ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СВЯЗИ, ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФАКУЛЬТЕТ “КОМПЬЮТЕР ИНЖИНИРИНГ”
КАФЕДРА “КОМПЬЮТЕР ТИЗИМЛАРИ”

Конспекты лекций

По предмету:

СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Конспект лекций для бакалавров направлений образования:

5521900 – “Информатика и информационные технологии”

Фергана 2013

ЛЕКЦИЯ 1.

СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия и определения

Теория выбора и принятия решений исследует математические модели процессов принятия решений и их свойства. Основной в этой теории является задача принятия решений. Она соответствует широкому кругу практических ситуаций.

Пример: на предприятии освободилась должность главного инженера.
Задача директора – назначить главного инженера.
Пример: необходимо принять решение об объёмах строительных работ.

В этих примерах общей является следующая ситуация:

имеется множество вариантов, например кандидатов на должность. Нужно выделить из этого множества вариантов некоторое подмножество, то есть выбрать один вариант. Выделение требуемых вариантов должно соответствовать представлению о качестве вариантов. В общем случае, представление о качестве вариантов характеризуется *принципом оптимальности*. Указанные элементы – множество вариантов и принципов оптимальности позволяет ввести следующие понятия:

Задачей принятия решения назовём пару <Ω, ОП>, где Ω – множество вариантов, а ОП – принцип оптимальности.

Решением задачи принятия решений является множество $\Omega_{оп} \subseteq \Omega$, полученное с помощью принципа оптимальности ОП.

Отметим, что отсутствие хотя бы одного из элементов Ω или ОП лишает смысла задачи в целом. Если нет Ω, то выделять решение $\Omega_{оп}$ не из чего; если отсутствует ОП – то найти решение невозможно.

Математическим выражением принципа оптимальности ОП служит функция выбора $C_{оп}$. Она сопоставляет любому подмножеству $X \subseteq \Omega$ его часть, которая обозначается $C_{оп}(X) \subseteq X$. Решением $\Omega_{оп}$ исходной задачи является множество $C_{оп}(\Omega)$, то есть $\Omega_{оп} \rightarrow C_{оп}(\Omega)$. Задачи ПР различают в зависимости от имеющейся априорной информации о множестве Ω и ОП.

Выделяют ***три основные варианта ПР***:

общая задача ПР,
задача выбора
общая задача оптимизации.

1. В общей задаче ПР как Ω так и ОП могут быть неизвестны. Информацию, необходимую для выделения $\Omega_{оп}$ получают в процессе решения.
2. Задача выбора – задача с известным Ω.
3. Общая задача оптимизации – задача с известными Ω и ОП.

Таким образом, задача выбора и задача оптимизации являются частным случаем общей задачи ПР. Отметим, что особенность одного из существующих подходов к решению задачи ПР состоит в том, что он в общем случае не требует полного восстановления ОП, а позволяет только ограничится информацией для выделения $\Omega_{оп}$.

Общая задача оптимизации может не предполагать максимизации одной или нескольких числовых функций. Её смысл состоит в выделении множества её лучших элементов, то есть в вычислении $C_{оп}(\Omega)$ при заданных Ω и $C_{оп}$.

Если $C_{оп}$ – скалярная функция, определённая на множестве Ω, то мы получаем общую оптимизационную задачу.

Элементы множества Ω называют альтернативами или вариантами.

ОП задаёт понятие лучших альтернатив, а именно, лучшими считают альтернативы, принадлежащие $C_{оп}(\Omega)$. В практических задачах альтернативы обладают многими свойствами, оказывающими влияние на решение. Пусть некоторое свойство альтернатив из Ω выражается числом, то есть существует отображение φ: $\Omega \rightarrow E_1$, тогда такое свойство называют критерием, а число $\varphi(x)$ называют оценкой альтернативы X по критерию $\varphi(x)$, $X \subseteq \Omega$.

Одновременный учёт отдельных свойств может быть затруднителен. Поэтому обычно выделяют группу свойств, которые объединяют в виде аспектов.

Аспект представляет собой сложное свойство альтернатив, которое одновременно учитывает все свойства, входящие в соответствующую группу. В частном случае, аспект может являться критерием.

Пусть все свойства $k_1,k_2,\ldots,k_m$, учитываемые при решении задачи <Ω, ОП> являются критериями. Поставим в соответствие критерию $k_j \rightarrow j$*-ю* ось пространства E_m (j=1..m). Будем понимать, что E_i – это числовая прямая (множество действительных чисел), E_m – m-мерное действительное пространство.

Через E будем определять общемерное пространство: $E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r$

Отобразим множество Ω в пространство E_m, сопоставив каждой альтернативе $x \in \Omega$ точку в пространстве E_m, $\varphi(x) = \langle\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)\rangle \in E_m$, где $\varphi_j(x)$ – координаты точки, а также оценка альтернативы x по критерию k_j($j = \overline{1..m}$).

Критериальным пространством называют пространство E_m, координаты точек которого рассматриваются как оценки по соответствующим критериям.

<u>Пример</u>: При определении маршрута перевозок диспетчер выбирает альтернативы перевозок и может учитывать их свойства, например, стоимость, протяжённость и т.д. Стоимость маршрута складывается из стоимости топлива, зарплаты водителей и т.д., то есть стоимость является аспектом. Однако, возможность вычисления стоимости позволяет рассматривать её как критерий. А например техническое обслуживание не может быть рассмотрено как критерий, так как его нельзя охарактеризовать числом.

Процесс решения задачи <Ω, ОП> организуют по следующей схеме: формируют множество Ω, то есть подготавливают альтернативы, а затем решают задачу выбора. В процессе формирования множества Ω используют условия возможности и допустимости альтернатив, которые определяются конкретными ограничениями задач. При этом считают известным универсальное множество $\Omega_у$ всех мыслимых альтернатив, и задача формирования Ω является задачей выбора: $\Omega \rightarrow <\Omega_у$, $ОП_1>$, где $ОП_1$ – принцип оптимальности, выражающий условия допустимости альтернатив.

Множество $\Omega = C_{оп\ 1}(\Omega_у)$, полученное в результате указанной задачи выбора, называют ***Исходным Множеством Альтернатив*** (ИМА). Например, при назначении на должность, в качестве $\Omega_у$ рассматривают всех специалистов, которые могут быть назначены на эту должность. Таким образом, общая ЗПР сводится к решению двух последовательных задач выбора: сначала $<\Omega_у, ОП_1>$, а затем $<\Omega, ОП>$. В процессе решения этой задачи принимают участие эксперты, консультанты и лица, принимающие решения (ЛПР).

ЛПР – это человек, имеющий цель, которая служит мотивом постановки задачи и поиска её решения. ЛПР является компетентным специалистом с опытом действий, обладает необходимыми полномочиями и несёт ответственность за принятое решение.

В задаче ПР основная функция ЛПР состоит в выделении $\Omega_{оп.}$ В рассмотренных процедурах принятия решения ЛПР даёт информацию о ОП. То есть ЛПР определяет, по какому принципу выделяют наилучшие альтернативы.

Второй тип людей, влияющих на решение задачи $<\Omega, ОП>$ – **эксперты** – специалисты, имеющие информацию о рассматриваемой задаче, но не несущие непосредственной ответственности за результат её решения. Эксперт даёт оценки альтернатив, необходимых для формирования ИМА и решения задачи выбора. Эти оценки могут быть числовые или выстроенные в порядке некоторой градации.

Консультантом называют специалиста по теории выбора и принятия решений. Консультант разрабатывает модель исходной задачи, процедуру принятия решения, организует работу ЛПР и экспертов при поиске решения. Консультанты в литературе называются исследователями, аналитиками, членами рабочей группы и т.д.

В простейших случаях задачу $<\Omega, ОП>$ решает непосредственно ЛПР без использования специальных процедур. Однако, часто требуются математические методы и модели, которые помогают ЛПР принимать обоснованные, эффективные решения. Как и в других случаях прикладные результаты теории выбора и ПР имеют вид алгоритмов решения исследуемых задач. Часть из этих алгоритмов может быть реализована вручную. В общем случае реализация алгоритмов предусматривает использование ЭВМ, оснащенных соответствующим программным обеспеченьем.

Контрольные вопросы:

1. Что исследует теория выбора и принятия решений?
2. Понятие принципа оптимальности.
3. Три основных варианта принятия решения.
4. Понятие альтернативы, аспекта.
5. Что такое критериальное пространство?
6. Что называют исходным множеством альтернатив?
7. Дайте определения: лицо, принимающее решение, эксперт, консультант.

ЛЕКЦИЯ 2.

ФУНКЦИИ ВЫБОРА.

ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ ВЫБОРА

Понятием функций выбора (ФВ) пользуются для формализации взаимных зависимостей выборов C(x) при взаимосвязанных ситуаций.

Функцией выбора C называется отображение, сопоставляющее каждому $X \subseteq \Omega$ его подмножество $C(x) \subseteq X : X \subseteq \Omega \rightarrow C(x) \subseteq X$.

Будем интерпретировать C(x) как наиболее предпочтительные элементы из множества X. Отметим, что в общем определении ФВ никаких априорных ограничений на C(x) не накладывается. В частности, не исключается возможность пустого выбора: $C(x) = \varnothing$. Обычно такую ситуацию называют ***отказом от выбора*** или ***альтернативой статус-кво***.

Сопоставим произвольному бинарному отношению ФВ: пусть на Ω задано бинарное отношение R и для альтернатив $x, y \in \Omega$ выполнено xRy.

Будем считать, что для выбора предъявлено подмножество X={x, y}.

Учитывая, что xRy, при описании результата выбора из множества X можно считать, что **y** не включается в C(x).

С другой стороны можно полагать, что x должно быть включено в C(x).

Рассмотрение всех пар элементов из Ω, для которых выполнено xRy, с учётом сказанного, порождает на Ω две различные ФВ:

$$C^R(x) = \{ x \in X \mid \forall y \in X;\ y \, R \, x \} \qquad \textbf{(1.1)}$$
$$C_R(x) = \{ x \in X \mid \forall y \in X;\ x \, R \, y \} \qquad \textbf{(1.2)}$$

где $\overline{R}$ – дополнение к отношения R.

R – если оно выполняется только для тех пар, для которых не выполняется отношение R, то есть $\overline{R} = \Omega^2 \setminus R$.

Функции выбора $C^R(x)$ и $C_R(x)$, порождённые бинарным отношением R называют ***блокировкой*** и ***предпочтением*** соответственно.

Утверждение 1. Пусть R_1 – суждение отношения R, заданного на множестве Ω, на множество $X \subseteq \Omega$.

R_1^d – отношение, двойственное к R_1.

R^d – отношение, двойственное к самому отношению R.

R_2^d – суждение отношения R^d на X.

Утверждение 1 говорит о том, что $R_1^d = R_2^d$. Двойственным к R называется отношение R^d, определяемое формулой: $R^d = \overline{R}^{-1}$.

Иными словами**, *двойственным*** к R называется отношение R^d, дополнительное к обратному отношению R.

Обратным к отношению R является отношение R^{-1}, определяемое условием:

$$x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x.$$

<u>Пример 1</u>:

Если отношение R – отношение “больше” на множестве действительных чисел, то отношение R^{-1} – отношение “меньше”, определённое на том же множестве действительных чисел.

Действительно: $x<y \Leftrightarrow y>x$.

<u>Пример 2</u>: Если R – “быть мужем”, то R^{-1} – “быть женой”.

<u>Утверждение 2.</u> Функции выбора C^R и C_R связаны соотношениями:

$$\begin{cases} C^R = C_{R^d} \\ C_R = C^{R^d} \end{cases} \qquad \textbf{(1.3)}$$

Здесь R^d – отношение, двойственное к R.

То есть блокировку можно выразить через предпочтение и наоборот. В основном используется функция блокировки.

В силу утверждения 2 из двух ФВ, порождённых бинарным отношением R, достаточно рассмотреть только одну, так как блокировка по отношению к R совпадает по предпочтению с двойственным отношением R^d и наоборот.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем сопоставлять бинарному отношению R функцию блокировки C^R, определяемую формулой (1.1) и будем называть её ФВ, порождённой отношением R. Такие функции называют нормальными.

Произвольная функция выбора C не обязательно совпадает с некоторой функцией блокировки C^R.

<u>Пример</u>: Рассмотрим следующую ФВ.

Определим сначала $\Omega = \{x, y\}$ и рассмотрим ФВ на Ω:

$C(x) = x$; $C(y)=\varnothing$; $C(x, y)=\{x, y\}$ **(1.4)**.

Определим, существует ли бинарное отношение R на множестве Ω, такое, что $C=C^R$.

Докажем методом от противного. Допустим, что R существует. Тогда из формулы (1.1) и из того, что $C^R(x)=x$ следует, что будет верным, что x вступает в обратное отношение R с самим собой: $C^R(x)=x \rightarrow x \overline{P} x$ – верно, то есть xRx – неверно.

Аналогично, из того, что $C^R(y)=\varnothing$ следует, что yRy – верно а $y \overline{R} y$ – неверно, и значит $y \notin C^R(\Omega)$, то есть $y \notin$ множеству альтернатив, выбираемых когда либо из множества C, C^R, а это противоречит соотношению (1.4), следовательно предположение о существовании бинарного соотношения R, которое даёт результат $C=C^R$ – не существует.

В силу утверждения 2, не существует бинарного отношения R такого, что $C=C_R$. Иначе можно было бы перейти к двойственному отношению R^d, для которого $C_R=C^R$.

Приведённый пример показывает, что даже для двух элементных множеств, не все ФВ нормальны. То есть ФВ, определённая соотношением (1.4), будет не нормальной.

<u>Выводы:</u>

1) Таким образом каждому бинарному отношению R, определённому на Ω соответствует некоторая порождённая им ФВ C^R на Ω (по формуле 1.1).
2) Разным R могут соответствовать одинаковые блокировки.
3) ФВ C, которые совпадают с C^R для какого-нибудь бинарного отношения < R, Ω>, называется нормальными.
4) Не все ФВ нормальны.

Операции над функциями выбора

Введём следующие операции над ФВ:

1) **Объединение функций выбора.** Объединением ФВ C_1 и C_2 называется функция C, определяемая по следующей формуле:

$$C(x)=C_1(x) \cup C_2(x) \qquad \textbf{(1.5)}.$$

2) **Пересечение функций выбора.** Пересечением ФВ C_1 и C_2 называется функция C, которая определяется по формуле:

$$C(x)=C_1(x) \cap C_2(x) \qquad \textbf{(1.6)}.$$

3) **Дополнение функции выбора.** Дополнением функции C называется функция $\overline{P}$, которая определяется как:

$$\overline{C_1}(x)=X \setminus C_1(x) \qquad \textbf{(1.7)}.$$

4) **Произведение функций выбора.** Произведением функций выбора C_1 и C_2 называется ФВ C, определяемая следующим равенством:

$$C(x)=C_2(C_1(x)) \qquad \textbf{(1.8)}.$$

Содержательный смысл этой операции состоит в следующем: сначала осуществляют выбор в соответствии с ФВ C_1, а затем из $C_1(x)$ осуществляют выбор в соответствии с ФВ C_2. Такие ситуации бывают, когда первоначальный выбор осуществляет некоторая экспертная комиссия, а конечный выбор осуществляет ЛПР.

В заключении, установим взаимосвязь между свойствами функций и результатов операций над ними:

<u>Утверждение</u>: Пусть C_1 и C_2 – нормальные ФВ. Тогда пересечение этих функций: $C_1 \cap C_2=C$ – также будет нормальной ФВ.

Контрольные вопросы:

1. Что такое функция выбора?
2. Что такое отказ от выбора?
3. Что такое блокировка?
4. Что такое предпочтение?
5. Понятие двойственного отношения.
6. Что такое обратное отношение?

7. Перечислите операции над функциями выбора.

ЛЕКЦИЯ 3.

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ВЫБОРА

ФВ удобно классифицировать по тем условиям, которые обычно используются при их изучении. Приведём некоторые из них.

1. Условия наследования (Н)

Если $X' \subseteq X$, то выбор из этого подмножества охватывает пересечение выбора из X и самого подмножества X': $C(X') \supseteq C(x) \cap X'$ **(1.9)**.

Пусть имеем некоторое множество X; возьмём подмножество X'. Выбор из множества X есть C(x). Пусть имеем выбор C(x'): $(C(x) \cap X') \subseteq C(x')$. Тогда двойная штриховка $C(x) \cap X'$.

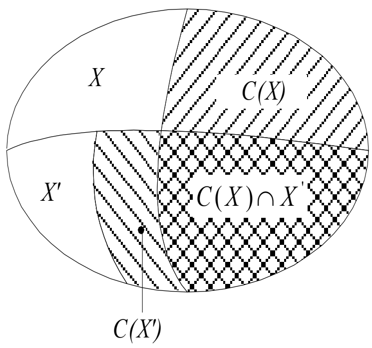


Рис.1. Условия наследования (Н)

<u>*Смысл условия Н*</u>: Если рассмотреть выбор из произвольного множества и выбор из некоторого его подмножества, то все альтернативы, которые были выбраны из исходного множества и вошли в рассматриваемое подмножество, будут выбраны также и из этого подмножества.

2. Условие независимости от отвергнутых альтернатив (О)

Если $C(x) \subseteq X' \subseteq X$, то $C(x')=C(x)$ **(1.10)**.

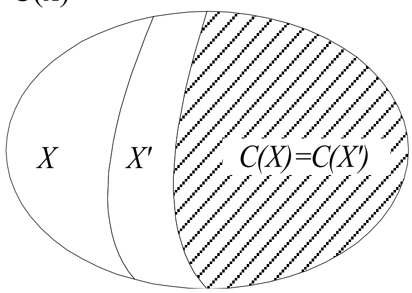


Рис.2.

<u>*Геометрическая интерпретация:*</u> Смысл условия О состоит в том, что если рассмотреть произвольное подмножество X', содержащее все альтернативы, выбранные из X, то выбор из X' будет совпадать с выбором из исходного множества. В частности, можно написать: $C(C(x))=C(x)$.

Пример: Если проведём конкурс, в котором некоторый проект X не включён в число лучших, то в конкурсе, в котором участвуют всё те же проекты, что и в первом конкурсе, кроме X, состав победителей останется прежним.

3. Условие согласия (С)

Пересечение всех выборов включается в выбор произведения всех X:

$$\bigcap_i C(x_i) \subseteq C(\bigcup_i X_i) \qquad \textbf{(1.11)}.$$

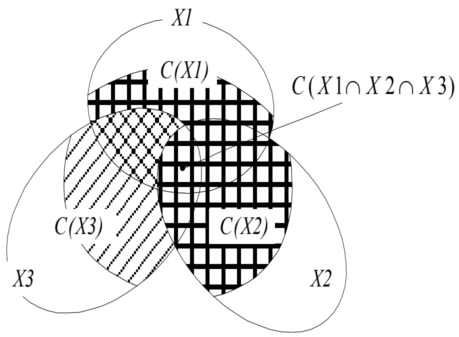


Рис.3.

Геометрическая интерпретация: Смысл условия согласия состоит в том, что альтернативы, которые выбраны из каждого множества X_i будут также выбраны из их объединения.

4. Условия Плотта (УП)

Условия Плотта – контекстная свобода, или независимость выбора от пути**.**

$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X2))$ **(1.12)**

ФВ, подчиняющаяся УП называется квазисуммарной.

Геометрическая интерпретация:

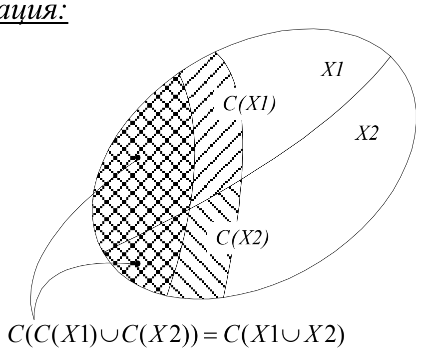


Рис. 4.

