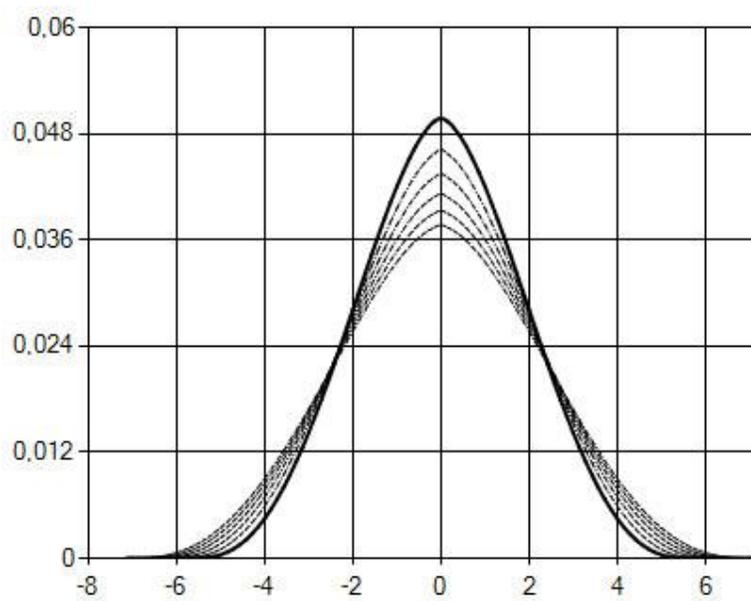


Рис. 14. Преобразование одномерной графики с параметрами
 $p = 2.5, \beta = 3.5$.

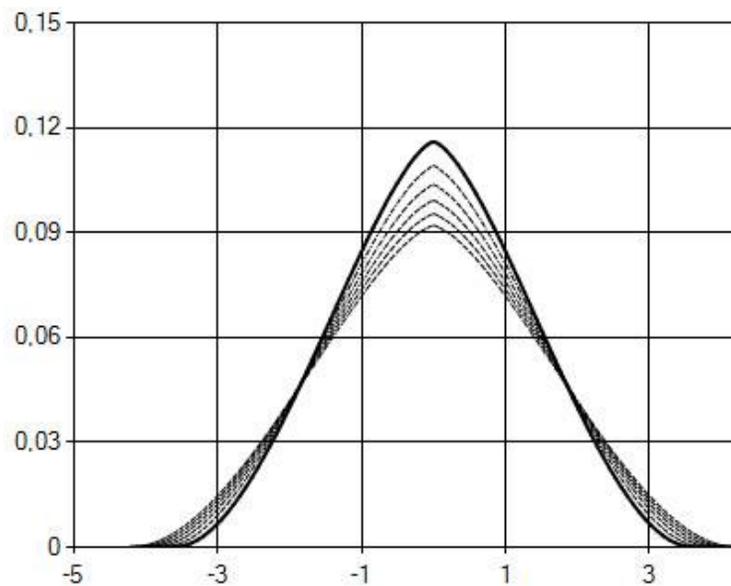


Рис. 15. Преобразование одномерной графики с параметрами

$$p = 3, \beta = 4$$

4. Структура и состав пакета прикладных программ

Пакет прикладных программ — это комплекс взаимосвязанных программ, предназначенный для решения любой задачи из какой-нибудь конкретной области. Пакеты имеют, как правило, ярко выраженный *проблемно-ориентированный характер*. Например, существуют пакеты для расчета крыла самолета, атомного реактора, а также пакеты «служебного» типа для решения определенного класса математических задач. В известном смысле пакет представляет собой дальнейшее развитие идеи тематического раздела библиотеки. Основное различие между ними состоит в том, что программы библиотеки обычно используются независимо, а программы пакета рассчитаны на совместное применение в различных комбинациях друг с другом.

