

O`zbekiston Respublikasi
Oliy va o`rta maxsus ta`lim vazirligi
Namangan muhandislik-pedagogika instituti
Oliy matematika kafedrası

MATEMATIKADAN
MASALALAR TO`PLAMI

YeUTTUE yo`nalishi
talabalari uchun
1-semestr

“Oliy matematika” kafedraasi uslubiy seminarida ko`rib
chiqilib, institutning ilmiy uslubiy kengashiga ko'rib
chiqish uchun tavsiya etilgan.
Majlis bayoni № 1. 25.08.2016 y.

Namangan muhandislik pedagogika instituti
ilmiy- uslubiy kengashi tomonidan tasdiqlangan va chop
etishga tavsiya etilgan.
Majlis bayoni № 1. 26.08.2016 y.
Ro`yxat raqami № _65

Mualliflar: f-m.f.d., prof. V. Hojiboyev
assistent O. Juraev

Taqrizchi: f-m.f.n., dots. N. Turgunov

SO`Z BOSHI

Oliy o`quv yurtlarida yuqori malakali muhandislar, muhandis-pedagoglarni tayyorlashda oliy matematika fanini o`qitishga katta e`tibor berib kelinmoqda. Chunki muhandislik fanlari, mexanika, fizika, ximiya va boshqa tabiiy fanlar shu fan asosida o`rganiladi.

Oliy matematika fanidan chuqur bilim olishlari uchun talabalarga berilayotgan nazariy bilimlar yetarli bo`lmaydi, ayniqsa muhandislar matematika tadbiqlari bo`yicha chuqur bilimga ega bo`lishlari lozim.

Ushbu masalalar to`plami ham yuqorida ko`zlangan maqsadga yo`naltirilgan bo`lib, u O`zbekiston Respublikasi oliy va o`rta maxsus ta`lim vazirligining 2012 yil 14 martdagi 107-sonli buyrug`i bilan tasdiqlangan «Barcha nomatematik bakalavr yo`nalishlari uchun Oliy matematika fanining o`quv dastur»i asosida tuzilgan. Amaldagi ishchi o`quv dasturining "Oliy algebra, analitik geometriya" bo`limlariga mos tushadi. To`plamda masala va misollarni yechish uchun asosiy formulalar, misol va masalalarni yechishning namunalari, darsda va mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar hamda ularning javoblari keltirilgan. To`plamni yozishda o`zbek va rus tilidagi mavjud adabiyotlardan ijodiy foydalanildi.

Bu kitob oliy texnika o`quv yurtlarining talabalari amaliy mashg`ulot darslarida foydalanishlari uchun mo`ljallangan.

To`plamda yo`l qo`yilgan kamchiliklarga o`z munosabatlarini bildiruvchilarga oldindan minnatdorchilik bildiramiz.

Mualliflar

I BOB. Oliy algebra

1-§. Determinantlar. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.

Ikkinchi tartibli determinant.

Ta'rif. Agar, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsa, shu sonlar orqali aniqlangan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ushbu songa ikkinchi tartibli determinant deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. a_{11}, a_{12} larga determinantning birinchi, a_{21}, a_{22} larga esa ikkinchi satr elementlari deyiladi. a_{11}, a_{21} larga determinantning birinchi, a_{12}, a_{22} larga esa ikkinchi ustun elementlari deyiladi. a_{11}, a_{22} larga determinantning bosh, a_{21}, a_{12} larga determinantning yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

(1) dan ko'rinadiki ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun, bosh diagonal elementlar ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish kifoya ekan.

1- misol. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 81 = -60$

Uchinchi tartibli determinant.

Ta'rif. Berilgan $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar orqali aniqlangan va quyidagicha belgilangan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

songa uchinchi tartibli determinant deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustun elementlaridan iborat bo'lib, a_{ij} ($i=1,2,3$; $j=1,2,3$) hammasi 9 ta element bo'ladi.

a_{ij} dagi birinchi indeks i satrning nomerini ya'ni nechanchi satr elementi ekanligini bildiradi. Ikkinchi indeks j esa ustunning nomerini ya'ni nechanchi ustun elementi ekanligini bildiradi. Determinantlar har vaqt biror aniq son bo'lgani uchun uchunchi tartibli determinant ham biror aniq sonni ifodalaydi, bu son esa quyidagicha hisoblanadi.

Birinchi diagonal elementlar ko'paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo'lgan ikkita teng yonli uchburchaklar uchlaridagi elementlar ko'paytmalarining algebraik yig'indisidan ikkinchi diagonal elementlar ko'paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo'lgan ikkita teng yonli uchburchak uchlaridagi elementlar ko'paytmalarining algebraik yitsindisini ayirganiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishdagi simvolga n-tartibli determinant deyiladi. Bu yerda ham satr, ustun, element va diagonal tushunchalari o'z kuchlarini saqlab qoladi.

n-tartibli determinant ham biror aniq sonni ifodalaydi.

Determinantning xossalari.

1-xossa. Agar determinantning satrlarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi.

2-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita satrini (yoki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinant qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi.

3-xossa. Determinantning biror satrining (yoki ustunining) barcha elementlari nol bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi.

4-xossa. Ixtiyoriy ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinant qiymati nol bo'ladi.

5-xossa. Istalgan satr (yoki ustun) ning umumiy elementini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

6-xossa. Determinantning biror satr (yoki ustun) elemenlariga boshqa satr (yoki ustunining) elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shganda determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossalarning to'g'riligini bevosita determinantlarni hisoblab ishonch hosil qilish mumkin.

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.

Ta'rif. biror n-tartibli determinantning a_{ij} elementinig minori deb, shu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan n-1 tartibli determinantga aytiladi va odatda M_{ij} orqali belgilanadi.

Masalan, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ uchinchi tartibli determinantning a_{23} elementi minori $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi

tartibli determinant bo'ladi.

Ta'rif. n-tartibli determinantning a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va A_{ij} orqali belgilanadi. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

2-misol. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ determinantning a_{43} elementining minorini va a_{21} elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 - 15 + 8 = -24 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 3 - 6 + 4 = -23.$$

Minor va algebraik to'ldiruvchilar tushunchalari kiritilgandan keyin determinantning yana uchta xossasini ko'rib o'taylik.

7-xossa. Agar determinantning biror i-satrida (yoki j-ustunida) a_{ij} elementdan boshqa hamma elementlari nol bo'lsa, u holda bu determinant shu element bilan shu elementning algebraik to'ldiruvchisi ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

8-xossa. Har qanday determinant, biror satri (yoki ustuni) elementlari bilan shu elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yitsindisiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ yoki } a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Determinantning 8-xossasidan foydalanib istalgan tartibli determinantni hisoblash mumkin.

3-misol.
$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -264.$$

9-xossa. Determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa satri (yoki ustuni) elementlarining algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nol bo'ladi.

Masalan. Ikkinchi ustun elementlarini birinchi ustun elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirsak $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0$ bo'ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli.

Ikkita x_1 va x_2 noma'lumli chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

sistema ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - (2) sistemaning koeffitsientlari, b_1, b_2 - ozod hadlardir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ asosiy determinant, } \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi. (2) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0) \quad (3)$$

Xuddi shuningdek, uchta x_1, x_2 , va x_3 noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

sistema uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ asosiy determinant, } \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi (4) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \Delta x_1 / \Delta, \quad x_2 = \Delta x_2 / \Delta, \quad x_3 = \Delta x_3 / \Delta \quad (\Delta \neq 0) \quad (5)$$

(3) va (5) formulalar (2) va (4) tenglamalar sistemasini yechishning Kramer formulasi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa. (2) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. $\Delta = 0$ hamda $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ lardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa (2) sistema yechimi mavjud emas. $\Delta = 0$ va $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ bo'lsa (2) cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

4-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini Kramer qoidasidan foydalanib eching.
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

Yechish (Kramer qoidasiga ko'ra) $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ determinantlarni hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 48 + 1 - 20 - 9 + 8 = -2$$

Determinant $\Delta = -2 \neq 0$ bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 - 48 - 5 + 20 + 45 + 8 = -10, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 30 - 32 - 4 + 20 + 6 - 32 = 12$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -40 + 60 + 2 - 40 - 12 + 10 = -20$$

Kramer qoidasidan foydalanamiz.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5, \quad x_1 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad x_1 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10$$

Gauss usulining mohiyati noma'lumlarni ikkinchi tenglamadan boshlab, ketma-ket yuqotib oxirgi tenglamada bitta no'malum qolguncha davom ettiriladi va oxirgi tenglamadan yuqoriga qarab noma'lumlarni ketma-ket topib, yechim hosil qilinadi.

Darsda yechish uchun misollar.

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

$$5. \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad 6. \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & -1 \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ -6 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Tenglamani eching.

$$11. \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0 \quad 13. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quyidagi determinantlarni soddalashtiring va hisoblang.

$$14. \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & -a & -a \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 4 & -12 & 20 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} \quad 16. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Determinantni qator elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} \quad 19. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

$$20. \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \quad 21. \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x - 6y = -1 \end{cases} \quad 22. \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 3x + 2y + z = 14 \\ 2x + 3y + 4z = 16 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3x + 2y - z = -6 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 6 \end{cases} \quad 24. \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = -1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \quad 25. \begin{cases} 2x + z + t = 9 \\ 3y - 2z + 3t = 12 \\ -2x + y - z + t = 1 \\ 5x + 2y - 3t = -3 \end{cases}$$

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

$$26. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -8 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Quyidagi tenglamalarni yeching.

$$29. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$30. \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ x^2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantni qator elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

$$31. \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$32. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$33. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$34. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$35. \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 1 & d & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang.

$$36. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$37. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

$$38. \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

$$39. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 2x + y - 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 4 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 7x - y = 8 \\ 3y - 3z = 0 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$$

2-§. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa.

Quyidagi
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1) \text{ ko'rinishdagi jadval (m \times n)-tartibli matritsa deyiladi.}$$

a_{ik} -element xuddi determinantdagi kabi i -satr, j -ustunga joylashgan bo'ladi. Ba'zan (1) yozuv qisqalik uchun $\|a_{ik}\|$ ($i=1, m; k=1, n$) ko'rinishda yoki $A=\|a_{ik}\|$ ko'rinishda ham belgilanadi. Ravshanki, (1) matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat. Barcha elementlari nolga teng bo'lgan matritsa nol matritsa deyiladi.

Xususiyl holda, $m=n$ bo'lganda,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2) \text{ ko'rinishidagi matritsa n-tartibli}$$

kvadrat matritsa deyiladi. (2) matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bosh diogonal elementlari deyiladi. Agar (2)

matritsada bosh dioganalda turgan elementlardan boshqa barcha elementlari nol bo'lsa, uni diognal

matritsa deyiladi.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3) \quad \text{matritsada } a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1 \text{ bo'lsa, } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matritsa deb ataladi. Kvadrat matritsa (2) ni elementlaridan tashkil topgan ushbu ifoda A matritsaning determinanti deyiladi va $\det(A)$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Shu o'rinda eslatib o'tamiz: matritsa sonlarning tartibli jadvali, determinant esa elementlarning ma'lum kombinasiyasidan hosil qilingan birgina sonidir.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Agar $\det(A)=0$ bo'lsa, bu holda A matritsa xos matritsa, $\det(A)\neq 0$ bo'lsa, A xosmas matritsa deyiladi. Kvadrat (2) matritsaning satr elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirishdan hosil

bo'lgan $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsa transponirlangan matritsa deyiladi va A^t kabi belgilanadi.

Determinantning 1° xossasiga asosan $\det(A)=\det(A^t)$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

qoida bo'yicha hisoblanadi, ya'ni mos elementlari qo'shiladi yoki ayiriladi. Matritsalarini qo'shish quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. A+0=0+A=A$$

$$2^\circ. A+B=B+A$$

A matritsani α songa ko'paytmasi deb, uning har bir elementini α songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5) \quad \text{matritsaga aytiladi. Matritsani songa ko'paytirish quyidagi xossalarga}$$

ega:

$$3^\circ. \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad 4^\circ. \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$5^\circ. (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

43-misol. A va B matritsalar yig'indisini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Yechish. (4) qoidaga ko'ra $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -3+4 \\ 5+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

44-misol. A matritsa berilgan bo'lsa $3A$ matritsani toping. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Yechish. (5) qoidaga ko'ra, $3A$ matritsani topish uchun A matritsani har bir elementlarini 3 ga

ko'paytiramiz, ya'ni $3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \\ 12 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

Endi ikki matritsa ko'paytmasi tushunchasini kiritaylik. Bunda ko'paytiriladigan matritsalarining birinchisining ustunlar soni ikkinchisining satrlar soniga teng bo'lishi talab qilinadi. $m \times n$ tartibli A matritsaning $n \times k$ tartibli B matritsaga ko'paytmasi deb $m \times k$ tartibli shunday S matritsaga aytiladiki, uning s_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$ (6) matritsalar ko'paytmasi $S = A \cdot B$, ko'rinishda belgilanadi.

45-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan AB-matritsani toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra AB mavjud, chunki A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 12 \\ 19 & 17 & 12 \\ 26 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Ushbu kvadrat matritsani qaraylik: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Agar $A \cdot B = B \cdot A = E$ bo'lsa, B matritsa A matritsaga teskari matritsa deb ataladi. A matritsaga teskari matritsani A^{-1} kabi belgilash qabul qilingan. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1. $\det(A)$ hisoblanadi. (Bu o'rinda $\Delta = \det(A) \neq 0$ bo'lishi kerakligini eslatib o'tamiz, aks holda teskari matritsa mavjud bo'lmaydi).

2. A matritsaning har bir a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) ning algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} ni hisoblaymiz va A^t matritsani quyidagicha tuzamiz

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. A^t matritsaning har bir elementini $\Delta = \det A$ ga bo'lamiz. Natijada A^{-1} hosil bo'ladi.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (7) \text{ Bunga ishonch hosil qilish uchun } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \text{ ni tekshirib ko'rish}$$

yetarli.

46-misol. Ushbu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Avval $\det A$ ni topamiz.

$$1) \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 27 + 8 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0$$

2) $\det A \neq 0$ bo'lgani uchun A^T teskari matritsani (8) formula bo'yicha topamiz. Matritsa barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 9) = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 8) = 5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 9) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 2) = 8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^T = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{10}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{8}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Tekshirish:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{14}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{10}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{8}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} + \frac{10}{2} + \frac{2}{3} & -\frac{10}{6} + \frac{12}{6} - \frac{2}{6} & \frac{26}{6} - \frac{24}{6} - \frac{2}{6} \\ -\frac{14}{6} + \frac{10}{3} - 1 & -\frac{5}{6} + \frac{4}{3} + \frac{3}{6} & \frac{13}{6} - \frac{16}{6} + \frac{3}{6} \\ -\frac{14}{2} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} & -\frac{15}{6} + \frac{16}{6} - \frac{1}{6} & \frac{39}{6} - \frac{32}{6} - \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Darsda yechish uchun misollar.

47. Agar $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa,

a) $3A + 2B$, b) $-A + 3B$, c) $2A + 4D$, d) $\frac{1}{2}A + 1,5B$ larni hisoblang.

Ushbu matritsalarining ko'rypatmasini toping.

48. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a) $A*B$ b) $B*A$

49. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, a) $A*B$ b) $B*A$

50. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ bo'lsa, AB , BA matritsalarini toping.