УП требует, чтобы выбор из объединения множеств, совпадая с выбором из объединения выборов, сделанных из каждого множества в отдельности. Например, если проводится международный конкурс, то по УП можно отобрать сначала победителей национальных конкурсов, а потом определить среди них победителей.

5. Условия суммарности (УС)

$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2)$ **(1.13)**

Геометрическая интерпретация:

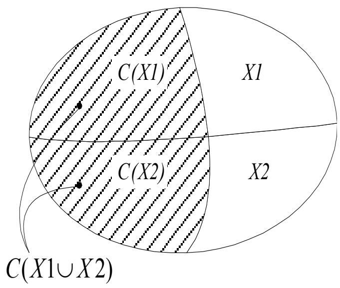


Рис. 5.

Условие предполагает, что выбор из объединения множеств равен объединению выборов из каждого множества в отдельности.

6. Условие мультипликаторности (УМ)

$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$

(1.14)

Геометрическая интерпретация:

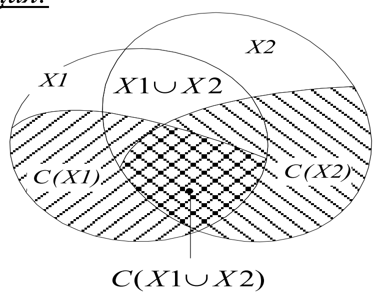


Рис. 6.

7. Условие монотонности (УМ)

$X_1 \subseteq X_2 \rightarrow C(X_1) \subseteq C(X_2)$

(1.15)

Геометрическая интерпретация:

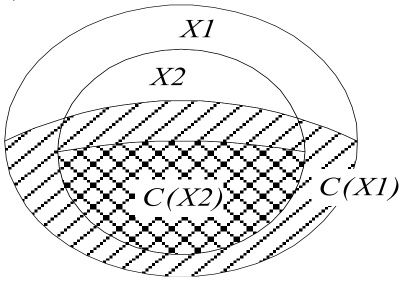


Рис 7.

Каждое из сформулированных условий определяет некоторый класс ФВ, удовлетворяющих данному условию. В дальнейшем сохраним за классами обозначения соответствующих условий. Например, запись $C \in H$ означает, что рассматривается функция С, удовлетворяющая условию наследования.

Рассмотрим ряд ФВ, которые являются естественным обобщением рассмотренных ранее свойств отношений:

1) ФВ будем называть **рефлексивной**, если C(x)=0.
2) ФВ С **антирефлексивна**, если C(x)=x.
3) ФВ С будет **полной**, если $C(x) \neq 0$ для всех $X \neq 0$.
4) ФВ С **транзитивна**, если выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \neq 0 \\ C(X_1 \cup X_3) = C(X_1) \neq 0 \\ C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) \neq 0 \end{cases}$$

5) ФВ С **<u>ациклична</u>**, если $C(X_к \cup X_{к+1})=C(X_к)\neq 0$, где к =(1..n-1) $\rightarrow X_1 \neq X_n$.

Понятие рефлексивности и антирефлексивости ФВ близки к аналогичным понятиям для бинарных отношений. Более сложная аналогия между понятиями транзитивности и ацикличности ФВ и отношений.

<u>Транзитивность</u>

можно формулировать так: Если выбор из объединения множеств X_1 и X_2 содержится в X_1, а из X_2 и X_3 – содержится в X_2, то выбор из объединения множеств X_1 и X_3 должен содержаться в X_1.

<u>Геометрическая интерпретация:</u>

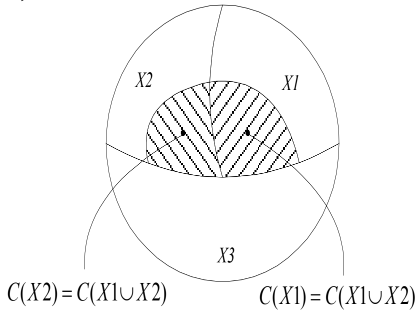


Рис.8.

<u>Пример</u> на свойства транзитивности и ацикличности:

1) Проводится олимпиада в трёх студенческих группах, и лучшими среди групп А и Б оказались студенты группы А: **А и Б → А**. Лучшими из Б и В оказались студенты группы Б: **Б и В → Б**. Тогда лучшими из групп А и В являются студенты группы А. Они же будут победителями в трёх группах. Соответствующая ФВ – транзитивна.

2) Пусть лучшими среди студентов групп А и В признали двух студентов из А. Пусть затем взяли работы из двух групп А или В. Обозначили эту группу Х. Тогда если лучшими студентами среди Б и Х стали студенты из группы Б, то ясно, что группа Х не является группой А. Такая ФВ ациклична.

Установим некоторую взаимозависимость между ФВ, обладающими введёнными свойствами и порождающими их бинарными отношениями с аналогичными свойствами.

<u>Утверждение</u>. Если отношение R транзитивно и ациклично, то функция C_R является транзитивной и ацикличной. Если отношение R – антирефлексивно и C^R – транзитивная ФВ, то отношение R – также транзитивно.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите классы функций выбора.
2. Условия наследования.
3. Условия независимости.
4. Условия согласия.
5. Условия Плотта.
6. Условия суммарности.
7. Условия мультипликаторности и транзитивности.

ЛЕКЦИЯ 4.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_M

ОТНОШЕНИЯ ПАРЕТТО

Бинарные отношения на евклидовом пространстве E_m (ЕП)

Решение практической задачи выбора может оказаться затруднительным при задании альтернатив в виде элементов абстрактного множества. Оно может потребовать их более подробного описания. С этой целью каждую альтернативу представляют описанием в критериальном пространстве (КП). Для формального задания КП используют евклидово пространство E_m. Такое задание требует некоторой модификации общей конструкции бинарного отношения с учётом E_m. То есть бинарное отношение на E_m есть **отношение с областью задания E_m**. Принято среди всех отношений E_m выделять отношения, инвариантные относительно переноса, или просто инвариантные.

Примечание: Рассмотрим отношение R на множестве Ω.

Верхним сечением $R^+(x)$ в точке x называется множество элементов $y \in \Omega$, таких, что $\langle y, x \rangle \in R$; то есть $R^+(x)=\{y \in \Omega \mid \langle y, x \rangle \in R\}$.

Нижнее сечение: $R^-(x)=\{y \in \Omega \mid \langle x, y \rangle \in R\}$. Таким образом, множество $R^-(x)$ – это множество всех элементов $y \in \Omega$, с которыми фиксированный элемент $x \in \Omega$ находится в отношении R.

Множество $R^+(x)$ – это множество всех элементов $y \in \Omega$, которые находятся в отношении R с фиксированным элементом $x \in \Omega$.

Пример. Пусть отношение R – отношение “>”, тогда нижнее сечение для данного отношения - это множество тех элементов из Ω, которые будут меньше.

Отношением, **<u>инвариантным относительно переноса</u>**, называется такое отношение, что R^+ в любой точке может быть получено параллельным переносом верхнего сечения в любой другой точке.

То есть, если взять точки x^1, $x^2 \in E_m$, то должно выполняться соотношение: $R^+(x^1)=R^+(x^2)+x^1-x^2$. В случае, если рассматривается отношение R не на всём E_m, а только на его части $\Omega \subset E_m$, то будем употреблять запись $R_\Omega^+(x)$, $R_\Omega^-(x)$.

Класс отношений, инвариантных относительно переноса, будем обозначать через I. Для указания на размерность пространства, на котором заданы отношения из I будем писать Im, или I_3, если пространство трёхмерное.

В силу инвариантности отношений $R \in I$ для их задания достаточно описать верхнее нижнее сечение в начале координат.

<u>Примеры</u> инвариантных отношений:

1) **Отношение Парето (ОП)**, которое обозначается P. (Парето – итальянский социолог-функционалист). ОП можно записать:

$(\forall x,y \in \Omega)[xPy] \Leftrightarrow \{(\forall j=1..m)[x_j \geq y_j]$ и $(\exists j_0 \in \{1,2,\ldots,m\})[xj_0>yj_0]\}$.
Знак $\Leftrightarrow$ означает “тогда и только тогда”.

Изобразим верхнее и нижнее сечение множества P в некоторой точке $x^* \in E_2$ (двумерное пространство).

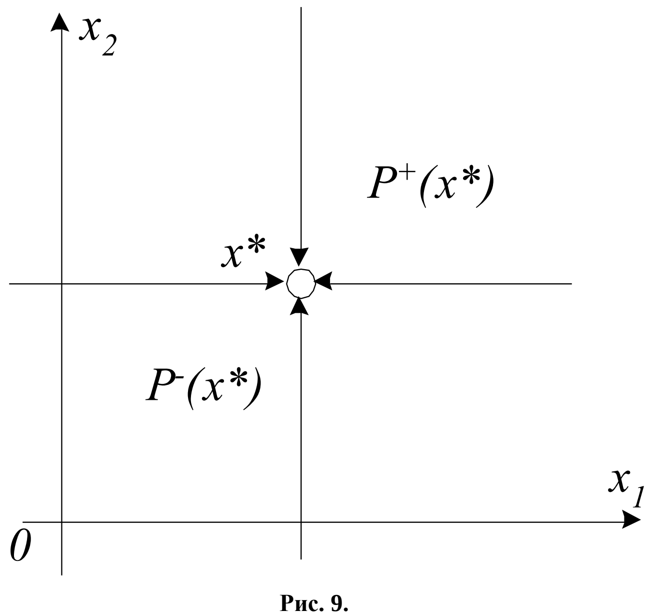


Рис. 9.

Множеством Парето (МП) на $\Omega \subseteq E_m$ называется следующее множество:
$\Omega^P=\{x \in \Omega \mid (\forall y \in \Omega)[y\overline{P}x]\}$, $\overline{P}$ – дополнение к ОП.

Из определения множества P следует, что Ω^P содержит только те элементы x^*, для которых выполняется соотношение: $P_\Omega^+(x^*)=\varnothing$, то есть те элементы, для которых верхнее сечение – пустое, – это как бы максимальные элементы.

Если возьмём например многогранник, то А и Б – те элементы.

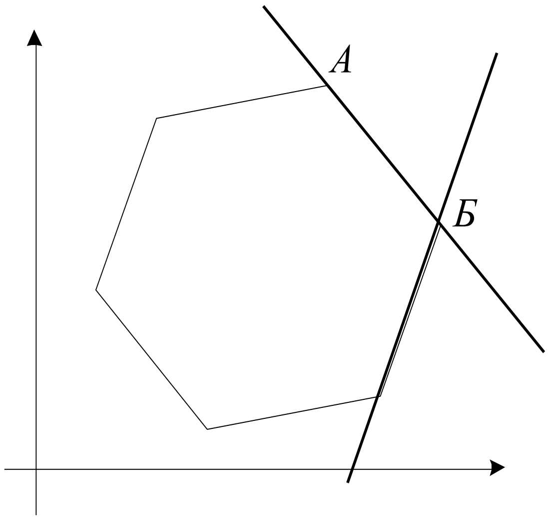


Рис. 10.

Пример множества Парето: Пусть Ω состоит из следующих шести элементов:

$\Omega=\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$.

При этом координаты точек по оси абсцисс равны:

$x_1^1=2$; $x_1^2=3$; $x_1^3=1$; $x_1^4=1$; $x_1^5=4$; $x_1^6=5$.

По оси ординат:

$x_2^1=5$; $x_2^2=3$; $x_2^3=4$; $x_2^4=3$; $x_2^5=3$; $x_2^6=4$.

Изобразим эти точки на соответствующей плоскости:

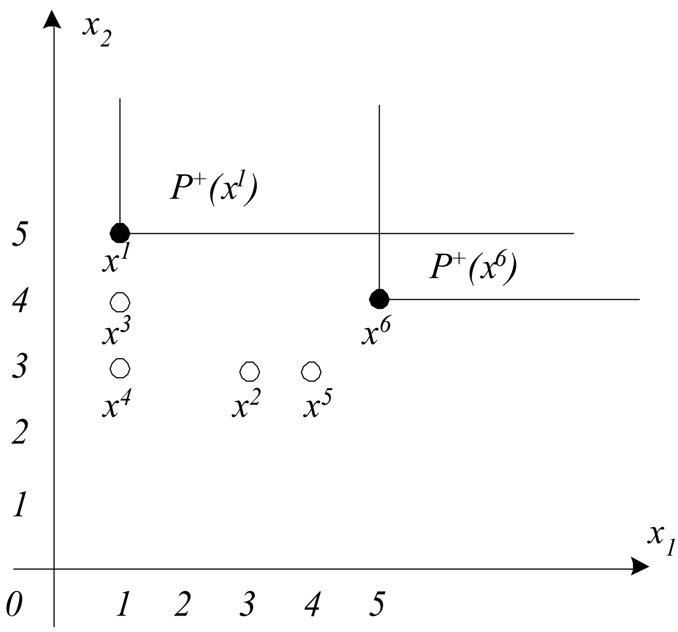


Рис. 11.

Чтобы найти МП, нужно взять верхнее сечение в каждой точке, то есть это те элементы, которые в соответствии с определением ОП будут больше, чем x^1:

$P_\Omega^+(x^1) = \varnothing$, => эта точка – точка МП.
$P_\Omega^+(x^2) = \{x^5, x^6\}$ – не пусто.
$P_\Omega^+(x^3) = \{x^1, x^6\}$.
$P_\Omega^+(x^4) = \{x^1, x^2, x^3, x^5, x^6\}$.
$P_\Omega^+(x^5) = \{x^6\}$.
$P_\Omega^+(x^6) = \varnothing$.

Таким образом, МП в нашем случае представлено точками x^1 и x^6: $\Omega^P=\{ x^1, x^6\}$.

Контрольные вопросы:

1. Определите отношения с областью задания.
2. Верхнее и нижнее сечения.
3. Отношение, инвариантное относительно переноса.
4. Примеры инвариантных отношений.
5. Отношение Паретто.
6. Множество Паретто.
7. Нахождение множества Паретто.

ЛЕКЦИЯ 5.

ЭКСПЕРТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Как отмечалось, альтернативы в процессе ПР могут иметь вид элементов множества Ω (целостное представление) или точек критериального пространства, которое формально описывается с помощью E_m. Этот второй вариант называют “критериальное представление”.

Необходимо учитывать, что элементы множества Ω могут быть упорядочены по некоторым аспектам, существенным для ПР. В практических задачах ПР альтернативы не являются математическими объектами, а чаще всего представляют собой конкретные физические объекты и системы. Поэтому получение описания альтернатив в перечисленных выше формах требует разработки методов решения следующих задач:

1. Построение множеств возможных и допустимых альтернатив.
2. Формирование наборов аспектов, существенных для оценки как альтернатив, так и **критериального пространства (КП)** в целом.
3. Упорядочивание альтернатив по аспектам.
4. Получение оценок по критериям, или отображение множества Ω в КП.

Все эти задачи являются модификациями общей задачи оценивания. Суть её состоит в сопоставлении числа или нескольких чисел рассматриваемому объекту или системе (альтернативе). Методы решения задач оценивания основаны на использовании экспертных процедур. выбор наилучших решений. Информацию, необходимую для работы алгоритмов формирования ИМА и алгоритмов выбора, получают экспертным путём.

Задача оценивания (ЗО)

Смысл ЗО состоит в сопоставлении рассматриваемой системе (альтернативе, критерию) вектора из пространства E_m. Назовём пространство E_m m-мерной шкалой. Назовём операцию сопоставления системе вектора из E_m операцией оценивания, а нахождение указанного вектора назовём задачей оценивания.

Простейшей формой ЗО является обычная задача измерения (m=1). Оценивание в этом случае есть сравнение с эталоном, а решение задачи находится подсчётом числа эталонных единиц в измеряемом объекте.

Этапы решения ЗО:

1. Определение множества допустимых оценок (МДО). На этом этапе определяется подмножество множества Е, где, в котором и ищется оценка системы.

2. Определение наиболее точной оценки. На этом этапе из МДО выбирается та оценка, которая наиболее точно выражает свойства оцениваемой системы. Это позволяет представить ЗО в виде задачи ПР: $<\Omega$, ОП$>$, в которой Ω есть МДО, а ОП – принцип оптимальности, выражающий представление о наиболее точной оценке. Он задаётся ФВ:

$$C_{on}(ОП) = \begin{cases} a, если \quad a \in X \subseteq \Omega \\ \varnothing, если \quad a \notin X \subseteq \Omega \end{cases}$$

где а – оценка системы, которая и является решением ЗО.

В соответствии с указанными этапами, решение ЗО сводится к последовательному решению двух задач выбора, а именно: $<$Е, $ОП_1>$, $<\Omega$, ОП$>$, где $ОП_1$ – принцип оптимальности, задающий допустимость оценки. ОП – принцип оптимальности, задающий точность оценки из Ω.

Решением первой задачи является $\Omega=C_{on_1}(E)$, решением второй является $a=C_{on}(\Omega)$.

Схема решения ЗО изображается следующим образом:

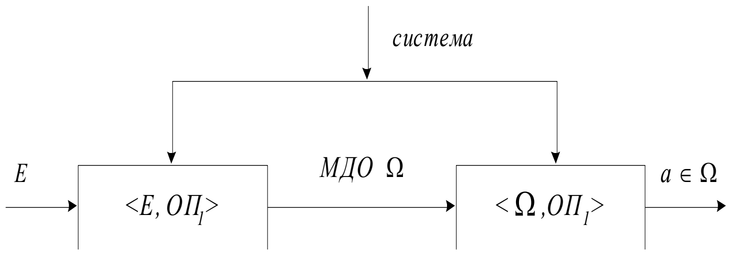


Рис. 12.

Эта схема близка к рассмотренной ранее общей схеме ПР, но несколько проще её. В качестве Ω_y (универсального множества всех мыслимых альтернатив) в данном случае выступает множество оценок E: $\Omega_y \rightarrow E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$; вместо двух этапов построения ИМА, имеем один этап построения МДО:

Решение задачи выбора <Ω, ОП> состоит в данном случае из единственного элемента, а именно, результата оценивания а =$C_{on}(\Omega)$.

Общая схема экспертизы (ОСЭ)

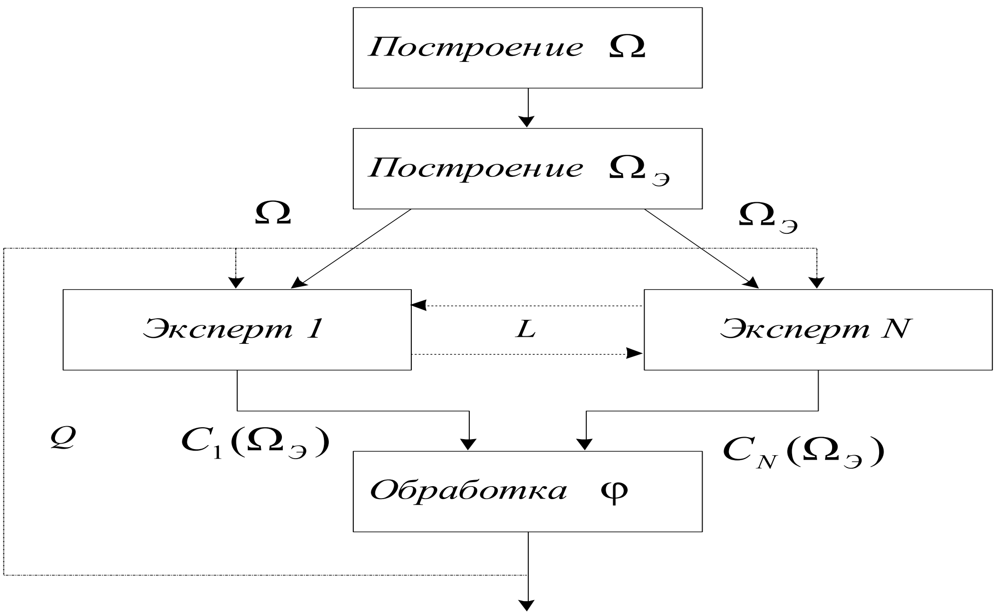
Задачи оценивания возникают на различных этапах ПР. Они могут быть решены непосредственно ЛПР или с помощью консультантов, исследователей, когда оценивание сводится к измерению, получению данных из справочников и другим простым операциям. В общем случае, из-за сложности оцениваемых систем и трудности получения информации, для решения ЗО привлекаются люди, обладающие специальными знаниями и опытом работы с данной (или близкой к ней) системе. Таких людей называют экспертами, а решения ЗО называют экспертиза.