Создание пакета требует комплексного подхода, совместного труда прикладных и системных программистов. Приступая к его разработке, создатели, прежде всего проводят анализ всех задач из соответствующей

области и выделяют класс подзадач, к которым они сводятся. Для каждой подзадачи разрабатывается алгоритм ее решения и пишется соответствующая программа, которую обычно называют *модулем*. Совокупность модулей составляет *функциональное наполнение пакета*.

Наряду с функциональным наполнением создается *системное наполнение*, которое состоит из служебных программ, предназначенных обеспечить пользователям пакета максимальные удобства. Эти программы управляют работой всего пакета, анализируют и выполняют задания пользователей, автоматизируют процесс сборки, их программ и модулей, позволяют производить пополнение пакета, вносить изменения в его модули. Важно, чтобы язык общения пользователей с пакетом прикладных программ был прост, гибок, удобен.

В простейших пакетах, чтобы решить какую-нибудь конкретную задачу, пользователь пишет на алгоритмическом языке (например на фортране) программу, которая представляет собой последовательность обращений к нужным модулям пакета. При этом программист сам определяет, какие модули ему понадобятся и в каком порядке, сам организует передачу данных от одного модуля к другому. В целом это похоже на работу с библиотекой, однако пакет предоставляет более удобные средства для выполнения всех работ по сборке и стыковке модулей, а сам набор модулей более богат и взаимосвязан.

Наряду с этим существуют пакеты другого типа. При их создании заранее фиксируется набор допустимых задач из некоторой области. Для каждой задачи из этого набора составляется последовательность модулей, выполнение которых обеспечивает получение решения. При работе с таким пакетом пользователь может не знать ни его состава, ни принципов внутренней организации. Он должен только на языке общения с пакетом указать название своей задачи (принадлежащей к допустимым) и дать необходимую информацию: исходные данные, требуемую точность, форму

выдачи результатов и т. д. Все остальное программа, управляющая работой пакета, делает сама.

Мы описали два крайних случая. Достоинства каждого из них являются одновременно и его недостатками. Поэтому многие пакеты создаются как промежуточные варианты, описанных выше. С одной стороны, для определенного набора типичных задач в них заранее фиксирована последовательность модулей, осуществляющая решение. С другой стороны, пользователь имеет возможность сам составлять нужные комбинации модулей, чтобы решать «несерийные» задачи. В этом случае он должен составить программу, вызывающую и стыкующую нужные модули. Такой промежуточный тип пакета является наиболее распространенным.

В настоящее время проводится разработка пакетов нового типа. Получив от пользователя описание постановки задачи, такой пакет должен провести ее анализ и осуществить сборку модулей, обеспечивающих решение. Важно подчеркнуть, что нужная последовательность модулей не задается заранее. Система управления пакетом находит ее сама по описанию задачи. Для этого используются методы «искусственного интеллекта». С их помощью удастся формировать без вмешательства человека нужную последовательность модулей.

Профессиональными математическими пакетами называются системы, среды, языки типа Mathematica, Maple V, MatLAB, Derive, MathCAD, а также семейство систем статистического анализа данных - таких как SPSS, Statistica, Statgraphics, Stadia и др. Профессиональные математические пакеты - это программы (пакеты программ), обладающие средствами выполнения различных численных и аналитических (символьных) математических расчетов, от простых арифметических вычислений, до решения уравнений с частными производными, решения задач оптимизации, проверки статистических гипотез, средствами конструирования математических моделей и другими инструментами, необходимыми для проведения

разнообразных технических расчетов. Все они имеют развитые средства научной графики, удобную справочную систему, а также средства оформления отчетов.

Mathcad

Mathcad - программное средство, среда для выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, снабженная простым в освоении и в работе графическим интерфейсом, которая предоставляет пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстами. В среде Mathcad доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения математических задач различной сложности.

