

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**НАМАНГАН МУХАНДИСЛИК – ТЕХНОЛОГИЯ
ИНСТИТУТИ**

“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” кафедраси

Олий математика фанидан

РЕФЕРАТ

Бажарди:

**16ау-15 гурухи талабаси
Ёқубжонов А**

Қабул қилди:

Шоюсупов Ш.

Энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш

Режа: 1. Рационал каср функцияларни интеграллаш

2. Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар ҳақида

3. Тўғри каср рационал функцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш ва уларни интеграллаш

Таянч ибора ва тушунчалар

Каср рационал функциялар, тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар, кўп ҳадни кўп ҳадга бўлиш, содда касрлар, рационал функция ёйилмаси, номаълум коэффициентлар усули.

Рационал каср функцияларни интеграллаш

Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар ҳақида.

Юқорида кўрсатилган интеграллаш усуллари ёрдамида ҳамма интегралларни ҳисоблаш мумкин деб бўлмайди. Шундай функциялар синфлари борки, улар учун муайян усуллардан фойдаланиб уларни жадвал интегралларига ёки интеграллаш усулларида фойдаланиш учун қулай қўлга келтириш мумкин, шундай функция синфларидан айримларини қараймиз.

Маълумки, ҳар қандай рационал функцияни ушбу кўринишида ифодалаш мумкин, яъни

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}$$

Суратдаги кўп ҳаднинг даражаси махраждаги кўп ҳад даражасидан кичик, яъни $m < n$ бўлса, берилган касрга **тўғри каср рационал функция** дейилади. Суратдаги кўп ҳаднинг даражаси $m \geq n$ бўлса, **нотўғри каср рационал функция** дейилади. Каср нотўғри каср рационал функция бўлса, суратни махражга, кўп ҳадни кўп ҳадга бўлиш қондасига асосан бўлиб, унинг

бутун қисмини ажратиб, уни бутун ва тўғри каср рационал функцияга келтириш мумкин.

Масалан, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$ нотўғри каср рационал функцияни, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ кўпхадни $x^2 - x$ икки ҳадга бўлиб, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$ кўринишда ёзиш мумкин. Умумий ҳолда,

$\frac{Q(x)}{P(x)}$ нотўғри каср рационал функция бўлса, уни $\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$

шаклда ифодалаш мумкин, бу ерда $T(x)$ бутун рационал функция, $\frac{R(x)}{P(x)}$

тўғри рационал каср функциядан иборат. $T(x)$ функцияни осонгина интеграллаш мумкин.

Шундай қилиб, нотўғри каср рационал функцияни интеграллашни, $\frac{R(x)}{P(x)}$ тўғри каср рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

Тўғри каср рационал функцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш ва уларни интеграллаш

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k > 1$ бутун сон); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ($\frac{p^2}{4} - q < 0$ яъни, квадрат уч кад ҳақиқий илдизга эга эмас);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n > 1$ бутун сон, $\frac{p^2}{4} - q < 0$) рационал тўғри касрларга

содда каср рационал функциялар дейилади. (A, B, p, q, a - ҳақиқий сонлар).

Биринчи икки хилдаги функцияларни осонгина интеграллаш мумкин, яъни,

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$, бўлади.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

Энди ушбу 3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Олдин хусусий ҳол $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ интегрални қарайлик. x^2+px+q дан тўла

квадрат ажратиб, $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштиришдан кейин қуйидагини ҳосил

қиламиз: $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| x + \frac{p}{2} = t \right| \frac{dx=dt}{dt} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)}$,

бу йерда $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Охирги интегралда жадвал интегралидан фойдаланиб,

$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$ (2) натижани ҳосил қиламиз.

Энди $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

$Ax+B = (2x+p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$ шакл ўзгартиришдан фойдаланиб, интегрални

қуйидагича ёзамиз.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{(2x+p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx. \end{aligned}$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл

$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C_1$ бўлиб, иккинчи интеграл (2)

формулага асосан,

$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2$

Шундай

қилиб,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

натижага эга бўламиз.

Бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int \frac{x^4}{x^2+9} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция нотўғри каср рационал функциядан иборат. Унинг бутун қисмини ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l} \frac{x^4}{x^2+9} & \frac{x^2+9}{x^2-9} \\ \hline -9x^2 & \\ \hline -9x^2-81 & \\ \hline 81 & \end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \text{ бўлади.}$$

Шундай қилиб,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9} dx = \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \arctg \frac{x}{3} + C$$

2-мисол. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Махраждаги квадрат уч хаддан тўла квадрат ажратамиз:
 $x^2-8x+25 = x^2-8x+16-16+25 = (x-4)^2+9$, ҳамда $x-4=t$, $dx=dt$ алмаштириш киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + \frac{7}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \arctg \frac{x-4}{3} + C.$$