По схеме на рис.12 отметим, что эксперты участвуют во второй задаче выбора, а именно <Ω, ОП>. Для построения Ω необходимо иметь общее представление о главных свойствах системы, которое не всегда имеется у экспертов, как специалистов в какой-либо конкретной области. Поэтому эксперт решает не исходную ЗВ <Ω, ОП>, а отличную от неё ЗВ <$\Omega_э$, $ОП_э$>. Где $\Omega_э$ – МДО для эксперта, $ОП_э$ – ПО эксперта, задающий точность его оценки, выбираемой из $\Omega_э$.

Анализ существующих экспертиз показывает, что в процессе их построения можно выделить следующую последовательность действий:

1. Исследователь находит МДО Ω, в котором находится искомая оценка.
2. Исследователь определяет МДО $\Omega_э$, из которого осуществляют выбор эксперты.
3. Каждый эксперт выбирает свою оценку a_i, где $a_i=C_i(\Omega_э)\in\Omega_э$; i=1..N, где N – число экспертов, то есть решает ЗВ наилучшей оценки из $\Omega_э$. При этом эксперты могут взаимодействовать между собой (и не взаимодействовать).
4. По заранее разработанному алгоритму (формуле) исследователь производит обработку полученной от экспертов информации и находит результирующую оценку из Ω, которая и является решением исходной ЗО.
5. Если полученное решение не устраивает исследователя, он может предоставить экспертам дополнительную информацию, то есть организовать **обратную связь (ОС)**, после чего эксперты вновь решают соответствующую ЗВ.

Представим выделенную последовательность действий в виде соответствующей схемы.



$$Оценка\, a = \varphi(C_1(\Omega_Э)\ldots C_N(\Omega_Э))$$

Рис. 13.Блок схема экспертизы.

На схеме задаются следующие параметры, которые задаются следующими параметрами:

Ω – МДО.

Ωэ – МДО для экспертов.

L – параметр взаимодействия между экспертами (есть или нет).

Q – обратная связь.

φ – параметр, задающий обработку оценок экспертов; отображение Ωэ в оценку $a \in \Omega$ для N экспертов.

Назовём **схемой экспертизы (СЭ)** пятёрку параметров на указанной блок-схеме.

Подготовка экспертизы (ПЭ)

Под ПЭ будем понимать предварительную разработку СЭ и подбор экспертов, а под реализацией экспертизы будем понимать получение от экспертов информации и обработку этой информации.

ПЭ фактически состоит в конкретизации пяти выделенных выше параметров.

МДО определяется решаемой задачей оценивания

Перечислим типы МДО и укажем определяющие их ЗО.

I. МДО состоит из двух альтернатив: $\Omega=\{0,1\}$. Эта задача называется задачей попарного сравнения (ЗПС) и заключается в выявлении лучшего из двух имеющихся объектов А или В. При этом считаем, что $C(\Omega)=1$, если А лучше чем В, и $C(\Omega)=0$ в противном случае.

II. $\Omega=\{<1,2,..,n><1,3,..,2,n><n,n-1,..,1>\}$. Когда МДО состоит из множества перестановок длины n. Соответствующая задача называется задачей ранжирования, и заключается в упорядочивании объектов, образующих систему по убыванию (или возрастанию)значения некоторого признака. При этом решением задачи является: $C(\Omega)=<i_1,i_2,..,i_j,..,i_n>$ - некоторая перестановка, где i_j – номер j-го объекта при указанном упорядочивании.

III. $\Omega=\{1,2,\ldots,l\}$ – множество чисел до некоторого l называется задачей классификации и заключается в отнесении заданного элемента $x \in S$ к одному из элементов подмножеств: $S_1, S_2, \ldots, S_l$. При этом решение задачи: $C(\Omega)=i$, если $x \in S_i$.

IV. $\Omega=E_m$. Соответствующая задача численной оценки заключается в сопоставлении системе одного или нескольких чисел. При этом решение задачи $C(\Omega)=a$, если оценкой системы является вектор $a \in E_m$.

Множество допустимых оценок $\Omega_э$ для экспертов

Типы $\Omega_э$ для экспертов те же, что и типы Ω. Для конкретизации $\Omega_э$ необходимо описать вид его представления эксперту, который зависит от формы опроса эксперта. Существуют следующие формы опроса экспертов:

I. Опрос типа интервью.
II. Анкетирование.
III. Аналитическая форма опроса (метод докладной записки).

Параметр взаимодействия между экспертами

Выделяют три вида взаимодействия экспертов, то есть три вида параметра L:

I. Когда эксперты могут свободно обмениваться информацией друг с другом.
II. Обмен информации между экспертами регламентирован.
III. Эксперты изолированы друг от друга.

Рассмотрим каждый из трёх указанных видов:

I. Свободный обмен информации – схема “круглого стола”, – взаимодействие между экспертами не регламентируются. Вся экспертная группа собирается для определения общего мнения – творческая атмосфера. Но, с другой стороны, существуют отрицательные стороны: он предъявляет повышенное требование к экспертам, то есть высказывать мнение, не зависящее от мнения большинства и способность публично отказаться от своего мнения, если оно окажется неверным.

II. Некоторая регламентация в схеме круглого стола позволяет избежать указанных недостатков. Соответствующая модификация называется методом мозговой атаки (мозгового штурма) – состоит в том, что в течении определённого промежутка времени любое высказанное мнение не подлежит обсуждению и не может быть отвергнуто. За это время каждый из экспертов успевает хорошо обдумать высказанное другим мнение и принятие или отклонение этого мнения имеет большую обоснованность.

III. Эксперты изолированы. Каждый высказывает своё мнение независимо от других. При этом используют статистические методы обработки экспертной информации, поскольку оценки отдельных экспертов можно рассматривать как независимую реализацию случайной величины.

Обратная связь в экспертизе

Идея ОС в экспертизе заключается в следующем: эксперты дают оценки, которые обрабатываются. После этого каждому из них дают результирующую оценку вместе с другой информацией.

На основании полученных данных эксперты уточняют свои оценки, после чего процедура повторяется снова и так до тех пор, пока не будет получена удовлетворяющая исследователя согласованность оценок. К числу наиболее известных процедур с ОС относится дельфийский метод. Экспертам предлагается ответить на ряд вопросов и свои ответы аргументировать. Исследователь изучает ответы экспертов и определяет их согласованность. Если мнения экспертов недостаточно согласованы, то исследователь сообщает каждому из них дополнительные сведения о системе, а также ответы на поставленные вопросы и аргументацию других членов экспертной группы. С учётом вновь полученной информации эксперт отвечает на те же вопросы.

Недостатком данного метода является большая затрата времени на проведение всех туров и большая трудоёмкость, связанная с пересмотром мнений.

Подбор экспертов

Вначале определяется количественный состав экспертной группы. Для каждой задачи этот вопрос решается отдельно. Но существуют общие рекомендации:

I. Число экспертов должно быть достаточно большим, для того, чтобы они в совокупности могли учесть все существенные свойства задачи, и чтобы решение, найденное при их помощи было достаточно точным. С другой стороны, при таком большом числе экспертов их мнения становятся несогласованными (за счёт экспертов низкой квалификации), и возникают трудности в организации экспертизы. Поэтому рекомендуется включать в группу от 10 до 20 человек. Когда численность экспертной группы определена, переходят непосредственно к подбору экспертов.

II. Для этого определяют круг решаемых задач и составляют список лиц, компетентных в рассматриваемой и близкой областях. Для составления списка экспертов можно предложить следующую итеративную процедуру: Первоначально отобранным экспертам предоставляется список вопросов, на которые в процессе проведения экспертизы должны быть получены ответы, и просят рекомендовать специалистов, способных дать заключение по предоставленным вопросам. Затем указанный список вопросов предоставляют каждому из названных специалистов, которые, в свою очередь, также называют новых людей, компетентных в вопросах данного списка и так далее.

Этот процесс заканчивается, когда перестают называться новые специалисты. Такая процедура позволяет составить достаточно большой список компетентных лиц. Помимо компетентности хороший эксперт должен обладать ещё и следующими основными свойствами:

- **Криативность** – способность решать задачи, метод рассмотрения которых полностью или частично неизвестен.
- **Эвристичность** – способность выявлять неочевидные проблемы.
- **Интуиция** – способность угадывать решения без его обоснования.
- **Предикатность** – способность предсказывать или предчувствовать будущее решение.
- **Независимость** – способность противостоять мнению большинства.
- **Системность** (всесторонность) – способность видеть проблему с разных точек зрения

Контрольные вопросы:

1. Понятие критериального представоения..
2. Задача оценивания.
3. Этапы решения задачи оценивания.

4. Понятия «эксперт» и «экспертиза».
5. Общая схема экспертизы.
6. Подготовка экспертизы.
7. Подбор экспертов.

ЛЕКЦИЯ 6.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Как отмечали, в соответствии с общей схемой экспертизы (ОСЭ) обработка оценок экспертов состоит в применении к ним заданного отображения φ: $(\Omega_э)^N \to \Omega$, где N – число экспертов, Ω – МДО. Смысл обработки заключается в нахождении результирующей оценки по оценкам, даваемым экспертами.

Существуют 3 основные группы методов обработки:

I. <u>Статистические методы (СМ)</u>. Основаны на предположении, что отклонение оценок экспертов от истинных происходит в силу случайных причин. Задача состоит в том, чтобы восстановить это истинное значение с наименьшей погрешностью.

II. <u>Алгебраические методы</u>. На основе дополнительных оценок ($\Omega_э$) задаётся расстояние и результирующая оценка определяется как та оценка, сумма расстояний от которой до оценок экспертов минимальна.

III. <u>Методы шкалирования</u>. Суть этих методов состоит в том, что по экспертной информации степени различия объектов устанавливается минимальный или близкий к минимальному набору критериев и оценок объектов по ним, обуславливающих указанные экспертами различия.

Перечислим наиболее распространённые методы обработки применительно к конкретным экспертизам.

Статистические методы (СМ), численные оценки

Результаты оценок каждого из экспертов можно рассматривать как реализации некоторой случайной величины, принимающей значения из $\Omega_э$, и применить к ним методы математической статистики. СМ позволяют определить согласованность мнений экспертов, значимость полученных оценок и т.д. Степень согласованности указывает на качество результирующей оценки.

Группы СМ:

Численные оценки

Здесь задача состоит в сопоставлении оцениваемой системе одного числа. Для решения этой задачи используется экспертиза Э1. Для её описания необходимо задать все пять параметров:

$\Omega = E_1$ (МДО).

$\Omega_э = E_1$.

L (эксперты изолированы).

Q – отсутствует.

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} \qquad (1)$$

Результирующая оценка ищется по формуле средневзвешенного значения, где α_i – веса (значимость) экспертов *i=1..N*. При отсутствии информации о компетентности экспертов можно предположить α_i=1.

N – количество экспертов.

x_i – оценка i-го эксперта.

Для определения степени согласованности мнений экспертов, в экспертизе Э1 вычисляется дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (a - a_i)^2 \alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} \qquad (2)$$

a_i – оценка i-го эксперта.

a – результирующая оценка в системе.

В данной экспертизе можно также определить статистические значимости полученных результатов. Для этого, задавшись вероятностью ошибки $P_{ош}$, укажем интервал, в который оцениваемая величина попадает с вероятностью (1-$P_{ош}$), то есть $\overline{a} + \Delta \leq a \leq \overline{a} - \Delta$. Считается, что величина ***a*** распределена по нормальному закону с центром $\overline{a}$ и дисперсией, определяемой по формуле (2). Тогда: $\Delta = t\sigma\sqrt{N}$, где величина t имеет распределение Стьюдента с (N-1) степенями свободы. Её определяют по таблице, задавшись величиной $P_{ош}$.

<u>Пример:</u> Десять экспертов с одинаковыми весами α_i=1 оценивают величину T. T_1=33, T_2=35, T_3=32.2, T_4=34, T_5=38, T_6=34, T_7=37, T_8=40, T_9=36, T_{10}=35.5.

Значение $\overline{T}$ подсчитывают по формуле (1), в которую вместо x_i подставлены T_i. Подставив, получим: $\overline{T}$=35.5. Дисперсия σ^2 по формуле (2): σ^2=4.9 $\rightarrow$ σ=2.2136. Зададимся $P_{ош}$=0.05 и по таблицам распределения Стьюдента определим величину t. Число степеней свободы = 9 и по таблице имеем: t=2.262. Отсюда по формуле находим: Δ=1.583. Таким образом с вероятностью 0.95 оцениваемая величина T будет находится в следующем интервале [33.917; 37.083].

Ранжирование

Строгое ранжирование.

Задача состоит в сопоставлении оцениваемой системе одной перестановки. Определим экспертизу Э2 для данного случая:

Ω – множество всех перестановок.

$\Omega_э = \Omega$

L – эксперты изолированы.

Q – ОС отсутствует.

Отображение φ определяется след. образом:

Результаты опроса экспертов сводятся в таблицу.

Эксперты	Объекты			
	1	2	…	n

1 2 … N	r_{11} r_{21} … r_{N1}	r_{12} r_{22} … r_{N2}	… … … …	r_{1n} r_{2n} … r_{Nn}
∑рангов	R_1	r_2	…	r_n

В i-й строке стоят места (ранги), присваиваемые i-м экспертом ранжируемым объектам. В (N+1)-й строке стоят суммы рангов, полученных объектами от экспертов. Все n объектов упорядочиваются в соответствии с величиной r_S, которая определяется по следующей формуле:

$$r_S = \sum_{j=1}^{N} r_{sj} \quad (4)$$

а первое место ставится объект, у которого r_S – минимально и т.д. Степень согласованности мнений экспертов определяется при помощи коэффициента конкордации W. Рассмотрим два крайних случая:

1)Когда ранжировки всех N экспертов совпадают. Каждый объект получил от всех экспертов одинаковый ранг, который для j-го объекта будет равен r_j / N.

2)Полная несогласованность экспертов. Под несогласованностью понимается противоположность ранжировок, даваемых экспертами.

В соответствии с формулой (4) имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}) \quad (5)$$

Сумма рангов, даваемых каждым экспертом, то есть выражение в скобках в (5) будет всегда равно n(n+1)/2. Поэтому:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \frac{N \cdot n \cdot (n+1)}{2} \quad (6)$$

За средний ранг при полной несогласованности экспертов принимают:

$$r_{jcp} = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{n} = \frac{N \cdot (n+1)}{2} \quad (7)$$

А за степень согласованности мнений принимают сумму квадратов отклонений r_j от среднего r_{jcp}. Исходя из этого, коэффициентом конкордации W для случая строгого ранжирования, то есть в отсутствии равных рангов в ранжировке каждого эксперта наз. след. величина:

$$W = \frac{12 \cdot \sum_{j=1}^{n} (r_j - \frac{1}{2} \cdot N \cdot (n+1))^2}{N^2 \cdot (n^3 - n)} \quad (8)$$

n – число оцениваемых параметров.

N – число экспертов.

Нестрогое ранжирование.

Задача состоит в сопоставлении системе нестрогой ранжировки, то есть вектора с определёнными свойствами. При этом некоторые объекты могут быть равноценными (иметь один и тот же ранг). Например, если два объекта делят места 4 и 5, то каждый из них получит ранг 4.5. Экспертиза Э3 для нестрогого ранжирования отличается от Э2 только множеством Ω. Коэффициент конкордации для нестрогого ранжирования определяется:

$$W = \frac{12 \cdot \sum_{j=1}^{n} (r_j - \frac{1}{2} \cdot N \cdot (n+1))^2}{N^2 \cdot (n^3 - n) - N \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} (t_{ij}^3 - t_{ij})} \qquad (9)$$

K_i – число групп равных рангов, введённых i-м экспертом.
t_{ij} – количество дробных рангов в j-й группе, введённых i-м экспертом.

Статистическую значимость ранжировки проверяют следующим образом: выбирают вероятность ошибки $P_{ош}$. Предполагают, что величина N*(n-1)*W имеет распределение χ^2 с (n-1) степенью свободы. По $P_{ош}$ по специальной таблицам находят табличное значение W_α. Если W, полученный при реализации экспертизы, ≥ W_α, то полученную ранжировку считают статистически значимой.

Ранговая корреляция

Укажем один из способов оценки связи между двумя различными ранжировками.
Пусть $<i_1,i_2,\ldots,i_n>$ и $<j_1,j_2,\ldots,j_n>$ – две нестрогие ранжировки. Положим, что:

$$a_{st} = \begin{cases} 0, & if \quad i_s = i_t \\ 1, & if \quad i_s < i_t \\ -1, & if \quad i_s > i_t \end{cases}$$

Аналогично определим величину b_{st} для второй ранжировки. Тогда коэффициентом ранговой корреляции Кендалла называется следующая величина:

$$\tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{st} \cdot b_{st}}{n \cdot (n-1)/2} \qquad (10)$$

Рассчитав коэффициент τ, оценим значимость обнаруженной связи между ранжировками. Обозначим числитель в формуле (10) через S. Если зафиксировать одну ранжировку (строгую) и рассматривать все n! остальных строгих ранжировок, то можно найти частоту всех возможных значений S и соответствующих τ. При n>10 распределение величины S близко к нормальному со среднеквадратичным отклонением:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n+5)}{18}}.$$

При n≤10 распределение S можно найти в специальных таблицах.

В общем случае, если наблюдаемая величина S принимает значение S_0 такое, что случайное появление величины S_0 или большей – маловероятно, то гипотеза о независимости ранжировок отвергается.

Если соблюдается зависимость: $P_r\{|S| \ge S\}<P_0$, где $P_r\{A\}$ – вероятность события A, то полученный коэффициент ранговой конкордации τ считается значимым. При этом величину P_0 задают как уровень значимости и сравнивают вычисленное значение S с табличным для данного уровня значимости P_0.

Алгебраический метод (АМ)

Суть его состоит во введении некоторого расстояния между оценками экспертов. Задача состоит в сопоставлении системе некоторой ранжировки. Для решения этой задачи используется экспертиза Э4:

Ω – множество всех нестрогих ранжировок n объектов.
$\Omega_э = \Omega$.
L – эксперты изолированы.
Q – ОС отсутствует.
Отображение φ определяется следующим образом: результирующая оценка A_0 находится из след. формулы

$$A_0 = Arg \min_{A \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} d(A, A^i),$$

где Arg min g(*) – определяется по следующей зависимости: Arg min g(x) = $\{x^* \in A \mid g(x^*) = \min g(x)\}$, d – расстояние между ранжировками.

Дадим описание нестрогих ранжировок и определим расстояние d между ними.

Ранжировки будем задавать матрицами $A=\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=1$, тогда только тогда, когда i-й объект предшествует j-му. Если объекты i и j – равноценны, то $a_{ij}=0$. Диагональные элементы a_{ij} будут равны 0 для всех i=1..n. Из того, что $a_{ij}=1 \rightarrow a_{ji}=-1$. Будем говорить, что некоторая ранжировка С находится между ранжировками А и В, если выполняется следующая зависимость:

$a_{ij} \le c_{ij} \le b_{ij}$; i,j=1..n, или
$a_{ij} \ge c_{ij} \ge b_{ij}$; i,j=1..n.

