

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ШАРҚШУНОСЛИК ИНСТИТУТИ
МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАТИКА КАФЕДРАСИ

“АМАЛИЙ ВА ЛИНГВИСТИК МАТЕМАТИКА”

МАЪРУЗАЛАР МАТНИ

Тузувчи: Ф.м.ф.н. Носиров К.

ТОШКЕНТ 2012

“АМАЛИЙ ВА ЛИНГВИСТИК МАТЕМАТИКА”

МАЪРУЗАЛАР МАТНИ

М А Ъ Р У З А 1

Дарснинг ўқув мақсади: “Амалий ва математик лингвистика” фанини моҳияти ва мазмунини талабаларга тушунтириш.

Таянч сўзлар: “Лексика”, “Семантика”, “Фонетика”, “фонология”, “Морфология”, “Грамматика”.

Маъруза режаси.

1. “Математик лингвистика” ҳақида тушунча.
2. “Амалий ва математик лингвистика” ҳақида тушунча.
3. Математика бўлимлари ҳақида тушунча.

“Математик лингвистика”- табиий ва баъзи сунъий тилларни тузилишини ифодалаш учун хизмат қиладиган умумлашган аппаратни вужудга келтирувчи математикалашган фандир. Бу фан ўтган 20 асрнинг 50 йилларида тилшуносликнинг баъзи асосий тушунчаларини аниқлаштириш ва муаммоларини ҳал этиш натижаси юзага келган.

“Математик лингвистика” да алгебра, алгоритмлар ва автоматлар назариясининг услуб ва қонунлари кенг қўламда фойдаланилади. Математик лингвистика мустақил фан (яъни лингвистиканинг бир бўлаги сифатида эмас) деб қабул этилган, аммо лингвистика билан ҳамбарчас боғлангандир.

Математик лингвистикани баъзан математик аппарат қўлланилган “лингвистик тадқиқот” деб ҳам номлашади.

Бизнинг “амалий ва лингвистик математика” курсида айнан “математик лингвистика” ёки “лингвистик тадқиқот” да фойдаланиладиган математик аппаратлар, тушунчалар, қонун ва қонуниятлар, формула ва услублар билан танишиб ва уларни амалда қўлланилиши ўрганилади.

Тўғри матнларни (биринчи навбатда гапларни) математик ифодалар ёрдамида тасвирлаш усуллари ўрганиш математик лингвистиканинг асосий бўлими- синтаксистик тузишни тасвирлаш усули назариясидир.

Шу сабабли талабаларни “синтаксис”, “лексика-семантика”, “фонология”, “морфология”, “грамматика”, “сўз тузилмаси”, “филология” сўзларнинг маъноларини эслашга ёки билишга қаратилган кириш қисмини билан таништирилди.

“Лексика”- сўзнинг маъноси ва моҳиятини ўрганувчи фандир. Шу жумладан сўз бойлиги ҳам ўрганилади.

“Семантика”- гапнинг “оборотига” қараб сўз маъноси танланишини ўрганувчи фан.

“Фонетика”- “фонология”- товушларни ўрганувчи фандир.

“Морфология”- сўз тузилмасини ўрганувчи фандир.

“Грамматика”- гапларни турлари ва уларда иштирок этувчи сўзларнинг комбинациялари. Гап ва сўзларнинг тузилмалари ва тузилиш қонун-қоидалари ўрганилади.

“Филология”- турли халқларнинг тили, ёзуви ва бадиий адабиётларига асосланган маданиятини ўрганувчи фанларнинг тўпламидир. (Р.А. Будагов. Филология ва маданият).

Бизнинг курсда гапларнинг математик “моделини” яшаш учун керак бўладиган асосий математик тушунчалар, формулалар, қонун қоидалар ҳамда усуллар ва уларнинг татбиқлари кўрилади. Булар қуйдагилар: рақамлар, сонлар назарияси, нукта ва уни бирор санок системасида жойлашуви, улар улар ўртасидан муносабатлар, тўғри чизиклар ва уларни тенгламалари, тўғри чизикларни ўзаро муносабатлари (параллеллиги, перпендикулярлиги), нукта билан тўғри чизик муносабатлари, комбинаторика, эҳтимоллар назарияси тушунчалари ва ҳ.к.

Қуйдаги боғланишни кўрайлик. Гаплар сўзлардан, сўзлар эса ҳарфлардан иборат бўлиб, гапларда сўзлар маъноси ва мавқеи қараб бирор қоидага кўра жойлашади. Ўз навбатида ҳарфлар ҳам бирор қонунга кўра сўзларни вужудга келтиради. Худди шундай арифметик ифода

хадлардан, ҳарфлар ҳам ўз навбатида ўзгарувчи, параметр ва сонлардан иборат. Сонлар эса маълум қоидага кўра рақамлардан ташкил топади.

Шунинг учун “амалий ва лингвистик математика”ни сонлар назарияси ўрганишдан бошлаймиз.

Назорат учун саволлар

1. Семантиканинг вазифаси?
2. Лексика нима?
3. Грамматикани вазифаси нимани англатади?
4. Филологияни мазмуни ва моҳияти нима?

Мустақил иш топшириқлари:

1. Семантиканинг бирор гап билан таҳлил қилиб беринг ?
2. Лексика бирор гап воситасида тушунтириб беринг?
3. Грамматиканинг вазифасини мисоллар билан очиб беринг?
4. Филологияни мазмуни ва моҳиятига мисоллар келтиринг?

М А Ъ Р У З А 2

Математикага кириш. Математика бўлимлари. Сонлар

Дарснинг ўқув мақсади: Талабаларга математика фанининг ҳаётдаги ўрни ва бўлимлари билан таништириш ҳамда математиканинг асосий тушунчаси – сонлар классификацияси ҳақида маълумот бериш.

Таянч сўзлар: Натурал, бутун, каср, раσιонал, ирраσιонал, ҳақиқий, комплекс сонлар, сонлар ўқи санок боши.

Маъруза режаси.

1. Математика фанининг ҳаётдаги ўрни ва бўлимлари
2. Сонлар ҳақида тушунча ва уларнинг турлари.
3. Сонлар ўқи, координата системаси.
4. Сонларни жойлаштириш ва уларни қиёслаш.

Ҳар бир фаннинг асосий тушунчаси бўлади. Масалан, мусиқада ноталар, кимёда атом ва молекула, биологияда ҳужайра, тил ва адабиётда ҳарф ва сўзлар бўлса, математикада еса рақам ва сонлардир. Сонлар рақамлардан ташкил топади. Математикада икки хил рақамлар: рим ва араб рақамлари мавжуддир. Рим рақамлари И, В, Х, С, Д, М... ҳарфларнинг маълум қоидалар асосида сонларни ташкил еца, араб рақамлари 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 комбинация орқали жуда катта сонларни осон равишда ҳосил етади. Фойдаланиши қулай бўлгани учун араб рақамлари оммавийлашгандир.

Инсоният қадимдан ўзининг бор нарсаларини санаш иштиёқида бўлгани учун сонларни кашф етган. Буюк алломаимиз Абу Райхон Беруний қуйидаги фикрларни айтганлар: “Нарсаларни санаш инсон табиатидандир. Нарсаларнинг миқдори уни бирлик деб қабулқилинган нарсага таққослаш билан аниқланади.” Шунинг учун илк замонларда санаш учун яратилган ва ҳозирги кунда НАТУРАЛ сонлар деб аталадиган сонлар пайдо бўлган. Демак, НАТУРАЛ сон деб мусбатва бутун сонларга айтамыз. Бундай сонлар асосан санок ва тартиб номерларни белгилаш учун ишлатилади. Кейинчалик инсонлар ўзаро олди-берди ишларни олиб бориш натижасида фойда ва қарз(зиён) деган тушунчалар пайдо бўлиб, уларнинг миқдорини белгилаш учун манфий сонлардан фойдаланиш заруратини ҳосил етди. Бундан Бутун сонлар тўплами яъни барча

манфий ва мусбат бутун сонлар ва нол сонига ега бўлган тўплам бутун сонлар тўплами деб номланадиган бўлди. Бу тўпламнинг элементларини еса бутун сонлар деб атай бошлашди. Мисол учун

... -925, ..., -101, ..., -100, ..., -25, -24, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 45, ..., 1001,

Ҳаётда ҳамма нарсаларнинг саноғи бутун сонларда бўлавермайди. Масалан, терилган пахта нақ 50 ёки 51 кг бўлмай бу сонлар ўртасидаги сон билан ифодалашга тўғри келиши мумкин. Бунинг учун каср сон деб аталдиган сонни киритиш зарур бўлади. Демак, каср сонлар

бутун сонлар орасидаги сонлар бўлиб, улар $\frac{a}{b}$ кўринишида бўлади. Бунда, a - сурат, b - махраж

сон деб аталади. Бундай касрлар оддий каср деб юритилади. Агар сурат махражидан катта ($a > b$) бўлса натурал каср, аксинча ($a < b$) бўлса тўғри каср деб аталади. Нотўғри касрнинг бутун қисми ажратилиб ёзилган ҳолатига аралаш каср дейилади.