A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsani toping.

51. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 52. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

53. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 9 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + B$ ni toping.

$$54. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } A + B, A - B \text{ matritsalarini toping.}$$

$$55. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } 2A + 5B \text{ ni toping.}$$

$$56. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \text{ a) } A \cdot B \text{ b) } B \cdot A \quad 57. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$58. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 59. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } AB \text{ va } BA \text{ ni toping.}$$

A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsani toping.

$$60. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 61. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 62. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

3-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss hamda matritsa usullari bilan yechish.

Gauss usuli.

63-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Yechish. Birinchi tenglamani 3 va 4 ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamadan

ayiramiz
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 4z = -5 \\ 5y - 9z = -3 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani 5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamani ayiramiz
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 4z = -5 \\ -11z = -22 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan z ni topamiz $z = 2$, $y = -5 + 4z = -5 + 4 \cdot 2 = 3$, $x = z - y = 2 - 3 = -1$
Javob: $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$.

Matritsalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish.

Qulaylik uchun uchta noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \quad (1)$$

Elementlari noma'lumlarning koeffitsiyentlaridan, noma'lumlardan va ozod xadlardan tuzilgan quyidagi matrisalarni ko'raylik.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bu xolda (1) sistemani qo'yidagicha yozish mumkin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=C \quad (2)$$

Agar A matrisa maxsusmas matrisa bo'lsa, u holda unga teskari bo'lgan A^{-1} matrisa mavjud bo'ladi. Shuning uchun (2) ning har ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirsak $A^{-1}(AX) = A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C$. Agar $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ va $EA = AE = A$ tengliklarni e'tiborga olsak $(A^{-1}A)X = A^{-1}C \Rightarrow EX = A^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}C$ (3) (1)-sistemaning yechimini ifodalaydi.

64-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini matrisaviy usulda yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

Yechish. Sistemani matrisa ko'rinishida yozaylik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 50$$

Demak A matrisa uchun A^{-1} matrisa mavjud. Berilgan A matrisa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini hisoblab teskari matrisani topamiz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Endi (3) formulaga asosan $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_1=2, \quad x_2=1, \quad x_3=3$

Darsda yechish uchun misollar.

Tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.

$$65. \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad 66. \begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ x + 2z = 5 \\ 4x + 2y - z = -9 \end{cases} \quad 67. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

$$68. \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = -1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \quad 69. \begin{cases} x + y - 7z = 0 \\ x - 6y + z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases} \quad 70. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

Quyidagi tenglamalar sistemalarini Gauss usulida yeching.

$$71. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases} \quad 72. \begin{cases} 2x - 5y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases} \quad 73. \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \quad 74. \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

$$75. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \quad 76. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases} \quad 77. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases} \quad 78. \begin{cases} x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

II BOB. Tekislikda analitik geometriya.

1-§. Qutb koordinatalar sistemasini. Koordinatalar sistemasini almashtirish. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Uchburchakning yuzi.

Ma'lumki, o'zaro perpendikulyar bo'lgan gorizont va vertikal sonlar o'qi Dekart to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning **koordinatlari** deyiladi. „Nuqta berilgan“ degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, „Nuqtani toping“ degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatalar sistemasini orqali o'rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

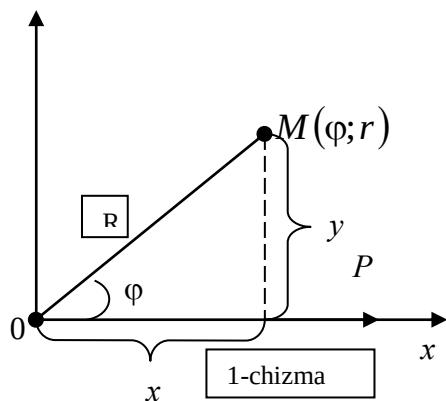
Bu usulni geometriyaning sodda masalalarini yechishga qo'llaymiz.

1. Qutb koordinatalar sistemasini. Dekart to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidan boshqa koordinatalar sistemasini ham kiritish mumkin. **Qutb koordinatalar sistemasini** qaraymiz. Tekislikda O nuqta – qutb va OR nur – qutb o'qi berilgan bo'lsin (1-chizma). U xolda M nuqtaning tekislikdagi o'rni

1) $\varphi = \angle MOP$ qutb burchagi;

2) $r = OM$ radius – vektor

bilan aniqlanadi, φ bilan r orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamani o'rganganda, qutb koordinatlari φ va r har qanday musbat va manfiy qiymatlar qabul qiladi deb qarash foydalidir. Manfiy φ burchak soat strelkasining yurishi bo'yicha hisoblansa, manfiy r , nurning o'zi bo'yicha emas, qutbning ikkinchi tomonidagi davomida joylashtiriladi.



Agar qutbni Dekart koordinatalar sistemasining boshi, OR qutb o'qini esa Ox o'q deb qabul qilsak, ixtiyoriy M nuqtaning Dekart sistemasidagi $(x; y)$ koordinatlari bilan uning (r, φ) qutb koordinatlari orasidagi bog'lanish

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (2)$$

tenglamalar bilan ifodalanadi. Bunda (1) munosabat qutb koordinatlaridan Dekart koordinatlariga, (2) munosabat esa Dekart koordinatlaridan qutb koordinatlariga o'tish formulalari bo'ladi.

Ellips, giperbola va parabola fokusini qutb deb olib, qutb o'qi deb esa qutbga eng yaqin uchiga qaratilgan yo'nalishga teskari yo'naltirilgan fokal simmetriya o'qini olsak, bu egri chiziqlarning qutb

koordinatlardagi tenglamalari bir xil $r = \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ (3) ko'rinishda bo'ladi, bunda ε - eksentrisitet,

R - parametr. Ellips va giperbola uchun $P = \frac{b^2}{a}$.

1-misol. Quyidagi nuqtalarni qutb koordinatlar sistemasida aniqlang.

$$M(3; \frac{3\pi}{4}), N(2; \frac{\pi}{4}), P(2,5; \frac{3\pi}{2}).$$

Yechish. M nuqtani yasash uchun qutb o'qini $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ yoki $\varphi = 135^\circ$ burchakka buramiz, yo'nalish musbat. Radiusda 3 birlik kesma olamiz, shu kesma oxiri M nuqta bo'ladi. N va P nuqtalarni aniqlash o'quvchiga tavsiya etiladi.

2-misol. Qutb koordinatlar sistemasida berilgan $A(\frac{\pi}{2}; 3)$ va $B(-\frac{\pi}{4}; 4)$ nuqtalarning Dekart koordinatlari sistemasidagi koordinatlarini toping.

Yechish. a) $A(\frac{\pi}{2}; 3), \varphi = \frac{\pi}{2}, r = 3.$ $\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\}$ formulalarga ko'ra:

$x = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0, y = 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$ larni topamiz. Demak, Dekart koordinatlar sistemasida $A(0; 3)$ bo'ladi.

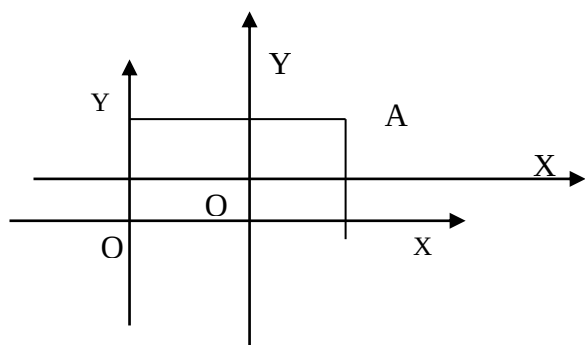
b) Xuddi yuqoridagiga o'xshash topamiz:

$B(-\frac{\pi}{4}; 4), \varphi = -\frac{\pi}{4}, r = 4.$ $\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\}$ formulalarga ko'ra:

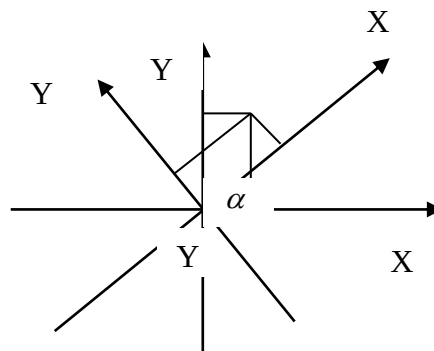
$x = 4 \cos(-\frac{\pi}{4}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, y = 4 \sin(-\frac{\pi}{4}) = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$ larni topamiz. Demak, Dekart koordinatlar sistemasida: $B(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ bo'ladi.

2. Dekart koordinatlarini almashtirish. Ko'pgina amaliy va nazariy masalalarni yechishda Dekart koordinatlarining bir sistemasidan boshqa sistemasiga o'tishga to'g'ri keladi. Bunday holda tabiiyki nuqtaning koordinatlari ham, chiziqlarning tenglamasi ham o'zgaradi. Shunday masala tug'iladi: biror koordinatlar sistemasida nuqta berilgan bo'lsa, uning koordinatlarini boshqa sistemada qanday topish mumkin? Bunday masalalarni koordinatlarni almashtirish formulalari orqali yechish mumkin. To'g'ri burchakli Dekart koordinatlarni almashtirishning quyidagi ikkita xilini qaraymiz.

1) Koordinat o'qlarini parallel ko'chirish. A nuqta berilgan OXY koordinatlar sistemasida (x, y) (eski) koordinatlarga ega bo'lsin. Koordinatlar boshini $O_1(a, b)$ nuqtaga ko'chiramiz, bunda (a, b) lar yangi koordinatlar boshining eski OXY koordinatlar sistemasidagi koordinatlari bo'ladi. Yangi O_1X_1, O_1Y_1 koordinat o'qlarini mos ravishda OX, OY koordinat o'qlariga parallel qilib o'tkazamiz. A nuqtaning yangi koordinatlar sistemasidagi koordinatlari mos ravishda (x_1, y_1) bo'lsin. Eski va yangi koordinatlar orasidagi bog'lanishni tekshiramiz. A nuqtadan OX, OY o'qlariga perpendikulyarlar o'tkazamiz (2-chizma).



2-chizma



3-chizma

Bu holda $\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b \end{cases}$ (4) bo'ladi. (4) formulalarga koordinat o'qlarini parallel ko'chirish formulalari deyiladi.

3-misol. Koordinatlar o'qlarini parallel ko'chirganda, yangi koordinatlar boshi $O_1(-2, 1)$ nuqtada bo'lsa, $A(3, 5)$ nuqtaning yangi koordinatlarini aniqlang.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $a = -2$, $b = 1$, $x = 3$, $y = 5$ ekanligini hisobga olib, (4) formulaga asosan $x_1 = x - a = 3 - (-2) = 5$, $y_1 = y - b = 5 - 1 = 4$ bo'ladi. Demak, yangi koordinatlar sistemasida A nuqtaning koordinatlari $x_1 = 5$, $y_1 = 4$ bo'ladi.

2) Koordinatlar boshini o'zgartirmay koordinat o'qlarini α burchakka burganda koordinatlarni almashtirish. Eski OXY koordinatlar sistemasini koordinatlar boshi O nuqta atrofida α burchakka burish bilan OX_1Y_1 holatga kelsin (3-chizma). A nuqtaning eski koordinatlari (x, y) yangi koordinatlari mos ravishda (x_1, y_1) bo'lsin. Ma'lumki, ABC va OBE uchburchaklardan $x = OD = OE - DE = OE - BC = OB \cos \alpha - AB \sin \alpha$ chunki, $\cos \alpha = OE / OB$, $\sin \alpha = BC / AB$. Shunga o'xshash $y = AD = CD + AC = BE + AC = OB \sin \alpha + AB \cos \alpha$ bo'ladi. $OB = x_1$, $AB = y_1$ bo'lganligi

uchun $\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$ (5) formulani hosil qilamiz. (5) formulaga koordinat o'qlarini α

burchakka burish bilan almashtirish formulasi deyiladi. (5) formulada birinchi tenglamani $\cos \alpha$ ga, ikkinchisini $\sin \alpha$ ga ko'paytirib, hadma-had qo'shsak, $x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, $y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$ tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} \quad (6)$$

eski koordinatlardan yangi koordinatlarga o'tish formulasi bo'ladi.

4-misol. Koordinat o'qlari $\alpha = \frac{\pi}{6}$ burchakka burilgan. $A(\sqrt{3}, 3)$ nuqtaning yangi koordinatlarini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $x = \sqrt{3}$, $y = 3$ bo'lganligi uchun

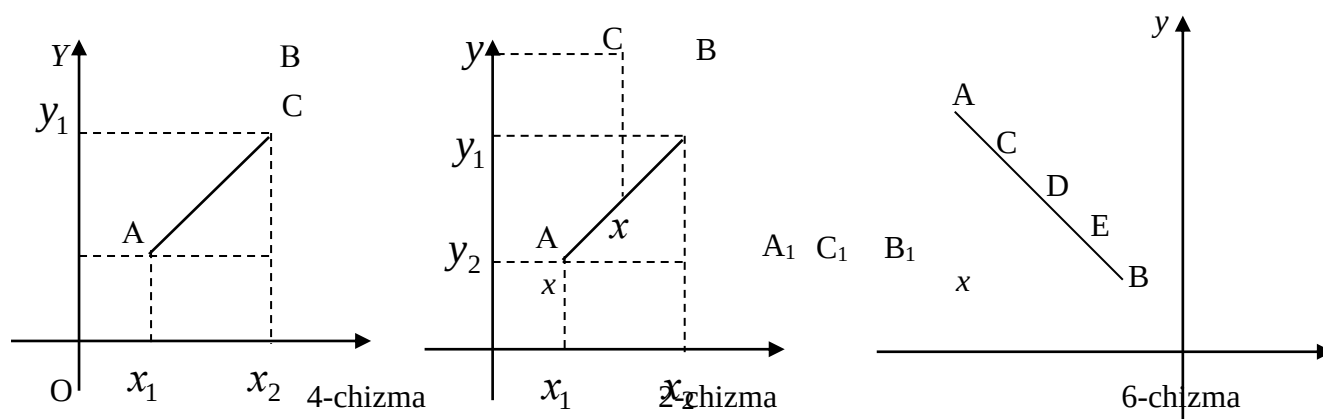
$$x_1 = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 3 \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 3 \quad \text{bo'ladi.}$$

$$y_1 = 3 \cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Koordinatlarni almashtirishning mohiyati, chiziqlarni yoki ularning tenglamalarini tekshirishda ularni soddalashtirishdan iborat deyish mumkin. Masalan, $xy = k$ tenglama koordinat o'qlarini $\alpha = 45^\circ$ burchakka burish bilan (5) almashtirish orqali $x_1^2 - y_1^2 = 2k$ teng tomonli giperbolaga o'tadi. Xaqiqatan ham, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1$ bo'lib, $xy = \frac{1}{2}(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = k$ yoki $x_1^2 - y_1^2 = 2k$ bo'ladi.

3. Ikki nuqta orasidagi masofa. Tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma'lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC to'g'ri burchakli

uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, shunday qilib, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (7) bo'ladi. (7) formulaga tekislikda berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi (4-chizma).