Расстояние d между ранжировками вводится аксиоматически:

1) **Первая аксиома:** d(A,B)≥0, причём d(A,B)=0 тогда и только тогда, когда A=B.

2) **Вторая аксиома:** d(A,B)=d(B,A) – аксиома симметричности.

3) **Третья аксиома:** d(A,B)+d(B,C)≥d(A,C). Причём равенство достигается тогда, когда, B находится между A и C – аксиома треугольника.

4) **Четвёртая аксиома:** Расстояние d инвариантно относительно обозначений. Это означает, что при одинаковых перестановках объектов внутри ранжировок A и B, расстояние между новыми ранжировками A' и B' равно расстоянию между A и B, то есть равно d(A, B).

5) **Пятая аксиома:** Если две ранжировки отличаются друг от друга только на части объектов, то расстояние между исходными ранжировками равно расстоянию между ранжировками только этих объектов.

6) **Шестая аксиома:** Минимальное положительное расстояние между ранжировками равно единице (то есть вводится метрика для понятия расстояние между ранжировками – измеряется в целых числах).

Методы шкалирования (МШ)

МШ в простейшем случае используются в экспертизах следующего типа: Эксперты оценивают попарные различия между объектами, указывая соответствующие числа. Задача состоит в сопоставлении каждому объекту точки пространства E_r, а всей системе, состоящей из n объектов, сопоставление n точек в пространстве E_r так, чтобы расстояние в пространстве E_r между точками были достаточно близки к указанным экспертами числам. Таким образом, решением задачи оценки в данном случае является вектор длины $n \cdot r$.

Контрольные вопросы:

1. Основные группы методов обработки экспертной информации.
2. Статические методы.
3. Группы статических методов.
4. Понятие численных оценок.
5. Ранжирование и корреляция.
6. Алгебраические методы.
7. Методы шкалирования.

ЛЕКЦИЯ 7.

АЛГОРИТМЫ И ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Общая характеристика алгоритмов в задачах принятия решений

В соответствии с ранее рассмотренной схемой, сначала формируют ИМА, а затем решают ЗВ из ИМА. Алгоритмы формирования ИМА составляют существенную часть алгоритмического обеспечения задач ПР.

При отсутствии априорной информации о свойствах альтернатив, в качестве исходного используют универсальное множество всех мыслимых альтернатив $\Omega_у$. Если решать ЗВ при такой ИМА, она оказывается достаточно сложной и не всегда разрешимой.

Чтобы избежать такой ситуации, используют свойство решаемой задачи и выделяют в $\Omega_у$ некоторую область возможных альтернатив $\Omega_в \subseteq \Omega_у$. Можно считать, что

$\Omega_в$ – есть результат выбора с помощью некоторой ФВ из $\Omega_у$:

$\Omega_в=C_{оп1}(\Omega_у)$,
где $C_{оп1}$ – ФВ, устанавливающая принадлежность альтернатив к множеству возможных.

Альтернативы, принадлежащие множеству $\Omega_у \backslash \Omega_в$ никогда не могут быть решениями рассматриваемой задачи.

Наличие дополнительной информации о свойствах задачи в виде технических, экономических и других ограничений, позволяет выделить из $\Omega_в$ множество допустимых альтернатив (**МДА**) Ω, которое и принимается за ИМА. Можно считать, что при этом решается задача $<\Omega_в, ОП_2>$, где $ОП_2$ – ПО, выражающий условие допустимости альтернатив.

Таким образом, в общем случае, процесс формирования ИМА описывается схемой, *включающей два этапа:*

- Порождение возможных альтернатив.
- Проверка их на допустимость.

В конкретных алгоритмах эти этапы могут совмещаться.

При проверке допустимости альтернатив, для конечных ИМА проверяют каждую альтернативу, а для бесконечных – устанавливают границу допустимости для всего множества.

Алгоритмы формирования ИМА

Рассмотрим процедуру экспертного перечисления в виде экспертизы Э5:

Ω=B($\Omega^{\wedge}$), где B(A) обозначает множество подмножеств A
$\Omega_э = \Omega$.
L – эксперты изолированы.
Q – экспертом представляется множество $\bar{\Omega}$ и вероятности P_j (смотри ниже), то есть Q $\rightarrow \Omega^{\sim}$ и P_j.
φ – отображение φ определяется следующим образом: Получить от каждого из N экспертов множество X_i альтернатив, которое, по мнению этого эксперта, следует включить в Ω^*. Построить множество: $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ – объединение множеств X_i, где $|\tilde{\Omega}| = n$ мощность этого множества:
Далее найти матрицу $R=\|r_{ij}\|$, i, j = 1..n, а элементы этой матрицы:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, if \ j - я\ альтернатива\ принадлежит\ мн-ву\ X_i \\ 0, в\ противном случае \end{cases}$$

И вычислить: $P_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_{ij}}{N}$ (*)

При этом величина P_j рассматривается как вероятность того, что j-я альтернатива принадлежит Ω^*. Далее, сформировать искомое множество альтернатив Ω^*, включив в него альтернативы, для которых $P_j>P$, то есть вероятность этих альтернатив $P_i>P$; где P – заранее заданная пороговая вероятность.

ОС в экспертизе Э5 организуется так:

Ответ каждого из экспертов рассматривается как ранжировка множества Ω^-. J-я альтернатива получает ранг r_{ij}, вычисляемый по формуле для r_{ij}. Подсчитывается коэффициент конкордации W полученных N ранжировок по формуле, рассмотренной ранее.

Если W меньше заранее заданного уровня W_0, то экспертам представляются множество Ω^- и вероятности P_j, вычисленные по формуле (*) и проводится следующая итерация экспертизы Э5.

В противном случае, если коэффициент конкордации нормальный, экспертиза заканчивается.

Первый алгоритм формирования конечного ИМА

Для порождения альтернатив и проверки их на допустимость используется экспертиза Э5. Алгоритм реализуется следующей последовательностью шагов:

- ✓ Выделить Ω_B из Ω_y с использованием экспертизы Э5, в которой положить $\Omega^\wedge=\Omega_y$, а искомое $\Omega^*=\Omega_B$. То есть происходит как бы замена формальных параметров на фактические и обращение к Э5.
- ✓ Выделить Ω из Ω_B с использованием экспертизы Э5, в которой положить $\Omega^\wedge=\Omega_B$, $\Omega^*=\Omega$, где Ω – искомое ИМА. То есть происходит замена фактических параметров; обращение к Э5.

Второй алгоритм формирования конечного ИМА

Формирование ИМА с помощью модели.

Пусть непосредственное порождение Ω_B с помощью экспертизы Э5 невозможно. Но известен регулярный способ (модель) порождения любой альтернативы из Ω_B.

Например, пусть заданы правила полётов самолётов, в то же время число всех вариантов расписаний очень велико. Параметры модели заранее не известны, но они могут быть найдены экспертами. Тогда этот алгоритм реализуется следующей последовательностью шагов:

✓ С помощью экспертизы Э1 определить числовые параметры модели.

✓ Используя модель, найти множество Ω_B возможных альтернатив.

✓ Найти множество Ω с использованием экспертизы Э5, в которой положить $\Omega^{\wedge}=\Omega_B$, $\Omega^*=\Omega$.

✓ Сравнить величину $q = |\Omega| / |\Omega_B|$, где $|\Omega|$ - мощности $|\Omega_B|$. q – оценивает качество используемой модели с некоторым заранее заданным числом p. И если $q \geq p$, алгоритм прекращает работу, в противном случае произвести корректировку модели и перейти к первому шагу алгоритма.

Контрольные вопросы:

1. Общая характеристика алгоритмов.
2. Процесс формирования исходного множества альтернатив.
3. Этапы формирования исходного множества альтернатив.
4. Алгоритмы формирования исходного множества альтернатив.
5. Первый алгоритм формирования исходного множества альтернатив.
6. Второй алгоритм формирования исходного множества альтернатив
7. В каком алгоритме формирования исходного множества альтернатив используется модель?

ЛЕКЦИЯ 8.

ЗАДАЧА ВЫБОРА

Задача выбора(ЗВ) является частным случаем задачи ПР. В ЗВ ИМА известно заранее. Решение ЗВ обычно получают путём её сведения к частным и простым задачам с использованием ранее рассмотренных декомпозиций ФВ.

Математическая задача выбора (МЗВ)

Будем считать, что для любой ФВ C известно её значение на некоторых подмножествах: $X\subseteq\beta^*\subseteq\beta(\Omega)$ и её принадлежность к некоторому множеству функций $M^*\subseteq M(\Omega)$, где $\beta^*(\Omega)$ – множество подмножеств из Ω, $M(\Omega)$ – множество ФВ, определённых на Ω.

В случае, когда $\beta^*=\varnothing$ и когда $M^*=M(\Omega)$ – это соответствует отсутствию информации о функции C. В случае, когда $\beta^*=\beta(\Omega)$ – соответствует полному описанию функции C.

Зададим описание функции C парой: $<M^*, \beta^*>$. В отличие от общей ЗВ, назовём математической ЗВ тройку: $<\Omega, M^*, \beta^*>$, где Ω - заданной множество альтернатив.

$C\in M^*\subseteq M(\Omega)$.

$C(x)$ – известно для любой $X \in \beta^* \subseteq \beta(\Omega)$. Решением МЗВ является множество $\Omega^*=C(\Omega)$ – то есть выбор из Ω.

Данная задача разрешима, если Ω^* однозначно определяется по множеству M^* и значением функции C, определяемых на всех $X \subseteq \beta^*$. Если $\Omega \in \beta^*$, задача разрешима и её решением является значение функции C на Ω.

Введём на множестве функций M^* отношение эквивалентности R_1: $C' R_1 C'' \Leftrightarrow C'(x)=C''(x)$ для любого $X \in \beta^*$.
Отношение эквивалентности R_1 задаёт на множестве M^* разбиение, которое обозначим $\Re_1$. Это разбиение, когда каждый его элемент состоит из всех эквивалентных по отношению к R_1 функций.

Введём на множестве M^* отношение эквивалентности R_2: $C' R_2 C'' \Leftrightarrow C'(x)=C''(x)$. Соответствующее разбиение обозначим через $\Re_2$.

<u>Теорема:</u> МЗВ $<\Omega, M^*, \beta^*>$ разрешима тогда и только тогда, когда разбиение $\Re_1$ вложено в разбиение $\Re_2$ (без доказательства).

<u>Пример</u>:

Пусть M^* - множество всех нормальных функций выбора. Пусть β^* - все двухэлементные и одноэлементные подмножества Ω. Задача при таких условиях: $<\Omega, M^*, \beta^*>$, то есть эта МЗВ – разрешима. Её решением является множество Ω^R всех альтернатив, недоминируемых по отношению к R, которое однозначно определяется по выбору из всех множеств, принадлежащих β^*.

Алгоритм решения общей ЗВ

Рассмотрим общую ЗВ. Назовём задачу $<\Omega, ОП>$ – простой, если её решение: $\Omega_{оп}=C_{оп}(\Omega)$ может быть найдено непосредственно, например, указано лицом, принимающем решение. Решение простых задач не требует специальных алгоритмов. Сведём задачу, не являющуюся простой к МЗВ.

Для этого нужно:

- Найти множество M^*, содержащее $C_{оп}$, то есть указать класс ФВ, к которому принадлежит $C_{оп}$.
- Найти β^*, то есть множество всех подмножеств $X \subseteq \Omega$, для которых задача $<X, ОП>$ с тем же принципом оптимальности является простой. Если полученная таким образом МЗВ оказалась разрешимой, то её решение является решением исходной задачи.

Пусть соответствующая МЗВ – неразрешима, тогда введём понятие **<u>частной ЗВ</u>**: $<\Omega, ОП_i>$, где $ОП_i$ – принцип оптимальности при учёте только i–го аспекта, оказывающего влияние на выбор из Ω.

Сформулируем частные задачи $<\Omega, ОП_i>$ и укажем Ψ композицию соответствующих функций $C_{опi}$ (i = 1..n). Решением исходной задачи $<\Omega, ОП>$ будет являться множество $\Omega_{оп}=C(\Omega)$, где C будет определятся как композиция частных функций:

$C = C(C_{оп1}, C_{оп2}, \ldots, C_{опn}; \Psi)$.

Проведённые построения соответствуют практически выявлению основных аспектов, влияющих на выбор и выявлению взаимосвязи этих аспектов.

Алгоритм решения общей ЗВ:

1. Проверить, является ли задача $<\Omega, ОП>$ простой. Если является, то алгоритм прекращается, иначе к шагу 2.
2. Сформулировать МЗВ $<\Omega, M^*, \beta^*>$, соответствующую исходной ЗВ.
3. Проверить, является ли задача $<\Omega, M^*, \beta^*>$ -разрешимой. Если разрешима, то алгоритм прекращает работу, иначе к шагу 4.
4. Сформулировать частные задачи $<\Omega, ОП_i>$ $(i = 1..n)$.
5. Положить $i=0$. (Счетчик циклов)
6. Положить $i=i+1$.
7. Проверить, является ли задача $<\Omega, ОП_i>$ простой. Если да, то найти $\Omega_i=C_{опi}(\Omega)$ и перейти к шагу 12, иначе к шагу 8.
8. Сформулировать МЗВ $<\Omega, M_i^*, \beta_i^*>$, соответствующую частной задаче $<\Omega, ОП_i>$, то есть $<\Omega, M_i^*, \beta_i^*> \to <\Omega, ОП_i>$.
9. Проверить, является ли МЗВ $<\Omega, M_i^*, \beta_i^*>$ разрешимой. Если да, то найти $\Omega_i=C_{опi}(\Omega)$ и перейти к шагу 12, иначе к шагу 10.
10. Найти $M^{\sim*} \subseteq M_i^*$ и найти $\beta^{\sim*} \supseteq \beta^*_i$. Найти их так, чтобы хотя бы одно из этих включений было строгое.
11. Положить, $M_i^* = M^{\sim*}$ и $\beta^*_i = \beta^{\sim*}$ (замена переменных) и перейти к шагу 9.
12. Сравнить счётчик цикла с n. Если $i \neq n$, то перейти к шагу 6.
13. Задать Ψ-композицию функции выбора $C_{опi}$ из частных задач для всех $i=1..n$.
14. Найти $\Omega_{оп}$ по следующим формулам:

$\Omega_{оп}$: $x \in \Omega_{оп} \Leftrightarrow \Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)=1$, где $\gamma_i=1$, если $x \in \Omega_{опi}$, иначе $\gamma_i=0$.

Реализация шагов 1,2,4,7,8,10,13 может потребовать участия ЛПР, в частности,

на шаге 1 определяется решение исходной ЗВ из Ω,
на шаге 7 – решение частных задач, на шаге 2 получают информацию о принципе оптимальности ОП и о множествах, на которых ЗВ является простой.
на шаге 8 получают соответствующую информацию о частных задачах,
на шаге 10 уточняется информация о частных задачах,
на шаге 4 определяются основные аспекты, которые необходимо учитывать при выборе,
на шаге 13 – взаимосвязь этих аспектов и сравнительная важность.

Вывод:

Таким образом, при решении ЗВ с помощью этого алгоритма реализуется одна из трёх возможностей:

1. Исходная задача $<\Omega, ОП>$ является простой.
2. МЗВ $<\Omega, M^*, \beta^*>$ разрешима.
3. МЗВ $<\Omega, M^*, \beta^*>$ неразрешима.

Такое построение данного алгоритма позволяет использовать сложные конструкции типа композиций частных ФВ в случае только необходимости. В остальных случаях достаточно только шагов 1-3. Данный алгоритм может иметь много модификаций в зависимости от свойств решаемой задачи, которые отличаются шагами, необходимыми для решения данной задачи и способами реализации отдельных шагов.

Контрольные вопросы:

1. Как получается решение задачи выбора?
2. Математическая задача выбора.
3. Теорема математической задачи выбора.
4. Алгоритм решения общей задачи выбора.
5. Простая задача выбора.
6. Сведение общей задачи выбора к простой задаче выбора.
7. Разрешимые и неразрешимые задачи выбора.

ЛЕКЦИЯ 9.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В процессе управления часто приходится принимать решения, реализация которых осуществляется в неизвестной к моменту принятия решения ситуации. Задача заключается в поиске наилучшего решения из заранее заданного множества допустимых. Причём решения, оптимальные при одних условиях реализации, могут быть неприемлемыми для других условий.

Необходимо иметь некоторый формальный критерий, обеспечивающий выбор наилучшего решения в условиях неопределённости. В качестве такого критерия наиболее часто используют минимум потерь, которые может понести ЛПР. Потери при этом измеряются в тех или иных единицах, например, стоимость, объём конечной продукции, время и т.д.).

Пусть известны следующие 2-а множества:

- Множество допустимых решений: $R=\{r_i\}$ $(i=1..n)$.
- Множество возможных ситуаций: $S=\{s_j\}$ $(j=1..m)$.

Пусть потери заданы некоторой функцией потерь A, которая представляет собой зависимость от двух аргументов: от решения и от ситуации. То есть **<u>функция потерь (ФП)</u>** есть числовая функция, определённая на множестве R*S (декартово произведение), то есть на множестве всех пар (r_i, s_j), где $r_i \in R$, $s_j \in S$.

$A: R*S; (r_i, s_j), r_i \in R, s_j \in S.$

Число $a_{ij}=A(r_i, s_j)$ называют **<u>потерей</u>**, сопутствующей решению r_i при ситуации s_j. ФП может быть задана в табличной форме, то есть в виде матрицы потерь.

Существенный этап решения задачи состоит в преобразовании ФП в **<u>функцию риска (ФР)</u>**. Последняя определяет возможные потери ЛПР в зависимости от уже одного аргумента, а именно от принимаемого решения.

Зафиксировав некоторое решение $r' \in R$ из двухаргументной функции $A(r_i,s_j)$ получим новую, одноаргументную функцию, отражающую зависимость потерь от ситуации при фиксированном решении r'.

Обозначим эту функцию через $A'(r', s_j)$.

Преобразование ФП в ФР может быть осуществлено применением к всевозможным функциям вида $A'(r', s_j)$ некоторого функционала P. Результат, который запишем как

$\rho(r')=P\{A'(r',s_j)\}$,

представляет собой число, которое называется риском, связанным с решением r'.

Наилучшим решением, если оно существует, является такое решение $r^* \in R$, которое минимизирует риск на множестве всех решений R, то есть:

$\rho(r^*)=\min \rho(r_i), r=1..n, r_i \in R.$ **(1)**

Вид функционала P выбирает ЛПР; это является самостоятельной задачей. Существуют различные критерии риска, применимость которых зависит от характера неопределённости ситуации.

Можно выделить два основных случая таких неопределённостей:

- Ситуация реализуется случайным образом, без какой либо связи с наличием ЛПР. Совокупность причин, управляющих ходом случайных событий называется **<u>состоянием природы</u>**. Каждое **<u>событие природы (СП)</u>** представляет собой некоторую ситуацию. Неопределённое СП имеет две разновидности, а именно: когда о фактическом СП не известно ничего, кроме множества S, из которого оно может быть выбрано, и второе: когда дополнительно известно распределение вероятностей возможных СП.

- Во втором случае есть наличие целенаправленного противодействия, в результате которого из множества S неизвестным для ЛПР способом выбирается такая ситуация, которая предположительно должна привести к наибольшим для ЛПР потерям. Задачи такого типа рассматривает теория игр. Зафиксировав некоторую ситуацию $s' \in S$ от двухаргументной функции $A(r_i,s_j)$ переходим к одноаргументной функции $L(r_i,s')$, которая отражает зависимость потерь от принимаемого решения $r_i \in R$. Для каждой фиксированной ситуации s' будем иметь числовую функцию, которую обозначим $L_j(r_i,s')=L_j(r_i)$. Поставим в соответствие функциям L_j координатные оси некоторого многомерного пространства.