Отличие MathCAD от таких конкурентов, как Maple, Matlab, Mathematica: проводя вычисления с помощью MathCAD, кажется, что идёт работа с обыкновенной бумагой. Для четкого и понятного изложения метода и всех сделанных допущений можно вставлять столько комментариев, сколько потребуется. Рабочие листы MathCAD можно легко перепроверить, все документировано так четко, что понять не составляет труда. Благодаря интеллектуальным технологиям MathCAD, невозможно допущение ошибок с размерностями, несовместимыми модулями. Рабочие листы защищены от различного рода ошибок, так что допустить ошибку на начальном этапе расчетов очень сложно. Вычислительные процедуры и важные для проекта параметры выносятся так, чтобы их можно было легко менять и следить за результатами. Например, легко определить, на какие вычисления в проекте повлияло изменение процедуры или параметра. MathCAD позволяет представлять результаты расчетов таким образом, что их поймут и инженеры, и менеджеры, и покупатели, и служба поддержки и проверяющие. Более того, MathCAD среда объектно-ориентированного программирования и визуального проектирования.

Все вышеуказанные возможности пакета MathCAD, указывают на лидирующую позицию данной системы в компьютерном моделировании процессов математического образования.

MathCAD и его возможности.

Разработчиком математического пакета MathCAD является, частная компания Mathsoft, которая была основана в 1984 году. Её штаб-квартира расположена в городах Кембридж (штат Массачусетс, США), около технологических центров Массачусетского Технологического Института и Гарвардского Университета (Harvard University). Нынешний владелец компании Mathsoft Engineering and Education, Inc приобрел контрольный пакет акций в январе 2001 года. Таким образом, Mathsoft превратилась из государственной компании в частную. Это позволило ей сохранить место ведущего поставщика корпоративного программного обеспечения для организаций, занимающихся интенсивными инженерными расчетами, а также для правительства и сферы образования.

Mathsoft - это единственный поставщик вычислительного ПО и документации, который дает возможность инженерам-конструкторам работать с помощью универсального языка инженерной математики. Её флагманский продукт, MathCAD, призван ускорить разработку продуктов и технологических исследований, гарантируя высокое качество вычислений. При создании MathCAD, создатели сосредоточили усилие на повышении скорости и мощности. Цель состояла в том, чтобы укрепить ядро MathCAD и повысить его практичность. Упрощение обработки данных, улучшение редактирования рабочих листов, улучшение взаимодействия с другими программами, простота программирования и повышение функциональных математических возможностей - суть последних усовершенствований.

В MathCAD реализована технология самодокументирования, соответствующая всем издательским стандартам. Это позволяет инженерам создавать и заново использовать результаты уже проведенных вычислений, а

также обмениваться ими с коллегами. Более полутора миллиона пользователей по всему миру используют MathCAD. Он почти стал промышленным стандартом. Основными пользователями MathCAD являются электротехники, строители и механики; автомобильная, авиационная, космическая промышленность, электросвязь, конструкторские бюро и архитекторы. Также MathCAD широко используется в высших учебных заведениях. Краткий обзор задач, которые решаются MathCAD:

Числовые операции: суммирование, произведение, логические операции, дифференцирование, интегрирование.

Числовые функции: тригонометрические, экспоненциальные, гиперболические, другие функции и преобразования.

Символьные операции: упрощение, дифференцирование, интегрирование и алгебраическое преобразование выражений. MathCAD запатентовал автоматический перевод символьных выражений в алгебраические.

Векторы и матрицы представлены в виде массивов, что позволяет выполнять всевозможные операции линейной алгебры, например, находить собственные значения и собственные вектора, производить поиск элементов в массивах.

Статистика и анализ данных: генерация случайных чисел или гистограммы, данные, соответствующие встроенным и общим функциям, интерполированные данные. Также можно строить вероятностную модель распределения.

Решение дифференциальных уравнений, а именно: решение обыкновенных дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений. Задачи с краевыми значениями можно решать в командной строке или в блоках решений. Последние позволяют использовать комментарии, чтобы точно изложить метод решения дифференциальных уравнений и уточнения.

Существуют переменные и постоянные реальные, мнимые и комплексные числа с вспомогательными модулями или без них.

Высокоэффективные средства вычислений обеспечивают скорость и сложное управление памятью.