Касрларни махражи ўн сонига каррали бўлса, уни махражсиз ёзиш мумкин ва касрнинг бундай кўринишига ўнли каср деб аталади.

Масалан, $\frac{3}{10} = 0.3$, $\frac{7}{100} = 0.07$, $\frac{11}{1000} = 0.011$

Ҳар қандай оддий касрни ўнли касрга (суратни махражга бўлиш йўли билан) ўтказиш мумкин. Бунда гоҳида чексиз ўнли касрга дуч келиб қолиш мумкин.

$\frac{1}{3} = 0.3333$ бу ҳолда, бир сон даврий равишда такрорланаверса, бундай сонни чексиз

даврий ўнли каср деб аталади ва уни қисқача 0.3333 = $0.(3)$ ёзилади.

$\frac{3}{7} = 0.428571$

Бу каср чексиз, аммо даврий бўлмагани учун, уни чексиз нодаврий ўнли каср деб аталади.

Юқорида айтилганларига кўра, натурал сонлар бутун сонлар тўпламига кирар экан. Агарда ғар қандай бутун сонни каср сон шаклида тасвирлаш мумкин эканлигини инобатга олсак, ($5 = \frac{5}{1}$)

каср сонлар бутун сонларни ўз ичига олади. Барча натурал, бутун ва каср сонлар расионал сонлар тўпламини ташкил этади. (Натурал сонлар тўпламини N , бутун сонлар тўпламини Z , расионал сонлар тўпламини Q билан белгиланади) бу тўпламнинг элементларини расионал сонлар деб аталади.

Қиймати аниқ катталиқка ега бўлмаган сонларни иррасионал сонлар деб атаймиз. Бунга чексиз нодаврий ўнли касрлар

0.13133125785341 $\pi = 3.141592$ $e = 2.718281$

$\sqrt{2} = 1.4142135623$ $\sqrt{3} = 1.73205080756$

Иррасионал ва расионал сонлар биргаликда ҳақиқий сонлар тўплагини ташкил этади (P билан белгиланади) ва бу тўплам элементларини ҳақиқий сонлар деб аталади.

Биз биламизки, манфий сондан квадрат чиқариб бўлмайди, аммо $\sqrt{-1} = i$ деб белгилаш кирицак, у ҳолда $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$ бўлади.

$a + bi$ кўринишидаги сонга комплекс сонлар дейилади. a - ҳақиқий қисмини, b -мавҳум қисмининг коэффициенти деб аталади.

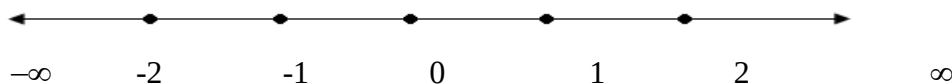
Юқорида айтилганларга кўра, қуйидаги сонлар тўплами дарахтини ҳосил

қиламиз.

$natural\ sonlar$	$\left\{ \begin{array}{l} butun\ sonlar \\ kasr\ sonlar \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} ratsional\ sonlar \\ irratsional\ sonlar \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} haqiqiy\ sonlar \\ kompleks\ sonlar \end{array} \right\}$	$\left. \right\} sonlar\ to'plami$

Аналитик геометрия методларининг энг асосий хусусиятларидан бири бу сонлар орқали геометрик образларининг жойлашишини ифодалашдир. Геометрик образларнинг ҳолатини

белгиловчи сонлар уларнинг координаталари деб аталади. Тўғри чизикда нуқтанинг жойлашишини кўрамиз. Бунинг учун бирор O нуқтани олиб, ундан тўғри чизик ўтказамиз, бир йўналишни мусбат қарама-қарши йўналишини манфий йўналиш деб қабул қиламиз. Кейин еса бирор e ўлчам олиб бирлик сифатида O нуқтадан иккала йўналиш бўйича тўғри чизикни e ўлчам бўйича бирликларга бўлиб чиқамизда, мусбат йўналиш бўйича $1, 2, 3, 4, \dots$, ва манфий йўналиш бўйича O нуқтадан бошлаб $-1, -2, -3, -4, \dots$, ёзиб чиқамиз. Натижада санок ўқи ҳосил бўлади. O нуқта санок боши бўлиб хизмат қилади.



Бу сон ўқида жойлашган исталган иккита сондан қайси бири ўнпроқда жойлашган бўлса, ўша сон иккинчисидан катта ҳисобланади.

Масалан, 5 ва 6 $6 > 5$ чунки у ўнпроқда жойлашган.

-4 ва 1 $1 > -4$ чунки у ўнпроқда жойлашган

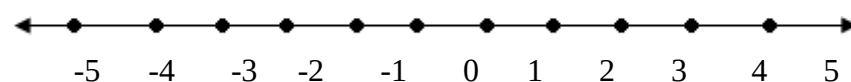
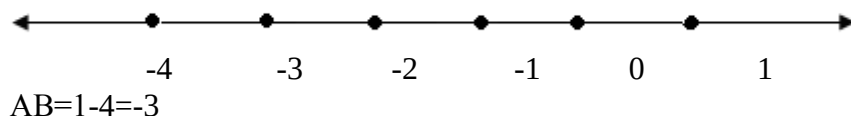
-2 ва 0 $0 > -2$ чунки у ўнпроқда жойлашган

Агарда сонлар ўқида A ва B нуқталар мос равишда x_1 ва x_2 координаталарга ега бўлса, у ҳолда AB масофа

$$AB = x_2 - x_1$$

формула орқали аниқланади.

Агарда AB масофа манфий қийматга ега бўлса, у ҳолда, A нуқтадан B нуқтага бориш йўналиши манфий йўналиш билан устма-уст тушади, яъни B нуқта A нуқтанинг ўнг томонда жойлашганини билдиради.



$$AB = 5 - (-2) = 7$$

Агар C нуқта AB кесмани $\lambda = \frac{AC}{CB}$ нисбатда бўлса унинг X_C координатаси

$$X_C = \frac{X_A + \lambda X_B}{1 + \lambda}$$

формула орқали ифодаланади.

Назорат учун саволлар

1. Натурал сонлар нима учун ишлатилади?
2. Бутун сонлар тўпламига қандай сонлар киради?
3. Қаср сонлар турларини айтиб беринг.
4. Ўнли қаср сонлар қандай кўринишга ега?

Мустақил иш топшириқлари:

1. Рационал сонлар тўпламига қандай сонлар киради?
2. Иррационал сонларга мисоллар келтиринг.

3. Санок ўқини ҳосил қилиш қандай?
4. Кесмани λ нисбатда бўлувчи нуқтанинг координатасини топиш формуласини ёзинг.

М А Ъ Р У З А 3

Тўғри чизик тенгламаси

Дарс ўқув мақсади: Аналитик геометриянинг асосий тушунчалари. Нуқта ва тўғри чизик ва унинг тенгламалари билан таништириш.

Таянч иборалар: Текислик тенгламаси, фазода тўғри чизик тенгламаси, йўналтирувчи вектор.

Маъруза режаси

1. Текисликда тўғри чизикни берилиши ва унинг тенгламаси.
2. Икки нуқта орасидаги масофа ва улардан утувчи тугри чизик тенгламаси.
3. Текисликда тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлар.
4. Бир нуқтадан утувчи тугри чизиклар тупламининг тенгламаси.

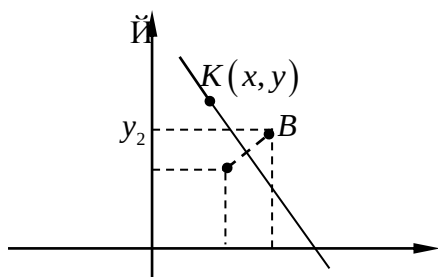
“Биринчи юридик фанлар доктори, биринчи профессор, биринчи академик-Хадича Сулаймонова”. Бу гапнинг эгаси – “Хадича Сулаймонова” сўзлари бўлиб, “биринчи юридик фанлар доктори”, биринчи профессор”, “биринчи академик” гаплари эса қайси маънода сифат вазифасини бажармокда. Аслида бу сифат вазифасини бажарувчилар ҳам сифат ва эгаси бўлган гаплардир, масалан “биринчи академик” бу гапда “биринчи” сўзи сифат, “академик”-эга. Агарда сифат сўзларни a_1 харфлари билан, от- сўзларини X ва Y лар билан белгиласак у ҳолда юқоридаги гапнинг математик ифодасини қуйдагича тасвирлаш мумкин бўлади.

$$(a_1 \cdot a_2 x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot a_1 x_3 + a_1 x_4) Y_1 \cdot Y_2$$

a_1 - “биринчи” сўзини билдиргани учун олдида чиқарсак ҳам математик маъноси ҳам грамматик маъноси бузилмайди. Гапларнинг бу тузилмаси рус тилида, ингиз тилида ва бошқа тилларда ҳам сақланади. Аммо гаплар тузилмалари мураккаблашган сари улар фарқлана бошлашди. Агар ҳар бир тил учун хос математик ифодани топа олсак, у ҳолда улардан умумийликни ёки тафовутларни аниқлаш ёки тушунтириш осонлашади деб ўйлаймиз. Бунинг учун аввал математик ифодаларни тузиш ва бу ифодаларда шакл алмаштириш, стандарт ҳолга келтириш каби машқларни яхши ўзлаштиришимиз зарур бўлади. Энг содда математик ифодалардан бири бу тўғри чизик тенгламаси бўлиб, у бир неча кўринишга эга ва бир неча усулда тузиш мумкин. Шунинг учун қуйида тўғри чизиклар билан боғлиқ тушунчалар билан танишамиз. Биз биламизки тўғри чизиклар нуқталардан ташкил топгандир. Модомики шундай экан гапни “нуқталар” дан бошлаймиз.