Рассмотрим случай двухмерного пространства, то есть двумерное пространство L с осями $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Каждое решение $r_i \in R$ будет характеризоваться в пространстве L точкой с координатами $(L_1(r_i);L_2(r_i))$.

Если в пространстве L расположены две точки, а именно r_1:
$(L_1(r_1);L_2(r_1))$ и r_2: $(L_1(r_2);L_2(r_2))$ такие, что
$L_1(r_1) \leq L_1(r_2)$ и $L_2(r_1) \leq L_2(r_2)$,

то говорят, что решение r_1 доминирует над решением r_2. Это означает, что при любой ситуации потери при решении r_2 больше, чем при r_1. Следовательно, r_2 в дальнейшем можно исключить из рассмотрения при выборе наилучшего решения.

Такое решение, над которым не доминирует ни одно другое называют допустимым. Таким образом, из множества R следует оставить для выбора только допустимые решения, то есть такие, что для любых двух из них, а именно,

$r_s \in R$ и $r_k \in R$, где $S \neq K$, всегда существует по крайней мере два таких условия:

$L_i(r_s) < L_i(r_k)$, $L_j(r_s) > L_j(r_k)$, $i \neq j$,

что для i-й координаты решение r_s доминирует над r_k, а для другой координаты наоборот и, следовательно, ни одно из решений не доминирует над другим, а следовательно, оба решения допустимы.

Понятно что, в рассмотренном многомерном пространстве допустимые решения образуют границу выпуклого многогранника.

Критерий выбора наилучшего решения

Критерий минимакса (КМ)

КМ не требует никакой дополнительной информации о возможных ситуациях, кроме указания самого множества ситуаций $S=\{s_j\}$. Во многих практически важных случаях наилучшее решение r^* удовлетворяет следующему условию:

$$\rho(r^*) = \min_{r_i \in R}(\max_{s_j \in S}(A(r_i, s_j))) \qquad \textbf{(2)}$$

которое называется **минимальным критерием (МК)**.

КМ гарантирует, что даже при наихудшей ситуации потери не превысят некоторого минимума, а остальные ситуации будут в этом смысле более благоприятными (или по крайней мере не хуже).

В рассмотренном многомерном пространстве МК означает фиксацию максимальных потерь для каждой ситуации, то есть фиксирует $\max_j L_j(r_i)$ и затем выбор такого их допустимых решений, которому соответствует уже $\min \max L_j(r_i)$ – минимум максимума.

Определим в пространстве L некоторую функцию от C, равную: $U(C)=\{(L_1, L_2): \max (L_1, L_2)=C\}$ и будем задавать последовательно возрастающие значения C, начиная от 0, пока U(C) не достигнет границы выпуклого многогранника, образованного допустимыми решениями. Полученная точка касания, если она совпадает с вершиной многогранника и есть решение r^*, удовлетворяющее КМ. В случае касания с гранью многогранника следует попеременно выбирать решение, соответствующее ближайшим вершинам с частотами, определяемыми некоторыми дополнительными условиями.

Критерий Байеса (КБ)

КБ можно использовать только при такой неопределённости ситуации, когда на множестве S всех возможных ситуаций известно априорное распределение вероятностей ситуаций: $P(s_j)$. Данный критерий минимизирует средние потери, в отличие от МК, минимизирующего максимальные потери, то есть риск здесь определяется как математическое ожидание:

$$\rho(r_i) = \sum_{s_j \in S} A(r_i, s_j) \cdot P(s_j) \qquad \textbf{(3)}$$

То есть значение ФР умножается на значение вероятности и суммируется.

Наилучшим будет решение, минимизирующее риск, которое определяется по формуле:

$$\rho(r^*) = \min_{r_i \in R} \sum_{s_j \in S} A(r_i, s_j) \cdot P(s_j) \qquad \textbf{(4)}$$

Таким образом, МК является частным случаем КБ при наихудшем, в смысле потерь, априорном распределении вероятностей.

Основная задача (при оптимизации ф-ии потерь)

Рассмотрим в пространстве L семейство прямых, которое можно записать следующими выражениями:

$p_1L_1+p_2L_2=const;\ p_1+p_2=1;$ **(5)**

Последовательно рассматривая прямые этого семейства от начала координат, найдём прямую, которая касается границы выпуклого многогранника. Точка касания определяет оптимальное решение. Рассмотренная задача ПР является одновременно самой простой и самой важной. Её называют основной задачей.

Исследованы различные частные случаи обобщения данной задачи. Если все состояния природы априори равновероятны, то потери при оптимальном решении r^* определяются следующим выражением:

$$\rho(r^*) = \min_i \left[\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right] \qquad \textbf{(6)}$$

a_{ij} – значения элементов матрицы потерь (ф-ии потерь) $A(r_i,s_j)$.

Отметим, что подход минимакса рассчитан на наихудшие ситуации, гарантировав при этом наименьшие потери. Но при других ситуациях решение, принятое по МК, возможно, приведёт к большим потерям.

С учётом этого введём **коэффициент оптимизма (КО)** α, который принимает значения от $\alpha=0$ для крайнего пессимизма до $\alpha=1$ при наибольшем оптимизме. Оптимальным при таком подходе будет решение r^*, которому соответствуют потери, определяемые по формуле:

$$\rho(r^*) = \min_i \left[\alpha \cdot \min_j (a_{ij}) + (1-\alpha) \cdot \max_j (a_{ij}) \right] \quad \textbf{(7)}$$

При α=0 выражение (7) совпадает с выражением (2), то есть с выражением МК.

При α=1 принятое решение соответствует наименьшим из всех возможных потерь, то есть рассчитано на ситуацию, самую благоприятную для ЛПР.

Часто рассматривают вместо потерь a_{ij} разность b_{ij} между значением потерь при решении r_i и наименьшим из значений потерь при состоянии природы s_j: $b_{ij} = a_{ij} - \min_i (a_{ij})$

Величину b_{ij} называют “сожалением”, поскольку она определяет дополнительные, относительно возможного минимума потери, которые несёт от неудачного выбора ЛПР. Оптимальное решение здесь находят по следующему МК:

$$\rho(r^*) = \min_i (\max_j (b_{ij})) \quad \textbf{(8)}$$

В ряде случаев существует возможность наблюдения над состояниями природы, что позволяет использовать при выборе наилучшего решения результаты этих наблюдений. При такой постановке задачи ищут уже не наилучшее решение, а наилучшее решающее правило (стратегию), представляющую собой зависимость наилучшего решения от результатов наблюдения. Задачу в такой постановке называют стратегической.

Пусть Z – множество возможных результатов наблюдения над состояниями природы. Считаем известными априорные условные вероятности p(z/s) для всех $z \in Z$ и $s \in S$.

Стратегией называют всякое отображение $q \in Q$ множества Z во множество R, то есть: $q \in Q$: $Z \to R$.

Стратегическая задача (СЗ) заключается в поиске наилучшей стратегии q^* на множестве Q и сводится к основной задаче, в которой роль решений играют стратегии из множества Q, а роль функции потерь (ФП) – некоторая функция α такая, что для каждой пары (q, s) имеем:

$$\alpha(q,s) = \sum_{z \in Z} A(r(z),s) \cdot p(z/s) \quad \textbf{(9)}$$

где q – стратегия, s – СП, A – исходная ФП, z – наблюдения над состояниями природы, r(z) – решение, принимаемое по наблюдению z.

Так СЗ сводится к основной задаче.

Другой способ сведения СЗ к основной заключается в следующем: Пусть для всех $s \in S$ и $z \in Z$ известны априорные вероятности p(s) и p(z/s). Тогда для всех ситуаций S можно найти апостериорные вероятности p(s/z) по известной формуле Байеса:

$$p(s_j / z) = \frac{p(s_j) \cdot p(z / s_j)}{\sum_{j=1}^{m} p(s_j) \cdot p(z / s_j)} \quad \textbf{(10)}$$

После этого для каждого наблюдения z решают основную задачу, а именно, поиск на множестве R наилучшего решения, принимая при этом под вероятностью ситуаций $p(s_j)$ апостериорную вероятность $p(s_j/z)$, то есть $p(s_j) \leftrightarrow p(s_j/z)$.

Таким способом получают наилучшую стратегию, то есть такую функцию, которая ставит в соответствие каждому результату наблюдения наилучшее решение.

Контрольные вопросы:

1. Функция потерь.
2. Функция риска.
3. Что такое наилучшее решение?
4. Состояние природы и событие природы.
5. Критерий минимакса.
6. Критерий Байеса.
7. Стратегия и стратегическая задача.

ЛЕКЦИЯ 10.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫЕ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ (ФП)

Пусть имеем множество возможных действий X и результатов этих действий Y. В общем случае каждому действию $x \in X$ соответствует множество результатов $y(y \in Y)$: $x \in X \rightarrow y(y \in Y)$.

В зависимости от характера внешней среды могут быть выделены 4 группы условий, в которых принимаются решения:

1. **Условия определённости.** ПР соответствует тому, что каждому действию x соответствует определённый результат y.

2. **Условие риска.** ПР соответствует тому, что каждому действию x соответствует некоторое множество исходов $Y(x)$: $x \rightarrow Y(x)$. Каждый из этих исходов имеет вероятность появления $p(y/x)$: $x \rightarrow Y(x) \rightarrow p(y/x)$.

3. **Условие неопределённости.** ПР заключается в том, что каждому x соответствует множество исходов $Y(x)$, но вероятности появления каждого $y \in Y(x)$ – неизвестны.

4. **Условие активной внешней среды.** ПР состоит в том, что каждому x соответствует y, являющееся функцией от действий, предпринимаемых активной внешней средой. При этом активность внешней среды проявляется в поведении, диктуемом собственной целью.

Для ПР по оценке каждого из возможных действий вводят некоторые показатели и говорят, что для каждого действия определена **величина полезности (ВП)**, по которой можно судить о качестве действий. Обозначим ВП действия x через $u(x)$. Тогда ЗПР состоит в отыскании такого x^*, что:

$$u(x^*) = \max_{x \in X}(u(x)) \qquad \textbf{(11)}$$

В соотношении (11) учтены имеющиеся ограничения и критерии выбора решения. Действительно, все ограничения учтены при определении вида множества X (множество действий), а критерии учтены в виде функции u(x).

Рассмотрим вопросы ПР в условиях определённости. Здесь каждому x соответствует определённый исход y, который может характеризоваться как некоторой скалярной функцией: $x \rightarrow y \rightarrow \varphi(y)$, так и набором скалярных функций: $x \rightarrow y \rightarrow \varphi(y) \vee \varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_k(y)$, то есть φ - характеристика исхода.

В первом случае в качестве функции полезности (ФП) действия x может быть выбрана функция φ(y), то есть u(x)=φ(y). Если же исход y характеризуется набором функций $\varphi_i(y)$, то необходимо найти соответствующую этому набору ФП действия x.

Таким образом, мы столкнулись с ЗПР при наличии одного или многих критериев.

При выборе действия x с исходом y, которому соответствует скалярная функция φ(y), имеем задачу математического программирования. Большое количество практических задач соответствуют случаю, когда исход характеризуется набором функций $\varphi_i(y)$, то есть второму случаю. Для ПР часто пытаются найти ФП φ(y), выражая её через набор функций $\varphi_i(y)$.

Существует много различных способов выражения u(x) через $\varphi_i(y)$. Однако, весьма часто либо вид функции u(x) либо постоянные величины, входящие в неё не соответствуют фактической функции. В результате оказывается, что решения, принимаемые в соответствии с ФП – не наилучшие. Иногда решают задачу приближённо, то есть вместо наилучшего действия x отыскивают множество других действий, наилучших, по сравнению со всеми остальными в некотором смысле.

Напомним определение действий, наилучших парето. В них входят такие пары действий, для которых справедливо следующее утверждение: Если наилучшего парето действий x_k и x_l в наборе функций найдётся пара с отношением $\varphi_i(y_k) > \varphi_i(y_l)$, то обязательно должна существовать пара $\varphi_j(y_k) < \varphi_j(y_l)$. Множество действий наилучшего парето включает в себя фактически несравнимые действия, то есть действия, о которых нельзя уверенно сказать, какое из них лучше. Это обусловлено тем, что неясно, какая из функций набора важнее с точки зрения оценки действия в целом. Очевидно, что если множество Парето содержит лишь одно действие, то оно является наилучшим при любых разумных ФП.

В тех же случаях, когда не удаётся найти вид ФП, либо её постоянные, прибегают к помощи экспертов, которые дают оценки, позволяющие построить ФП или уточнить её параметры. Реализацию процесса ПР можно осуществить поэтапно. Например, результаты вариантных расчётов ЭВМ получает в своё распоряжение ЛПР. Затем ЛПР уточняет либо функцию $\varphi_i(y)$ или окончательно u(x). Затем ЭВМ выполняет новые вариантные расчёты и так до тех пор, пока не будет получено решение, удовлетворительное с точки данного ЛПР. В этом случае наряду с формализованными этапами происходит диалог ЛПР с ЭВМ.

ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫЕ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

При решении задач ПР целесообразно объединить возможности человека и ЭВМ, создавая человеко-машинные системы (ЧМС) ПР. Вряд ли создавать одну универсальную ЧМС ПР на все случаи жизни. На практике создают ЧМС, называемые проблемноориентированными. При этом наблюдается разветвление типов систем по типам задач выбора. Сейчас существует несколько самостоятельных направлений этого развития. Просмотрим эти направления, которые наиболее перспективны:

Пакет прикладных программ для выбора и принятия решений

К каждому направлению относятся программы и пакеты программ для решения определённых задач выбора. Примером этого направления может служить математическое и программное обоснование ЭВМ для статистической обработки данных, то есть для выбора в условиях стохастической определённости. Существует много стандартных ППП для решения таких ЗП. В дополнение к стандартному математическому обоснованию ЭВМ в ряде коллективов созданы ППП статистики. Некоторые пакеты основаны на идеях, позволяющих расширить классические постановки статистических задач. Также существует пакет “Статистика” для IBM-совместимых ПК. К этому направлению относятся также системы программного обеспечения оптимизационных задач, современные БД, СУБД и другие пакеты.

Экспертные системы (ЭС)

Это одно из основных приложений теории искусственного интеллекта (ИИ). В области систем ИИ самое практичное – создание ЭС. Таким образом, ЭС – это вычислительная система, в которую включены знания специалистов о некоторой конкретной проблемной области, и которая в пределах этой области способна принимать экспертное решение. ЭС применяется в медицинской диагностике, обнаружение неисправностей в электрооборудовании, геологоразведка, сельское хозяйство, и другие направления.

<u>Основные характеристические особенности ЭС:</u>

1) ЭС ограничена определенной сферой экспертиз.
2) ЭС способна рассуждать при сомнительных данных.
3) ЭС способна объяснить цепочку своих рассуждений понятным для пользователя способом.
4) Факты и механизмы вывода чётко отделены друг от друга, то есть знания не кодируются в дедуктивные процедуры.
5) ЭС строится так, чтобы имелась возможность постепенного наращивания системы.
6) Чаще всего ЭС основано на использовании правил, например, наиболее употребительный формат правил в базе знаний – это формат: если <условие> то <действие>. При этом действие может быть и действие по изменению содержимого как БД так и базы знаний (БЗ).
7) На выходе ЭС ведаёт совет по принятию решения, то есть не таблицу, а чёткий совет.
8) ЭС должна быть экономически выгодной.

Если сравнивать ЭС с традиционными системами по обработке данных (ОД), то можно сказать, что если традиционные системы по ОД строились по принципу:

данные + алгоритм = программа,

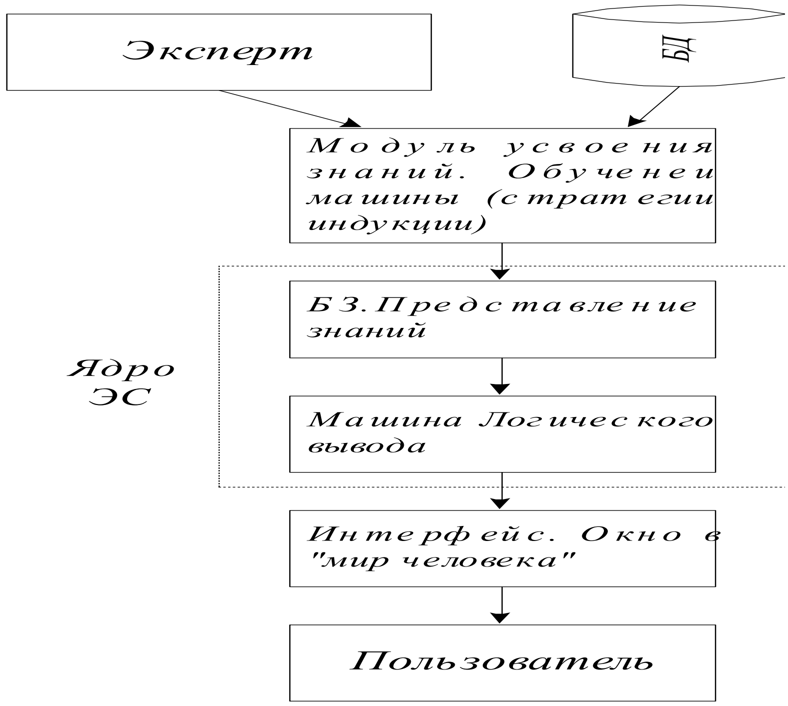
то в ЭС формируется принципиально новая архитектура, основу которой составляют БЗ и машина логического вывода, то есть ЭС строится по принципу:

знания + вывод = Система по выбору и ПР.

Для реализации всех функций, присущих ЭС, она должна включать в себя следующие компоненты:

1. База знаний.
2. Машина логического вывода (МЛВ).
3. Модуль извлечения и усвоения знаний.
4. Система объяснения (интерфейс).

Взаимодействие компонент ЭС на рисунке:



Структура типичной ЭС

База знаний

Содержит факты (утверждения) и правила. Факты представляют собой краткосрочную информацию в том отношении, что они могут изменятся в ходе консультаций с экспертами. Правила представляют собой более долговременную информацию о том, как порождать новые факты или гипотезы из того, что сейчас известно машине. Правила продукций являются предпочтительным средством отображения неформальных знаний.

Правила продукций имеют формат: “если” … “то”.
Правило может иметь коэффициент правдоподобности Р.

Такие правила не воплощены в какую-то программу, а представляют собой данные для высокоуровневого интерпретатора, а именно для МЛВ.

Правила продукций – не единственный способ представления знаний. Для представления знаний в других системах используется, например, деревья решений, семантические сети, фреймы, а также исчисления предикатов.

Машина логического вывода (МЛВ)

В ЭС используется обычно две различных цепочки для логического вывода, а именно, прямая цепочка (ПЦ) рассуждений и обратная цепочка (ОЦ) рассуждений.

ПЦ связана с рассуждениями, ведущимися от данной гипотезы, тогда как
ОЦ – с попыткой найти данные для доказательства или опровержения некоторой гипотезы.

Чисто ПЦ рассуждений ведёт к неуправляемому режиму задания вопросов в диалоге, тогда как ОЦ будет, как правило, приводить к настойчивому повторению вопросов, касающихся цели. Поэтому наиболее удачные ЭС используют комбинацию этих цепочек.

Процедуры вывода, работающие как в прямом, так и в обратном направлении, будут иметь дело с ненадёжными данными. В настоящее время имеются в ЭС различные средства работы с неопределённостью, другими словами, с реальным миром, а не с некоторой идеализированной абстракцией, в которую заставляли нас верить классические системы данных.

