

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА  
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**НАМАНГАН МУХАНДИСЛИК – ТЕХНОЛОГИЯ  
ИНСТИТУТИ**

**“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” кафедраси**

**Олий математика фанидан**

**РЕФЕРАТ**

**Бажарди:**

**16у-15 гурухи талабаси  
Қосимова М**

**Қабул қилди:**

**Шоюсупов Ш.**

## **Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш.**

### **Режа:**

1. Ўзгарувчини алмаштириш.
2. Бўлаклаб интеграллаш.
3. Мустақил бажариш учун топшириқлар.
4. Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

### **Таянч ибора ва тушунчалар**

Ўзгарувчини алмаштириш, бевосита интеграллаш, бўлаклаб интеграллаш, бўлаклаб интеграллашнинг мақсадга мувофиқлиги.

Шундай бир неча усулларни қараймизки, улар ёрдамида кўп ҳолларда интегралларни ҳисоблаш, жадвал интегралларига келтирилади.

### ***Ўзгарувчини алмаштириш***

Кўп ҳолларда янги ўзгарувчи киритиш билан интегрални ҳисоблаш, жадвал интегралига келтирилади. Бунда  $\varphi(x) = t$  алмаштириш олиниб, бунда  $t$  янги ўзгарувчи бўлиб, ўзгарувчини алмаштириш формуласи

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \text{ кўринишда бўлади.}$$

Ўзгарувчини алмаштириш усулига бир неча мисоллар қараймиз.

**1-мисол.**  $\int (3x + 1)^7 dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.**  $3x+1=t$  деб  $3dx=dt$  ёки  $dx=\frac{dt}{3}$  эканлигини ҳисобласак,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C \text{ бўлади.}$$

**2-мисол.**  $\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.**  $1+x^2=t$  ўзгарувчи билан алмаштирамиз. Бу ҳолда  $2x dx = dt$  ёки  $x dx = \frac{dt}{2}$  бўлиб,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C \text{ бўлади.}$$

**3-мисол.**  $\int \cos mx dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.** Бунда  $dx = \frac{1}{m} d(mx)$  ўзгартириш олиб,

$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$  натижага эга бўламиз. Бундай интеграллашга бевосита интеграллаш деб аталади. Чунки  $mx=t$  билан ўзгарувчини алмаштириб ҳам шу натижага келиш мумкин эди. Юқоридаги интегралда ўзгарувчини алмаштириб ўтирмасдан уни фикрда бажардик.

**4-мисол.**  $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.**  $\ln x = t$  билан янги ўзгарувчини алмаштириб,  $\frac{dx}{x} = dt$

эканлигини ҳисобга олсак,  $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$  бўлади.

**5-мисол.**  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.**  $x=t^2$  билан янги ўзгарувчи киритамиз. Охири тенгликдан дифференциал топиб,  $dx = 2t dt$  бўлганлиги учун,

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2t dt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C \text{ бўлади.}$$

**6-мисол.**  $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.**  $\cos x dx = d(\sin x)$  ни ҳисобга олиб

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C \text{ натижага келамиз.}$$

Шундай қилиб, оддий ҳолларда

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b),$$

тенгликлардан фойдаланиб, ўзгарувчини алмаштиришни фикрда бажариб, бевосита интеграллаш ҳам мумкин.

### ***Бўлаклаб интеграллаш***

Бўлаклаб интеграллаш усули дифференциал ҳисобнинг иккита функция кўпайтмаси дифференциали формуласига асосланган.

Маълумки,  $d(uv) = u dv + v du$ , бундан  $u dv = d(uv) - v du$ . Охириги тенгликни интеграллаб,

$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$  натижага эга бўламиз. Шундай қилиб,  $\int u dv = uv - \int v du$  (1) формулани ҳосил қилдик. (1) формулага **бўлаклаб интеграллаш** формуласи дейилади.

Бу формула ёрдамида берилган  $\int u dv$  интегралдан иккинчи  $\int v du$  интегралга ўтилади. Демак, бўлаклаб интеграллашни қўллаш натижасида ҳосил бўлган иккинчи интеграл, берилган интегралга нисбатан соддароқ ёки жадвал интегралли бўлгандагина бу усулни қўллаш мақсадга мувофиқдир. Бу мақсадга интеграл остидаги ифодани  $u$  ва  $dv$  кўпайтувчиларга қулай бўлаклаб олиш натижасида эришиш мумкин. Берилган интеграл остидаги ифоданинг бир қисмини  $u$  ва қолган қисмини  $dv$  деб олгандан кейин (1) формуладан фойдаланиш учун  $u$  ва  $dv$  ларни аниқлаш керак бўлади.  $dv$  ни топиш учун  $u$  нинг дифференциали топилиб,  $u$  ни топиш учун эса  $dv$  ифодани интегралаймиз, бунда интеграл ихтиёрий ўзгармас  $C$  га боғлиқ бўлиб, унинг исталган бир қийматини хусусий ҳолда  $C = 0$  ни олиш мумкин.