4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. AB kesma berilgan bo'lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. O'rta maktab geometriyasidan ma'lumki (5-chizma) $AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda$, yoki $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$ bo'lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x \text{ bo'lganligi uchun, } (x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ bo'ladi. Xuddi shunday, } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

$$\text{Demak, } C \text{ nuqtaning koordinatlari uchun } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (8)$$

formulani hosil qildik. (8) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish formulasi deyiladi. Xususiyl holda $C(x, y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa, u holda $\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$ bo'lib, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ kesmani teng ikkiga bo'lish formulasi kelib chiqadi.

3) To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida uchlari $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi quyidagi formula orqali topiladi:

$$S = \frac{1}{2} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \quad (9)$$

5-misol. $M(5, 3)$ va $N(2, -1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko'ra: $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = -1$. Bularni (1) formulaga

$$\text{qo'ysak: } MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ bo'ladi.}$$

6-misol. Tekislikda $A(5, 3)$, $B(2, 1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0,2$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $\lambda = 0,2$.

(8) formulaga asosan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{5 + 0,2 \cdot 2}{1 + 0,2} = \frac{5 + 0,4}{1,2} = \frac{5,4}{1,2} = \frac{54}{12} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 0,2 \cdot 1}{1 + 0,2} = \frac{3 + 0,2}{1,2} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4,5, \frac{8}{3}\right)$ bo'ladi.

7-misol. Uchlari $A(2, 0)$; $B(5, 3)$ va $C(2, 6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. (9) formulaga ko'ra $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 6$ bo'lganligi uchun, $S = \frac{1}{2}[(2 \cdot 3 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 6 - 3 \cdot 2) + (0 \cdot 2 - 2 \cdot 6)] = \frac{1}{2}(6 + 24 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ bo'ladi.

8-misol. $A(-6, 7)$ va $B(-2, 3)$ nuqtalar berilgan. AB kesma C, D, E nuqtalar orqali 4 ta teng qismlarga ajratilgan. C, D, E bo'linish nuqtalarini toping (6-chizma).

Yechish. Ma'lumki $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AD}{DB} = 1$, $\frac{AE}{EB} = 3$.

C nuqtaning koordinatlarini (8) formuladan foydalanib topamiz:

$$x_c = \frac{-6 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = -5, \quad y_c = \frac{-6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 6$$

Demak, $C(-5, 6)$. (D va E nuqtalarni topish o'quvchiga havola etiladi).

Darsda yechish uchun misollar.

9. $(\varphi; r)$ qutb koordinatlar sistemasida $A(0; 3)$, $B\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $D(\pi; 2)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$ nuqtalar yasalsin.

10. Qutb koordinatlar sistemasida berilgan $A\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ va $B\left(-\frac{\pi}{4}; 4\right)$ nuqtalarning Dekart koordinatlar sistemasidagi koordinatlarini toping.

11. Qutb koordinatlar sistemasida berilgan $r^2 \sin 2\varphi = 2a^2$ chiziqli tenglamasini Dekart koordinatlar sistemasida ifodalang.

12. Qutb koordinatlar sistemasida berilgan $A\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$ va $B\left(-\frac{\pi}{3}; 3\right)$ nuqtalarning Dekart koordinatlar sistemasidagi koordinatlarini toping.

13. Ushbu

$$\begin{array}{llll} 1) x^2 - y^2 = a^2 & 2) x^2 + y^2 = a^2 & 3) x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 & 4) y = x \\ 5) x^2 + y^2 = ax & 6) (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) & & \end{array}$$

chiziqlarning tenglamalari qutb koordinatlaridagi tenglamalari bilan almashtirilsin.

Ko'rsatma. $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ larni berilgan tenglamalarga qo'yib soddalashtirilsin.

14. Koordinatalar boshidan $A(-3, 4)$ nuqttagacha bo'lgan masofani toping.

15. Uchlari $A(4, 3)$, $B(0, 0)$ va $C(10, -5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.

16. OY o'qida $A(4, 5)$ va $B(3, 2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(x, y)$ nuqtani toping.

17. OX o'qida $A(0, 5)$ va $B(-3, -2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda bo'lgan nuqtani toping.

18. $A(5, -4)$ nuqta va AB kesmaning o'rtasi $C(0, -3)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi $B(x, y)$ uchini toping.
19. Uchlari $A(3, 4)$; $B(7, 7)$; $C(4, 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning teng yonli ekanligini ko'rsating.
20. $A(2, 8)$ va $B(6, -4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesma C, D, E nuqtalar bilan 4 ta teng bo'laklarga bo'lingan. C, D , va E nuqtalarni toping.
21. AB kesma $C(-1, -2)$ va $D(2, 0)$ nuqtalar orqali teng uch bo'laklarga bo'lingan. A va B nuqtalarni toping.
22. Uchlari $A(2, 5)$; $B(6, 3)$ va $C(4, 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.
23. Uchlari $A(3, 1)$; $B(4, 6)$; $C(6, 3)$ va $D(5, -2)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning yuzi hisoblansin.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

24. $A\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{4}; -4\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$, nuqtalar yasalsin.
25. 1) $r = 3 - 2\sin 2\varphi$ 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$ 3) $r = 1 - \sin 3\varphi$ chiziqlar yasalsin.
26. Uchlari $A(3;8)$ va $B(-5;14)$ nuqtalarda bo'lgan kesma uzunligini aniqlang.
27. Uchlari $A(-3;-3)$, $B(-1;3)$ va $C(11;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakni to'g'ri burchakli ekanini ko'rsating.
28. $C(2; 3)$ nuqta AB kesmaning o'rtasida yotsa, $B(7; 5)$ bo'lsa A nuqtaning koordinatasini toping.
29. $A(-2;5)$ va $B(4;17)$ - AB kesmaning uchlarining koordinatalari. Shu kesmada yotuvchi C nuqtadan A gacha masofa B nuqtagacha masofadan 2 marta katta. C nuqtaning koordinatalarini toping.
30. Uchlari $O(0;0)$, $A(8;0)$ va $B(0;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning OC medianasi uzunligini toping.
31. Uchburchak uchlarining koordinatalari $A(3;4)$, $B(3;8)$ va $C(6;4)$ bo'lsa, perimetrni aniqlang.
32. Uchlari $A(-5;2)$, $B(3;6)$ va $C(4;-6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakni teng yonli ekanini ko'rsating.
33. Oy o'qdan, $A(10;8)$ va $B(-6;4)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotuvchi C nuqtani toping.
34. $A(-5;-7)$ nuqta hamda AB kesmaning o'rtasida yotuvchi $C(-9;-12)$ nuqta berilgan. B uchining koordinatalarini toping.
35. $A(-5;8)$ va $B(10;2)$ nuqtalar orasidagi AB kesmani C va D nuqtalar teng uchga bo'ladi. C va D nuqtalarni koordinatalarini toping.
36. Uchburchak yuzi $S = 3\text{ kv. birlik}$. Uning ikki uchi $A(3,1)$ va $B(1,-3)$ nuqtalarda. Oy o'qda yotuvchi C uchining koordinatalarini toping.

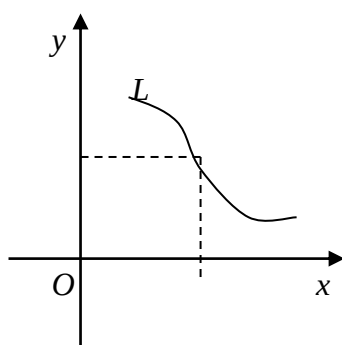
2-§. To'g'ri chiziqning umumiy, vektor va kanonik tenglamasi. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.

To'g'ri chiziq va uning tenglamalari.

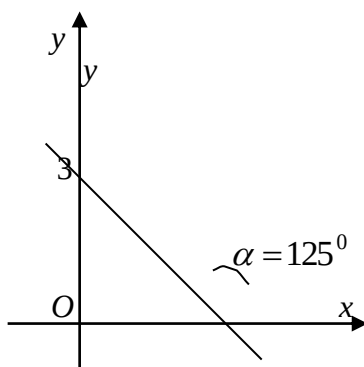
To'g'ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to'g'ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o'rganamiz.

1) To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziqning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to'g'ri chiziqning ordinatlar o'qidan ajratgan kesmasining

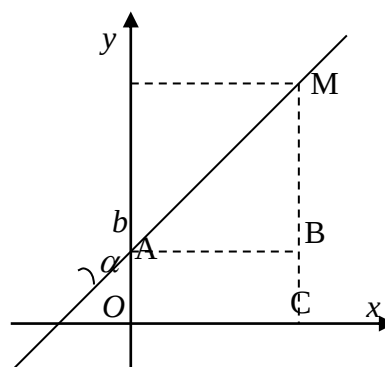
kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^\circ$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (8-chizma).



7-chizma



8-chizma



9-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (9-chizma). AMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ bundan } BM = AB \operatorname{tg} \alpha$$

9-chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = AB \operatorname{tg} \alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ bo'ladi. $\operatorname{tg} \alpha$ to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deyiladi va $\operatorname{tg} \alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib, $y = kx + b$ (1) munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsientli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinatlar burchagining bissektrisasi bo'ladi.

37-misol. OX o'qi bilan 120° burchak hosil qiluvchi va OY o'qini $A(0, 3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra, to'g'ri chiziq OY o'qini $A(0, 3)$ nuqtada kesib o'tadi, demak $b = 3$.

Bu nuqtadan OX o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120° burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi bo'ladi.

2) To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma'lumli

$Ax + By + C = 0$ tenglamani qaraymiz. Bundan, $By = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ bo'lib, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$

bilan belgilasak, $y = kx + b$ tenglama hosil bo'ladi. Shunday qilib, $Ax + By + C = 0$ tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi. $Ax + By + C = 0$ (2) tenglamaga to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari:

1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By = 0$ bo'lib, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tadi, chunki $O(0, 0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $y = -\frac{C}{B}$ bo'lib, OY o'qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo'lib, OX o'qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib, OY o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

4) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ bo'lsa, $y = 0$ bo'lib, OX o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ bo'lsa, $x = 0$ bo'lib, OY o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

6) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $C = 0$ bo'lib, o'zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga tengligi kelib chiqadi, bunday bo'lishi mumkin emas.

38-misol. $x - 2y + 6 = 0$ to'g'ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish. Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ bundan (1) tenglama bilan taqqoslab $k = 1/2$, $b = 3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to'g'ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsientli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

3) Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

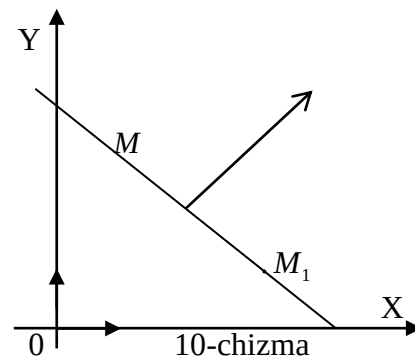
XOY tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{N}$ vektorga L to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi. L to'g'ri chiziqning XOY tekislikdagi holati $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va $\vec{N} = \{A, B\}$ normal vektorlarning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

L to'g'ri chiziqda biror $M(x, y)$ nuqta olaylik va bu nuqta kordinatalarini o'zaro bog'lovchi shu to'g'ri chiziqning tenglamasini chiqaraylik.

$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ va $\vec{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ vektorlar perpendikulyar bo'lgani uchun ularning skalyar ko'paytmasi nol bo'ladi.

$$\vec{N} \cdot \vec{M_1M} = 0 \text{ dan } (A\vec{i} + B\vec{j})((x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}) = 0,$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad (3) \text{ izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi.}$$



4) To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

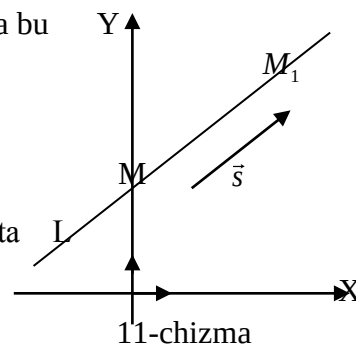
XOY tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan

$\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{s}$ vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi. L to'g'ri chiziqning holati $M_1(x_1, y_1)$ nuqta

va $\vec{s} = \{m, n\}$ larning berilishi bilan to'la aniqlanadi. L ustida $M(x, y)$ nuqta

olsak $\vec{M_1M}$ va $\vec{s}$ vektorlar collinear bo'lgani uchun $\vec{M_1M} = \lambda \vec{s} \Rightarrow$

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = \lambda(m\vec{i} + n\vec{j}), \quad \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \quad (4) \text{ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.}$$



5) To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To'g'ri chiziq koordinat o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o'tsin (10-chizma). To'g'ri chiziq $A(a, 0)$ va $B(0, b)$ nuqtalardan o'tadi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$,

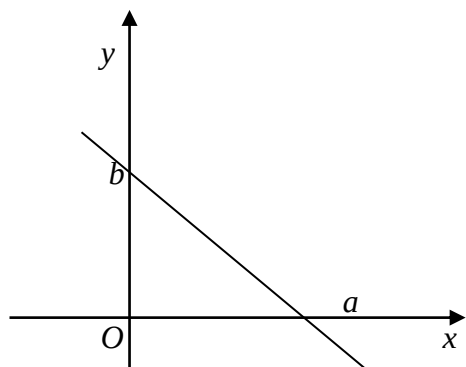
$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \text{ yoki } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5) \text{ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaga to'g'ri chiziqning}$$

kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi.

39-misol. $3x + 5y - 15 = 0$ to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

Yechish. $3x + 5y - 15 = 0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini (5) ko'rinishdagi tenglamaga

keltiramiz. $3x+5y=15$, $\frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1$ *ëku* $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ bu to'g'ri chiziqlarning kesmalariga nisbatan tenglamasi bo'ladi. Endi koordinat o'qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasash kerak bo'lgan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.



12-chizma

Darsda yechish uchun masalalar.

40. OY o'qidan $b=4$ kesma ajratib OX o'qi bilan 135° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

41. OY o'qidan $b=-2$ kesma ajratib OX o'qi bilan 60° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

42. Koordinatlar boshidan o'tib, OX o'qi bilan: 1) 45° , 2) 120° , 3) 60° , 4) 90° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

43. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to'g'ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

44. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to'g'ri chiziqlarning kesmalariga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

45. $A(2, 3)$ nuqtadan o'tib, OX o'qi bilan 60° burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

46. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to'g'ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltiring.

47. $Ax+5y-40=0$ to'g'ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o'qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

48. To'g'ri chiziq $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ tenglama bilan berilgan. To'g'ri chiziqni

1) umumiy 2) Kesmalar bo'yicha tenglamalarini yozing.

49. To'g'ri chiziqlarni yasang:

1) $4x-5y+15=0$ 2) $2x-y=0$ 3) $7x-10=0$ 4) $2y+3=0$

50. $A(2; 5)$ nuqtadan o'tib, ordinatalar o'qidan $b=7$ kesma ajartuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

51. Quyidagi 1) $3x-2y+12=0$ 2) $y=4x-2$ 3) $y=-x+1$ to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalarini toping.

52. m va n larning qanday qiymatlarida $(m-3n-2)x+(2m+4n-1)y-3m+n-2=0$ to'g'ri chiziq Ox o'qini 3, Oy o'qini -2 birlikda kesib o'tadi.

53. $A(0;2)$ $B(3;4)$ $C(5;1)$ $E(-3,0)$ nuqtalarni $2x-3y+6=0$ to'g'ri chiziqda yotishini tekshiring.