Контрольные вопросы:

1. Группы условий, в которых принимаются решения.
2. Условия определенности и условия риска.
3. Условия неопределенности и условия активной внешней среды.
4. Величина полезности.
5. Пакет прикладных программ для выбора и принятия решений.
6. Экспертные системы и их особенности.
7. База знаний.

ЛЕКЦИЯ 11.

СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ РЕШЕНИЙ

Способы работы с неуверенностью в данных

Это нечёткая логика, Байесовская логика, коэффициенты уверенности, многозначная логика и другое. В большинстве БЗ предусмотрена избыточность, которая позволяет экспертной системе прийти к правильному заключению несколькими различными маршрутами. Числа, измеряющие степень доверия к данным, в большинстве ЭС служат лишь для тонкой постройки. По этой причине можно выбирать любую меру ненадёжности данных из тех, которые устраивают пользователя и разработчика.

Модуль извлечения и усвоения знаний, Стратегия индукции

Знания – дорогой ресурс. Как же они получаются? До последнего времени узким местом в развитии ЭС было усвоение знаний в машинно-употребимых формах. Большинство экспертов известны своей неспособностью определить, каким образом они приходят к определённым решениям. То есть проблема заключается в формализации опыта эксперта.

Традиционный способ извлечения знаний состоит совместной неформальной работе через общение опытного эксперта и опытного специалиста по технологии знаний. Они в течении длительного времени обговаривают закодированный вариант того, что знает специалист и эксперт.

Поэтому есть потребность в автоматизации процесса извлечения знаний. К настоящему времени известны ряд попыток решения этой проблемы. Существует программа EURISCO. Используемый в этой программе язык описаний достаточно выразителен для того, чтобы в программе присутствовало в зачаточной форме самосознание, которое выражается метаправилами (правилами того, как формируются правила). EURISCO – программа с высокой степенью интроспекции. Она тратит массу времени на управление своим поведением, запоминает обнаруженные его правила и применяет эти правила к самой себе.

Подсистема объяснения

Эта функция реализуется подсистемой интерфейса, которая и обеспечивает возможность объяснения человеку того, что делает ЭС. В любой момент в таких ЭС можно спросить у системы, почему была сделана такая дедукция, или почему система задала такой вопрос пользователю. В системе, основанной на использовании правил, ответ обычно получается путём прослеживания ещё раз тех шагов рассуждения, которые привели к данному вопросу или к данному заключению. Это достигается довольно легко. И эта лёгкость и является аргументом в пользу систем, основанных на правилах.

Средства объяснений не следует рассматривать как одну из возможных черт ЭС. Специалисты указывают на обречённость систем, в которых не предусмотрено когнитивное окно (основанное на знаниях) для человека, то есть действие которых носят скрытый, необъяснимый характер. Таким образом, в ЭС должны быть предусмотрены расспрашивания и инспекции. Метод рассуждения, который не может быть объяснён человеку, является неудовлетворительным, даже если с ним система работает лучше, чем специалисты.

Области использования ЭС

Приведём контрольный список характеристик степени пригодности использования ЭС и БЗ.

Подходит	*Не подходит*

Диагностика и другие подобные сферы деятельности. Нет установившейся теории решения задач. Когда мало специалистов, умеющих решать такие задачи. Когда данные различны, “зашумлены”, недостоверны.	Вычислительные задачи. Существует подходящая формула решения. Когда много специалистов. Когда известны точные факты.

Если рассмотренные конкретные приложения больше относятся к левой части таблицы, чем к правой, то следует всерьёз рассмотреть перспективу использования экспертной системы (ЭС).

Под диагностической задачей понимают не только медицинский диагноз. К задачам этого типа относится любая область, в которой имеется множество возможных ответов, и трудность состоит в том, чтобы выбрать из них один верный, или, по крайней мере, отбросить заведомо неверный. К таким задачам относятся многие задачи классификации и предсказания, например, диагностика неисправности вычислительной машины.

Под областью, где нет твёрдо установленной теории, подразумеваются области и задачи типа “Закона о налогах”, задачи ремонта двигателей, задачи прогноза погоды, медицинская диагностика и т.д. В таких задачах имеется слишком много переменных величин, затрудняющих создание полной и цельной теории. Так что во многом приходится полагаться на познание и интуицию специалиста. Этим самым исключаются задачи, в которых можно использовать некоторую форму, как, например, в случае движения небесных тел, где законов Ньютоновской механики вполне достаточно для расчёта полётов космического корабля и т.п.

Область с малым числом специалистов характеризуется высокой зарплатой специалистов, по спросу на них, характеризуется очередью (курсы переквалификации). Экономически оправдано автоматизировать те навыки, на которые высок спрос. При этом автоматизация простых навыков более сложная задача, чем автоматизация более сложных навыков.

Если имеющаяся информация надёжна и чётко задана, то использование ЭС не рекомендуется. Если же доступные данные не надёжны, то ЭС – то, что необходимо в таких случаях.

Выбор языка программирования (ЯП) для работы с БД

Имеются ошибочные мнения, что ЭС должны быть написаны на специальном ЯП (например ЛИСП или Пролог). Язык ЛИСП более 30 лет используется в исследованиях по искусственному интеллекту, но широкого распространения не получил, так как ПО ЛИСПА не стандартизировано.

Специалисты считают, что Пролог не перспективен в качестве языка для ЭС.

Минусы Пролога:

1. Содержит лишь весьма слабые средства защиты от незначительных ошибок в написании программ, которые могут привести к печальным последствиям.

2. Пользователю необходимо понимать детали реализации встроенного механизма возвращения при написании программ => нельзя признать число логических программ.

3. Порядок предложений в Прологе существенен для их значения, что противоречит логическому программированию.

4. Многие из встроенных предикатов дают побочные эффекты => язык непригоден для параллельной обработки.

5. Всё в БД носит глобальный характер, нет локальных фактов.

Плюсы Пролога:

1. Пролог “бесплатно” обеспечивает реляционные БД (но в памяти ПК).

2. Поиск в глубину введён с самого начала.

3. Последний Пролог содержит множество нестандартных улучшений.

Многие специалисты, при создании ЭС, советуют использовать те ЯП, которые в наибольшей степени известны разработчику. Дешёвое решение – приобрести оболочки ЭС и использовать ее в качестве прототипа.

При создании ЭС необходимы ПК IBM PC, начиная и 486-го и Apple Macintosh.
В настоящее время все специалисты в области информатики должны иметь знания и в области ЭС. Примеры ЭС – Nexus, Guru, G2(Gensym).

Системы поддержки решений

Существует три направления развития ЧМС.

1-е направление ориентировано на полную автоматизацию хорошо формализованных задач.
2-е направление – на создание систем, накапливающих опыт экспертов и в последствии заменяющих самих экспертов.
3-е направление – делает основной акцент на участие самого лица, принимающего решения в попытках формализовать задачу ПР, в самостоятельном сравнении и оценивании с помощью ЭВМ различных альтернатив разными способами.

Эти направления представлены системами интерактивной оценки решения или системами поддержки решения (системы DSS – Decision Support System). Разработка систем поддержки решений ведётся крупными разработчиками. Крупный международный проект, осуществляемый учёными ряда стран под эгидой международного института прикладного анализа в Люксембурге в Австрии. Идеолог такого подхода – Хатри.

Системы поддержки решений ориентированы не на автоматизацию функций ЛПР, а на предоставление ему помощи в поиске хорошего решения. Поэтому в таких системах особое внимание уделяется диалогу и его дружественности к ЛПР. В математике и программировании в обеспечение поддержки ПР входят формализованные процедуры, которые ЛПР может использовать в нужной ему степени.

Основные компоненты СПР:

1. База данных (Oracle, Sybase, Informix);
2. Средство генерации отчетов (запросов) (интерфейс с ЛПР, анализ данных ограничен);
3. Инструменты оперативно-аналитической обработки данных – позволяют анализировать данные, полученные на основе результатов п.2.(Oracle, Arbor Software, SPSS).
4. ПО интерпретации данных – наиболее интеллектуально; позволяет находить закономерности, делать прогнозы; реализует вероятностные, статистические, генетические и даже нейронные сети, а также методы нечеткой логики (Data Mind, IBM, ABTech, Silicon Graphics, Biocom System, Neuralware, SPPS, Megaputer Intelligens (Russia)).

Заключение: ПР в реальных ситуациях требует выполнения ряда функций, одни из которых более эффективно выполняет человек, а другие – машина. Эффективное объединение их достоинств выполняется в создании ЧМС. Поэтому, наряду с созданием чисто машинных программ и пакетов, для полного автоматического решения задач, в последние годы развиваются ЭС и системы поддержки решений.

Контрольные вопросы:

1. Способы работы с неуверенностью в данных.
2. Модуль извлечения и усвоения знаний.
3. Подсистема объяснения
4. Области использования экспертных систем.
5. Выбор языка программирования для работы с БД.
6. Достоинства и недостатки языка программирования Пролог.
7. Системы поддержки решений.

ЛЕКЦИЯ 12.

ГРУППОВОЙ ВЫБОР

В человеческом обществе единоличное принятие решения является не единственной формой выбора.

Описание группового выбора

Пусть на множестве альтернатив (МА) Ω задано в общем случае n индивидуальных предпочтений, которые обозначим как $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Будем говорить о бинарных отношениях. Ставится задача выработки некоторого нового отношения R, которое согласует индивидуальные выборы, выражает общее мнение и принимается за групповой выбор.

Очевидно, что это отношение должно быть какой-то функцией индивидуальных выборов:

$$R=F(R_1, R_2, \ldots, R_n).$$

Различным принципам согласования будут отвечать разные функции F. Теоретически, функции F могут быть совершенно произвольны, и учитывать не только индивидуальные выборы, но и другие факторы, в том числе и исход некоторых случайных событий, например, бросание жребия. Главное состоит в том, чтобы правильно отобразить функции F, особенности конкретного варианта реального группового выбора.

Различные правила голосования

Один из наиболее распространённых принципов согласования –

правило большинства.

Состоит в следующем: принятой всеми считается альтернатива, принятая большинством голосов. Правило большинства привлекательно своей простотой и демократичностью, но требует осторожности при обращении с ним.

Прежде всего, оно лишь обобщает индивидуальные предпочтения, и его результат не является критерием истины. Только дальнейшая практика показывает, правильно или ошибочно было решение, принятое большинством голосов. Само голосование – лишь форма согласования дальнейших действий.

Во-вторых, даже в простейшем случае выбора одной из двух альтернатив, легко представить себе ситуацию, когда правило большинства не срабатывает (например, соотношение голосов 50/50 при четном числе голосующих).

Это порождает следующие варианты:

1. Председатель имеет два голоса.
2. Простое большинство (51%).
3. Подавляющее большинство (3/4 голосов).
4. Абсолютное большинство ($\approx$ 100% голосов).
5. Консенсус, право вето (полное согласие, единогласие).

При любом из этих вариантов подразумевается отказ от ПР, если не одна из альтернатив не получила необходимого процента голосов.

В реальной жизни, отказ от дальнейших действий, следующих за решением бывает недопустим. В то же время замена группового выбора на выбор одного лица (диктатора) нежелательна. Поэтому разрабатываются различные приёмы, сокращающие ситуации, приводящие к отказу.

Например, если два эксперта дали противоположные предпочтения между двумя вариантами, то можно сделать выбор, сравнивая "силу предпочтения" каждого эксперта.

При возможности введения количественного критерия оценки, это сводится к арифметической операции, но и при порядковом сравнении есть возможность оценки силы предпочтения.

Пример: В криминалистической практике в таких случаях эксперту предлагается в одном ряду с предыдущими альтернативами a, b упорядочить по предпочтению ещё несколько альтернатив c, d, e.

Пусть 1-й эксперт дал следующее упорядочивание: (c,d,a,b,e),
а 2-й: (b,c,d,e,a).

А нам нужно упорядочить a и b. Тогда можно сделать вывод, что степень предпочтения b по сравнению с a у 2-го эксперта больше, чем степень предпочтения a у 1-го, и принять решение в пользу b.

За этим примером стоит ряд предположений, а именно, сравнимость интенсивности предпочтений, одинаковая компетентность экспертов и т.д. В ответственных случаях такие предположения требуют проверки. Даже для консенсуса разработаны приёмы, облегчающие его достижение.

Известный учёный Р. Акофф отмечает, что если не удавалось достичь консенсуса не только по самим альтернативам, но и по способу их проверки, нужно найти консенсусное решение того, что же делать дальше.

В таких случаях обычно принималось решение поручить выбор одному из ответственных и авторитетных лиц. Фактически, это переход от демократического, но не давшего решения правила голосования, к недемократическому, но давшему решение диктаторскому принципу. Теоретическое объяснение этого изложено ниже.

Парадоксы голосования

Следующая особенность правила голосования – возможность отказа выбора из-за не достижения, требуемого большинства голосов. Казалось бы, что исключив такую возможность, можно обеспечить ПР в любых случаях.

Например, пусть три эксперта большинством голосов решают, какая из двух альтернатив будет предпочтительнее: BEST или 1-С бухгалтерия. Здесь приходим к ещё одной особенности голосования – к его не транзитивности.

Пусть, *например*, каждая из 3-х фракций законодателей, образующих большинство лишь попарно, выдвинула свой вариант закона: a, b, c. Чтобы гарантировать большинство на каждом шаге процедуры, альтернативы предъявляются попарно.

Каждая фракция руководствуется при этом своим набором предпочтений. Пусть это последовательность: 1-я – a>b>c, 2-я – b>c>a, 3-я – c>a>b.

После голосования по паре (a,b) в результате получаем два голоса против одного, что a>b, то есть (a,b)=>a>b.

Аналогично, (b,c)=>b>c, и (c,a)=>c>a. Голосование большинством не привело к выяснению общепризнанного порядка альтернатив, то есть, что a>b>c, а имеем a>b>c>a – *нонсенс.*

В случае применения процедуры, по которой после рассмотрения очередной пары отвергаемая альтернатива заменяется новой. В этом случае, окончательно принятое решение зависит от порядка принятия альтернатив.

Если порядок (a,b,c), то будет выбрано c. В случае, если пары будут подаваться в последовательности (b,c,a), то выбор будет за a.

Вывод: если принять законопроект, то чьё мнение он будет выражать – большинства или нет – непонятно.

Такие решения не отвечают идеалам согласованного группового выбора. Причина этого парадокса – нетранзитивности ГВ, состоит в цикличности, совокупности исходных индивидуальных предпочтений. Однако это лишь частный пример более общего явления, получившего название парадокса Эрроу (или теорема о невозможности).

Контрольные вопросы:

1. Групповой выбор.
2. Описание группового выбора.
3. Различные правила голосования.
4. Правила большинства.
5. Когда не срабатывают правила большинства.
6. Парадоксы голосования.
7. Парадокс Эрроу.

ЛЕКЦИЯ 13.

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ШКАЛЫ

Измерение – алгоритмическая операция, которая данному наблюдаемому состоянию, объекту, процессу, явлению, ставит в соответствие определённое обозначение, то есть число, номер или символ. Такое соответствие обеспечивает то, что результаты измерений содержат информацию о наблюдавшемся объекте.

Количество информации зависит от степени полноты этого соответствия и разнообразия вариантов. Ясно, что чем теснее соответствие между состояниями и их обозначениями, тем больше информации можно извлечь в результате обработки данных. В начале будем рассматривать только те объекты, про любые два состояния которых можно сказать, различимы они или нет, и только такие алгоритмы измерения, которые различным состояниям ставят в соответствие разные обозначения, а одинаковым состояниям – одинаковые обозначения. В дальнейшем убедимся, что существуют не только такие типы измерений. Сказанное обозначает, что не только состояние объекта, но и их обозначения удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Либо A=B, либо A≠B.
2. Если A=B, то B=A.
3. Если A=B, B=C, то A=C (транзитивность).

Здесь символ ‘=’ означает отношение эквивалентности, в том случае, когда A и B – числа, он означает их равенство.

Шкалы наименований

Предположим, что число различных состояний (то есть число классов эквивалентности) конечно. Каждому классу поставим в соответствие обозначение, отличное от обозначений других классов. Теперь измерение будет состоять в том, чтобы проводя эксперимент над объектом определить принадлежность результата к тому или иному классу эквивалентности и записать это с помощью символа, обозначающего данный класс.

Такое измерение называется измерением в шкале наименований. Иногда эту шкалу называют *номинальной* или *классификационной*. Указанное выше множество символов и образует шкалу. Естественнее всего использовать шкалу наименований в тех случаях, когда классифицируются дискретные по своей природе явления объектов.

Для обозначения классов эквивалентности может быть использованы как слова естественного языка, произвольные символы, номера, так и их различные комбинации. Все эти обозначения эквивалентны простой нумерации, но на практике часто предпочитают другие обозначения, а не простую нумерацию.

Операции над данными, выраженными в номинальной шкале (обозначение классов – это символ, даже если для этого использованы номера). То есть номера – это внешне числа, а на самом деле – символы. С ними нельзя обращаться как с числами, за исключением равенства или неравенства). Только эти отношения определены между элементами номинальной шкалы.

Поэтому, при обработке экспериментальных данных, зафиксированных в номинальной шкале, непосредственно с самими данными можно выполнять только операцию проверки совпадения или несовпадения. Изобразим эту операцию с помощью символа Кронекера:

$\delta_{ij}=\{1{:}x_i=x_j;\ 0{:}x_i\neq x_j\}$, где x_i, x_j – результаты разных измерений.

С результатами этой операции можно выполнять более сложные преобразования, а именно, считать количество совпадений, например, число наблюдений k-го класса равно:

$n_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}$, где n – общее число наблюдений.

Можно также вычислить относительные частоты классов, например частота k-го класса равна: $p_k=n_k/n$. Можно сравнивать эти частоты между собой, находя, например, моду – номер наиболее часто встречающегося класса. Нахождение моды: $k_{\max} = \arg\max_k(P_k)$.

Можно выполнять различные статистические процедуры, строго следя, однако, чтобы в этих процедурах с исходными данными не выполнялось ничего, кроме операций проверки их на совпадение.

Порядковые шкалы

В тех случаях, когда наблюдаемый признак состояния имеет природу, позволяющее отождествить состояние не только с одним из классов эквивалентности, но и дающую возможность в каком-то отношении сравнить разные классы, в этом случае, для измерений можно выбрать более сильную шкалу, чем номинальная. Если же не воспользоваться этим, то мы откажемся от части полезной информации. Однако, усиление измерительной шкалы зависит от того, какие именно отношения между классами существуют в действительности. Это и явилось причиной появления измерительных шкал разной силы.

Следующей по силе номинальной шкалой является *порядковая* (*ранговая*) шкала. Данная шкала появляется, если кроме аксиом 1–3, классы удовлетворяют следующим аксиомам упорядоченности:

4) Если A>B, то B<A (если A предшествует B, то B следует за A).

5) Если A>B, B>C, то A>C.

Обозначив такие классы, которые удовлетворяют аксиомам 1–5 символами и установив между этими символами те же отношения порядка, мы получим шкалу простого порядка.

Примерами применения такой шкалы являются нумерация очерёдности, воинские звания, призовые места в корпусе и т.п. Иногда оказывается, что не каждую пару классов можно упорядочивать по предпочтению (некоторые классы считаются равными).

Во втором случае аксиомы 4–5 видоизменяются следующим образом:

4) Если A≥B, то B≤A.

5) Если A≥B и B≥C, то A≥C.

Шкала, соответствующая этим аксиомам, называется шкалой *слабого* порядка. Примером шкалы СП служит упорядочивание по степени родства с конкретным лицом.

Например, мать=отец > сын=дочь; дядя=тётя < сестра=брат.

Иная ситуация, когда существуют пары классов, несравнимые между собой. То есть A и B не вступают ни в соответствие A≥B, ни в соответствие B≥A. Это отличается от условия СП, когда одновременно A≥B и B≥A, то есть A=B. в таком случае говорят о шкале частичного порядка.