Объектно-ориентированное программирование, что позволяет численно решать сложные математические задачи.

Для пользователя система MathCAD предоставляет собой мощное, удобное и наглядное средство описания алгоритмов решения математических задач. Система MathCAD настолько гибка и универсальна, что может оказать неоценимую помощь в решении математических задач как школьнику, постигающему азы математики, так и академику, работающему со сложнейшими научными проблемами.

Вывод по главе III

На основе выше приведенных качественных исследований были разработаны численные схемы, сконструирован итерационный процесс, а так же разработан алгоритм и мультимедийный программный комплекс в среде Visual Studio (C#) для визуализации задачи реакции-диффузии.

Заключение

Исследование различных свойств систем автомодельных (одномерных) уравнений, более простых по сравнению с многомерными уравнениями в частных производных, являются относительно легкой задачей и поэтому уравнения такого рода поддаются более детальному анализу. Для численного исследования нелинейных задач важную роль играет предварительное качественное изучение автомодельных и приближенно-автомодельных уравнений.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе:

- Построены важные для численного моделирования оценки решения уравнений нелинейной диффузии в однородной среде с поглощением и/ или с источником.
- Получены оценки и асимптотики решений.
- Разработаны численные схемы алгоритмов и программы для поставленных задач в среде Visual Studio 2012 (C#) и MathCAD.
- Визуализированы процессы нелинейной диффузии в однородной среде при наличии нелинейного источника.

Список литературы

І. Законы Республики Узбекистан

1. Закон Республики Узбекистан «Об информатизации»// 11 декабря 2003 года.

ІІ. Книга Президента Республики Узбекистан Каримова И.А.

2. Каримов И.А. По пути преодоления последствий мирового кризиса, модернизации страны и достижения уровня развитых государств Ислам Абдуганиевич Каримов. Ред. Х. Кутлуков, // Ташкент: Узбекистан, 2010 – 248с.

ІІІ. Основная литература

3. Иванов В.Т., Лубышев Ф.В., Деркеч А.С., Меркушан В.Г. Методы совместных расчетов электрических и тепловых полей в электрохимических системах. В сб.: Электрические и тепловые поля в электролитах. Вопросы теории и методы расчета. //М.: Наука, 1978, с.3-31.
4. Арипов М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. //Ташкент, «Фан», 1978.
5. Aripov M. Asymptotics of Solutions of the non-Newton Polytrophic Filtration Equations. //ZAMM 2000, vol.80, supl.3, 767-768.
6. Aripov M. Muhammadiev J.U. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. //Buletin Stiintific – Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica, Nr. 3,(1999),pg. 19-40.

7. Зельдович Я.Б. и Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. // Сборник, посвященный 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. М. 1950, с.61-71.
8. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. //Ж. выч. мат. и мат. физ. 1974 т. 14, № 4, с 891-905.
9. Калашников А. С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. // ЖВМ и МФ,1976, т.16, № 3, с. 689 -696.
10. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$. //ДАН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362 -1364.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I. // Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 12, с. 2123 - 2140.
12. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач. // ДАН СССР, 1984, т. 278, № 6, с. 1296 - 1300.
13. Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. // I-Мат. сб., 1982, т. 118(160), с. 291 -322.
14. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. // М. Наука, 1984. стр.207.
15. Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. // ПММ. 1952. т. XVI, вып. 1. с.67-78.
16. Баренблатт Г.И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. // ПММ. 1952. т. XVI, вып. 6. с.679-698.

17. Knerr B. F. The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension. // Trans. of Amer. Math. Soc., 1979, v. 249, p. 409 - 424.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. // М.: Наука, 1977.
19. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. // М.: Наука, 1987, 480с.