1-таъриф. ОХУ Декарт координаталари киритилган текисликда ётган егри чизик тенгламаси деб, бу егри чизикда ётувчи нуқталар координаталари x ва y ни боғловчи тенгламага айтилади. Умумий ҳолда егри чизик тенгламаси $F(x, y) = 0$ кўринишда, мумкин бўлган ҳолларда $y = f(x)$ ёки $x = \varphi(y)$ ошкор кўринишдаги тенгликлар орқали берилади. Бу йерда $F(x, y)$, $f(x)$ ва $\varphi(y)$ функциялар егри чизикни аниқловчи қонун-қоидаларни ифода этадилар.

Енди берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан бир хил масофада ётувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини ифода етувчи тенгламани топайлик.



$$\begin{array}{ccc} y_1 & A & \\ 0 & x_1 & x_2 \end{array} \quad X$$

$K(x, y)$ нукта A ва B нукталардан бир хил масофада ёцин, у ҳолда

$$KA = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = KB$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

Назорат учун савол ва топшириқлар

1. Фазода текислик ва тўғри чизик тенгламалари.
2. Текислик ва тўғри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Мустақил иш учун мавзу ва саволлар

1. Агар $D = 0$ бўлса, у ҳолда $Ax + By + Cz = 0$ текислик координата бошидан ўтади.
2. Агар $A = 0$ бўлса, $By + Cz + D = 0$ текислик OX ўққа параллел бўлишини кўрсатинг.
3. Агар $A = 0, D = 0$ бўлса, $By + Cz = 0$ текислик OX ўқдан ўт ишини кўрсатинг.
4. Агар $A = 0, B = 0$ бўлса, $Cx + D = 0$ текислик OXY текисликка параллел бўл ишини кўрсатинг.
5. Агар $A = 0, B = 0, D = 0$ бўлса, $Cz = 0$ (ёки $z = 0$) текислик OXY текислик билан устма-уст тушади. Ушбу

$$\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \quad (10)$$

текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари уларни аниқлайдиган $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ ва $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ векторларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари билан бир хил бўлади, шунинг учун улар қуйидагича бўл ишини исботланг.

МАЪРУЗА 4

Тўғри чизик ва гаплар орасидаги муносабатлар.

Дарс ўқув мақсади: Текислик тенгламаси, фазода тўғри чизик умумий тенгламаси, тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. йўналтирувчи вектор. Талабаларга тушунтириш.

Таянч иборалар: Текислик тенгламаси, фазода тўғри чизик умумий тенгламаси, тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Маъруза режаси

1. Текисликда тўғри чизикни умумий тенгламаси.
2. Текисликда тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлар.
3. Савол-жавоб гаплар.

Бадий асардаги диалог сўроқ, дарак, ундов гаплардан иборот бўлиб, улар асосида бирор саволга жавоб (ечим) олиш учун ундан фойдаланадилар.

Масалан – Хай! Сен кимсан?

– Мен талабаман.

Бу диалогдан қаршисидаги одамни аниқлаштириб, уни кимлигини билиш эди. Ечим аниқланди- талаба. Бу турли тоифадаги гаплар ёрдамида ечимга эга бўлинди.

Математикада ҳам бир нечта тўғри чизиклар тенгламаларидан чизикли тенгламалар системаси тузилиб, уларни “ечим”и топилади. Системани ечими мавжуд бўлиш учун унга кирган тўғри чизик тенгламалари ўзаро кесишувчи ёки перпендикуляр бўлишлари керак. Агар ўзаро параллел бўлса аниқ ечим мавжуд бўлмайди. Худди лингвистикадаги иккита сўроқ гап ечим бермаганидек.

Масалан: Хой! Сен кимсан?

Менми? Ўзингизчи?

Бу қисқа диалог рус тили, инглиз тилларда ва бошқа тилларда ҳам шу формада бўлади.

Масалан: Эй! Ты кто?

Я ? А ты сам кто?

Энди гапларни математик ифодасини тўғри чизик тенгламалари орқали ифодаласак, у ҳолда тўғри чизикларни ўзаро муносабатини ўрганишимиз керак бўлади.

Уларнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатларидан тўғри чизиклар орасидаги муносабат аниқланади. Бу аломатлар тенгламаларда иштирок этган коэффицентлари орқали аниқланади. Лингвистика ҳам ҳар бир савол-жавоб гапларда, уларда иштирок этган сўзлардан аниқланади.

Масалан: 1. Сен кимсан? 2. Ҳаво очиқ. 3. Мен талабаман. 4. Об-ҳаво қандай? 5. Нечанчи босқичда ўқийсан? 6. “Учинчи босқичда” гаплари берилган бўлса, улардан қуйдаги савол-жавоб гапларини тузамиз. 1 саволга 3 гап жавоб бўлади чунки бу гаплардан “сен” ва “мен” сўзлари иштирок этипти 4- гапдаги саволга жавоб 2-гап бўлади, чунки бу гапларда “об-ҳаво” ва “ҳаво” сўзлари иштирок этиляпти.

5- гапдаги саволга жавоб 6- гап бўлади. Бу гапларда “нечанчи” сўзи билан “учинчи” сўзлари қатнашиб маънога кўра савол-жавобни ташкил этипти.

Натижада қуйдаги савол-жавоб вужудга келади.

- Сен кимсан? Мен талабаман

- Об-ҳаво қандай? Ҳаво очиқ

- Нечанчи босқичда ўқийсан? Учинчи босқичда

Шунинг учун ушбу маърузада тўғри чизикларни параллеллик ва перпендикулярлик аломатларини ўрганамиз.

бу ерда $2x_2 - 2x_1 = a$, $2y_2 - 2y_1 = b$, $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$ белгилашларни кирицак, қуйдаги тенглама ҳосил бўлади

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

бу тенгламада a, b, c лар ўзгармас сонлардир. (1) тенглама тўғри чизикнинг умумий тенграмаси дейилади. Бу тенграманинг айрим махсус ҳолларини қараймиз:

1) агар $c = 0$ бўлса, $ax + by = 0$ ёки $y = -\frac{a}{b}x$ $b \neq 0$, яъни тўғри чизик координата бошидан ўтади.

2) агар $b = 0$ $a \neq 0$ бўлса, $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$, яъни тўғри чизик OY ўқка параллел бўлади.

3) агар $a = 0$ $b \neq 0$ бўлса, $y = -\frac{c}{b} = \text{const}$, яъни тўғри чизик OX ўқка параллел бўлади.

4) агар $b = 0$ ва $c = 0$ бўлса $x = 0$, яъни тўғри чизик OY ўқ билан устма-уст тушади.

5) агар $b \neq 0$ $a = 0$ ва $c = 0$ бўлса, $y = 0$ тўғри чизик OX ўқ билан устма-уст тушади.

Агар (1) тенгламада $a \neq 0$, $b \neq 0$ ва $c \neq 0$ бўлса, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$ax + by = -c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1, \quad -\frac{c}{a} = m, -\frac{c}{b} = n \text{ деб белгиласак } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ҳосил қиламиз, бу йерда $|m|$ ва $|n|$ берилган тўғри чизикнинг координата ўқларини кесишидан ҳосил бўлган кесмалар узунликларига тенг бўлади.

Агар (1) тенгламада $b \neq 0$ бўлса, уни қуйидаги кўринишга олиб келиш мумкин:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \text{ бу йерда } -\frac{a}{b} = k, -\frac{c}{b} = d \text{ деб белгилаш киритиб, } y = kx + d$$

кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади. Тенгламадаги k коэффициент тўғри чизикнинг OX ўқи билан мусбат йўналиш бўйича ҳосил қилган φ бурчакнинг тангенсига тенг, яъни $k = \operatorname{tg} \varphi$.