Отметим, что шкалы частичного порядка часто возникают в социологических исследованиях субъективных предпочтений (изучение покупательского спроса). Например, человек затрудняется выбрать одну из двух понравившихся вещей. Характерной особенностью порядковых шкал в строгом смысле является то, что отношение порядка ничего не говорит о дистанции между сравниваемыми объектами или классами объектов. Поэтому порядковые экспериментальные данные, даже если они изображены цифрами, нельзя рассматривать как числа. Над ними нельзя выполнять действия, которые приводят к получению разных результатов при преобразовании шкалы, не нарушающих порядок. Например, нельзя вычислять выборочное среднее порядковых вычислений (измерений):

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Так как переход к монотонно преобразованной шкале x'=f(x) даёт в результате, что выборочное среднее не будет работать:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{/} \neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Однако, допустима операция, позволяющая установить, какое из двух наблюдений x_i или x_j предпочтительнее, хотя формально эту операцию можно выразить через разность xi-xj. Введём индикатор положительных чисел, то есть функцию c(t)={1:t≥0; 0:t≤0}. Тогда если $x_i \geq x_j$ и мы ввели цифровую шкалу порядка, то $c(x_i-x_j)$ будет равно 1: $c(x_i-x_j)=1$. Это и позволяет установить предпочтительность x_i перед x_j.

Введём следующее число:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} c \cdot (x_i - x_j)$$

где n – число сравниваемых объектов.

Понятно, что $1 \leq R_i \leq n$ и будет натуральным числом. R_i – ранг i-го объекта (отсюда и происходит второе название порядковых шкал – ранговые шкалы). Если имеет место слабый порядок, то часть наблюдений совпадает. В статистике такая группа наблюдений называется *связанной*. И все члены связки получают одинаковый (старший для них) ранг (в ряде случаев это бывает неудобно).

Когда это неудобно, прибегают либо к присвоению ранга среднего для данной связки (мидранг), либо присваивают ранги от младшего к старшему случайным образом, то есть при измерениях порядковых шкал, обработка данных должна основываться только на допустимых для этих шкал операциях, то есть вычислении символа Кронекера δ_{ij} или ранга R_i. С этими числами можно работать дальше уже произвольным образом, а именно, кроме нахождения частот и мод, появляется возможность:

1) Определить выборочную медиану (то есть наблюдение с таким рангом R_i, которое ближе всего к числу n/2), n – число наблюдений.

2) Также можно разбить всю выборку на части в любой пропорции, находя выборочные кванторы любого уровня p: $0<p<1$, то есть наблюдения с рангом Ri, ближайшим к величине $n \cdot p$.

3) Можно определить коэффициенты ранговой корреляции между двумя сериями порядковых наблюдений. Например, коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла и коэффициент ранговой корреляции r_s Спирмена. С помощью полученных величин можно строить другие статистические процедуры.

Контрольные вопросы:

1. Понятие измерений.
2. Аксиомы состояния объекта.
3. Шкалы наименований.
4. Номинальная шкала.
5. Порядковая шкала.
6. Аксиомы упорядоченности.
7. Связанная группа наблюдений.

ЛЕКЦИЯ 14.

РАСПЛЫВЧАТОЕ ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ

Все измерительные шкалы, рассмотренные выше, имеют одно общее свойство: они основаны на справедливости отношения эквивалентности. Это отношение имеет силу как отдельно на множестве состояний наблюдаемого объекта и множестве наблюдений, зафиксированных в любой из шкал (два состояния или два наблюдения либо *тождественны* либо *различны*), так и на их совокупности (состояние и соответствующее ему измерение находятся во взаимно-однозначном соответствии). Использование рассогласованной, то есть более слабой, чем необходимо, шкалы, приводит к образованию на множестве состояний (МС) новых классов эквивалентности, внутри которых состояния неразличимы в данной шкале (хотя их и можно различать в более сильной шкале). Однако и в этом случае отношение эквивалентности соблюдается.

Понятие расплывчатости

В действительности, встречаются случаи, когда тождество или различие двух состояний или наблюдений нельзя утверждать с полной уверенностью. Наиболее явно это видно на примере шкал, в которых классы обозначаются конструкциями естественного языка. Например: “В комнату вошёл высокий молодой человек”. Класс, к которому принадлежит человек назван, то есть измерение состоялось. Но может возникнуть вопрос, какого он роста и сколько ему лет. Почти каждое наше слово естественного языка обозначает некоторое не вполне определённое множество.

Например, слово “почти” определяет некоторое расплывчатое множество, то есть неясно, какой процент имеется в виду. Это свойство естественного языка – природное и неотъемлемое, безусловно полезно, иначе оно бы не закрепилось в процессе развития языка. Но оно приводит к затруднениям, когда сопровождающая его неопределённость мешает.

Используя понятия рассмотренной теории нечётких множеств, говорим, что “куча” – это метка нечётко-определённого множества. Эта неопределённость языковых конструкций является одной из основных трудностей автоматизации анализа и синтеза речи, автоматического и неавтоматического перевода с одного языка на другой.

__Пример__. Рассмотрим английское предложение: “Time flies like an arrow” - время летит как стрела. Его переводы:

- Время летит стрелой.
- Время летит в направлении стрелы.
- Мухам времени нравится стрела.
- Измеряют скорости мух так же, как и скорость стрелы.

Всё сказанное выше объясняет понятие «*лингвистическая переменная*» – это переменная, значение которой расплывчато по своей природе, как метки размытого, расплывчатого множества. Эта теория была обоснована Л. Заде. Им был введён термин “расплывчатых множеств” – fuzzy sets.

Хотя теория размытых множеств, построенная Заде иллюстрируется языковыми примерами, размытость или расплывчатость являются не только свойствами естественного языка. Например, в математике применяются понятия: “>>” – значительно больше, “≈” – приблизительно равно, которые являются также понятиями расплывчатости.

Основные понятия теории расплывчатых множеств (РМ)

Пусть РМ А состоит из неопределённого числа элементов х. При этом признаке, при котором элементы включаются в РМ, не позволяют однозначно отделить все элементы, входящие в него, от элементов, ему не принадлежащих. Во вторых: по крайней мере некоторые элементы можно считать как относящиеся к множеству, так и не относящиеся к нему.

Важным элементом является понятие **функции принадлежности (ФП)** $\mu_A(x)$.

Считается, что для каждого элемента х можно задать число $\mu_A(x)$ из диапазона $0 \le \mu_A(x) \le 1$, выражающее степень принадлежности этого элемента х к расплывчатому множеству А. Если $\mu_A(x)=0$, то элемент х определённо не принадлежит к множеству А. Если же $\mu_A(x)=1$, то элемент х определённо входит в А. Величина $\mu_A(x)$, рассматриваемая как функция аргумента х, называется ФП. Если $\mu_A(x)$ принимает значения только 0 или 1, то множество А является *нерасплывчатым*.

Например, множеству А чисел, не превосходящих числа 7 соответствует ФП: $\mu_A(x)=1$ если $x \le 7$; $\mu_A(x)=0$ если $x>7$. Характерным признаком расплывчатости множества является наличие хотя бы одного элемента с ФП, отличной от 0 и 1.

Пример: Множество R^+ – множество положительных чисел становиться различным, если положить что $\mu_{R+}(0)=1/2$, так как есть основания считать 0 отчасти положительным, а в чём-то отрицательным числом, следовательно R^+ становиться РМ.

Итак, РМ A во множестве X определяется как совокупность упорядоченных пар:

$$A=\{x,\mu_A(x)\}, x\in X$$

Пустое РМ определяется как такое, для которого $\mu_A(x)=0$. Иногда удобно использовать понятие носителя S(A) размытого множества A, который определяется как такое множество, для которого выполняется следующее соотношение:

$$[x\in S(A)\subseteq X]\Leftrightarrow[\mu_A(x)>0]$$

То есть как такое множество, для элементов которого ФП будет больше нуля. РМ A называется **номинальным** тогда и только тогда, когда $\sup_x\mu_A(x)=1$ (когда верхняя граница равна 1), в противном случае множество A называется *субнормальным*.

Непустое субнормальное множество можно нормализовать, разделив $\mu_A(x)$ на $\sup_x\mu_A(x)$.

В связи с возможностью субнормальности следует дополнить определение расплывчатого множества случаем, когда $\mu_A(x)=const<1$ для любого $x\in S(A)$.

- Равенство двух РМ A и B определяется следующим условием:

$$(A=B)\Leftrightarrow[\mu_A(x)=\mu_B(x)], \quad \forall x\in X.$$

- Включение РМ A в множество B определяется следующим образом:

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow[\mu_A(x)\le\mu_B(x)], \forall x\in X.$$

- РМ A’ называется дополнением к РМ A тогда и только тогда, когда:

$$\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x), \forall x\in X.$$

Например, множество высокие люди и множество невысокие люди могут быть дополнениями друг друга, если сумма их ФП=1.

- Пересечение РМ A и B определяется следующим соотношением:

$$(A\cap B)\Leftrightarrow\mu_{A\cap B}(x)=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)], \forall x\in X.$$

- Объединением РМ A и B называется РМ:

$$(A\cup B)\Leftrightarrow\mu_{A\cup B}(x)=\max[\mu_A(x),\mu_B(x)], \forall x\in X.$$

В некоторых приложениях удобно определить такие составные множества, которые соответствуют конкретным арифметическим операциям над ФП соответствующих множеств.

♦ Алгебраическое произведение РМ А и В обозначается через А·В и определяется равенством:

$$\mu_{A\cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in X.$$

♦ Алгебраическая сумма обозначается А⊕В:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in X.$$

Понятие расплывчатого отношения (РО), введённого на РМ А

Говорят, что имеет место РО R на элементах x, y множества X и Y, если множество пар (x,y), удовлетворяющих отношению (x,y)⇔xRy образует РМ декартовых произведений X×Y, таким образом можно задать $\mu_R(x,y)$ как ФП пары (x,y) к множеству R:
Пусть задано отношение x>>y, тогда

$$\mu_R(x,y) = \{0 : x \le y; \left[1 + (x-y)^{-2}\right]^{-1} : x > y\}.$$

Пусть С – РМ в пространстве X×Y с ФП $\mu_C(x,y)$.

Множество С называется разложимым по x и y в том и только в том случае, если С допускает представление в виде пересечения множеств А и В: С=А∩В или когда $\mu_C(x,y)$ можно представить следующим образом:

$$\mu_C(x;y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Итак, мы рассмотрели основные понятия, с помощью которых строится теория размытых множеств и решаются размытые задачи. Цель рассмотрения данного вопроса – дать представление о том, как можно построить математическую модель наблюдений, не удовлетворяющих аксиомам тождества.

Иными словами, каждая измерительная шкала может быть размыта. Для того, чтобы сделать шкалы наименования и порядка размытыми достаточно тех понятий, которые приведены выше. Количественные шкалы требуют некоторых дополнительных определений. Самым “узким” местом теории и практики размытых множеств является задание ФП.

Существует несколько подходов к определению ФП, то есть функции $\mu_A(x)$:

1. **Эвристический подход** – когда субъект сам определяет, как он понимает степень принадлежности. При таком подходе функции, задаваемые разными людьми для одного множества могут различаться, что понятно отражает разницу в понимании расплывчатого множества (РМ).

2. **Статистический подход** – при котором ФП $\mu_A(x)$ определяется усреднением функций, задаваемых разными экспертами.

3. **Частичное задание** $\mu_A(x)$ поясняющими примерами, например, для нескольких значений x и последующее доопределение всей функции подходящим методом.

4. **Интервальное определение** типа задания пессимистичной и оптимистичной границ для $\mu_A(x)$.

5. **Кратная расплывчатость** – то есть задание $\mu_A(x)$ в свою очередь как РМ с помощью ФП второго порядка, то есть $\mu_{A2}(\mu_A(x))$.

Контрольные вопросы:

1. Понятие расплывчатости.
2. Лингвистическая переменная.
3. Функция принадлежности.
4. Номинальное и субнормальное множество.
5. Пересечение и объединение расплывчатых множеств.
6. Понятие расплывчатого отношения.
7. Подходы к определению функции принадлежности.

ЛЕКЦИЯ 15.

КРИТЕРИАЛЬНЫЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ВЫБОРА

Наряду с ранее рассмотренными аксиомами выбора, в терминах бинарных отношений и с помощью ФВ на практике активно используется хорошо развитый *критериальный* язык (КЯ). Это название связано с основным предположением, состоящим в том, что каждую отдельно взятую альтернативу можно оценить конкретным числом (значением критерия) и сравнение альтернатив сводится к сравнению соответствующих чисел.

Пусть x есть некоторая альтернатива из множества X: $x \in X$.

Считается, что для всех альтернатив $x \in X$ может быть задана функция q(x), которая называется критерием (критерием качества, целевой функцией, функцией предпочтения, полезности и т.д.) и обладает тем свойством, что если альтернатива x_1 предпочтительнее альтернативы x_2, то есть $x_1 > x_2$, то $q(x_1) > q(x_2)$ и наоборот.

Выбор как максимизация критерия

Сделаем важное предположение, что выбор любой альтернативы приводит к однозначно известным последствиям, то есть считаем, что выбор осуществляется в условиях определённости, и заданный критерий q(x) численно выражает оценку этих последствий. Тогда наилучшей альтернативой x^* является естественно та, которая обладает наибольшим значением критерия, что другими словами можно записать:

$$x^* = \arg\max_{x \in X}[q(x)] \quad (1)$$

Задача отыскания x^* – простая по постановке, часто оказывается сложной по решению. Поскольку метод её решения, да и сама возможность решения определяется как характером множества X (размерностью вектора x и типом множества X) – является ли оно конечным, счётным или континуальным, так и характером критерия (является ли q(x) функцией или функционалом и какой именно).

Сложность отыскания наилучшей альтернативы в практически полезных случаях существенно возрастает, так как на практике оценивание любого варианта единственным числом обычно оказывается неприемлемым упрощением. Более полное рассмотрение альтернатив приводит к необходимости оценивать их не по одному, а по нескольким критериям, качественно различающихся между собой.

Пусть для оценивания альтернатив испытывается несколько критериев

$$q_i(x),\ i=1,2,\dots,p.$$

Теоретически, можно представить случай, когда во множестве X окажется одна альтернатива, обладающая наибольшими значениями всех p критериев. Она и является наилучшей (теоретически). Однако, на практике, такие случаи почти не встречаются. И возникает вопрос, как осуществить свой выбор.

Разработаны различные **способы решения многокритериальных задач (МЗ)**:

1. Первый метод заключается в том, чтобы МЗ свести к однокритериальной задаче (ОЗ).

Это означает введение суперкритерия, то есть скалярной функции векторного аргумента:

$$q_0(x)=q_0(q_1(x),q_2(x),\dots,q_p(x)) \quad (2)$$

Суперкритерий позволяет упорядочить альтернативы по величине q_0, выделив тем самым наилучшую альтернативу (в смысле этого критерия). Вид функции q_0 определяется тем, как мы представляем вклад каждого критерия в суперкритерий q_0.

Обычно, используют различные аддитивные и мультипликативные функции с коэффициентами, отражающими относительный вклад частных критериев в суперкритерий. При данном способе задача сводится к максимизации суперкритерия:

$$x^* = \arg\left\lfloor \max_{x \in X}(q_0(q_1(x), q_2(x),\dots,q_p(x))\right\rfloor \quad (3)$$

2. Второй способ решения МЗ заключается ином использовании того факта, что частные критерии обычно неравнозначны между собой, то есть одни более важны, чем другие.

Наиболее явное выражение этой идеи состоит в выделении основного критерия и рассмотрения остальных как дополнительных, сопутствующих. Такое различие критериев позволяет сформулировать ЗВ как задачу нахождения условного экстремума основного критерия при условии, что дополнительные критерии остаются на заданных им уровнях:

$$x^* = \arg\left\{\max_{x\in X}(q_i(x)) \mid q_i(x) = C_i, i = \overline{1,p}\right\} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= (q_1(x), q_2(x), \ldots, q_p(x)) \\ \overline{q}(x) &= (\overline{q}_1(x), \overline{q}_2(x), \ldots, \overline{q}_p(x)) \end{aligned} \tag{*}$$

3. Третий способ относится к случаю, когда заранее могут быть указаны значения частных критериев (или их границ).

Задача состоит в том, чтобы найти альтернативу, удовлетворяющую этим требованиям, либо установив, что такая альтернатива во множестве X отсутствует, найти в X альтернативу, которая подходит поставленным целям ближе всего.

Характеристики решения такой задачи (сложность процесса вычислений, скорость сходимости, конечная точность и другие) зависят от многих факторов. Удобным свойством при данном подходе является возможность задавать желательные значения $\overline{q}_i$ критериев так точно, как и в виде верхних или нижних границ.

Назначаемые значения величин $\overline{q}_i$ иногда называют **уровнями притязаний (УП)**, а точку их пересечения в р-мерном пространстве критериев называют *целью* или *опорной точкой* или *идеальной точкой*.
Поскольку УП задаются без точного значения структуры множества X в пространстве частных критериев, целевая функция может оказаться как внутри, так и вне множества X (достижимая или недостижимая цель).

Идея оптимизации состоит в том, чтобы начав с любой альтернативы приближаться к альтернативе x^* по некоторой траектории пространства X. Это достигается введением числовой меры близости между очередной текущей альтернативой x и целью x^*. Другими словами, вводится числовая мера близости между векторами (*). Количественно описать эту близость можно по-разному.

4. Четвёртый, полностью формализуемый способ многокритериального выбора состоит в отказе от выделения единственной наилучшей альтернативы.

Отказ от выделения единственной наилучшей альтернативы и соглашения о том, что предпочтение одной альтернативе перед другой можно отдавать только, если первая по всем критериям лучше второй.

Если же предпочтения хотя бы по одному критерию расходятся с предпочтением по другому, то такие альтернативы признаются несравнимыми. В результате попарного уравнения, альтернатив все худшие по всем критериям альтернативы отбрасываются, а все оставшиеся несравнимые между собой (недоминируемые) – принимаются.

Если все максимально достижимые значения критериев не относятся к одной и той же альтернативе, то принятые альтернативы образуют небезызвестное множество Парето и выбор на этом заканчивается.

Если же необходимо выбрать единственную альтернативу, то следует привлекать дополнительные соображения: вводить новые добавочные критерии и ограничения, бросать жребий, прибегать к услугам экспертов.

Контрольные вопросы:

1. Понятие критериального языка.
2. Максимизация критерия.
3. Способы решения многокритериальных задач.
4. Понятие суперкритерия.
5. Выделение основного критерия и решение многокритериальной задачи.
6. Альтернативы и уровни притязаний.
7. Попарное уравнение альтернатив и множество Парето.

ЛЕКЦИЯ 16.

ВЫБОР ПРИ РАСПЛЫВЧАТОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Любая задача выбора является задачей целевого сужения множества альтернатив. Как описание альтернатив, признаков, параметров, так и описание правил их сравнения даются в терминах той или иной измерительной шкалы (ИШ).

Любая ИШ допускает размытие. Точнее говоря, в жизни часто сталкиваемся с ситуациями, описать которые можно лишь в размытых шкалах (РШ). В результате приходим к ЗВ в условиях РН. Каждой из ЗВ и ПР, сформулированных в том или ином виде, можно поставить в соответствие несколько расплывчатых задач (РЗ). Поскольку размытыми могут оказаться все или только некоторые задачи.

До настоящего времени рассмотрено незначительное число таких задач, однако работа идёт в этом направлении.

Многокритериальный выбор (МВ) в расплывчатой ситуации (РС)

Уже в первой работе по ПР в РС, авторы этой теории (Бэлман и Заде) выдвинули идею, чтобы и цели и ограничения представить как РМ на множестве альтернатив.