54. To'g'ri chiziq OX o'qini $A(-6, 0)$ nuqtada OY o'qini $B(0, 7)$ nuqtada kesib o'tadi. Bu to'g'ri chiziqni kesmalarga nisbatan tenglamasini tuzing.

3-§. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

1) Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. XOY tekisligidagi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi biror L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning holati shu α burchak bilan shu to'g'ri chiziqda yotuvchi biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb,

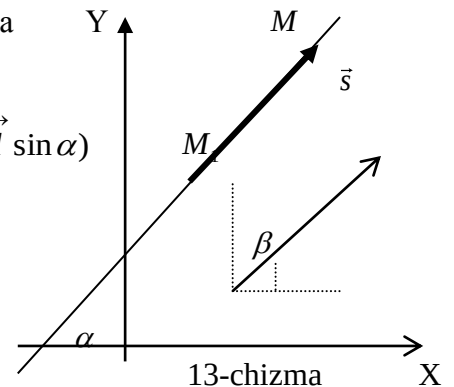
shu L to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan $\vec{s} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha$, $|\vec{s}|=1$,
 $[\cos \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha]$ birlik vektorni olaylik. L to'g'ri chiziq ustida

biror $M(x, y)$ nuqta olsak $\vec{s}$ va $\vec{M_1M}$ vektorlar kollinear vektorlar

bo'lgani uchun $\vec{M_1M} = \lambda \cdot \vec{s} \Rightarrow (x-x_1) \vec{i} + (y-y_1) \vec{j} = \lambda \cdot (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha)$

$$\begin{cases} x-x_1 = \lambda \cos \alpha \\ y-y_1 = \lambda \sin \alpha \end{cases} \quad \lambda = \frac{x-x_1}{\cos \alpha}, \quad \lambda = \frac{y-y_1}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow y-y_1 = k(x-x_1) \text{ bunda } k = \operatorname{tg} \alpha.$$



Bu tenglamaga **berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

55-misol. $M(2, -1)$ nuqtadan o'tgan Ox o'qi bilan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping. $k = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ $\sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$.

2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $y = kx + b$ (1) to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (1) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak, $y - y_1 = k(x - x_1)$ (2) hosil bo'ladi. (2) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2, y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ bo'lib, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

bo'ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (2) ga qo'yib, $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (3) tenglamani hosil qilamiz.

(3) **berilgan ikki $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

56-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so'm xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to'g'ri chiziq) bo'lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

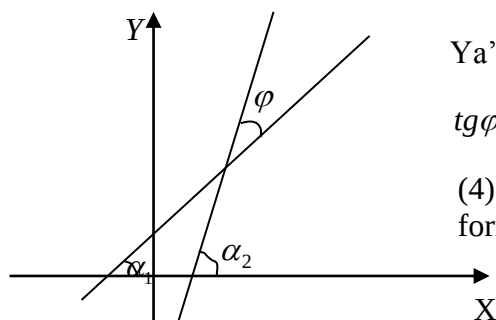
Yechish. Masala sharti bo'yicha $A(100, 300)$ va $B = (500, 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan, $\frac{y-300}{1300-300} = \frac{x-100}{500-100}$, yoki $y = 2,5x + 50$ tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglamadan $x = 400$ uchun, $y = 1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so'm xarajat qilinadi.

3) Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bunda $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



14-chizma

Ya'ni $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (11-chizma). Ma'lumki,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \text{ yoki } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (4) \text{ bo'ladi.}$$

(4) **ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini** topish formulasi deb ataladi.

57-misol. $y = 2x + 5$ va $y = 3x + 1$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (4) formulaga asosan, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3-2}{1+2 \cdot 3} = \frac{1}{7}$ bo'lib, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \approx \operatorname{arctg} 0,14 \approx 8^\circ$,

$\varphi \approx 8^\circ$ bo'ladi.

4) To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari. To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak $\varphi = 90^\circ$ bo'lib, $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 k_2 = 0 \text{ kelib chiqadi, bundan } k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ bo'ladi, bunga ikki to'g'ri chiziqning}$$

perpendikulyarlik sharti deyiladi.

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi = 0$ bo'lib, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, yoki $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0$, $k_2 - k_1 = 0$, $k_1 = k_2$

kelib chiqadi. $k_1 = k_2$ tenglikka **ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

5) To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. To'g'ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo'ladi (15-chizma) va uning tenglamasi $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ (5) bo'ladi. (5) tenglamaga to'g'ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi.

Ma'lumki, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To'g'ri chiziq umumiy

tenglamasini normal tenglama keltirish uchun $M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ **normallovchi ko'paytuvchini**

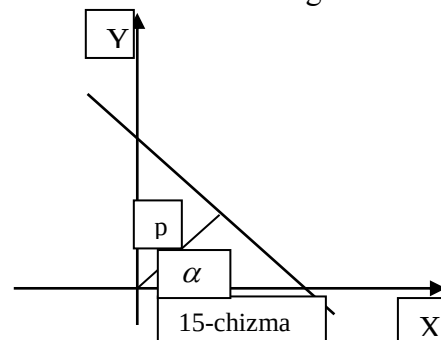
hisoblab, uni $Ax + By + C = 0$ tenglamaga ko'paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo'ladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

58-misol. Normalning uzunligi $p = 3$ va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi 30° bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra normal OX o'qi bilan 30° li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo'zg'aluvchi tomoni normal to'g'ri chiziq bo'ladi. Shu to'g'ri chiziqda $p = 3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz.



15-chizma

Bu yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Endi to'g'ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko'ra normalning uzunligi va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma'lumki, to'g'ri chiziqning (5) normal tenglamasini yozamiz. $p = 3$, $\alpha = 30^\circ$ bo'lganligi uchun $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 3 = 0$ eku $\sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$ Natijada $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

59-misol. $4x - 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko'paytuvchini topamiz: $M = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamani $M = 1/5$ ko'paytirib, $4/5 \cdot x - 3/5 \cdot y - 1 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, chunki $(\frac{4}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$, $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1)$ edi.

6) Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. $M(x_0, y_0)$ nuqta va $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$ formula yordamida topiladi. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy $Ax + By + C = 0$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa,

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (6) formula bilan topiladi.

60-misol. $A(3; \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (6) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{|6 + 5 - 2|}{3} = \frac{9}{3}, \quad d = 3 \text{ bo'ladi.}$$

7) Ikki parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish.

$5x - 2y + 10 = 0$ va $5x - 2y + 36 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to'g'ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz: birinchi to'g'ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo'lib, $A(4, 15)$ 1-to'g'ri chiziqdagi nuqta bo'ladi. $A(4, 15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani (6) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \frac{|5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d = \frac{26}{\sqrt{29}} \text{ bo'ladi.}$$

Darsda yechish uchun masalalar.

61. $y = 1/2 \cdot x + 4$ to'g'ri chiziq berilgan. Uning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

62. Boshlang'ich ordinatasi $b = -3$ bo'lgan va $y = 2x + 3$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.

63. $y = \sqrt{3}x - 2$ va $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning absissa o'qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.

64. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

65. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

66. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$, 4) $30x + 6y + 7 = 0$

to'g'ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.

67. Tomonlari $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ to'g'ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.
68. $A(4; 5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing va ulardan $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo'lganlarini ajrating.
69. Uchlari $P(-4; 0)$, $Q(0; 4)$ va $R(2; 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.
70. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
71. Uchlari $P(0; 5)$, $Q(-3; 1)$ va $R(-1; -2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning R nuqtasidan o'tkazilgan balandligining uzunligini toping.
72. Trapetsiya asoslarining tenglamalari $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ berilgan. Trapetsiyaning balandligini toping.
73. Uchlari $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ va $C(4; 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining, AE medianasining, AD balandligining tenglamalarini hamda AE mediananing uzunligini toping.
74. Uchlari $A(3; 4)$, $B(3; 2)$ va $C(-1; 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.
75. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
76. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.
77. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y - 6 = 0$ 2) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 7 = 0$ 3) $\frac{3}{5}x + \frac{3}{4}y - 2 = 0$ 4) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko'rinishda?
78. Ushbu 1) $5x + 12y - 26 = 0$ 2) $3x - 4y + 10 = 0$ 3) $y = 3x + 5$ 4) $2x + 2y + 7 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamalarini normal ko'rinishga keltiring.
79. To'g'ri chiziqning $x + 3y - 4 = 0$ umumiy tenglamasini, normal tenglama ko'rinishiga keltiring.
80. Koordinatalar boshidan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi $p = \sqrt{2}$. Bu perpendikulyar OX o'qning musbat yo'nalishi bilan $\alpha = 45^\circ$ li burchak hosil qiladi. To'g'ri chiziqning normal tenglamasini tuzing.

Mustaqil uy vazifasi uchun masalalar.

81. $A(1; 2)$ va $B(4; 3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va bu to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlang.
82. $x - y - 4 = 0$ va $2x - 11y + 37 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan xamda koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
83. $A(2; 1)$ nuqtadan o'tib $y = 3x - 4$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
84. $A(5; -4)$ nuqtadan o'tuvchi va $3x + 2y - 7 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
85. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:
- 1) $y = 2/3 \cdot x - 7$ 2) $2x - 4y + 9 = 0$ 3) $y = 3/7 \cdot x - 2$ 4) $x/4 - y/5 = 1$
 1) $y = 5x + 9$ 2) $6x - 2y - 3 = 0$ 3) $7x + 3y + 5 = 0$ 4) $x/2 + y/18 = 1$
86. To'g'ri burchakli teng yonli uchburchak gipotenuzaning tenglamasini $y = 3x + 5$ va to'g'ri burchak uchining koordinatalari $C(4; -1)$, katetlari tenglamalarini tuzing va uchburchak uchlarini koordinatalarini toping.
87. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.
88. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.
89. $A(2; 5)$ nuqtadan $6x + 8y - 6 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

90. m ning qanday qiymatida $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ va $mx + my - 8 = 0$ to'g'ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi?
91. $M(a; b)$ nuqtadan $x + y + c = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tuvchi tenglamasini tuzilsin.
92. $M(5; 1)$ nuqtadan o'tib $2x + y - 4 = 0$ to'g'ri chiziq bilan $\frac{\pi}{4}$ burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
93. $(-2; -5)$ nuqtadan o'tib $3x + 4y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
94. $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ va $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.
95. $x - 3y = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan hamda $3x - 2y - 1 = 0$ va $4x - 5y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan kesishib yuzi $\frac{7}{2}$ kv. birlikka teng uchburchak hosil qiladigan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

4-§. Aylananing kanonik va umumiy tenglamasi. Aylananing urinma tenglamasi. Ellipsning kanonik tenglamasi. Ellipsning urinma tenglamasi.

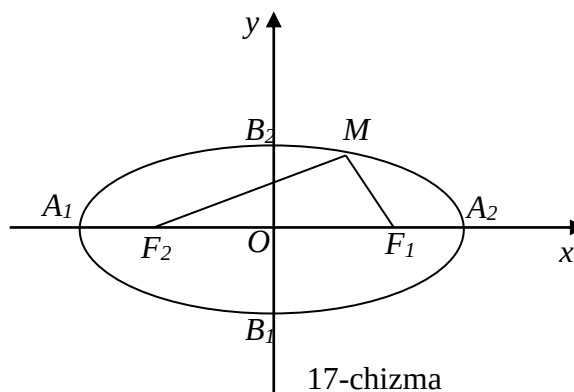
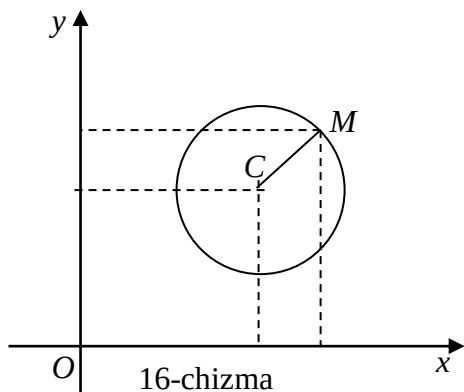
1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi. Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq x va y o'zgaruvchi kordinatlarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o'rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o'zgaruvchi koordinatlarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

bo'ladi. (1) tenglamaga **ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi** deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o'rganamiz.

2. Aylana va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda biror $C(a, b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rniga aylana deyiladi.

$M(x, y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (16-chizma). Aylana ta'rifiga ko'ra CM masofa o'zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.



ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{yoki} \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \quad \text{bo'ladi. Oxirgi tenglikning}$$

ikkala tarafini kvadratga ko'tarib, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (2) tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng **aylananing kanonik tenglamasi** deb ataladi. (2) dan $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$ yoki $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ bo'ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo'lgan xususiy holidir. Demak, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

$x_0x + y_0y = R^2$ aylanaga $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi.

$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = R^2$ $C(a, b)$ markazli aylanaga $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma

tenglamasi.

96-misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning aylana ekanligini ko'rsating hamda markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo'yicha to'la kvadratlar ajratamiz: $x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0$ yoki $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ bo'ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3; -2)$, nuqtada, radiusi $R = 6$ bo'ladi.

3. Ellips hamda uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga **ellips deyiladi**. Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo'lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi fokuslardan o'tsin va koordinatlar boshi F_1F_2 masofaning o'rtasida bo'lsin (17-chizma). $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

bo'ladi. Ma'lumki, $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irratsionallikni yo'qotib, $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ ko'rinishga keltiramiz. $a^2 - c^2 = b^2$ bilan belgilaymiz (chunki, $a > c$). Bu holda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4) tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga **ellipsning kanonik tenglamasi** deyiladi.

Koordinatlar boshi, ellipsning **simmetriya markazi**, koordinatlar o'qi **simmetriya o'qlari** bo'ladi. $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, +b)$ nuqtalar ellipsning uchlari,

$a = OA_2$ va $b = OB_2$ masofalar mos ravishda **ellipsning katta va kichik yarim o'qlari** deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon = c/a < 1$ kattalik **ellipsning ekstsentrisseti** deyiladi. Aylanani ellipsning $a = b$, $\varepsilon = 0$ bo'lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x, y)$ nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofaga ellipsning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ bo'ladi.

97-misol. $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsning yarim o'qlarini, fokuslarini va ekstsentrissetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo'lib, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko'rinishga keltiramiz. Bu

tenglamadan $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ bo'lib, yarim o'qlari mos ravishda $a = 5$, $b = 4$ bo'ladi.

Ma'lumki, $b^2 = a^2 - c^2$ bo'lib, $c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ bo'ladi. Demak, fokuslari $F_1(3, 0)$ va

$F_2(-3, 0)$ nuqtalarda bo'ladi. Ekstsentrisseti esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Darsda yechish uchun masalalar.

98. $N(7; -2)$ nuqtadan o'tib, markazi $C(3; -5)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

99. $M(4; 2)$ va $N(12; 8)$ nuqtalar berilgan. Diametri MN kesmadan iborat bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

100. Ushbu 1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - 29/3 = 0$

3) $x^2 + y^2 + 7x = 0$

4) $5x^2 + 5y^2 + 9y = 0$

aylanalarning markazlarini va radiuslarini toping.

101. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ va $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0$ aylanalar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

102. Fokuslari orasidagi masofa 24, katta o'qi 26 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing va uni yasang.