Енди $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини топамиз, бунда бурчак коэффициенти k берилган деб қаралади. Тўғри чизик тенгламасини $y = kx + d$ кўринишда излаймиз, у ҳолда $y_1 = k \cdot x_1 + d$ тенглик ўринли бўлади, иккала тенгликни ҳадма-ҳад айириб қуйидагини ҳосил қиламиз

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \quad (2)$$

$A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини топайлик. (2) тенгламага кўра, қуйидагини ҳосил қиламиз,

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1) \text{ ёки } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k нинг қийматини (2) тенгламага қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \text{ ёки } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$y = k_1x + d_1$ ва $y = k_2x + d_2$ тўғри чизиклар берилган бўлсин. Бу тўғри чизиклар кесишиш нуқтаси атрофида, биринчи тўғри чизикни соат стрелкасига тескари йўналишда айлантириш натижасида то иккинчи тўғри чизик билан устма-уст тушгунча ҳосил бўлган бурчак φ , икки тўғри чизик орасидаги бурчак дейилади.

Тўғри чизиклар умумий кўринишда берилган бўлсин:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

У ҳолда бу тўғри чизикларнинг параллеллик шarti $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ тенглик орқали берилади, уларнинг перпендикулярлик шarti еса $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ тенглик билан ифодаланади.

Агар қаралаётган тўғри чизиклар параллел бўлмаса,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси йечими шу тўғри чизикларнинг кесишиш нуқтасидан иборат бўлади.

$M(x_0, y_0)$ нуктадан $ax + by + c = 0$ тўғри чизикқача бўлган масофани d деб белгиласак, у ушбу

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

формула билан топилади.

Назорат саволлари

1. Текисликда тўғри чизикни умумий тенгламасини ёзиб беринг.
2. Текисликда тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини гапириб беринг.
3. Савол-жавоб гапларга мисол келтиринг.

Мустақил иш учун мавзу ва саволлар

1. Агар $D = 0$ бўлса, у ҳолда $Ax + By + Cz = 0$ текислик координата бошидан ўтади.
2. Агар $A = 0$ бўлса, $By + Cz + D = 0$ текислик OX ўққа параллел бўлишини кўрсатинг.
3. Агар $A = 0, D = 0$ бўлса, $By + Cz = 0$ текислик OX ўқдан ўт ишини кўрсатинг.
4. Агар $A = 0, B = 0$ бўлса, $Cx + D = 0$ текислик OXY текисликка параллел бўл ишини кўрсатинг.
5. Агар $A = 0, B = 0, D = 0$ бўлса, $Cz = 0$ (ёки $z = 0$) текислик OXY текислик билан устма-уст тушади. Ушбу

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари уларни аниқлайдиган $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ ва $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ векторларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари билан бир хил бўлади, шунинг учун улар қуйидагича бўл ишини исботланг.

М А Ъ Р У З А 5

Комбинаторика ва унинг ҳаётдаги татбиқлари.

Дарс ўқув мақсади: “Комбинаторика” назарияси элементлари, жумладан бирлашмалар ва улар билан боғлиқ формулалар билан талабаларни таништириш.

Тушунчалар ва таянч иборалар: бирлашмалар, такрорланувчи ўринлаштиришлар, такрорланмайдиган ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, гуруҳлашлар.

Маъруза режаси:

1. Бирлашмалар ҳақида тушунча.
2. Ўринлаштиришлар.
3. Ўрин алмаштиришлар.
4. Гуруҳлашлар.

Комбинация сўзи –сўз ҳарф, сон, рақам, белги ва бошқаларнинг “айқаш-уйқаш” бирлашмасидир. Ҳаётда энг кўп ишлатиладиган комбинация бу сўзлардан ташкил топган шахснинг исми-шарифидир. Бу комбинация баъзи давлат фуқороларининг шахсини ифодалаш учун 5-20 та сўздан иборат бўлиши мумкин. Бизнинг мамлакатда 3-4 та сўздан иборат бўлиши мумкин (таҳаллуслари билан). Шунинг учун бир хил исм-шарифли фуқоролар бир корхона,

туман, шаҳар миқёсида кам учрайди. Исмлар рўйхати қанча катта бўлса, уларни мос келиши шунча кам бўлади. Аммо кейинги пайтда баъзи исмлар русм бўлиб кетганлиги ҳисобига мослик кўпайиши мумкин. Автомобилларни номери ҳарф ва рақамлардан ташкил топгани сабабли ва у саккизта позициядан иборат бўлагани учун комбинациялар сони жуда катта сон бўлади.

Шоир ва ёзувчи, журналистлар ўзларининг сўз бойлигига, синоним сўзлардан моҳирона фойдаланишларга, шеърий қаторда, гапда, жумлаларда сўзларни чиройли жойлаштиришларига қараб асарларининг нафислигини вужудга келтирадилар. Чунки бир маъно берадиган гап (ёки жумлани) бир неча хил усулда тузиб, ичидан энг чиройлисини олиш мумкин. Усуллар сонини эса комбинаторика формулалари орқали аниқлашлари мумкин.

Бирлашмалар ҳақида тушунча

Еҳтимоллар назариясидаги воқеа еҳтимоллигини ҳисоблашда комбинаторика назариясидаги айрим тушунчалардан фойдаланилади. Шунинг учун комбинаторикага доир баъзи тушунча ва формулаларни келтирамиз.

Таъриф. Бир-биридан элементларнинг тартиби ёки элементларининг ўзи билан фарқ қиладиган турли, чекли тўпламларга *бирлашмалар* дейилади.

Бирлашма элементлари одатда $a, b, c, \dots$ латин алифбоси ҳарфлари билан белгиланади.

Бирлашмалар 3 хил бўлади:

1. Ўринлаштиришлар.
2. Қўшиш ва кўпайтириш ҳоссалари.
3. Ўрин алмаштиришлар.
4. Гуруҳлашлар.

Ўринлаштиришлар

Таъриф. n та элементдан k тадан тузилган такрорланадиган *ўринлаштиришлар* деб шундай бирлашмаларга айтиладики, улар бир- бирларидан ёки элементлари билан ёки элементларининг тартиби билан фарқ қиладилар.

n та элементдан k тадан тузилган бундай ўринлатиришлар сони n^k га тенг.

1–мисол. 0 рақами қатнашмаган барча 3 хонали сонлар қанча?

Йечиш. Бундай сонларни 1, 2, ... 9 рақамларидан 3 тадан тузилган такрорланувчи ўринлаштиришлар деб қараш мумкин. Бундай ўринлаштиришлар сони $9^3 = 729$ га тенг.

Таъриф. n та элементдан k тадан тузилган такрорланмайдиган *ўринлаштиришлар* деб шундай бирлашмаларга айтиладики, улар бир- бирларидан ёки элементлари билан ёки элементларининг тартиби билан фарқ қиладилар.

Масалан: a, b, c, d элементлардан 2 тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар қуйидагича бўлади:

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc$$

n та элементдан m тадан тузилган ўринлаштиришлар сони A_n^k билан белгиланади. Бу соннинг нимага тенглигини топайлик.

n та $a, b, c, d, \dots, x, k, l$ элементлар берилган бўлсин. ^{III-1}Аввал n та элементдан биттадан ўринлаштиришлар тузамиз, у ҳолда $A_n^1 = n$ бўлади.

Энди n та элементдан 2 тадан ўринлаштиришлар тузамиз. Бунинг учун аввал тузилган ўринлаштиришларни биттадан қолган $n-1$ та элементлар билан бирга оламиз. У ҳолда қуйидагига ега бўламиз.

$$\left. \begin{array}{l} ab, ac, ad, \dots, al \quad n-1 \text{та} \\ ba, bc, bd, \dots, bl \quad n-1 \text{та} \\ ca, cb, cd, \dots, cl \quad n-1 \text{та} \\ \dots\dots\dots \\ la, lb, lc, \dots, lk \quad n-1 \text{та} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{жами } n \text{ та}$$

Демак $A_n^2 = n \cdot (n-1)$ бўлади.

Энди n та элементдан 3 тадан ўринлаштиришлар тузамиз. Бунинг учун ҳосил қилинган $n(n-1)$ та ўринлаштиришлардан ҳар бирини қолган $(n-2)$ та элементлар билан бирга оламиз.

$$\left. \begin{array}{l} abc, abd, abe, \dots, abl \quad n-2 \text{ та} \\ acb, acd, ace, \dots, acl \quad n-2 \text{ та} \\ cab, cad, cae, \dots, cal \quad n-2 \text{ та} \\ \dots\dots\dots \\ lab, lad, lae, \dots, lak \quad n-2 \text{ та} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{жами } n(n-1) \text{ та}$$

ега бўламиз ва $A_n^2 = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ бўлади. Умуман

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

бўлади.

Демак n та элементдан k тадан тузилган ўринлаштиришлар сони n та кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасига тенг бўлиб, улардан енг каттаси n га тенг.