В случае одной цели и одного описания, это соответствует заданию двух РМ, а именно:

G={x, μ_G(x)} – множество G задаёт цель.

C={x, μ_C(x)} – множество C задаёт ограничения.

$0 \le \mu(x) \le 1$ – ФП.

Следующий шаг состоит в определении размытого решения D как в пересечении размытой цели G и размытого ограничения C, то есть в соответствии с заданным определением пересечением РМ-ств можно записать, что

D={x, μ_D(x)} – множество размытых решений.

$\mu_D(x)=\min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}$ – ФП. **(1)**

Обобщение на случай большего числа условий очевидно.

Если из РМ D требуется выделить одну альтернативу (одно решение), то можно поступать по-разному, вплоть до рандомизации выбора. Но, возможный вариант состоит в максимизации ФП μ_D(x), то есть лучшим решением можно считать тот аргумент ФП μ_D(x), который максимизирует значение этой функции:

$$x^* = \arg\max_{x\in X}\left[\mu_D(x)\right] \qquad \textbf{(2)}$$

При таком изложении ЗВ напрашивается идея о том, чтобы вообще ФП i-му условию интерпретировать как i-й критерий качества и вернуться к многокритериальным задачам.

Тогда соотношение (1) оказывается одной из возможных форм суперкритерия, который был рассмотрен ранее и имел следующий вид:

Форма (1) выражения суперкритерия – не единственная форма.

Интересные исследования в этом направлении сделаны Эстером. Он ввёл другую форму суперкритерия следующего вида:

$$q_0(x) = q_0(q_1(x), q_2(x), \ldots, q_p(x)),$$

$$Z_p(x) = \left\{\sum_{i=1}^{m} q_i\,[\mu_i(x)]^p\right\}^{1/p}$$
$$0 \le q_i \le 1;\ \sum_{i=1}^{m} q_i = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

qi – весовой коэффициент.

m – число размытых условий.

μ_i(x) – ФП i-му условию.

p – параметр СК.

Представление СК в форме (3) интересно не только наличием свойств, облегчающих математическое рассмотрение задачи (например, монотонность и непрерывность по всем компонентам), но и тем, что оно охватывает широкий класс частных СК. То есть, имеем единую запись, изменяя параметр p которой можно переходить к различным частным критериям.

Например, при $p \to -\infty$ из формулы (3) получается оператор нахождения минимального элемента из заданной совокупности.

То есть при $p \to -\infty$ снова приходим к формуле (1) записи СК.

При p=0 - будем иметь оператор умножения.

При p=1 – оператор сложения.

При $p \to +\infty$ - оператор нахождения максимального элемента.

Итак, задача нахождения наилучшей альтернативы x^* сводится к максимизации СК $Z_p(x)$:

$$x_g^* = \arg\max_{x \in X} \left[Z_p(x) \right] \tag{4}$$

Очевидно, что при этом решение зависит от конкретного набора коэффициентов $g=\{g_i\}$.

Обозначим через: $E(p)=\{x^*_g\}$ – это множество соответствует разным g при фиксированном p

Эстер обнаружил интересные свойства множества E(p), а именно, при соотношении: $-\infty<p_1\le p_2<+\infty$ справедливо включение: $E(p_2)\subseteq E(p_1)\subseteq P$, где P – паретовское множество.

Недостатки подхода: ФП вообще находить непросто, а при использовании изложенного подхода, требуется, чтобы они имели смысл критериальных функций в ЗВ. А это может оказаться и неудобным и бессмысленным. Этот недостаток обсуждается в литературе по теории РМ и, в частности, Орловский предложил не изменять содержательного смысла критериев качества альтернатив и не отождествлять критериальные функции (КФ) с ФП, а отразить в модели расплывчатость шкал, в которой эти критерии фиксируются (если такая расплывчатость имеет место).

Суть: Предполагается, что КФ обозначаются $q_i(x)$ – относятся к параметрическим семействам, то есть $q_i(x)=J_i(x, \bar{q})$ и считается, что расплывчатость КФ сводится к расплывчатости в описании введённых параметров $\bar{q}$, где $Q=\{\bar{q}, \mu_Q(q)\}$.

Теперь для каждой альтернативы x, значение критерия $J_i(x, \bar{q}) \in$ РМ, функция $\mu(J_i(x))$ принадлежности к которому, зависит от x и от конкретного вида функций $J_i(x, \bar{q})$ и $\mu_Q(\bar{q})$.

Носитель этого множества может быть как ограничен сверху некоторой величиной $J^0_i(x)$, так и не ограничен (чем больше J_i, тем лучше). Ограниченность J_i сверху несущественна.

Если естественного ограничения снизу нет, то его можно ввести искусственно, задав некоторый уровень α для ФП, где $0<\alpha<1$ и взяв в качестве функции $J^0{}_i(x)$ наименьший корень уравнения $\mu_i(J_i(x))=\alpha$.

В результате величины $J^0{}_1(x)$, $J^0{}_2(x)$, …, $J^0{}_m(x)$ можно рассматривать как новые и уже неразмытые КФ.

При отсутствии размытость $J^0{}_i(x)$ совпадает с $J_i(x, \bar{q})$.

Таким образом возвращаются к стандартной многокритериальной задаче, которую можно решать любым из стандартных методов, которые ранее были перечислены.

Орловский предлагает находить паретовское множество альтернатив. Заканчивая обзор расплывчатых ЗВ, рассмотрим ещё задачи, связанные с использование расстояний между точками в пространстве альтернатив, то есть, как задаётся, используется это расстояние при расплывчатости.

При расплывчатом описании альтернатив, предлагается расстояние определит через модули разностей ФП. Например, расстояние $d(x_i,x_j)$ можно определить как модуль разности ФП:

$$d(x_i, x_j) = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left| \mu_r(x_i) - \mu_r(x_j) \right|^p \right)^{1/p} \qquad \textbf{(5)}$$

Здесь $\mu_2(x)$ – ФП по r-му признаку к интересующему нас множеству. Такие расстояния используются в задачах классификации.

Контрольные вопросы:

1. Многокритериальный выбор в расплывчатой ситуации.
2. Расплывчатые задачи и расплывчатые шкалы.
3. Идея Бэдмана и Заде.
4. Суперкритерий Эстера.
5. Расплывчатость шкал и идея Орловского.
6. Расстояние между точками в пространстве альтернатив.
7. Применение таких способов в задачах классификации.

ЛЕКЦИЯ 17.

НЕКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Отметим, что некоторые успехи имеются и в рассмотрении расплывчатых вариантов выбора, описываемых на языке бинарных отношений.

Во-первых, сделано расплывчатое обобщение отношения предпочтения. Размытое отношение (РО) R слабого порядка определяется как удовлетворяющее размытым условиям связности и транзитивности.

1) Условие связности формулируется: $x_i \neq x_j \rightarrow \mu_R(x_i,x_j)>0$ или $\mu_R(x_j,x_i)>0$. **(6)**

2) Условие транзитивности:

$$\mu_R(x_i, x_k) = \max_{x_j}\{\min[\mu_R(x_i, x_j), \mu_R(x_j, x_i)]\} \qquad (7)$$

Это размытое отношение слабого порядка. Если условие связности (6) заменить на (8):

$\mu_R(x_i,x_j)>0 \rightarrow \mu_R(x_j,x_i) = 0$ – условие асимметрии, то такое упорядочивание называется сильным.

Во-вторых, Заде показал, что любое размытое отношение R допускает разложение по параметру α в виде объединения неразмытых множеств R_α со следующей ФП:

$$\mu_{R_\alpha}(x_i, x_j) = \begin{cases} \alpha, npu(x_i, x_j) \in R_\alpha \\ 0, npu(x_i, x_j) \notin R_\alpha \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

Здесь $0<\alpha<1$, что можно представить как расслоение объёма под μ_R на горизонтальные пласты уравнений α). Это, например, позволяет перейти от расплывчатого описания коллективного упорядочивания альтернатив, отобранных со степенью согласия на уровне α.

Идеи размытых множеств привлекают всё больший интерес, поскольку в этой модели удалось отразить многие особенности языковых моделей и действий человека на основе этих моделей.

РМ используются в ЭС, где в БЗ применяется расплывчатое описание.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ (на основе метода анализа иерархии (МАИ))

1. МАИ предполагает декомпозицию проблемы на все более простые составляющие и обработку суждений ЛПР.

В результате определяется относительная значимость исследуемых альтернатив для критериев, находящихся в иерархии. Относительная значимость выражается численно в виде векторов приоритетов.

Полученные таким образом значения векторов являются оценками в шкале отношений и соответствуют так называемым жестким оценкам. Выделяется ряд модификаций МАИ, которые определяются характером связи между критерием и альтернативами, расположенными на самом нижнем уровне иерархии, а также методами сравнении альтернатив.

По характеру связи между критериями и альтернативами определяется 2 типа иерархии.

1 тип - такие, у которых каждый критерий, имеющий связь с альтернативами связан СО ВСЕМИ рассматриваемыми   альтернативами (тип иерархии с одинаковыми числом и функциональным составом альтернатив под критерии)

2 тип- каждый критерий, имеющий связь с альтернативами связан НЕ со всеми рассматриваемыми альтернативами   (тип иерархии с различным числом и функциональным составом альтернатив под критерии)

В МАИ есть 3 метода сравнения альтернатив:

1. попарное сравнение
2. сравнение альтернатив относительно стандартов
3. сравнение альтернатив копированием

Иерархическое представление проблемы

В 1 ой модификации метода МАИ рассматриваются иерархии с одинаковыми числом и функциональным составом альтернатив под критерии и метод по парного сравнения иерархии.

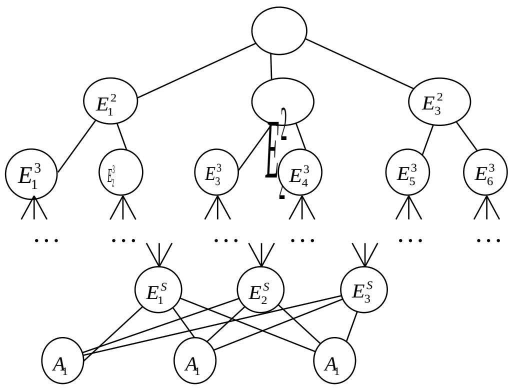
Построение иерархии начинается с очерчивания проблемы исследования.
Далее строится собственно иерархия, включающая цель, расположенную в ее вершине, промежуточные уровни (критерии) и альтернативы, формирующие самый нижний иерархический уровень. Приведем общий вид иерархии, где

E_j^i - элементы иерархии

A_i - альтернативы

i - указывет уровень иерархии,

j - порядковый номер



Шкала отношений

Для установления относительной важности элементов иерархии используется шкала отношений.

Данная шкала позволяет ЛПР ставить в соответствие степеням предпочтения одного сравниваемого объекта перед другим некоторые числа. Опишем эту шкалу с помощью следующей таблицы:

Степень значимости	**Определение**	**Объяснение**
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия над другим [слабая значимость]	Существуют соображения в пользу предпочтения одному из действий, но соображения недостаточно убедительны
5	Существенная или сильная значимость	Имеются надежные данные или логические суждения для того чтобы показать предпочтения одного действия над другим
7	Очевидная или очень сильная значимость	Убедительное свидетельство в пользу одного действия перед другим
9	Абсолютная значимость	Свидетельство в пользу предпочтения одного действия перед другим в высшей степени убедительно.
2,4,6,8	Промежуточные значения между двумя соседними суждениями.	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение.
Обратные величины, приведенных выше	Если действию i при сравнении с j действием приписывается значение одного из определенных выше чисел, то действие j при сравнении с i принимает обратное значение.	Если согласованность была постулирована при получении N числовых значений для образования матрицы.

Правомочность этой шкалы доказана теоретически при сравнении с другими шкалами. При использовании шкалы ЛПР сравнивает 2 объекта в смысле достижения цели, расположенных на выше лежащем уровне иерархии. Сопоставляет этому сравнению число от 1 до 9 или обратные значения чисел.

В тех случаях, когда трудно различить столько промежуточных градаций от абсолютного до слабого предпочтений или этого не требуется в конкретной задаче может использоваться шкала с меньшим числом градаций.

В пределе шкала имеет 2 оценки:

1. Объекты равнозначны
2. Предпочтение одного объекта над другим.

Контрольные вопросы:

1. Размытое отношение слабого порядка.
2. Условие связанности.
3. Условие транзитивности.
4. Принятие решений в условиях частичной неопределенности.

5. Типы иерархии.
6. Методы сравнения альтернатив.
7. Шкалы отношений.

ЛЕКЦИЯ 18.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИИ

Матрицы парных сравнений

После построения иерархии устанавливается метод сравнения на ее элементы. Если применяется метод полярного сравнения, то строится множество парных сравнений.

Для этого в иерархии выделяют элементы двух типов. А именно элементы – родители и элементы – потомки. Элементы потомки выделяют на соответствующие элементы вышестоящего уровня иерархии, являющимися по отношению к первым элементами родителями.

Матрицы попарных сравнений сроятся для всех элементов потомков, относящемуся к с ответствующему элементу родителю. Элементы родители могут являться элементами любого иерархического уровня, кроме последнего. (альтернативы)
Парные сравнения проводятся в терминальном доминировании первого элемента над другими. Полученные суждения выражаются в целых числах с учетом 9-бальной шкалы.

Заполнения квадрата матрицы парных сравнений осуществляется по следующему правилу:

Если элемент E1 доминирует над E2 то клетка матрицы соответствующей строки E1 и столбца E2 заполняются числом (1-9), а клетка соответствующего столбца E1 и строки E2 заполняется обратным к нему числом.

Если элемент E2 доминирует над E1. (-//- тоже).

Если элемент E1 и E2 равноопределенны, то в обе позиции матрицы ставятся “1”.

Для получения каждой матрицы эксперт или ЛПР выносим (n(n-1))/2 суждений, где n-порядок матрицы парных сравнений.

Пусть E1, E2 и т.д. En – это множество из n – элементов (альтернатив) и пусть V1,V2,....,Vn - это соотношения их веса или интенсивность сравнения попарно вес или интенсивность каждого элемента с весом или интенсивностью любого другого элемента множества по отношению к общему для них свойству или цели (по отношению к элементу родителю).

При проверки попарных сравнений следует отвечать на вопросы:

Какой из двух сравнений важнее, какой более вероятен и какой предпочтительней. При сравнении критериев обычно сравнивают какой из критериев более важен при сравнении, альтернатив – какая из альтернатив более предпочтительней или более вероятна.

.

	E1	**E2**	**E....................................**	**En**
E1	V^j1V1	V^j 1V2		V^j 1Vn
E2	V^j 2V1	V^j 2V2		V^j 2Vn
....	....	....	....	....
En	V^j nV1	V^j nV2		V^j nVn

Собственные вектора

Ранжирование элементов, анализируемых с использованием матрицы попарных сравнений ||E|| осуществляется на основании главных собственных векторов, полученных в результате обработки матрицы.

Вычисление главного собственного вектора положительной квадратной матрицы E проводится на основании матрицы E*W = **λ** махW где **λ** мах – максимальное собственное значение матрицы E.

Для положительного квадрата матрицы E правит собственный вектор W, соотносящий максимальному собственному значения **λ** мах с точностью до последнего сомножителя. Можно вычислить по формуле

lim (||E||^k*e)/e^t*||E|^k*e = cw
(к→∞)

где e = {1,1,1.....1}^t – единичный вектор к = 1.2.3… показатель степени с – константа T- знак транпонирования.

Вычисление собственного вектора W производится до достижения заданной точности, а именно e^t|W^(l) – W^(l+1)|≤ ε (3)

Где l – номер итерации так что l=1 соответствует к=1, l=2 соответствует к=2 и т.д. ε - допустимая погрешность.

С достаточной для практической точностью можно принять ε = 0,01 не зависимо от порядка матрицы.

Максимальное соответствующие значение величины по формуле **λ** мах = e^t||E||W.

Динамические предпочтения и приоритеты

Задача прогнозирования экспериментальных предпочтений связана с получением оценок приоритета альтернатив в форме зависимости от времени.

Для этого исходные экспериментальные оценки должны содержать информацию об изменении предпочтения первой альтернативы перед другими на некотором временном отрезке. Следовательно, оценка предпочтительности может быть задана функцией.

Подбор таких функций можно осуществить либо представив в рассмотренные эксперименты некоторую функциональную шкалу либо путем аппроксимации экспериментальных оценок, полученные в разные моменты времени пример функциональной шкалы показан в таблице. где функции предпочтительности содержат параметры, подбор которых позволяет более или менее точно описать изменяющиеся суждения. И установить область допустимых значений функции в пределах 9 бальной шкалы

Функция	Описание функции	Пример
const	1≤const≥9	----------- // -------------
a1(t) + a2	Линейная функция от (t) на некотором отражении. Обратная ф-я - гипербола	Линейная ф-я от t Линейное возрастание первой алтернативы перед другими
b1ln(t+1)+b2	Логарифмический рост	Быстрое возрастание предложенной 1-ой альтернативы над другими. Достигает t после которой медленно возрастает
c1*e^c2t + c3	Экспоненциальный рост или убывающая (c2<0) в последнем случае обратная величина есть S образная кривая	Медленное увеличение или уменьшения во времени за которым следует быстрое увеличение или уменьшение.

$D*t^2$ + d2t+d3	Парабола с минимальным или максимальным значением в зависимости от того отрицательная или положительная.	Возрастает до максимума затам убывает или наоборот
$F1*t^4$ *sin(t+f2)+f3	Колебательная функция	С возрастающей (n>0) или убывающий (n≤0) амплитудой
катастрофа	Ф-я имеющая разрывы которые следует указать	Крайние редкие изменения интенсивности предпочтения

Эти функции отражают интуитивные чувства ЛПР об изменении, а именно: постоянном, линейном, логарифмическом и экспоненциальным возрастанием до максимума и убывании до минимума, колебания и допускающие катастрофические изменения.

Для динамически заданной матрицы парных сравнений содержат функцию времени в качестве элементов. Поэтому максимальное собственное число **λ** мах, а также собственный вектор W также будет зависеть от времени, т.е.

$$A(t)*W(t)= \lambda\ max(t)*W(t)\ ,$$

где A(t) – матрица парных сравнений объектов, содержащих информацию об изменении предпочтения 1-ой альтернативой перед другой на некотором промежутке времени, которой задают функцию из таблиц.

Если порядок матрицы парных сравнений не превышает 4 для уравнения можно получить аналитическое решение. Другой способ является получение A(t) и W(t) численными методами. Для этого необходимо иметь в распоряжении информацию о предпочтениях эксперта за определенный период времени. При нахождении такой информации в компьютерных системах возможно ранжирование предпочтений и оценка быстрых последствий принятых решений.

Контрольные вопросы:

1. Для каких элементов строятся матрицы сравнений?
2. Как осуществляется заполнение матрицы попарных сравнений?
3. Как осуществляется оценка попарных сравнений?
4. Собственные вектора.
5. Как вычисляется главный собственный вектор матрицы?
6. Динамические предпочтения и приоритеты.
7. Порядок матрицы и решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2003. − 286 с.
2. Берштейн Л.С., Карелин В.П., Целых А.Н. Модели и методы принятия решений в интегрированных интеллектуальных системах. Ростов-на-Дону, изд-во Ростовского университета, 2002.− 146 с.
3. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990.. − 256с.
4. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977. − 364 с.
5. В.Бодров, Т.Лазарева, Ю.Мартемьянов Математические методы принятия решений Учебное пособие, ТГТУ 2004 г.
6. В.Розен Математические модели принятия решений в экономике М: Высшая школа 2002 г. 290 с.
7. Г.Сорина Принятие решений как интеллектуальная деятельность, М: Канон⁺ 2009 г., 272 с.
8. Г.Черноморов Теория принятия решений, Новочеркасск 2002 г., 276 с.