103. Quyidagilar berilganda ellipsning kanonik tenglamasini toping:

1) katta yarim o'q 10, ekstsentrisset 0,8;

2) kichik yarim o'q 12, ekstsentrisset 5/13;

3) ekstsentrisset 0,6, fokuslar orasidagi masofa 6.

104. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$ 2) $9x^2 + y^2 = 36$ ellipslar uchun o'qlarining uzunliklarini, fokuslarini va ekstsentrissetlarini toping va yasang.

105. Koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M(2; \sqrt{3})$ va $N(0; 2)$ nuqtalardan o'tadi. Ellips tenglamasini yozing. M nuqtadan fokuslargacha masofalarni toping.

106. Ikki uchi $9x^2 + 5y^2 = 1$ ellipsning fokuslarida, qolgan ikki uchi esa uning kichik o'qi oxirlari bilan ustma-ust tushgan to'rtburchakning yuzi hisoblansin.

107. Ushbu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ ellipsda shunday nuqtalar aniqlansinki, ulardan chap fokusgacha bo'lgan masofa 2,5 ga teng bo'lsin.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

108. Aylananing ushbu tenglamalariga ko'ra uning markazi va radiusini aniqlang.

$$1) x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \quad 2) x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$$

109. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ aylana berilgan. Uning (5; 5) nuqtasidan o'tuvchi urinma tenglamasini tuzing. 57. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ aylana va $x + y = 0$ to'g'ri chiziq kesishish nuqtasini aniqlang.

$$110. 1) x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0 \quad 2) 3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 15 = 0 \quad 3) x^2 + y^2 + 3x - 7y - \frac{3}{2} = 0$$

tenglamalariga ko'ra aylanalarning markazi koordinatalarini va radiuslarini uzunliklarini aniqlang

111. $A(7;7)$ va $B(-2;4)$ nuqtalardan o'tib, markazi $2x - y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqda yotgan aylana tenglamasini tuzing.

112. $A(-3;0)$ va $B(3;6)$ nuqtalar berilgan. Diametri AB kesmadan iborat aylana tenglamasini tuzing.

113. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M(2; \sqrt{3})$ va $B(0;2)$ nuqtalardan o'tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofa topilsin.

114. $x^2 + 4y^2 = 4$ ellipsning markazi shu ellipsning yuqori uchida bo'lgan va uning fokuslaridan o'tuvchi aylana bilan umumiy nuqtalari topilsin.

115. Ushbu $9x^2 + 5y^2 = 45$ berilgan ellipsga ko'ra:

1) uning yarim o'qlari;

2) fokuslari;

3) ekssentrisseti;

4) direktrissalarining tengmalari topilsin.

5-§. Giperbolaning kanonik va ekssentriteti tenglamasi. Giperbolaning fokal radiuslari. Giperbolaning urinma tenglamasi. Direktrissa tenglamasi.

Parabola tenglamasi. Parabolaning direktrissa tenglamasi.

Parabolaning urinma tenglamasi.

1. Giperbola va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokus) nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometrik

o'rniga **giperbola** deyiladi (ko'rsatilgan ayirma absolyut qiymati bo'yicha olinib, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va 0 dan farqli).

O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o'qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) tenglamani hosil qilamiz. (1) tenglamaga **giperbolaning kanonik** tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'ladi (18-chizma). Koordinatlar o'qi **simmetriya o'qlari** va koordinatlar boshi $O(0; 0)$ **simmetriya markazidir**. Giperbola kordinat o'qlarini $A_1(-a; 0)$ $\hat{a}$ $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesib o'tib, bu nuqtalarga **haqiqiy uchlari** va $a = OA_2$ masofa **haqiqiy yarim o'qi** deyiladi. $B_1(0, -b)$ $\hat{a}$ $B_2(0, b)$ nuqtalar giperbolaning **mavhum uchlari**, $b = OB_2$ – **mavhum yarim o'qi** deyiladi.

Giperbola ikkita asimptotalarga ega bo'lib, uning tenglamalari $y = \pm \frac{b}{a} x$ (2) bo'ladi.

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (3) giperbolaga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ kattalikka **giperbolaning ekstsentrisiteti** deb ataladi. Giperbola o'qlari $a = b$ bo'lsa, unga

teng tomonli giperbola deyiladi va uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ bo'ladi.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolalarga **o'zaro qo'shma giperbolalar** deb ataladi.

116-misol. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolaning yarim o'qlarini, fokuslarini, ekstsentrisitetini hamda asimptotalarining tenglamalarini toping.

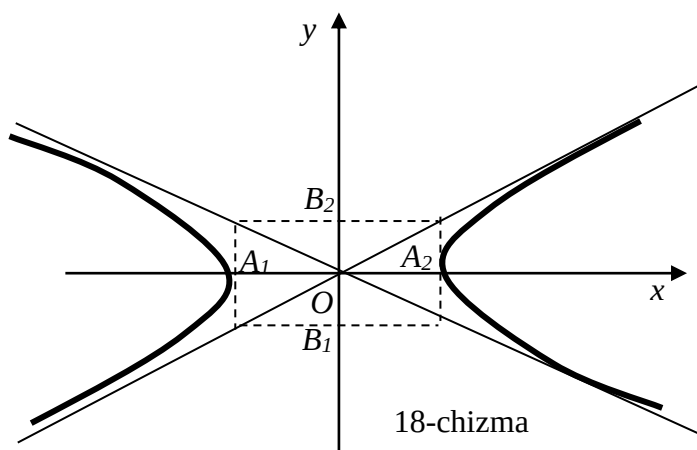
Yechish. Berilgan tenlamani 144 ga bo'lib tenglamani kanonik $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ko'rinishga

keltiramiz. Bundan $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ bo'lib, haqiqiy yarim o'q $a = 4$, mavhum yarim o'q $b = 3$ bo'ladi.

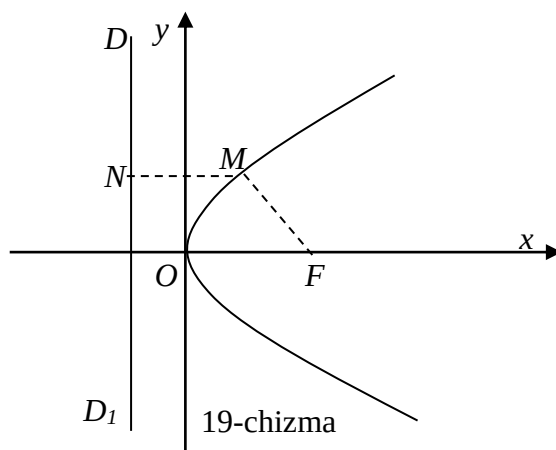
$c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9$, $c = \pm 5$ bo'lib, fokuslari $F_1(+5; 0)$, $F_2(-5; 0)$ nuqtalarda bo'ladi.

Ekstsentrisitet $\varepsilon = c/a = 5/4$.

a va b larning qiymatini (2) asimptota tenglamasiga qo'yib, $y = \pm \frac{3}{4} x$ tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.



18-chizma



19-chizma

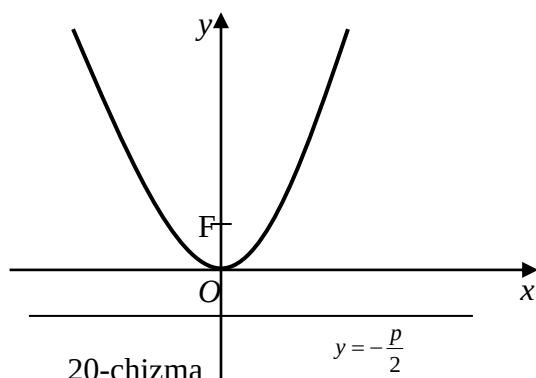
2. Parabola va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta (fokus) gacha va berilgan to'g'ri chiziq (direktrisa)gacha masofalari o'zaro teng bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga **parabola** deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi F (fokus)dan o'tib, DD_1 direktrisa perpendikulyar, OY o'qi esa fokus va direktrisaning o'rtasidan o'tsin (19-chizma). $M(x, y)$ parabola tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. F nuqtadan DD_1 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p ($p > 0$) bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2, 0)$ bo'lib, direktrisaning tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'ladi. Ta'rifga asosan,

$$MN = MF, \quad N(-\frac{p}{2}, y). \text{ Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan, } x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamadan irratsionallikni yo'qotib, $y^2 = 2px$ (4) tenglamani hosil qilamiz. Bu absissalar o'qiga simmetrik **parabolaning kanonik** tenglamasi bo'ladi. Ordinatlari o'qi **simmetriya o'qi** bo'lsa, parabola tenglamasi $x^2 = 2py$ ($p > 0$) ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $y = -p/2$ direktrisa tenglamasi, $F(0; p/2)$ nuqta fokus bo'ladi (20-chizma).

$yy_0 = p(x + x_0)$ $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi.



$M(x, y)$ nuqtadan $F(p/2, 0)$ fokusgacha masofaga fokal radius deyiladi va $r = x + p/2$. $M(x, y)$ nuqtadan $F(0, p/2)$ fokusgacha masofa $r = y + p/2$ bo'ladi.

117-misol. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3; 6)$ nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12$, bundan $p = 6$, $p/2 = 3$. Shunday qilib, fokus $F(3; 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M(3; 6)$ nuqta uchun $x = 3$, bo'lib, fokal radius $r = 3 + 3 = 6$, $r = 6$ bo'ladi.

Darsda yechish uchun misollar.

118. Quyidagilar berilganda giperbolaning kanonik tenglamasini yozing:

- 1) fokuslari orasidagi masofa 10, eksentrisitet $5/3$;
- 2) haqiqiy yarim o'q $\sqrt{20}$ va giperbola $N(-10; 4)$ nuqtadan o'tadi;
- 3) fokuslar orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa 4.

119. 1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$ 2) $9x^2 + y^2 = 144$ giperbolalar uchun o'qlarning uzunliklarini, fokuslarini va eksentrisitetini toping.

120. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbolada absissasi 3 ga teng nuqta olingan. Bu nuqtaning fokal radiuslarini toping.

121. $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlari bo'lgan giperbola tenglamasini yozing va uni yasang.

122. Giperbola biror uchidan fokuslarigacha bo'lgan masofalar 9 va 1 bo'lsa, uning tenglamasini yozing.

123. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolani va uning asimptotalarini yasang. Fokuslarini, eksentrisitetiNi va asimptotalari orasidagi bUrchakni toping.

124. Koordinatlar boshidan va $N(-3; 6)$ nuqtadan o'tib, OX o'qiga simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing va eni yasang.

125. Koordinatlar boshidan va $N(6; 3)$ nuqtadan o'tib, OY o'qiga simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing va uni yasang.

126. 1) $y^2 = 6x$ 2) $y^2 = -6x$ 3) $x^2 = -4y$ 4) $x^2 = 4y$ parabolalar uchun fokuslarini va direktrisalarining tenglamalarini toping.

127. $y^2 = 16x$ parabolada fokal radiusi 5 ga teng bo'lgan nuqtani toping.

128. Agar parabolaning $F(2; -1)$ fokusi va $x - y - 1 = 0$ direktrisasi berilgan bo'lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

129. OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola, $x + y = 0$ to'g'ri chiziq va $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylana kesishgan nuqtalardan o'tadi. Parabola tenglamasini yozing. Aylanani, to'g'ri chiziqni va parabolani yasang.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

130. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ giperbolaning uchlarini, fokuslarini toping

131. Giperbolaning asimptotalari $y = \pm \frac{3}{4}x$ to'g'ri chiziqlardan iborat, fokuslaridan biri $(-10; 0)$ nuqtada joylashgan, Giperbola tenglamasini tuzing va uning eksentrisitetini toping.

132. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaning 1) $x + 6y = 0$ 2) $x - 3y = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini toping.

133. Uchi koordinatalar boshida va fokusining koordinatalari 1) $(0; 4)$, 2) $(6; 0)$ bo'lgan parabola tenglamasi tuzilsin.

134. $y^2 = 36x$ parabolada direktrissadan 13 ga teng masofada $M(x, y)$ nuqta olingan. Bu nuqtadan parabola uchigacha bo'lgan masofani toping. To'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtasini toping.

135. Quyidagi giperbolalarning o'qlarini, fokuslarini va eksentrisitetini toping.

$$1) 4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$$

$$2) 9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$$

$$3) 16x^2 - 9y^2 + 100 = 0$$

$$4) 9x^2 - 7y^2 + 252 = 0$$

136. $7x^2 - 5y^2 = 35$ giperbola fokuslaridan o'tuvchi va ox o'q bilan 60° li burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing.

137. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = \pm \frac{4}{3}x$ ko'rinishda fokuslaridan biri esa $(0; 5\sqrt{2})$ giperbola tenglamasini tuzing.

138. Uchi koordinatalar boshida va simmetriya o'qi Ox bo'lgan parabola $M\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ nuqtadan o'tadi. Parabola tenglamasini tuzing va fokusini aniqlang.

139. Parabolaning $A(6; -3)$ uchi va uning direktrisasining tenglamasi $3x - 5y + 1 = 0$ berilgan. Bu parabolaning F fokusi topilsin.

140. $y^2 = 24x$ parabolaning $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ellips bilan kesishish nuqtasini toping.

III BOB. Fazoda analitik geometriya

1-§. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi. Fazoda vektorlar va ularning berilish usullari. Vektorlarni qo'shish va ayirish. Vektorlarni songa ko'paytirish. Vektorning o'qdagi proeksiyasi va uning koordinata o'qlari bo'yicha yoyilishi. Skalyar ko'paytma. Ikki vektor orasidagi burchak.

1. Fazoda Dekart koordinatlar sistemasi va asosiy masalalar. Tekislikdagi Dekart koordinatlariga o'xshash fazodagi koordinatlar ham aniqlanadi, o'zaro perpendikulyar OX, OY, OZ son o'qlari, umumiy 0 nuqtadan o'tsin. Fazoda **A nuqtaga uchta haqiqiy son** (x, y, z) va aksincha uchta haqiqiy songa bitta nuqta mos keladi. Bu moslik ham bir qiymatlidir. Bu sonlarga nuqtaning fazodagi koordinatlari deyiladi. x abtsissasi, y ordinatasi, z **aplikatasi** deb ataladi. Koordinat o'qlaridan o'tuvchi tekisliklarga **koordinat tekisliklari** deyiladi va ular fazoni 8 ta bo'laklarga - **oktantlarga** ajratadi. $A(x, y, z)$ nuqtaning koordinatlari OA radius vektorning ham koordinatlari bo'ladi.

Fazodagi analitik geometriyada ham quyidagi sodda masalalar qaraladi:

1) fazodagi berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ formula bilan aniqlanadi;}$$

2) AB kesmani $\lambda = AC : CB$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y, z)$ nuqtaning koordinatlari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \text{ formulalar yordamida topiladi.}$$

Vektor tushunchasi. 1-ta'rif. Aniq yo'nalishga ega bo'lgan chekli kesmaga vektor deyiladi.

A nuqtani vektorning boshi, V nuqtani esa vektorning oxiri yoki uchi deyiladi. Odatda vektor $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Kesmaning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektorning modulini ya'ni son qiymatini ifodalaydi va $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda yoziladi. Vektor degan so'z asli lotincha bo'lib, ko'chiruvchi, siljituvchi yoki tortuvchi degan ma'noni bildiradi.

2-ta'rif. Agar vektorlar bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi.