2 – мисол. Аудиториядаги 5 та фаол талабадан 2 тасини неча хил усул билан оқим ва гуруҳ сардорлари вазифасига сайлаш мумкин?

Йегиш: Изланган сон 5 та элементдан 2 тадан тузилган ўринлаштиришлар сонига тенг, яъни $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ўрин алмаштиришлар

Таъриф. Бир–биридан фақат элементларининг тартиби билан фарқ қиладиган ўринлаштиришларга ўрин алмаштиришлар дейилади.

Демак, ўрин алмаштиришлар $a_1, a_2, \dots, a_n$ дан иборат n та турли элементлардан, уларнинг сонини ўзгартирмасдан, фақат тартибини ўзгартириш орқали ҳосил қилинган ўринлаштиришлар экан.

Масалан: a, b, c - учта элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар қуйидагича бўлади:

$$abc; acb; bac; bca; cab; cba$$

Умуман, бирор n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони P_n орқали белгиланиб, у қуйидаги формула билан ҳисобланади.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Демак, n та элементлардан n тадан тузилган ўрин алмаштиришлар сони 1 дан n гача бўлган сонлар кўпайтмасига тенг экан.

3 – мисол. Боғчадаги 4 та болани 4 та тарелка қўйилган стол атрофига неча хил усулда ўтказиш мумкин?

Йегиш: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Гуруҳлашлар

Таъриф. n - та элементдан k тадан тузилган гуруҳлашлар деб шундай бирлашмаларга айтиладики, улар бир-бирларидан фақат элементлари билан фарқ қилади.

Масалан, a, b, c, d элементлардан 3 тадан тузилган гуруҳлашлар abc, abd, acd, bcd бўлади.

Умуман, n та элементдан k тадан олиб тузилган гуруҳлашлар сони C_n^k деб белгиланиб, у қуйидагича ҳисобланади :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Масалан: $C_4^2 = \frac{A_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$

4 – мисол. Бир-хил 3 та ўринга кўрсатилган 10 та номзодни неча усул билан сайлаш мумкин?

Йегиш: $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

Гуруҳлашнинг хоссалари: 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 2) $C_n^1 = n$ 3) $C_n^n = C_n^0 = 1$

Назорат савол ва топшириқлари:

1. Бирлашма нима?
2. Бирлашмаларнинг турларини айтинг.
3. Ўринлаштириш нима?
4. Ўрин алмаштириш нима?
5. Гуруҳлашлар нима

Мустақил иш топшириқлари:

1. Бирлашмалар. Бирлашмаларнинг турлари
2. Такрорланувчи уринлаштиришлар.

М А Ъ Р У З А 6

Комбинаторикадаги ўрин алмаштириш

ўринлаштириш ва гуруҳлаш формуласи.

Дарс ўқув мақсади: Ўрин алмаштириш формуласини филологияда қўллаш, ўринлаштиришни формуласини филологияда қўллаш, гуруҳлашни формуласини филологиядаги татбиқларини талабаларга ўргатиш.

Тушунчалар ва таянч иборалар: Ўрин алмаштириш, ўринлаштириш, гуруҳлаш.

Маъруза режаси:

1. Ўрин алмаштириш формуласини филологияда қўллаш
2. Ўринлаштиришни формуласини филологияда қўллаш
3. Гуруҳлашни формуласини филологиядаги татбиқи

$P_n = n!$ бўлиб, $n!$ - факториал белгисидир

$0! = 1$

$1! = 1$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$

Тўртта сўздан иборат гапни сўзларини алмаштириб $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ хил усулда гап туза оламиз. Аммо тузилган гапларни ҳаммаси ҳам чиройли маъно беролмайди.

Масалан:

1. Булут қуйуқлашиб ойни беркитди.
2. Булут қуйуқлашиб беркитди ойни.
3. Булут ойни қуйуқлашиб беркитди.
4. Булут ойни беркитди қуйуқлашиб.
5. Булут беркитди ойни қуйуқлашиб.
6. Булут беркитди қуйуқлашиб ойни.
7. Қуйуқлашиб булут ойни беркитди.
8. Қуйуқлашиб булут беркитди ойни.
9. Қуйуқлашиб беркитди ойни булут.
10. Қуйуқлашиб беркитди булут ойни.
11. Қуйуқлашиб ойни булут беркитди.
12. Қуйуқлашиб ойни беркитди булут.
13. Ойни қуйуқлашиб беркитди булут.
14. Ойни қуйуқлашиб булут беркитди.
15. Ойни булут қуйуқлашиб беркитди.
16. Ойни булут беркитди қуйуқлашиб.
17. Ойни беркитди булут қуйуқлашиб.
18. Ойни беркитди қуйуқлашиб булут.
19. Беркитди ойни қуйуқлашиб булут.
20. Беркитди ойни булут қуйуқлашиб.
21. Беркитди булут ойни қуйуқлашиб.
22. Беркитди булут қуйуқлашиб ойни.
23. Беркитди қуйуқлашиб ойни булут.
24. Беркитди қуйуқлашиб булут ойни.

1. Иболи одам
2. Ҳаёли одам
3. Ориятли одам
4. Андишали одам
5. Иболи инсон
6. Ҳаёли инсон
7. Ориятли инсон
8. Андишали инсон
9. Иболи киши
10. Ҳаёли киши
11. Ориятли киши
12. Андишали киши
13. Иболи шахс
14. Ҳаёли шахс
15. Ориятли шахс
16. Андишали шахс
17. Иболи сиймо
18. Ҳаёли сиймо
19. Ориятли сиймо
20. Андишали сиймо

1. Далада йиғим терим бошланди.
2. Далада йиғим бошланди терим.
3. Далада бошланди йиғим терим.
4. Далада бошланди терим йиғим.
5. Далада терим йиғим бошланди.
6. Далада терим бошланди йиғим.
7. Терим йиғим бошланди далада.
8. Терим йиғим далада бошланди.
9. Терим далада йиғим бошланди.
10. Терим далада бошланди йиғим.
11. Терим бошланди йиғим далада.
12. Терим бошланди далада йиғим.
13. Йиғим бошланди терим далада.
14. Йиғим бошланди далада терим.
15. Йиғим терим далада бошланди.
16. Йиғим терим бошланди далада.
17. Йиғим далада бошланди терим.
18. Йиғим далада терим бошланди.
19. Бошланди далада йиғим терим.
20. Бошланди далада терим йиғим.
21. Бошланди йиғим терим далада.
22. Бошланди йиғим далада терим.
23. Бошланди терим далада йиғим.
24. Бошланди терим йиғим далада.

Ўринлаштиришни филологияда қўллаш

Биз юқорида ўринлаштиришлар сони

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

формулалари билан аниқланишини кўрдик. Биз бирор гап бўлагини тузиш ниятида от вазифасини бажарувчи сўзни унинг синонимлари ичидан танлаб олиб уни аниқловчи сифат сўзларини танлаб турли хил усулда жойлаб гап бўлагини яратамиз.

Сифат сўзлар сони кўп ёки камлиги ҳам гап бўлагини чиройли чиқишга таъсир қилади.

Масалан: одам, инсон, киши, шахс, сиймо от-сўз қилиб биттасини танлаймиз ва бу сўзни аниқловчи сифат сўзлардан (иболи, ҳаёли, ориятли, андишали, буюк) биринчи танлаб комбинациялари кўриб чиқамиз.

Бу 25 та комбинациялар ичида қовушгани ва қовушмаганлари ҳам бордир.

Энди “киши” сўзини олсак унга неча хил усулда битта сифатли, 2 та сифатли, 3 та сифатли, 4 та сифатли, 5 та сифатли, комбинация гап бўлагини яшаш мумкинлигини кўриб чиқайлик.

Битта сифатли: сўзлар сони 5 та, яъни

$$A_5^1 = P_5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \quad A_5^1 = \frac{5!}{(5+1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

Масалан:

1. Иболи киши

2. Ҳаёли киши
3. Андишали киши
4. Ориятли киши
5. Буюк киши

Иккита сифатли: сўзлар сони 20 та, яъни

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Масалан:

1. Иболи, ҳаёли киши
2. Ҳаёли, иболи киши
3. Иболи, андишали киши
4. Андишали, иболи киши
5. Иболи, ориятли киши
6. Ориятли, иболи киши
7. Иболи, буюк киши
8. Буюк, иболи киши
9. Буюк, андишали киши
10. Буюк, ориятли киши
11. Ҳаёли, андишали киши
12. Ҳаёли, ориятли киши
13. Ҳаёли, буюк киши
14. Андишали, ҳаёли киши
15. Андишали, ориятли киши
16. Андишали, буюк киши
17. Ориятли, ҳаёли киши
18. Ориятли, андишали киши
19. Ориятли, буюк киши
20. Буюк, ҳаёли киши

Учта сифатли гап бўлаклар сони

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ та комбинация булар эди.}$$

Масалан:

1. Иболи, ҳаёли, андишали киши
2. Иболи, ҳаёли, ориятли киши
3. Иболи, ҳаёли, буюк киши
4. Буюк, ҳаёли, андишали киши.

