

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**НАМАНГАН МУХАНДИСЛИК – ТЕХНОЛОГИЯ
ИНСТИТУТИ**

“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” кафедраси

Олий математика фанидан

РЕФЕРАТ

Бажарди:

**4у-14 гурухи талабаси
Ўринбаева Ш**

Қабул қилди:

Жалилов Б.

Тригонометрик функцияларни интеграллаш

Режа:

1. Ҳар хил аргументли синус ва косинуслар кўпайтмалари шаклидаги функцияларни интеграллаш.
2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.
3. Аниқмас интеграл ҳақида якуний мулоҳазалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Тригонометрик функцияларни интеграллаш, тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғиндига келтириш формулалари, синус ва косинус функциялар кўпайтмаси даражаларидан бирортаси тоқ, иккаласи ҳам жуфт ёки тоқ, аниқмас интеграл ҳақида якуний мулоҳазалар.

Ҳар хил аргументли синус ва косинуслар кўпайтмалари шаклидаги функцияларни интеграллаш

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx \quad (1)$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблаймиз. Мактаб курсидан маълум бўлган тригонометрик функциялар кўпайтмасини, йиғиндига келтириш

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], & \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned} \text{ формулалардан фойдаланиб, (1)}$$

кўринишдаги интегралларни

$\int \sin ax dx, \int \cos bx dx$ интеграллардан бирига келтириб интегралланади.

1-мисол. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқоридаги формулаларнинг биринчисидан

$$\begin{aligned}\sin 2x \cos 7x &= \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x \sin 5x), \\ \int \sin 2x \cos 7x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.\end{aligned}$$

натижага эга бўламиз.

2-мисол. $\int \cos 7x \cos 3x dx$, $\int \sin 4x \sin 2x dx$, $\int \sin 5x \cos 3x$ интегралларни мустақил ҳисобланг.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.

Бунда m, n лар бутун сонлар. Хусусий ҳолларда m ёки n сонлардан биронтаси 0 га тенг бўлиши ҳам мумкин.

1) m ёки n сонлардан биттаси тоқ бўлсин. Бу ҳолда интеграл рационал функцияларни интеграллашга келтирилади. Бунда интеграллаш моқияти куйидаги мисоллардан тушунарли бўлади.

3-мисол. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\sin x dx = -d(\cos x)$ ва $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ эканлигини ҳамда $\cos x = z$ алмаштириш киритиб, куйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.\end{aligned}$$

4-мисол. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\sin x dx = -d(\cos x)$ бўлгани учун, $t = \cos x$ алмаштириш олсак,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) = \\ &= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C\end{aligned}$$

Бу усулдан m ва n сонлардан биттаси тоқ ва мусбат бошқаси ихтиёрий ҳақиқий сон бўлганда ҳам фойдаланиш мумкин.

2). Энди m ва n сонлар иккаласи ҳам тоқ ёки жуфт ва мусбат бўлсин.

Бундай ҳолларда

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

формулалардан фойдаланиб, даражаларни пасайтириб интегралланади.

6-мисол. $\int \sin^2 x \, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу интегрални изоҳларсиз ҳисоблаймиз:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

7-мисол. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Тригонометрик функцияларнинг даражаларини пасайтириш формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги натижага келамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Аниқмас интеграл ҳақида яқуний мулоҳазалар

Биз юқорида элементар функцияларни ўз ичига олган муҳим интеграллаш усуллари кўрдик. Лекин амалётда фақат шу усуллардан айнан фойдаланамиз деган фикр бўлмаслиги керак. Бошқача қилиб айтганда, интеграл остидаги функциянинг берилишига қараб унга мос мулоҳазалардан фойдаланиш керак. Масалан,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} \, dx &= \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\ &= \ln|x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C \end{aligned}$$

ёки $\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$ интеграллашни бажариш мумкин.

Жуда кўп интегралларни ҳисоблашда айрим хусусий усуллардан фойдаланиб олдинги ҳисобланган интегралларга келтирилади. Шунинг учун амалётда интеграллашда тайёр қўлланмалардан фойдаланиш ҳам мумкин. Масалан [Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.П.Прудников. Таблицы неопределённых интегралов. М.: Наука 1986-192с].

Интеграллашнинг баён этилишидан маълумки интеграллаш техникаси дифференциаллашдан мураккаброқдир. Шунинг учун ҳам интеграллашда шундай кўникмалар керакки, бунга кўп сондаги мисолларни ечиш натижасида эришиш мумкин.

Маълумки дифференциал ҳисобда исталган элементар функциянинг ҳосиласини топиш мумкин эди ва у яна элементар функциялар билан ифодаланар эди. Интеграл ҳисобда эса масала бошқачароқ бўлиб, кўплаб

мисоллар келтириш мумкинки, интеграл $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ остидаги

функциянинг бошланғич функциялари мавжуд бўлишига қарамасдан, улар элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Бундай интеграллар яхши ўрганилган ва улардан амалиётда фойдаланиш учун тайёр жадваллар, графиклар тузилган.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғиндига келтириладиган формулаларни ёзинг?
2. Қандай ҳолларда тригонометрик функциялар рационаллашади?
3. Қандай ҳолларда тригонометрик функцияларнинг тартибини пасайтириш билан интегралланади?

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: “Наука”, 1970.
2. В.С.Шипачев. Высшая математика. М.: “Высшая школа”, 1998.
3. Тожиев Ш.И. Олий математикадан масалалар ечиш. Т.: “Ўзбекистон”, 2002.
4. Р.Е.Данько ва бошқалар. Олий математика мисол ва масалаларда. Т.: “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2007.
5. Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.П.Прудников. Таблицы неопределённых интегралов. М.: Наука 1986. –192с.
6. Э.Файзибоев, А.Цирмиракс. Интегралга доир мисол ва масалалар тўплами. Т. “Ўқитувчи”, 1993.
7. В.П.Минорский. Олий математикадан мисол ва масалалар тўплами. Т. “Ўқитувчи”, 1988.
8. А.Садуллаев, Г. Худойбергенов, Х.Мансуров, А.Ворисов, Р.Ғуломов. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами. Т.: “Ўзбекистон”, 1992.
9. К.А.Курганов. Варианты домашних и контрольных работ по высшей математике. НУУз, 2005.
- 10.М.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. ЮНИТИ. 1997.