IV. Дополнительная литература

20. Исроилов М. Ҳисоблаш усуллари. 2 том. 2008.
21. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. // Синергетика и прогнозы будущего, М., 1997.
22. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными вырождающимися параболическими уравнениями. // Труды семинара им. И.Г.Петровского. М.: МГУ, 1975, вып.1, с. 135-144.
23. Мартинсон Л.К. Распространение сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях. // Изв. АН СССР, МЖГ. №6, 1978. 60-65 б.
24. Голайдо С.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Распространение тепловых возмущений в средах с объемным поглощением тепла. // Инж.-физ. журн., 1977, т.32, № 1, с. 124-130.
25. Граник И.С., Мартинсон Л.К. Движение фронта тепловой волны в нелинейной среде с поглощением. // Инж.-физ. журнал, 1980, т. 39, № 4, стр. 728-731.
26. Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением. // В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986, с. 279-309.

27. Kombe Ismail. Doubly nonlinear parabolic equations with singular lower order term. // *Nonlinear Anal*, 56, 2004, №2, pp.185-199.

28. Kusano Takaši and Tomoyuki Tanigava. Positive Solutions to a Class of Second Order Differential Equations with Singular Nonlinearities. // *Applicable Analysis*. 1998, Vol. 69(3-4), pp.315-331.

V. Публикации в научно технических журналах

29. Ахмедова Н.Б. «Компьютерные методы обработки визуализации процесса реакции-диффузии». // Республиканская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы использования альтернативных источников энергии». Тезис-доклад.

30. Ахмедова Н.Б. «Исследование свойств решений задачи политропической фильтрации с градиентной нелинейностью с источником». // Республиканская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы использования альтернативных источников энергии». Тезис-доклад.

VI. Интернет сайты

31. ИНТУИТ национальный открытый университет www.intuit.ru

32. Журнал мультимедиа www.multimedia.uz

33. Интернет поисковик www.google.com

Приложение

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;
namespace ZKRD
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
        }
        double[,] u = new double[101, 101];
        double[,] u1 = new double[101, 101];
        double[,] u2 = new double[101, 101];
        double[] y= new double[101];
        double[] y1 = new double[101];
        double[] alf = new double[101];
        double[] bet = new double[101];
    }
}
```

```

double a, b, h, tau, p, n, m, k, l, q, t, gamma, beta, xmax;
int j, d, s, nn;
int nmax = 50;

public double uxy(double xx, double tt)
{
    double res = Math.Pow(t + tt, -gamma);
    double a1 = xx*Math.Pow(t + tt, -beta);
    a1 = a - b * Math.Pow(a1, (p + m - k) / (p - 1));
    if (a1 > 0)
    { res = res * Math.Pow(a1, (p - 1) / (l * (p - 1) - 1)); }
    else res = 0;
    return res;
}

public double ai(int ii)
{
    double res;
    if (ii != 0)
        res = Math.Pow(h * ii, k) * Math.Pow(y[ii], (l - 1.0) * (p - 1.0)) *
        Math.Pow(Math.Abs(y[ii] - y[ii - 1]) / h, p - 2.0) * tau*Math.Pow(l,p-1.0) /
        Math.Pow(h, 2.0);
    else res = 0;
    if (res < 0) res = 0;
    return res;
}

public double bi(int ii)
{

```

```

        double res =Math.Pow(l,p-1.0)* Math.Pow(h * (ii+1), k) *
Math.Pow(y[ii+1], (1 - 1.0) * (p - 1.0)) * Math.Pow(Math.Abs(y[ii+1] - y[ii]) / h, p
- 2.0) * tau / Math.Pow(h, 2.0);

        // if(ii==0) textBox9.Text = textBox9.Text + " " + res.ToString()+
"+y[ii+1].ToString();
        if (res < 0) res = 0;
        return res;
    }
    public double ci(int ii)
    {
        double res = ai(ii) + bi(ii) + Math.Pow(h * (ii+1), m);
        return res;
    }

    public double fi(int ii)
    {
        double res = tau * Math.Pow((ii) * h, n) * Math.Pow(y[ii], q) +
Math.Pow(h * (ii+1), m) * y[ii];
        return res;
    }
    private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
    {
        textBox9.Text = "";
        t = Convert.ToDouble(textBox2.Text);
        p = Convert.ToDouble(textBox3.Text);
        l = Convert.ToDouble(textBox4.Text);
        m = 0; k = 0; n = 0;
        q = Convert.ToDouble(textBox8.Text);
    }

```