$\frac{R(x)}{P(x)}$ тўғри каср рационал функциянинг махражини

$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \cdot \dots \cdot (x^2 + 2px + q)^t \cdot (x^2 + 2kx + \ell)^m \cdot \dots$, кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу функцияни ягона

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \dots + \frac{M_tx + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \frac{F_1x + E_1}{(x^2 + 2kx + \ell)} + \dots + \frac{F_mx + E_m}{(x^2 + 2kx + \ell)^m} + \dots \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $r, s, \dots, t, m$, мусбат бутун сонлар, a, b, p, q, k, ℓ ҳақиқий сонлар.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ лар айрим ҳақиқий сонлар. (1)

тенгликка тўғри рационал функциянинг **содда касрлар орқали ёйилмаси** дейилади.

Ёйилмадаги $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ коэффициентларни топиш учун уни $P(x)$ га кўпайтирамиз. $P(x)$ кўп ҳад билан (1) ёйилманинг ўнг томонида ҳосил бўлган кўп ҳад ўзаро тенг бўлиши учун бир хил даражали x лар коэффициентлари ўзаро тенг бўлиши керак. Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, номаълум коэффициентларга нисбатан чизикли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасини йечиб аниқмас коэффициентларни топамиз.

Рационал функция ёйилмасидаги номаълум коэффициентларни бундай усул билан топишга **номаълум коэффициентлар усули** дейилади.

Бу усулни бир неча мисолларда қараймиз.

1-мисол. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ рационал функцияни содда касрлар ёйилмаси

кўринишида ёзинг.

Ечиш. Махражни $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ чизикли кўпайтувчиларга ажратиб, (1) формулага асосан, қўйидагича ёзамиз:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Охирги тенгликни $x^2 - 5x + 6$ га кўпайтириб
 $2x - 1 = A_1(x - 2) + A_2(x - 3)$ ёки $2x - 1 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 ва A_2 номаълумларга нисбатан, чизикли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бундан $A_1 = 5$, $A_2 = -3$ бўлади.

Шундай қилиб, $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$ ҳосил бўлди.

2-мисол. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ рационал касрни, содда касрлар йиғиндиси

кўринишида ёзинг.

Ечиш. (1) формулага асосан, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Охирги тенгликни $x(x^2+1)^2$ га кўпайтириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 - 1 = A_1(x^2+1) + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \text{ёки}$$

$$x^2 - 1 = (A_1 + M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1 + M_1 + M_2)x^2 + (N_1 + N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 ларнинг коэффициентларини тенглаштириб

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

чизикли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан

$N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $A_1 = -1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ бўлади.

Шунинг учун ёйилма қуйидагича

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \text{ бўлади.}$$

Энди бир неча интегралларни ҳисоблаймиз.

3-мисол. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ функцияни $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ иккита содда

касрнинг айирмаси кўринишда ёзиш мумкин.

Шунинг учун,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C \text{ бўлади.}$$

4-мисол. $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ интеграл остидаги тўғри рационал функцияни

содда касрлар йиғиндиси шаклида ёзамиз:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \text{ охириги тенгликни } x^2(x+2) \text{ га кўпайтириб,}$$

$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$ ёки $x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$ тенгликка эга бўламиз.

Энди x нинг бир хил даражалилари коэффициентларини тенглаштирсак, қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0 \\ x^1 & 2A+B=1 \\ x^0 & 2B=-2 \end{array} \text{ бундан } \begin{array}{l} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ B=-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A=1 \\ C=-1 \end{array} \text{ бўлади.}$$

Шундай қилиб, $\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$

Натижада

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$$

бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Бутун рационал функция нимадан иборат?
2. Каср рационал функциялар қандай?
3. Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар деб нимага айтилади?
4. Нотўғри каср рационал функцияни интеграллаш, тўғри рационал функцияни интеграллашга қандай қилиб келтирилади?
5. Содда каср рационал функциялар деб нимага айтилади?
6. Содда каср рационал функциялар қандай интегралланади?
7. Аниқмас коэффициентлар усули нима?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Ушбу рационал функцияларни интегралланг.

$$1) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad 2) \int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx; \quad 3) \int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx;$$

$$4) \int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: “Наука”, 1970.
2. В.С.Шипачев. Высшая математика. М.: “Высшая школа”, 1998.
3. Тожиев Ш.И. Олий математикадан масалалар ечиш. Т.: “Ўзбекистон”, 2002.
4. Р.Е.Данько ва бошқалар. Олий математика мисол ва масалаларда. Т.:

“Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2007.

5. Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.П.Прудников. Таблицы неопределённых интегралов. М.: Наука 1986. –192с.
6. Э.Файзибоев, А.Цирмиракс. Интегралга доир мисол ва масалалар тўплами. Т. “Ўқитувчи”, 1993.