4-ta'rif. Har qanday $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning

1) modullari teng bo'lsa;

2) kollinear bo'lsa;

3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa, u xolda $\vec{a} = \vec{b}$ deyiladi.

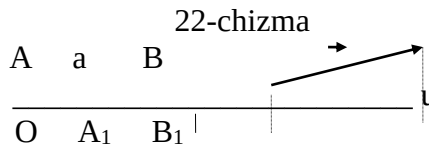
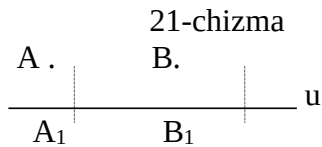
5-ta'rif. Uzunliklari teng bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi.

Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorlarni qo'shish, ayirish amallari o'rta maktab dasturidan ma'lum bo'lgan uchburchak va parallelogramm qoidalariga asosan amalga oshiriladi.

Vektorni songa ko'paytirish. $\vec{a}$ vektorni biror α haqiqiy songa ko'paytirganda shu $\vec{a}$ ga kollinear bo'lgan $\vec{b}$ vektor xosil bo'lib, uning uzunligi $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$ ga teng bo'lib, yo'nalishi esa $\alpha > 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha < 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ yo'nalishiga qarshi bo'ladi. Vektorlarni songa ko'paytirish qoidasidan ko'rinadiki $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ bo'lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear vektorlar va aksincha. Demak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinear vektorlar bo'lishi uchun $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va kifoya.

Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi. Proyeksiya so'zi lotincha «projectiv» so'zidan olingan bo'lib, «tasvir» yoki «soya» degan ma'noni bildiradi. Biror A nuqtaning u o'qdagi proyeksiyasi deb,

shu nuqtadan u o'qqa tushirilgan perpendikulyarning A_1 asosiga aytiladi va qo'yidagicha yoziladi



$\text{Pr}_u A = A_1$, $\text{pr}_u V = V_1$. $\overrightarrow{AB}$ vektorning o'qdagi geometrik proyeksiyasi deb, vektor boshining proyeksiyasi bo'lgan A_1 dan uchining proyeksiyasi bo'lgan B_1 nuqta tomon yo'nalgan $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorga aytiladi. $\text{pr}_u \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Har qanday vektorning biror o'qdagi geometrik proyeksiyasi vektordir, lekin uning algebraik miqdori biror aniq sonidir. Shuning uchun vektorning proyeksiyasi deb shu son qabul qilinadi. Demak, $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi deyiladi. Agar A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda x_1, x_2 desak $\text{pr}_u \overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

Teorema. $\vec{a}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi shu vektor uzunligini, shu vektor bilan u o'q orasidagi φ burchak kosinusi ko'paytmasiga teng bo'ladi: $\text{pr}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$

Vektor koordinatalari deganda vektorning uchi bilan boshining bir xil koordinatalari ayirmalariga shu vektorning koordinatalari deyiladi va qo'yidagicha yoziladi $\vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

Vektor koordinatalar kvadratlarining yig'indisidan olingan kvadrat ildizga vektor uzunligi deyiladi.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vektorni bazislar bo'yicha yoyish. 1-ta'rif. Tekislikdagi bazis deb ikkita kollinear bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarga aytiladi.

1-teorema. Tekislikdagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

2-ta'rif. Fazodagi bazis deb, undagi xar qanday uchta komplanar bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarga aytiladi.

2-teorema. Fazodagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$ (2) ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari. $\vec{a} = \{x, y, z\}$ vektor Ox, Oy, Oz koordinata o'qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar tashkil qilsin.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bilan xosil qilgan burchaklar kosinuslariga ya'ni $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ larga $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

$$x = a_x = \text{pr}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, y = a_y = \text{pr}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = a_z = \text{pr}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

1-misol. $A(1,2,3)$ $B(2,4,5)$ bo'lsa, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. $\overrightarrow{AB} = \{1; 2; 2\}$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $\cos \alpha = 1/3$; $\cos \beta = 2/3$; $\cos \gamma = 2/3$.

Skalyar ko'paytma. 1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, shunday songa aytiladiki, bu son shu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng bo'ladi va odatda $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ko'rinishda yoziladi. Demak, ta'rifga ko'ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

2-misol. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \varphi=60^\circ$ bo'lsa $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Skalyar ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ o'rin almashtirish xossasi.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ taqsimot xossasi.
3. $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$ guruxlash xossasi.
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0 = |\vec{a}| |\vec{b}|$ chunki $\cos 0 = 1$. Agar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ chunki $\cos 180^\circ = -1$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
6. $\vec{a}$ perpendikulyar $\vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'ladi.

Eslatma. 5 va 6 xossalardan foydalanib $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko'paytmalarini ko'rsak

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi ravshan.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Skalyar ko'paytmaning koordinatalari orqali ifodasi.

Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ni xisoblaylik. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = (\text{eslatmaga ko'ra}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Demak koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'lar ekan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi esa qo'yidagicha xisoblanadi:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}.$$

Ikki vektor orasidagi burchak va parallelizm, perpendikulyarlik shartlari.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni φ desak bu vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (1) \text{ ikki vektor orasidagi burchak kosinusini hisoblash formulasi}$$

kelib chiqadi. Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa,

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (2)$$

Agar $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lib $\cos \varphi = 0$ bo'ladi va (2) dan $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ (3)

(3) ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, u xolda bu vektorlarning kollinearlik shartidan ya'ni $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ dan $x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} = \lambda (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \Rightarrow x_1 = \lambda x_2$;

$$y_1 = \lambda y_2; z_1 = \lambda z_2. \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (5) \text{ ikki vektorning parallelizm sharti.}$$

Darsda yechish uchun misollar.

3. $\vec{a} = \{6; 3; -2\}$ vektorning moduli hisoblansin.
4. Agar $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$ vektorning uchi $(1, -1, 2)$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, uning boshi aniqlansin.
5. $\vec{a} = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari hisoblansin.
6. Vektor Ox va Oz o'qlari bilan mos ravishda $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ burchak tashkil etadi. Vektor Oy o'q bilan qanday burchak tashkil etadi?
7. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ va $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ bo'lsa $|\vec{a} - \vec{b}|$ hisoblansin.
8. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = 60^\circ$ burchak tashkil etadi, shu bilan birga $|\vec{a}| = 5$ va $|\vec{b}| = 8$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ va $|\vec{a} - \vec{b}|$ lar aniqlansin.
9. α va β koeffisientlarning qanday qiymatlarida $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?
10. Quyidagi to'rtta nuqtani trapesiyaning uchlari ekanligi tekshirilsin:
 $A(3; -1; 2)$, $B(1; -2; -3)$, $C(1; -1; -3)$, $D(3; -5; 3)$
11. $\vec{a} = \{3; -5; 8\}$ va $\vec{b} = \{-1; 1; -4\}$ vektor yig'indisi va ayirmasining modullari aniqlansin.
12. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar, $\vec{c}$ vektor ularning har biri bilan $\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil etadi, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ ekani ma'lum bo'lsa, quyidagilar hisoblansin:
$$1) (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c}) \quad 2) (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \quad 3) (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$$
13. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar juft-jufti bilan 60° burchak tashkil etadi. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$ tengliklarni bilgan holda $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning moduli aniqlansin.
14. To'rtburchakning uchlari $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ va $D(-5; -5; 3)$ nuqtalarda yotadi. Uning AC va BD diagonallari o'zaro perpendikulyar ekanligi isbotlansin.
15. $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ va $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$ vektorlar tashkil etgan burchakning kosinusi hisoblansin.
16. Uchburchakning uchlari $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ va $C(3; -2; 1)$ nuqtalarga yotadi. Uning A uchidagi tashqi burchagi aniqlansin.
17. Tekislikda uchlari $O(0; 0)$, $A(2a; 0)$ va $B(a; -a)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchak topilsin.
18. Agar $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$ va $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ bo'lsa $3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ va $\vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlar α ning qanday qiymatlarida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
19. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalari berilgan: $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

20. $\vec{a}$ vektorning ikkita $x = 4$, $y = -12$ koordinatasi berilgan. Agar $|\vec{a}| = 13$ bo'lsa, uning uchinchi z koordinatasi topilsin.
21. $\vec{a} = \{12; -15; -16\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari hisoblansin.
22. $\vec{a}$ vektor Ox va Oy o'qlari bilan mos ravishda $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$ burchak tashkil etadi. $|\vec{a}| = 2$ deb, uning koordinatalari hisoblansin.
23. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ va $|\vec{a} - \vec{b}| = 23$ bo'lsa $|\vec{a} + \vec{b}|$ aniqlansin.

24. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar va $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. $|\vec{a} + \vec{b}|$ va $|\vec{a} - \vec{b}|$ lar aniqlansin.

25. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, qiymatlarni bilgan holda quyidagilar hisoblansin:

1) $\vec{a}\vec{b}$ 2) $\vec{a}^2$ 3) $\vec{b}^2$ 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$ 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

26. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil etadi; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ ekanligini bilgan holda,

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi α burchak hisoblansin.

27. $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ va $C(0; 1; -5)$ nuqtalar berilgan.

Quyidagilar hisoblansin: 1) $(2\vec{AB} - \vec{NB})(2\vec{CB} - \vec{BA})$; 2) $\sqrt{AB}^2$; 3) $\sqrt{AC}^2$

28. α ning qanday qiymatida $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.

29. Uchburchakning uchlari $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ va $C(3; -2; 1)$ nuqtalarga yotadi. Uning B uchidagi ichki burchagi aniqlansin.

30. Uchlari $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$ bo'lgan uchburchakning ichki burchaklarini hisoblash yordamida uchburchakning teng yonli ekanini isbotlang.

31. $A(1; 2; 3)$ va $B(3; -4; 6)$ nuqtalar berilgan. $\vec{AB}$ vektor va uning koordinata o'qlarida proeksiyalari yasalsin hamda uning uzunligi va yo'nalishi aniqlansin. vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari yasalsin.

32. $a = 2i + j$ va $b = -2j + k$ vektorlarda yasalgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchak topilsin.

33. Uchlari $A(-1; 5; 1)$, $B(1; 1; -2)$ va $C(-3; 3; 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. AC tomonni davom ettirishdan hosil bo'lgan tashqi burchakni aniqlang.

2-§. Vektorlarning vektor ko'paytmasdi. Vektor ko'paytmaning xossalari.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi. Aralash ko'paytmaning xossalari.

1) **Vektor ko'paytma.** Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, qo'yidagicha aniqlanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1. $\vec{c}$ vektorning moduli son jixatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuziga teng $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

3. $\vec{c}$ vektorning musbat yo'nalishi shundayki, agar $\vec{c}$ vektorning uchidan (oxiridan) qaralsa, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa masofa soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi. Vektor ko'paytma $[\vec{a} \vec{b}]$ yoki $\vec{a} \times \vec{b}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

$$S_p = |\vec{c}| = |[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\varphi,$$

$$S_{uch} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \vec{b}]| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\varphi$$

2) Vektor ko'paytmaning xossalari.

1. $[\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}]$.

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

$$3. \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$4. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Endi 1,2 xossalardan foydalanib $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning vektor ko'paytmalarini chiqaraylik.

2-xossaga. ko'ra $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 0$ ekanligi ravshan. $|\vec{c}| = |[\vec{i} \ \vec{j}]| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ikkinchi tomondan $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{c}$ bu vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib z o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan va $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ gacha eng qisqa masofa soat strelkasiga qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak bu vektor $\vec{c} = \vec{k}$ ekan, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ xuddi shuningdek qolganlarini yozsak.

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{j} = 0,$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

3) Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi.

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

$$\vec{i} + (-x_1 z_2 + z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

$$34\text{-misol. } \vec{a} = \{2; 5; 7\}, \vec{b} = \{1; 2; 4\}, \quad |[\vec{a} \ \vec{b}]| = ? \quad \vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad |[\vec{a} \ \vec{b}]| = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}$$

4) Uchta vektorning aralash ko'paytmasi. $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ va $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$

vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarning aralash ko'paytmasi deb, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytma bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va odatda $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ko'rinishda yoziladi.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad \vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi qirralari berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning modullaridan tashkil topgan parallelopedning hajmini ifodalaydi.

Fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanar vektorlar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nol bo'lishi zarur va kifoya.

35-misol. Uchlari $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning hajmini toping.

$$V = (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 84 \text{ kub birlik.}$$

Darsda yechish uchun misollar.

36. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \pi/6$ burchakni hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ bo'lsa $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ni hisoblang.
37. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyardir. Agar $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ bo'lsa, quyidagilar hisoblansin:
 1) $[(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})]$; 2) $[(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})]$
38. $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ va $C(5; 2; 6)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchaqlarning yuzasini hisoblang.
39. $\vec{a} = \{2; -1; 1\}$ va $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$ vektorlar orasidagi burchak sinusi hisoblang.
40. Quyidagi uchta vektor berilgan: $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ hisoblansin.
41. Uchlari $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ va $D(4; 1; 3)$ nuqtalardan iborat tetraedrning hajmi hisoblansin.
42. $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektorlarda parallelogramm yasalsin, hamda uning yuzi va balandligi aniqlansin.
43. Uchlari $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $\hat{A}(2; 5; 0)$ va $\tilde{N}(1; 2; 4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida yasalsin hamda uning hajmi, ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligi hisoblansin.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

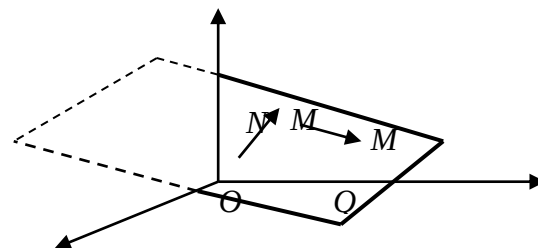
44. Quyidagi kattaliklar berilgan: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ va $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ni toping.
45. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ekanligini bilgan holda quyidagilarni hisoblang: 1) $[\vec{a} \cdot \vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]$; 3) $[(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})]$
46. Uchburchakning uchta uchi $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ va $C(1; 3; -1)$ lar berilgan. Uchburchakning B uchidan AC tomoniga balandlik tushirilgan. Ushbu balandlikni uzunligi topilsin.
47. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ vektorlarda parallelepiped yasalsin hamda uning hajmi hisoblansin. Berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar qanday bog'lamni tashkil etadi?
48. $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ va $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ vektorlarda yasalgan paralelogrammning yuzi hisoblansin.
49. Uchlari $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ va $D(2; 3; 8)$ nuqtalarda bo'lgan piramida yasalsin hamda uning hajmi va ABC yog'iga tushirilgan balandligi hisoblansin.

3-§. Tekislikning turli tenglamalari. Ikki tekislik orasidagi burchak. Ikki tekislikning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa. Tekislikning normal tenglamasi.

1. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.

OXYZ to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan o'tuvchi, $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar Q tekislikning fazodagi

23-chizma



vaziyati aniq bo'ladi. Uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekislikda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olamiz. (23-chizma).

$\vec{M_0M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lganda va faqat shundagina M nuqta Q tekislikda yotadi. Ma'lumki $\vec{M_0M}$ vektorning koordinatlari $(x-x_0), (y-y_0), (z-z_0)$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (1) bo'ladi. Bu **Q tekislik tenglamasi** bo'ladi.