```

a = 0.5;
gamma = (p + n - k) / ((q - 1) * (p + m - k) - (m - n) * (1 * (p - 1) -
1));

beta = (q-1*(p-1)) / ((q - 1) * (p + m - k) - (m - n) * (1 * (p - 1) - 1));
b = (1 * (p - 1) - 1) * Math.Pow(beta, 1.0 / (p - 1.0)) / (1 * (p + m -
k));

xmax = Math.Pow(a / b, (p - 1.0) / (p + m - k)) * Math.Pow(t + t,
beta);

h = xmax / nmax;
tau = t / nmax;
for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
{
    u[0, i] = uxy(i*h , 0);
}
for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
{
    u[i, 0] = uxy(0, i*tau);
}
for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
{
    u[i, nmax] = uxy(nmax * h, i*tau);
}
for (int i = 0; i < nmax + 1; i++)
{
    y[i] = u[0,i];
}

bool tr;

```

```
for (int i = 1; i < nmax+1; i++)
{
    tr = true;
    int it = 0;

    for (int j1 = 0; j1 < nmax + 1; j1++)
    {
        y[j1] = uxy(j1 * h, i * tau);
        //y[j1] = u[i-1,j1];
    }

    while (tr==true)
    {
        it = it + 1;
        y1[0] = u[i,0];
        y1[nmax] = u[i,nmax];

        //alf[0] = bi(0)/ci(0);
        //bet[0] = u[i,0]/ci(0);

        alf[0] = 0;
        bet[0] = y[0];

        for (int j1 = 0; j1 < nmax; j1++)
        {
            alf[j1 + 1] = bi(j1) / (ci(j1) - ai(j1) * alf[j1]);
        }
        for (int j1 = 0; j1 < nmax; j1++)
        {
```

```

        bet[j1 + 1] = (ai(j1)*bet[j1]+fi(j1)) / (ci(j1) - ai(j1) * alf[j1]);
    }
    for (int j1= nmax-1; j1 >= 0; j1--)
    {
        y1[j1] = alf[j1 + 1] * y1[j1 + 1] + bet[j1 + 1];
    }
    tr = false;
    for (int j1 = 0; j1 < nmax+1; j1++)
    {
        if (Math.Abs(y1[j1] - y[j1]) >= 0.001) tr = true;
    }
    for (int j1 = 0; j1 < nmax+1; j1++)
    {
        y[j1] = y1[j1];
    }

}

for (int j1 = 1; j1 < nmax; j1++)
{
    u[i, j1] = y1[j1];
}

textBox9.Text = textBox9.Text + " " + it.ToString();
}
for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
{
    textBox9.Text = textBox9.Text + " " + alf[i].ToString();
}

```

```

    }

    for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
    {
        for (j = 0; j < nmax + 1; j++)
            u1[i, j] = uxy(j * h, i * tau);
    }

    for (int i = 0; i < nmax+1; i++)
    {
        for (int j = 0; j < nmax+1; j++)
        {
            u2[i, j] = u[i, nmax - j];
            u2[i, j + nmax] = u[i, j];
        }
    }
}

private void button2_Click(object sender, EventArgs e)
{
    j = -10; d = -1;
    timer1.Enabled = true;
}

private void timer1_Tick(object sender, EventArgs e)
{
    j = j + 10; d = d + 1;
    if (j >= nmax) timer1.Enabled = false;
//    chart1.Series[0].Points.Clear();
    for (int i = 0; i < 2*nmax+1; i++)

```

```
{
    chart1.Series[d].Points.AddXY(-h*nmax+i * h, u2[j, i]);
}
}

private void button3_Click(object sender, EventArgs e)
{
    axOpenGL1.RemoveSurfaces();
    axOpenGL1.AddSurface(u2);
}
}
}
```