.....

.....

60

$$\text{Тўртта сифатли комбинациялар } A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ та}$$

$$\text{Бешинчи сифатли комбинациялар } A_5^5 = P_5 = 5! = 120 \text{ та}$$

Бу комбинациялар “фақат киши” сўзи билан ҳосил қилинади. Худди шундай “одам”, “инсон”, “шахс”, “сиймо” сўзлари билан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Энди ёзувчи-муаллиф мана шу комбинацияларда энг чиройли, маъноли, ихчам (керагидан кўп бачканалаштиради) гап бўлагини танлаш керак бўлади.

Энди асардаги хар бир гап бўлагини шундай тўплаш керак бўлса, қанча комбинацияни ўрганиш керак бўлади. Шунинг учун чиройли асар ёзган ёзувчининг буюклигини, ва унинг меҳнатини хис этамиз.

Гуруҳлашни филологиядаги татбиғи

От сўзлар тўплами: “хонадон”, “ховли”, “турар жой”, “бошпана” сўзлардан, сифат сўзлар тўплами: “тоза”, “пок”, “озода”, “орапта”, “ҳалол”, сўзлар ташкил этган бўлсин. От ва сифат сўзлардан бир сўзли гуруҳчалар комбинацияларини тузайлик.

Масалан:

1. Тоза уй

2. Озода хонадон

Бу комбинациялар сони 20 та яъни

$$C_4^1 \cdot C_5^1 = \frac{4!}{1!(4-1)} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)} = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{5!}{1!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ та экан.}$$

Агар 2 сўзли гуруҳлар комбинацияларини гап бўлаги қилиб олсак, улар сони

$$C_4^2 \cdot C_5^2 = \frac{4!}{2!(4-2)} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ та вариант ҳосил бўлади.}$$

Аммо ҳамма вариантларни гап бўлаги қилиб ололмаймиз, чунки баъзилари гап маъносини бузиб юбориш мумкин.

Масалан: “Гигиена талабларига кўра биз тоза, орапта, уй хонадонларида яшашимиз керак”.

“Гигиена талабларига кўра биз пок, ҳалол, бошпана, турар жойларида яшашимиз керак”.

Учта сўзли комбинациялар сони 40 та

$$C_4^3 \cdot C_5^3 = \frac{4!}{3!(4-3)} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ та экан.}$$

Бу қирқта вариантдан гап маъносига мос гап бўлагини танлаш керак бўлади. Бундай “мос келувчи” гап бўлаклари бир нечта бўлиши мумкин. Улар ичидан энг мақулини танлаш ёзувчи-муаллиф маҳоратига боғлиқдир.

Масалан:

Тоза уй

Озода хонадон

Пок ховли

Ҳалол бошпана

Орапта турар жой

Тоза уй

Тоза хонадон

Тоза ховли

Тоза бошпана

Тоза турар жой

Озода уй

Озода хонадон

Озода ховли

Озада бошпана
Озада турар жой
Пок уй
Пок хонадан
Пок ховли
Пок бошпана
Пок турар жой
Халол уй
Халол хонадаон
Халол ховли
Халол бошпана
Халол турар жой
Ораста уй
Ораста хонадон
Ораста ховли
Ораста бошпана
Ораста турар жой

Назорат савол ва топшириқлари:

1. Бирлашма нима?
2. Бирлашмаларнинг турларини айтинг.
3. Ўринлаштириш нима?
4. Ўрин алмаштириш нима?
5. Гурухлашлар нима

Мустақил иш топшириқлари:

1. Бирлашмалар. Бирлашмаларнинг турлари
2. Такрорланувчи уринлаштиришлар.

МАЪРУЗА 7

Ехтимоллар тушунчаси. Ходисалар устида амаллар.

Дарс ўқув мақсади: “Ехтимоллар назарияси” фани, бу фаннинг тарихи, унинг асосий тушунчалари билан талабаларни таништириш.

Тушунчалар ва таянч иборалар: Тасодифий ҳодиса, муқаррар ҳодиса, муқаррар бўлмаган ҳодиса, элементар ҳодиса, элементар ҳодисалар фазоси.

Маъруза режаси:

1. Ехтимоллар назариясининг предмети.
2. Ходисалар ва улар устида амаллар.

Ехтимоллар назариясининг предмети.

Узоқ даврлар мобайнида инсоният ўз фаолияти учун фақат детерминирланган деб аталмиш қонуниятларни ўрганар ва улардан фойдаланар еди. Бироқ тасодифий ҳодисалар бизнинг ҳаётимизга хоҳиш-иродамиздан қатъий назар кириб келгани ва бизни доимо ўраб тургани учун ҳамда, устига-устак, табиатнинг деярли барча ҳодисалари тасодифий хусусиятли бўлгани учун уларни тадқиқ қилишни ўрганиш ва шу мақсадда тадқиқот усулларини ишлаб чиқиш зарурдир.

Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг намоён бўлиш шакли бўйича иккита синфга бўлинади: детерминирланган (олдиндан аниқ) ва статистик.

Масалан, осмон механикаси қонунларига асосан Қуёш системасидаги сайёраларнинг ҳозир маълум бўлган вазияти бўйича уларнинг ихтиёрий пайтдаги вазияти амалда бир қийматли олдиндан айтиб берилиши мумкин, шу жумладан, Қуёш ва Ой тутилишлари жуда аниқ башорат қилиниши мумкин. Бу детерминирланган қонунларга мисол.

Шу билан бирга ҳамма ҳодисаларни ҳам аниқ башорат қилиб бўлмайди. Масалан, иқлимнинг узоқ муддат давомида ўзгаришлари, об-ҳавонинг қисқа муддатли ўзгаришлари муваффақиятли башорат қилишнинг объектлари бўла олмайди, яъни кўпгина қонунлар ва қонуниятлар детерминирланган доирага анча кам даражада бўйсунди. Бундай турдаги қонунлар статистик қонунлар деб аталади. Бундай қонунларга асосан, бирор-бир тизимнинг келажақдаги ҳолати бир қийматли эмас, балки фақат маълум бир еҳтимоллик билан аниқланади.

Еҳтимоллар назарияси бошқа математик фанлар каби амалиёт еҳтиёжларидан пайдо бўлди ва ривожланди. У оммавий тасодифий ҳодисаларга хос қонуниятларни ўрганиш билан шуғулланади.

Еҳтимоллар назарияси шарт-шароитларнинг аниқ бир мажмуасини амалга оширганда кўп мароталаб қайтарилишга қодир бўлган оммавий тасодифий ҳодисаларнинг хоссаларини ўрганади. Табиатидан қатъий назар, ихтиёрий тасодифий ҳодисанинг асосий хусусияти - уни амалга ошишининг ўлчови ёки еҳтимоллиги.

Еҳтимоллар назарияси якка ҳодиса рўй бериш ёки бермаслигини олдиндан айтиб бериш вазифасини ўз олдига қўймайди, чунки тасодифий ҳодисага ҳамма шарт-шароитларнинг таъсирини ҳисобга олиш мумкин эмас. Бошқа томондан қараганда, конкрет табиатидан қатъий назар, йетарлича кўп сондаги бир жинсли тасодифий ҳодисалар тайин қонуниятларга, аниқроғи еҳтимоллий қонуниятларга бўйсунди.

Шундай қилиб, еҳтимоллар назариясининг предмети- оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисаларнинг еҳтимоллий қонуниятларини ўрганишидир.

Ҳодисалар ва улар устида амаллар.

Еҳтимоллар назариясида ҳодиса деганда бирон-бир тажриба, синов ёки кузатувларнинг натижаси тушунилади. Ҳодисалар 3 хилга бўлинади:

1. Муқаррар ҳодисалар. 2. Муқаррар бўлмаган ҳодисалар. 3. Тасодифий ҳодисалар.

Таъриф. Маълум шартлар комплекси бажарилганда албатта содир бўладиган ҳодисага муқаррар ҳодиса дейилади: содир бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага тасодифий ҳодиса, ҳеч қачон содир бўлмайдиган ҳодисага еса мумкин бўлмаган ҳодиса деб аталади.

Масалан, Қуёш чиқиши, кун ботиши муқаррар ҳодисадир, 15 сентябр куни соат 16 да ёмғир ёгиши тасодифий ҳодисадир. Бир сўмлик тангани йерга ташлаганда, 10 сўмлик бўлиб тушиши мумкин бўлмаган ҳодисадир.

Одатда, тасодифий ҳодисалар $A, B, C, \dots$ каби харфлар билан, муқаррар ҳодиса еса Ω билан, мумкин бўлмаган ҳодиса еса $\emptyset$ орқали белгиланади.