Ta'rif. Q tekislikka perpendikulyar $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektorga bu tekislikning **normal** vektori deyiladi.

50-misol. $M_0(4, -3, 5)$ nuqtadan o'tib, $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, $2(x-4) + (-3)(y+3) + 4(z-5) = 0$, $2x - 8 - 3y - 9 + 4z - 20 = 0$ yoki $2x - 3y + 4z - 37 = 0$ bo'lib, bu izlanayotgan tekislik tenglamasidir.

2. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. (1) tenglamadan $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$ yoki $Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ bilan belgilashdan keyin $Ax + By + Cz + D = 0$ (2) tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamaga fazoda tekislikning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz:

- 1) $D = 0$ bo'lsa, $Ax + By + Cz = 0$ bo'lib, tekislik koordinatlar boshidan o'tadi;
- 2) $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By + D = 0$ bo'lib, tekislik OZ o'qiga parallel; xuddi shunday $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda OY va OX o'qlariga paralleldir;
- 3) 2-holda $D = 0$ bo'lsa, tekislik tenglamalari $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ bo'lib, ular mos ravishda OZ , OY , OX koordinat o'qlaridan o'tadi;
- 4) $B = C = 0$ bo'lsa, $Ax + D = 0$ tekislik YOZ koordinat tekisligiga parallel, xuddi shunday $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda XOZ , XOY koordinat tekisliklariga parallel bo'ladi;
- 5) $B = C = D = 0$ bo'lsa, $Ax = 0$ bo'lib, YOZ koordinat tekisligi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $x = 0$, YOZ koordinat tekisligining tenglamasi bo'ladi. Xuddi shunday $y = 0$ va $z = 0$, mos ravishda XOZ va XOY koordinat tekisliklarining tenglamasini ifodalaydi.

3. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi. (2) tenglamada A, B, C, D koeffitsientlar hammasi 0 dan farqli bo'lsa, tekislik koordinat o'qlaridan OL , ON va OP kesmalar ajratadi (24-chizma).

(2) tenglamani quyidagicha o'zgartiramiz: $Ax + By + Cz = D$, $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$. Oxirgi

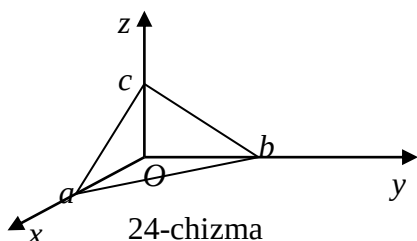
tenglamada $-D/A = a$, $-D/B = b$, $-D/C = c$ belgilash kuitsak, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ tenglama kelib chiqadi.

Bu tenglamaga fazoda **tekislikning kesmalarga nisbatan** tenglamasi deyiladi.

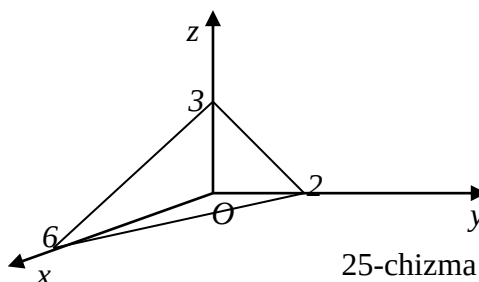
51-misol. Tekislikning $x + 3y + 2z - 6 = 0$ umumiy tenglamasi berilgan, bu tekislikni yasang.

Yechish. Tenglamani tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasiga keltiramiz:

$$x + 3y + 2z = 6, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$



24-chizma



25-chizma

Oxirgi tenglamadan ma'lumki, tekislik koordinat o'qlaridan mos ravishda 6, 2, 3 kesmalar ajratadi. Bu kesmalarining oxiridan tekislikni o'tkazamiz (25-chizma).

4. Berilgan uchta $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ va $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$
 ko'rinishda bo'lib, uchta vektorning komplanarligidan kelib

chiqadi. $M(x, y, z)$ tekislikdagi ixtiyoriy nuqta. $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ vektorlar komplanardir.

5. Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha masofa. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar orasidagi burchak ularning normal $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlari orasidagi

burchakka teng bo'lib, $\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ (4) formula o'rinli bo'ladi. (4)

ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lsa, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo'lib, bu ikki tekislikning parallellik

sharti deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar perpendikulyar bo'lsa, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ bo'lib, bu ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti bo'ladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan

masofa $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (5) formula bilan topiladi.

Tekislikning normal tenglamasi $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ (6) ko'rinishda bo'ladi.

52-misol. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ va $2x + 3y + z + 8 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $n_1(1, 2, -3)$ va $n_2(2, 3, 1)$ mos ravishda berilgan tekisliklarning normal vektorlari bo'lganligi

uchun (4) formulaga asosan, $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}$, $\varphi \approx 69^\circ 05'$ bo'ladi.

53-misol. $2x - y - 2z + 4 = 0$ va $2x - y - 2z - 8 = 0$ tekisliklarning parallelligini ko'rsating va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Berilgan tekisliklarning normal vektorlari $n_1(2, -1, -2)$ va $n_2(2, -1, -2)$ parallellik shartini qanoatlantiradi, demak berilgan tekisliklar ham paralleldir. Endi birinchi tekislikda biror nuqtani aniqlab undan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz. $x = z = 0$ bo'lsa, birinchi tekislik

tenglamasidan $y = 4$ bo'lib, $M_0(0; 4; 0)$ nuqta birinchi tekislikdagi nuqta bo'ladi. (5) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 8|}{\pm \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4. \text{ Demak, parallel tekisliklar orasidagi masofa } d = 4 \text{ bo'ladi.}$$

Darsda yechish uchun misollar.

54. Uchlari $A(5, 3, -10)$, $B(0, 1, 4)$ va $C(-1, 3, 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning AE medianasining uzunligini toping.
55. $M_0(2; 5; 4)$ nuqtadan o'tib, ordinat o'qidan $b = -6$, aplikata o'qidan $c = 3$ kesma ajratib o'tgan tekislik tenglamasini yozing.
56. Quyidagi tekisliklarni yasang:
1) $2x - 3y + z - 6 = 0$ 2) $x + 2y - 4 = 0$ 3) $y - 3 = 0$ 4) $2x + 3y = 0$ 5) $x - 2y - z = 0$ 6) $3z - 7 = 0$.
57. $A(3; 5; 6)$ va $B(5; -7; 4)$ nuqtalar berilgan. A nuqtadan o'tib, $\overline{AB}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.
58. OY o'qidan va $M(2; 4; 1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
59. 1) $2x - 3y + 4z - 24 = 0$ 2) $4x + y - 6z - 2 = 0$ tekisliklarning koordinat o'qlaridan ajratgan kesmalarining kattaliklarini toping.
60. $M_0(2; 4; -3)$ nuqtadan o'tib, $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini yozing.
61. $M_1(0; 1; 3)$ va $M_2(2; 4; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qqa parallel tekislik tenglamasini yozing va tekislikni yasang.
62. $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ va $2x - 11y + 10z + 45 = 0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.
63. OX o'qidan va $M_1(0; -2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing va tekislikni yasang.
64. $(2; 2; -2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y - 3z = 0$ tekislikka parallel tekislikni toping.
65. $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ va $M_3(-1; 1; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
66. $5x - 3y + 4z - 4 = 0$, $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
67. Koordinata boshidan va $R(4, -2, 1)$, $Q(2, 4, -3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

68. $M(2; -3; 2)$ nuqtadan o'tib, $N(5; 4; 3)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.
69. OX o'qiga parallel va $P(4; 0; -2)$, $Q(5; 1; 7)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
70. YOZ koordinat tekisligiga parallel va $M(2; -5; 4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
71. OY o'qiga parallel va $M_1(3; 2; 1)$, $M_2(4; -3; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
72. $M(2; -6; 5)$ nuqtadan o'tib, absissalar o'qidan $a = 4$, ordinatalar o'qidan $b = 3$ kesmalar ajratib o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
73. OZ o'qidan va $M(2; 3; 4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
74. $M_1(1; 3; -2)$, $M_2(4; -5; 6)$ va $M_3(-3; 1; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
75. $2x - y - 2z + 3 = 0$ va $x + y - 5 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
76. $M(1; -4; -5)$ nuqtadan $6x - 3y - 6z + 7 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.
77. 1) $x + 2y + 2z - 8 = 0$ va $x + y - 6 = 0$, 2) $x + 2z - 6 = 0$ va $x + 2y - 4 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
78. $M_1(-1; -2; 0)$ va $M_2(1; 1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi hamda $x + 2y + 2z - 4 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.
79. 1) $x + y - z - 2 = 0$ 2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$ tekislik tenglamalarini normal ko'rinishga keltiring.
80. $(5; 1; -1)$ nuqtadan $x - 2y - 2z + 4$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.
81. $5x + 3y - 4z + 15 = 0$, $15x + 9y - 12z - 5 = 0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

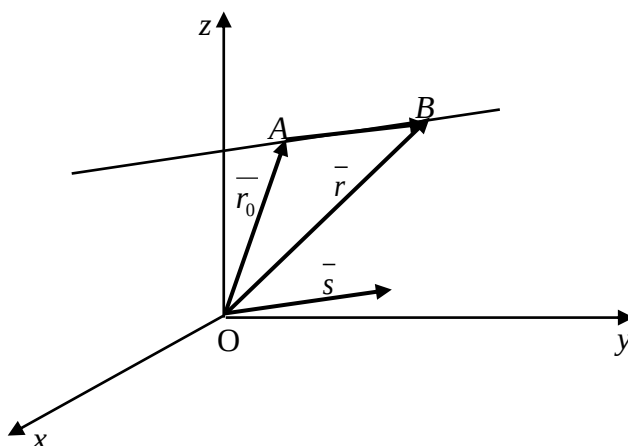
4-§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

1. Fazoda berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq vektorli tenglamasi. Fazoda to'g'ri chiziqning holati u o'tadigan biror $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va to'g'ri chiziq parallel bo'lgan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektorning berilishi bilan to'la aniqlanadi. Uning tenglamasini yozish uchun unda ixtiyoriy $B(x, y, z)$ nuqta olamiz.

26-chizma

Ma'lumki, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ bo'lib, $\vec{AB}$ vektor $\vec{s}$ vektorga kollinear, ya'ni $\vec{AB} = t\vec{s}$, t – skalyar parametr. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ desak, $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$

(1) bo'ladi. (1) tenglikka **fazoda to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi** deyiladi.



2. Fazoda to'g'ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamalari.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ bo'lganligi uchun (1) tenglamadan vektorlarning tengligiga asosan,
$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases} \quad (2) \text{ tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bunga to'g'ri}$$

chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi, bunda t – parametr. (2) tenglamadan t parametrni topsak, $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ (3) tenglama kelib chiqadi. (3) tenglamaga to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

82-misol. $M_0(2; -3; 5)$ nuqtadan o'tib koordinat o'qlari bilan $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

Yechish. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$s = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$ vektorni olamiz. (3) tenglamaga asosan,

$\frac{x-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Oxirgi tengliklarning har birini t bilan belgilab, $\frac{x-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = t$, $\frac{y+3}{1/2} = t$, $\frac{z-5}{1/2} = t$ yoki

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2$, $y = \frac{1}{2}t - 3$, $z = \frac{1}{2}t + 5$ to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

3. Fazoda umumiy va proektsiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. Fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesimidan iborat deb ham qarash mumkin. Shuning uchun to'g'ri chiziqni analitik holda quyidagi sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

orqali ham ifodalash mumkin. (4) tenglamada A_1, B_1, C_1 koeffitsientlar mos ravishda A_2, B_2, C_2 koeffitsientlarga proporsional bo'lmasa u to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bunga to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi. (4) sistemadan birinchi y noma'lumni, keyin x noma'lumni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \quad (5) \text{ tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bundagi birinchi tenglama } OY \text{ o'qqa parallel}$$

bo'lgan tekislik, ikkinchisi OX o'qqa parallel bo'lgan tekislik bo'lib, berilgan to'g'ri chiziqni XOZ va YOZ koordinat tekisliklariga proyeksiyalaydi. (5) sistemaga to'g'ri chiziqning **proektsiyalarga** nisbatan tenglamasi deyiladi.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq** tenglamasi tekislikda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidagidek ushbu ko'rinishda

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6) \text{ bo'ladi.}$$

83-misol. $\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan va kanonik

tenglamalarini yozing.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasidan oldin y ni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (-2) ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shib $-x + 0 + 6z - 4 = 0$, yoki $x = 6z - 4$ tenglamani hosil qilamiz. Endi x noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (3) ga ikkinchi tenglamani (-2) ga ko'paytirib hadma-had qo'shib $-y - 7z + 5 = 0$ yoki $y = -7z + 5$ tenglamani

keltirib chiqaramiz. Shunday qilib, $\begin{cases} x = 6z - 4 \\ y = -7z + 5 \end{cases}$ sistema to'g'ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 6z & \text{yoki} & \quad \frac{x+4}{6} = z, \quad \frac{y-5}{-7} = z. \text{ Demak, } \frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z-0}{1}. \\ y - 5 &= -7z \end{aligned}$$

Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

84-misol. Uchburchakning uchlari $A(3, -2, 1)$, $B(6, 5, -7)$ va $C(5, -4, 3)$ berilgan. BD mediananing kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. D nuqta AC tomonni teng ikkiga bo'ladi. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulasiga asosan: $x_D = \frac{3+5}{2} = 4$, $y_D = \frac{-2-4}{2} = -3$, $z_D = \frac{1+3}{2} = 2$. Demak, $D(4, -3, 2)$ bo'ladi.

Mediana B va D nuqtalardan o'tadi. (6) formulaga asosan: $\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-5}{-3-5} = \frac{z+7}{2+7}$ yoki $\frac{x-6}{-2} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z+7}{9}$. Bu BD mediananing kanonik tenglamasidir.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Fazoda ikkita to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin: $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$. Bu **to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak**, ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (7) \text{ formula yordamida topiladi. Berilgan to'g'ri chiziqlar}$$

parallel bo'lsa, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ (8) bo'lib, bu fazoda **ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, yo'naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo'lib, $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$ (9) bo'ladi, bu **ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartidir**.

85-misol. $\frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1}$ va $\frac{x-8}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-4}{-1}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Oldin to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$$\vec{s}_1 = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{s}_2 = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}.$$

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng.

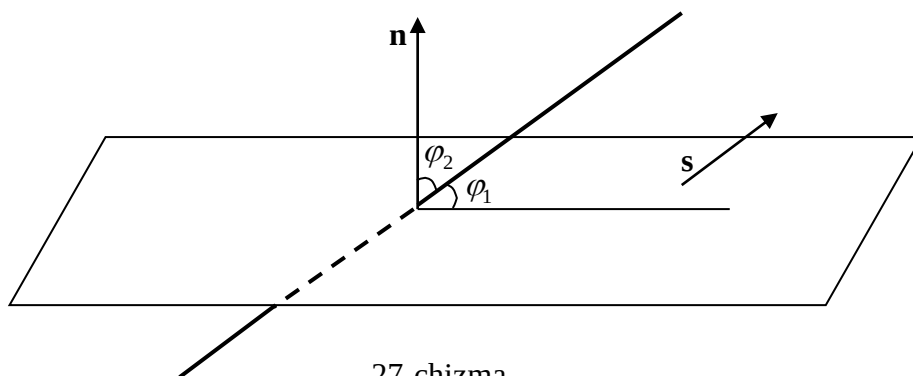
$$(7) \text{ formulaga asosan: } \cos \varphi = \frac{7 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0.3127, \quad \cos \varphi \approx 0.3127.$$

Jadvaldan $\varphi \approx 71^\circ 48'$ ekanligini topamiz.