Иккита A и B тасодифий ҳодисалар бир-бири билан қанчалик боғланган, бу ҳодисалардан биттасининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятига қай даражада таъсир қилади деган савол тез-тез пайдо бўлади.

Иккита ҳодиса ўртасидаги боғланишнинг енг содда мисоли сифатида ҳодисалардан бирининг содир бўлиши иккинчисининг албатта содир бўлишига олиб келадиган ёки, аксинча, ҳодисалардан бирининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятини йўққа чиқарадиган ҳолатларни келтириш мумкин.

Таъриф. Агар тажриба натижасида A ва B ҳодисалар бир вақтнинг ўзида рўй бериши мумкин бўлмаса, улар *биргаликда бўлмаган* ҳодисалар деб аталади, акс ҳолда еса *биргаликда бўлган* ҳодисалар деб аталади.

Мисол. Яшиқдан таваккалига битта детал олинди. Унинг стандарт бўлиши ностандарт эканлигини истисно қилади. «Таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши» ва «Таваккалига олинган деталнинг ностандарт бўлиши» ҳодисалари биргаликда бўлмаган ҳодисалардир.

Таъриф. Тажриба натижасида факат ва факат биттаси рўй берадиган ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисалар элементар ҳодисалар деб аталади. Барча элементар ҳодисалар тўплами элементар ҳодисалар фазоси дейилади ва Ω ҳарфи билан белгиланади..

Демак, биргаликда бўлмаган ҳодисалар - бу умумий элементар ҳодисаларга ега бўлмаган ҳодисалардир.

Мисол. Шашқолтош ташланмоқда. Ушбу тажрибага тўғри келувчи элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_6\}$ кўринишда бўлиб, $\bar{e}_u$ – u очко тушганини билдиради.

Мисол. Тажриба симметрик, бир жинсли икки тангани бир марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$$\bar{e}_1 = (\Gamma\Gamma), \quad \bar{e}_2 = (\Gamma P), \quad \bar{e}_3 = (P\Gamma), \quad \bar{e}_4 = (PP)$$

бунда Γ -гербли томоннинг тушиши, P - ракамли томоннинг тушиши

Бу тажрибада элементар ҳодисалар фазоси Ω тўрт элементдан иборат: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Мисол. Агар учта танга бир марта ташланса, элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (\Gamma\Gamma\Gamma), & \bar{e}_2 &= (\Gamma\Gamma P), & \bar{e}_3 &= (\Gamma P\Gamma), & \bar{e}_4 &= (\Gamma P P) \\ \bar{e}_5 &= (P\Gamma\Gamma), & \bar{e}_6 &= (P\Gamma P), & \bar{e}_7 &= (P P\Gamma), & \bar{e}_8 &= (P P P) \end{aligned}$$

Мос элементар ҳодисалар фазоси саккиз элементдан иборат бўлади.

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

Таъриф. Агар эксперимент натижасида A ҳодисанинг рўй беришидан B ҳодисанинг рўй бериши албатта келиб чиқса, A ҳодиса B ҳодисани ергаштиради дейилади ва бу $A \subset B$ орқали белгиланади. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда $A = B$ бўлади.

Мисол. Шашқолтош ташланмоқда. «4 ракамли томон чиқди» ҳодисаси «жуфт очко чиқди» ҳодисасини ергаштиради.

Таъриф. Иккита A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб ё A ҳодисанинг, ё B ҳодисанинг, ё шу иккала ҳодисанинг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. У $A+B$ ёки $A \cup B$ орқали белгиланади. Бир нечта ҳодисаларнинг йиғиндиси деб шу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

3-мисол. Замбаракдан икки марта ўқ узилмоқда. Агар A ҳодиса биринчи ўқ узишда нишонга тегиш, B еса иккинчи ўқ узишда нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $A+B$ ҳодисаси ё биринчи ўқ узишда, ё иккинчи ўқ узишда, ё иккала ўқ узишда нишонга тегиш ҳодисаси бўлади.

Таъриф. Иккита A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. У AB ёки $A \cap B$ орқали белгиланади. Бир нечта ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб шу ҳодисалардан ҳаммасининг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

4-мисол. Яшиқда биринчи ва иккинчи сонли заводларда ишлаб чиқарилган деталлар бор. Агар A ҳодиса стандарт деталнинг чиқиши, B еса детал биринчи сонли заводда тайёрланган ҳодисаси бўлса, у ҳолда AB ҳодисаси биринчи сонли заводнинг стандарт детали чиқиши ҳодисаси бўлади.

Таъриф. A ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодиса A ҳодисага қарама-қарши ҳодиса дейилади.

A ҳодисага қарама-қарши ҳодиса $\bar{A}$ орқали белгиланади. У A ҳодиса рўй бермаганда ва факат шу ҳолдагина рўй берган ҳисобланади. Бошқача қилиб айтганда, A ва $\bar{A}$ ҳодисалар иккаласи жамланиб муқаррар ҳодисани ташкил этадиган биргаликда бўлмаган ҳодисалардир, яъни $A \cup \bar{A} = \Omega$.

5-мисол. Ўқ узишда нишонга тегиш ва хато кетиш - қарама-қарши ҳодисалар. Агар A нишонга тегиш бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ хато кетишдир.

Таъриф. A ҳодисанинг рўй бериши ва B ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг айирмаси деб аталади ва $A \setminus B$ орқали белгиланади.

Назорат савол ва топшириқлари:

1. Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг намоён бўлиш шакли бўйича қандай синфларга бўлинади?

2. Ҳодисаларни қандай турларга бўлиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

3. Тажриба, элементар ҳодиса ва ҳодиса нима, улар қандай белгиланади?
4. Элементар ҳодисалар фазоси деб нимага айтилади?

Мустақил иш топшириқлари:

1. Тасодифий ҳодисалар.
2. Тасодияий ҳодисаларнинг турлари. Мисоллар.
3. Ҳодисалар ва улар устида амаллар.

МАЪРУЗА 8

Эҳтимоллик таърифлари. Қўшиш ва кўпайтириш теоремалари

Дарс ўқув мақсади: Ҳодисаларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси, ҳодисалар йиғиндисининг, йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмасининг эҳтимолини топиши ўрганиш.

Тушунчалар ва таянч иборалар: ҳодисаларнинг йиғиндиси, ҳодисаларнинг айирмаси, ҳодисаларнинг кўпайтмаси,

Маъруза режаси:

1. Ҳодисаларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси.
2. Ҳодисалар йиғиндисининг, йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмасининг эҳтимолини топиш.

1–таъриф. Иккита A ва B ҳодисаларнинг *йиғиндиси* деб (уни биз $A+B$ ёки $A \cup B$ билан белгилаймиз) шундай бир C ҳодисага айтиладики, унинг пайдо бўлишлиги учун ёки A ҳодиса, ёки B ҳодиса, ёки ҳар иккаласи ҳам бирданига пайдо бўлиши лозим. Хусусан, A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, уларнинг йиғиндиси деб ёки A ҳодиса, ёки B ҳодиса юз берганда юз берадиган ҳодисага айтилади.

1–теорема. Биргаликда бўлмаган A ва B ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисидан иборат бўлади, яъни

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (3)$$

1–мисол. “Ўйин суяги” бир марта ташланганда “2” очко, ёки “3” очко пайдо бўлишлигининг эҳтимоли қанчага тенг?

Йечиш: “2” очко тушишлик ҳодисасини A , “3” очко тушишлик ҳодисасини “ B ” билан белгилаймиз. У ҳолда, бизни қизиқтирган “2” ёки “3” очко тушишлик ҳодисаси $C=A+B$ бўлади.

(3) формулага кўра ҳамда $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ бўлганлиги учун,

$$P(C) = P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Эҳтимолнинг қўшиш теоремасини ўзаро жуфт-жуфт биргаликда бўлмаган $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар учун ҳам қўллаш мумкин, яъни

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (4)$$

2–таъриф. Агар жуфт-жуфт биргаликда бўлмаган $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисаларнинг тажриба натижасида ихтиёрий биттасининг пайдо бўлиши муқаррар (ишончли) бўлса, уларни *ҳодисаларнинг тўла гуруҳини* ташкил етувчи ҳодисалар деб юритилади.

Масалан: «ўйин суяги» бир марта ташланганда ундаги очколар тушишлик ҳодисалари ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этади.

(4) формулага биноан ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил етувчи ҳодисалар учун ҳар доим:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (5)$$

3–таъриф. Ўзаро биргаликда бўлмаган ҳамда ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил етувчи 2 та ҳодисани ўзаро *қарама-қарши ҳодисалар* деб аталади ва A ҳодисага тескари ҳодисани $\bar{A}$ орқали белгиланади.

(5) формулага кўра,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (6)$$

Одатда, ўзаро қарама-қарши ҳодисалар еҳтимолларини мос равишда p ва q лар билан белгиланади, у ҳолда:

$$p + q = 1 \Rightarrow p = 1 - q$$

4–тариф. Агар тажриба натижасида A ва B ҳодисаларнинг иккаласи ҳам рўй бериши мумкин бўлса, яъни A ва B ҳодисалар бирга рўй бера олса, A ва B ҳодисалар *биргаликда бўлган* ҳодисалар дейилади.

Биргаликда бўлган ҳодисаларнинг йиғиндиси учун еҳтимолнинг кўшиш теоремаси қуйдагича ёзилади:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (7)$$

Фараз қилайлик, A ва B ҳодисалар биргаликда содир бўлиши мумкин бўлган ҳодисалар бўлсин.

5–тариф. Биргаликда бўлиши мумкин булган A ва B ҳодисаларнинг *кўпайтмаси* деб шундай бир C ҳодисага айтиладики, A ва B ҳодисаларнинг ҳар иккаласи бир пайтда содир бўлгандагина C ҳодиса содир бўлади. Ҳодисаларнинг кўпайтмасини $C = A \cdot B$ ёки $C = A \cap B$ деб белгиланади.

Масалан, ҳалтада яхшилаб аралаштирилган оқ, кўк, қизил шарлар бор бўлсин. Таваккалига аввал 1 та, кейин яна 1 та шарлар (A ва B ҳодисалар) олинганда, уларнинг рангли шарлар бўлишлигининг ҳодисаси C ҳодисани англатади.

2–теорема. Ҳам A , ҳам B ҳодисаларнинг биргаликда руй беришлигининг еҳтимоли, у ҳодисалар еҳтимолларининг кўпайтмасидан иборатдир, яъни:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (8)$$

Масалан, «Ўйин суяги» билан тангани биргаликда ташланганда «ўйин суяги»да 6 очко тушишлик ҳодисасини A , тангада «герб» томон тушишлик ҳодисасини B деб белгиласак, у ҳолда уларнинг кўпайтмасини ифодаловчи C ҳодиса – 6 очко билан «герб» томоннинг бир пайтда тушишлик ҳодисаси бўлади:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

МАЪРУЗА 9

Шартли еҳтимоллик. шартли еҳтимоллик. тўла еҳтимоллик формуласи.

Дарс ўқув мақсади: Шартли еҳтимоллик, то'ла еҳтимоллик тушунчалари билан талабаларни таништириш.

Тушунчалар ва таянч иборалар: шартли еҳтимоллик, то'ла еҳтимоллик формуласи.

Маъруза режаси:

1. Шартли еҳтимол тушунчаси .
2. То'ла еҳтимоллик формуласи.

Шартли еҳтимоллик тушунчаси

Таъриф. Агар икки ҳодисадан бирининг рўй бериш-бермаслиги иккинчи ҳодисанинг рўй бериш-бермаслигига боғлиқ бўлса, бундай ҳодисалар боғлиқ ҳодисалар дейилади.

Масалан, дейлик кутида 100 та детал бор бўлсин. Аниқлик учун, уларнинг 80 таси стандарт, 20 таси ностандарт бўлсин. Таваккалига битта детал олиниб, у қайта жойига қўйилмайди. Стандарт детал чиқиш ҳодисасини A ҳодиса деб қарайлик. Агар A ҳодиса содир бўлган бўлса, иккинчи синашда стандарт детал чиқиш B ҳодиса еҳтимоли $P(B)=79/99$ га тенг. Агар биринчи детал ностандарт чиққан бўлса, бу миқдор $P(B)=80/99$ га тенг бўлади. Демак, бу йерда A ва B ҳодисалар боғлиқ ҳодисалардир.

Дейлик, A ва B боғлиқ ҳодисалар бўлсин.

Таъриф. A ҳодиса рўй берганда B ҳодисанинг рўй бериш еҳтимоллигига шартли еҳтимоллик дейилади ва $P_A(B)$ каби белгиланади.

Мисол. Кутида 3 та оқ ва 3 та қора шар бор. Агар биринчи синашда қора шар чиққан бўлса (A ҳодиса) иккинчи синашда оқ шар чиқиш ҳодисаси (B ҳодиса) еҳтимоллигини топинг. Бу еҳтимоллик $P_A(B) = \frac{3}{5}$ га тенг, чунки биринчи синашдан сўнг кутида 5 та шар қолиб, улардан 3 таси оқ шарлардир.

Дейлик, ўзаро боғлиқ бўлган A ва B ҳодисалар қаралаётган бўлиб, $P(A)$ ва $P_A(B)$ уларнинг еҳтимоллари бўлсин. Бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш еҳтимолини қуйидаги теорема ёрдамида аниқлаш мумкин.

Теорема. Иккита боғлиқ ҳодисанинг рўй бериш еҳтимоли улардан бирининг еҳтимоли шу ҳодиса рўй берди деб фараз қилингандаги иккинчи ҳодисанинг шартли еҳтимолининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Исботи. Қуйидагича белгилишлар киритайлик:

n - A ҳодиса рўй берадиган ёки рўй бермайдиган жами элементар натижалар сони.

k - тажрибада A ҳодиса рўй беришга қулайлик туғдирувчи натижалар сони

m - тажрибада A ҳодиса рўй берди деган фаразда B ҳодиса рўй берадиган элементар натижалар сони бўлсин.

У ҳолда $P(A) = \frac{k}{n}$ ва $P_A(B) = \frac{m}{k}$ бўлиб, A ва B ҳодисанинг биргаликда рўй бериш еҳтимоли

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k} = P(A) \cdot P_A(B)$$

га тенг.

Юқоридаги формула умумий ҳолда, яъни $A_1, A_2, \dots, A_n$ боғлиқ ҳодисалар учун

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

каби бўлиб, жумладан, учта A, B, C боғлиқ ҳодисалар учун

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

формула ўринли.

1–мисол. Кутида 3 та оқ ва 7 та қизил ғалтак бор. Тикувчи таваккалига битта ғалтак кейин яна битта ғалтак олди. Олинган ғалтаклардан биринчиси оқ иккинчиси қора бўлиш еҳтимолини топинг.

ечилиши. A - ҳодиса деб биринчисининг оқ чиқишини белгилайлик: $P(A)=3/10$

B – иккинчисининг қора чиқиш ҳодисаси бўлсин, у ҳолда $P_A(B)=7/9$

Изланаётган еҳтимол, боғлиқ ҳодисаларнинг еҳтимолларини ҳисоблаш қоидасига кўра

$$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=3/10 \cdot 7/9=7/30$$

2–мисол. Кутида 5 та оқ, 4 та қора, 3 та кўк шар бор бўлсин. Ҳар бир тажриба кутида 1 та шар олишдан иборат. Олинган шар қайтиб қўйилмайди. Биринчи синашда оқ шар (A), иккинчисиди қора (B), учинчисиди кўк шар чиқиш (C) еҳтимоллигини топинг.

Ечилиши. $P(A)=5/12$, $P_A(B)=4/11$, $P_{AB}(C)=3/10$.

Демак, $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 5/12 \cdot 4/11 \cdot 3/10 = 1/22$

3–мисол. Мерганни битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли $P=0,9$. Мерган учта ўқ узди, Учала ўқнинг ҳам нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи, иккинчи ва учинчи ўқларнинг тегиш ҳодисасини мос равишда A , B ва C деб белгилаймиз. У ҳолда,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,729$$

Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси.

Битта тажрибада иккита ҳодисадан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй беришини инкор қилмаса, бу ҳодисалар биргаликда дейилади.

4–мисол. Кубик ташлаганда 4 очко чиқиши A ҳодиса, жуфт сон чиқиши B ҳодиса бўлсин. Бу ҳодисаларнинг эҳтимоллиги ва биргаликда рўй бериш эҳтимоллиги маълум бўлса, $A \cup B$ ҳодиса эҳтимоллиги қандай топилади.

Теорема. Биргаликда бўлган иккита ҳодисадан камида биттасининг рўй беришидан иборат бўлган $A+B$ ҳодисанинг эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолликлари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллигининг айирмасига тенг:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Натижа. A ва B ҳодисалар еркли бўлганда,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

Шунингдек, боғлиқ ҳодисалар учун

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$$

5–мисол. Биринчи ва иккинчи тўпдан ўқ отишда нишонга тегиш эҳтимоллари мос равишда 0,7 ва 0,8 бўлсин. Иккала тўпдан баравар бир отишда камида биттасининг нишонга теккизиш эҳтимоллигини топинг.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$$

Назорат савол ва топшириқлари:

1. Ҳодисаларнинг тўлиқ группаси.
2. Шартли эҳтимол тушунчаси.
3. Тўла эҳтимоллик формуласи.
4. Ҳодисаларнинг боғлиқмаслиги.

Мустақил иш топшириқлари:

1. Камида битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли.
2. Боғлиқ ҳодисаларни кўпайтириш теоремалари.