86-misol. $M_0(2, -1, 3)$ nuqtadan o'tib, $\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori uchun berilgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektorini olish mumkin, chunki ular shartga ko'ra parallel, ya'ni $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Berilgan nuqtadan o'tib, $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan, izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi (3) ga asosan, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$ bo'ladi.

5. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziqning tekislikdagi proektsiyasi bilan to'g'ri chiziq orasidagi qo'shni burchaklardan biri olindi (27-chizma).



27-chizma.

To'g'ri chiziq $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasi bilan, tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. φ_1 burchakni topish uchun to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi φ_2 burchakni hisoblaymiz:

$$\cos \varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad \varphi_1 \text{ burchak } \varphi_2 \text{ burchakni } \pi/2 \text{ gacha to'ldiradi. Demak,}$$

$$\cos \varphi_2 = \cos(\pi/2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1. \text{ Shunday qilib, } \sin \varphi_1 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (10) \text{ bo'ladi.}$$

(10) fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasi.

To'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar perpendikulyar bo'lib, $Am + Bn + Cp = 0$ (11) tenglik o'rinli bo'ladi. (11) tenglikka **to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik sharti** deyiladi. To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar

parallel bo'ladi va $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ (12) munosabat kelib chiqadi. (12) tenglik **to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti** bo'ladi.

(11) shart bajarilmasa to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

87-misol. $A(5, 1, -4)$ va $B(6, 1, -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan $2x - 2y + z - 3 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. AB nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s} = \vec{AB}(1, 0, 1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{n}(2, -2, 1)$ bo'lganligi uchun (10) formulaga

asosan: $\sin \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \sqrt{2}/2$, $\varphi = 45^\circ$.

88-misol. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0 \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Ma'lumki to'g'ri chiziqni yasash uchun u o'tadigan ikkita nuqtani aniqlash yetarli. Buning uchun to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu nuqtalarga **to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari** deyiladi.

To'g'ri chiziqning XOY tekislikdagi **izini** topish uchun berilgan sistemada $z = 0$ deb olamiz, ya'ni

$\begin{cases} 2x + 3y - 7 \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$ Bu sistemani x, y noma'lumlarga nisbatan yechsak, $x = 2$, $y = 1$ bo'ladi. Demak,

berilgan to'g'ri chiziqning XOY koordinata tekisligidagi izi $M_1(2, 1, 0)$ nuqta bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalar sistemasida $y = 0$ deb, hosil bo'lgan sistemani yechib, $x = 2$, $z = 1$ topamiz. Demak, to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izi $M_2(2, 0, 1)$ bo'ladi. Topilgan M_1 va M_2 nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Darsda yechish uchun misollar.

89. $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

90. $(-4; 3; 0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

91. $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z - 4 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

92. $(-1; 2; -3)$ nuqtadan o'tuvchi va $x = 2$, $y - z = 1$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

93. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ va $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi tekislikning tenglamasini yozing.

94. $(3; 1; -1)$ nuqtaning $x + 2y + 3z - 30 = 0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

95. $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

96. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{0}$ to'g'ri chiziq bilan $6x + 15y - 10z = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

97. $M_0(2, 5, -4)$ nuqtadan o'tib $\vec{s}(3, 6, 7)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.
98. $M_1(3, -2, 5)$ va $M_2(6, 1, 7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.
99. Uchlari $A(1, 4, 2)$, $B(3, 5, 4)$ va $C(-1, 1, 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak AD medianasining kanonik tenglamasini yozing.
100. $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka koordinatlar boshidan o'tkazilgan perpendikulyarning kanonik tenglamasini yozing.
101. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$ va $\begin{cases} -3y + z - 5 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning parallelligini ko'rsating.
102. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1}$ to'g'ri chiziq va $4x + 2y + 2z + 5 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.
103. $M_0(-2, 3, 4)$ nuqtadan o'tib, $3x - 2y + 5z - 6 = 0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
104. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2 = 0 \\ x + 2y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $2x - 7y + 12z - 15 = 0$ tekislikning parallelligini ko'rsating.

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

105. $M(-2;1;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{P}(1, -2, 3)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
106. $N(2;-1;3)$ nuqtadan $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani toping.
107. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$ to'g'ri chiziqdan va $(3;4;0)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasini yozing.
108. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$ to'g'ri chiziqning $3x - 2y + z = 3$ tekislik bilan kesishgan nuqtasini toping.
109. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 9 = 0 \\ 4x + 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqni yasang.
110. $(2;-3;1)$ nuqtadan Oy o'qqa tushirilgan perpendikulyar tenglamasini toping.
111. Koordinata boshidan $\frac{x+2}{7} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-4}{10}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
112. $M(1, -3, -5)$ nuqtadan o'tib, koordinat o'qlari bilan $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/3$ burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.
113. 1) $\begin{cases} 5x + y - 3z - 3 = 0 \\ 4x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning proektsiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.
114. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0 \\ 3x - 5y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing.
115. 1) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ va $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0 \\ x - 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ va $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{4}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

$$116. 1) \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-1} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x+2y-3z-1=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x+4y-z-1=0 \\ 2x+3y+z+2=0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=5+t \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning o'zaro perpendikulyarligini ko'rsating.

117. $A(3, 6, 2)$ va $B(4, 5, -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq va $2x+y-2z-5=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

5-§. Kompleks son va uning algebraik, trigonometrik, ko'rsatkichli shakllari hamda ular ustida amallar.

Kompleks son va uning algebraik, trigonometrik, ko'rsatkichli shakllari hamda ular ustida amallar. Fan va amaliyotning rivojlanishi haqiqiy sonlar to'plamining yetarli emasligini ko'rsatdi. Masalan, tashqi ko'rinishi juda sodda $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas. Demak, istalgan algebraik tenglamani yechish uchun haqiqiy sonlar to'plami yetarli bo'lmay qoladi.

Bundan tashqari elektronikada va fizikaning turli bo'limlarida murakkab tabiatli kattaliklar qaraladiki, ularni haqiqiy sonlar tushunchasi qamray olmaydi. Shu sababli sonlar tushunchasini kengaytirish ehtiyoji yuzaga keldi.

Ta'rif. x va y haqiqiy sonlar, i esa ($i = \sqrt{-1}$) qandaydir bir simvol bo'lsa, $z = x + yi$ (1) ifodaga kompleks son (algebraik shakli) deyiladi, bunda quyidagi shartlar qabul qilingan deb hisoblanadi:

- 1) $x + 0i = x$; $0 + yi = yi$ va $1 \cdot i = i$; $-1 \cdot i = -i$;
- 2) faqat $x = x_1$, $y = y_1$ bo'lgandagina, $x + yi = x_1 + y_1 i$ bo'ladi;
- 3) $(x + yi) + (x_1 + y_1 i) = (x + x_1) + (y + y_1) i$;
- 4) $(x + yi) \cdot (x_1 + y_1 i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1 y) i$.

$z = x + yi$ kompleks sonda $x = 0$, $y \neq 0$ bo'lsa, y mavhum son deyiladi. i son mavhum birlik deyiladi x va y sonlar z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va kompleks qismi deyiladi va $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ ko'rinishda belgilanadi. $y = 0$ bo'lsa, $z = x$ - haqiqiy son, agar $x = 0$ bo'lsa, $z = iy$ sof mavhum son bo'ladi. Mavhum qismlarining ishorasi bilangina farq qiluvchi $z = x + iy$ va $\bar{z} = x - iy$ kompleks sonlar qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ ikkita kompleks son berilgan bo'lsa, ular ustida algebraik amallar quyidagicha bajariladi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kompleks sonlarni darajaga ko'tarish ikki hadni darajaga ko'tarish kabi bajariladi, i sonning darajalari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ va h.k.

Umuman, $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$. (3)

118-misol. $z_1 = 2 + i$ va $z_2 = 3 - 2i$ sonlarning yig'indisi va ayirmasini toping.

Yechish. (2) formulaning birinchi va ikkinchisidan quyidagilarni topamiz:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (1 - 2)i = 5 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + i(1 + 2) = -1 + 3i.$$

119-misol. $z_1 = 2 - 3i$ va $z_2 = 1 + 2i$ kompleks sonlar ko'paytmasini toping.

Yechish. (2) formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 2i) = (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) + i(2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1) = (2 + 6) + i(4 - 3) = 8 + i;$$

Har bir $z = x + iy$ kompleks son geometrik jihatdan Oxy koordinatlar tekisligining (x, y) nuqtasi yoki $\vec{ON}$ vektori bilan tasvirlanadi. Kompleks son tasvirlanadigan Oxy tekislik kompleks tekislik deyiladi.

z kompleks soniga mos keluvchi N nuqtaning holatini r va φ qutb koordinatlari bilan ham aniqlash mumkin. Bunda koordinatlar boshidan N nuqtagacha bo'lgan masofaga, $z = |\vec{ON}|$ soni kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ bilan belgilanadi. $\vec{ON}$ vektorning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan φ burchak kompleks sonning argumenti deyiladi va $y = \arg z$ kabi belgilanadi.

$z = x + iy$ kompleks son uchun quyidagi formula o'rinalidir:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (4) \quad \text{bunda } \varphi = \arg z \text{ ning qiymati}$$

$0 \leq \arg z < 2\pi$ shartni qanoatlantiradi.

120-misol. $z = -\sqrt{3} + i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ bo'lganligi uchun $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ tenglamadan φ argumentni

topamiz: $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Shunday qilib, $r = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

Kompleks sonning $z = x + iy$ ko'rinishdagi ifodasi kompleks sonning algebraik shakli deyiladi.

Kompleks sonning $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ko'rinishdagi ifodasi uning trigonometrik shakli deyiladi.

Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar quyidagicha bajariladi:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (6)$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (7)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (8)$$

bunda $k=0,1,2,\dots,(n-1)$. (7) va (8) formulalarga Muavr formulalari deyiladi.

Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli $z = re^{i\varphi}$ ko'rinishda bo'lib, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (9) formulaga **Eyler formulasi** deyiladi.

121-misol. $z = 1 - i$ sonni sakkizinchi darajaga ko'taring.

Yechish. Berilgan sonni trigonometrik formada tasvirlaymiz:

$$z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad \text{Muavr formulasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:}$$

$$\begin{aligned} z^8 &= (1 - i)^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \left[\left(\cos \left(8 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(8 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) \right) \right] = \\ &= 16(\cos 14\pi + i \sin 14\pi) = 16. \end{aligned}$$

Darsda yechish uchun misollar.

122. Agar $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 4i$ bo'lsa, bu kompleks sonlarning yig'indisini va ayirmasini toping.

123. Agar $z_1 = -12 + i$, $z_2 = 3 - i$ bo'lsa kompleks sonlarning ko'paytmasini toping.

124. a) $(2+3i) \cdot (3-2i)$ b) $(3-2i)^2$ c) $(a+bi) \cdot (a-bi)$ d) $(1+i)^3$ e) $\frac{1+i}{1-i}$ f) $\frac{2i}{1+i}$ amallar

bajarilsin.

125. a) $x^2 + 25 = 0$, b) $x^2 - 2x + 5 = 0$ tenglamalar yechilsin va ildizlar tenglamaga qo'yilib tekshirilsin.

126. Quyidagi kompleks sonlarni modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko'rinishda yozilsin.

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = 1 + i\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{3} - i$ d) $z = 1 + 2i$ e) $z = -2i$ f) $z = 3$ h) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

127. Quyidagi sonlarni $re^{\varphi i}$ ko'rinishda yozilsin ($-\pi < \varphi \leq \pi$ bo'lganda).

a) $z = 3$ b) $z = -2$ c) $z = 2 - 2i$ d) $z = 1 + i\sqrt{3}$

128. Quyidagilar Muavr formulasi bilan hisoblansin.

1) $(1+i)^{10}$ 2) $(1-i\sqrt{3})^6$ 3) $(-1+i)^5$ 4) $(\sqrt{3}+i)^3$ 5) $\sqrt[3]{-1}$ 6) $\sqrt[3]{i}$ 7) $\sqrt[6]{-1}$ 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar.

129. Quyidagilarni hisoblang.

a) $(1+3i) + (2-2i)$ b) $(3+4i) - (2+i)$ c) $(2-i)^2 + (1+\sqrt{3}i)^2$ d) $(3-4i)(1-\sqrt{3}i)$ e) $\frac{1+2i}{2-i}$
f) $\frac{2i}{1-\sqrt{3}i}$ h) $\frac{(3-4i)(3+2i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(3-2i)}{2-i}$ j) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{2}i}$

130. a) $x^3 + 8 = 0$ b) $x^4 + 4 = 0$ tenglamalar yechilsin va ildizlar tenglamaga qo'yilib tekshirilsin.

131. Quyidagi kompleks sonlarni modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko'rinishda yozilsin.

a) $z = -\sqrt{3} - i$ b) $z = 1 - i\sqrt{3}$ c) $1 - i$ d) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ f) $z = -2$ h) $-1 - i$

132. Quyidagi sonlarni $re^{\varphi i}$ ko'rinishda yozilsin ($-\pi < \varphi \leq \pi$ bo'lganda).

a) $z = 3i$ b) $z = -2i$ c) $z = -\sqrt{3} - i$ d) $z = 1 + 2i$ e) $-1 + i$

133. Quyidagilar Muavr formulasi bilan hisoblansin:

1) $\sqrt[3]{i}$ 10) $\sqrt[3]{1+i}$ 2) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$ 3) $(-\sqrt{3}+i)^6$ 4) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$ 5) $(1+i)^4$ 6) $(-2+\sqrt{2}i)^5$.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Жўраев Т.Ж. ва бошқалар. Олий математика асослари.1,2-қисм. Тошкент, 1995.
2. Соатов Ё.У. Олий математика, Тошкент, 1993.
3. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. 1988.
4. Тожиев Ш.И. Олий математикадан масалалар ечиш. Т. «Ўзбекистон» 2002
5. Н. Latipov va boshqalar. Oliy matemetika. Т. «Aloqachi» -2005.
6. R.E.Danko. Oliy matematika misol va masalalarda. «O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» 2007
7. A.Y. Normanov. Analitik geometriya. Т. 2008
8. G. Hudayberganov. Matematik analizdan ma'ruzalar. Т. "Voriz" nashriyoti – 2010
9. Sh.O. Alimov, R.R. Ashurov Matematik tahlil. O'qov qo'llanma. I-qism. Т. "Kamalak-pres" 2012.616 b.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. A. Sa'dullaev, H. Mansurov, G. Xudoyberganov va boshq. "Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami" Toshkent, O'zbekiston nashriyoti 1993.
2. N.SH. Kremer. "Visshiy matematika dlya ekonomistov" Moskva 2004.

Интернет ресурслар

1. <http://www.mcce.ru>, <http://lib.mexmat.ru>
2. [http:// www.a-geometry.narod.ru](http://www.a-geometry.narod.ru)
3. <http://allmath.ru/highermath/mathanalysis/>
4. <http://www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/>