Шундай қилиб, интеграл остидаги ифоданинг бир қисмини  $u$  деб олишда у дифференциаллаш билан соддалашадиган, қолган қисми  $dv$  бўлиб, қийинчиликсиз интегралланадиган бўлиши керак.

### Бўлаклаб интеграллаш формуласи кўпроқ:

1)  $\int p(x)e^{ax} dx$ ,  $\int p(x)\sin mx dx$ ,  $\int p(x)\cos ax dx$  ва  
 2)  $\int p(x)\ln x dx$ ,  $\int p(x)\arcsin x dx$ ,  $\int p(x)\arccos x dx$ ,  $\int p(x)\arctg x dx$ ,  $\int p(x)\operatorname{arcctg} x dx$  буларда  $p(x)$  бирор даражали кўпхад кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда ишлатилади. Бу интегралларни ҳисоблашда 1) гуруҳ интегралларда  $u$  учун  $p(x)$  кўп хад, қолган қисми  $dv$  учун олиниб, 2) гуруҳ интегралларда  $u$  учун мос равишда  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  лар, қолган қисми  $dv$  учун олинади.

Бўлаклаб интеграллашга бир неча мисоллар қараймиз.

**1-мисол.**  $\int x \cos x dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.** Интеграл остидаги ифодани  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$  деб

Бўлакласак,  $du = dx$ ,  $v = \int \cos x dx = \sin x$  бўлиб, (1) формулага асосан,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

натижага эга бўламиз.

Бу интегралда (1) формуладан фойдаланиш натижасида иккинчи интеграл  $\int \sin x dx$  ҳосил бўлди, бу жадвал интегралли бўлганлиги учун осонгина топилди.

**2-мисол.**  $\int x^2 e^{3x} dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.** Юқорида эслатилганидек  $u = x^2$ ,  $dv = e^{3x} dx$  кўринишда бўлаклаб олсак,

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

ҳосил бўлади. (1) формулага

асосан

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \quad \text{бўлади.} \quad \text{Охирги}$$

ҳосил бўлган интеграл берилган интегралга нисбатан соддалашди (берилган интегралда 2- даражаси, иккинчисиди бунинг даражаси биттага камайди).

Кейинги интегралда яна (1) формулани қўлаймиз.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 \quad \text{Шундай килиб,}$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \left( x - \frac{1}{3} \right) + C_1$$

натижада

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3} e^{3x} \left( x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] =$$

$$\frac{e^{3x}}{3} \left( x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) + C \quad \text{ҳосил бўлади.}$$

**3-мисол.**  $\int x^3 \cos 2x dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.** Юқорида эслатилганидек эмас, тескарисини яъни  $u = \cos 2x$ ,  $dv = x^3 dx$  бўлаклаб олайлик; бу ҳолда

$$du = -2 \sin 2x dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \quad \text{бўлиб (1) формуладан фойдалангандан кейин}$$

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ифода ҳосил бўлади. Кейинги  $\int x^4 \sin 2x dx$  интеграл берилган  $\int x^3 \cos 2x dx$  интегралга нисбатан мураккаброқдир (х нинг даражаси биттага ортди). Демак, бундай бўлаклаб олиш мақсадга мувофиқ эмас, яъни  $u = x^3$ ,  $dv = \cos 2x dx$  деб олиш керак эди. (Бу интегрални ҳисоблашни ўқувчига ҳавола қиламиз).

**4-мисол.**  $\int \arccos x dx$  интегрални ҳисобланг.

$$\textbf{Ечиш.} \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Бу интегралда бир марта бўлаклаб интеграллагандан кейинги ҳосил бўлган интегралда ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегралладик. Интеграллаш усуллари кўллашда ўзгарувчини алмаштирганда ёки бўлаклаб интеграллаганда ёзувда тартиб бўлиши учун юқоридаги интегрални ҳисоблангандагидек ёзишга одат қилишни тавсия этилади.

**5-мисол.**  $J = \int e^x \cos x dx$  интегрални ҳисобланг.

**Ечиш.** Бўлаклаб интегралласак

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx, \quad \text{ҳосил}$$

бўлади.

Кейинги интеграл, берилган интеграл билан ўхшашдек туюлади, лекин охирги интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласини иккинчи марта қўллаш билан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

$J$  ҳисобланиши керак бўлган интегралга нисбатан оддий чизиқли тенгламага келдик. Охирги тенгламадан

$2J = e^x \cos x + e^x \sin x$  ёки  $J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$  натижага эга бўламиз.

### Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интегрални нимага тенг?
2. Ўзгарувчини алмаштириб интеграллашнинг моҳияти нима?
3. Бевосита интеграллаш нима?
4. Бўлаклаб интеграллаш усули нимага асосланади?
5. Бўлаклаб интеграллаш формуласини ёзинг?
6. Бўлаклаб интеграллаш қандай ҳолда мақсадга мувофиқ бўлади?
7. Қандай ҳолларда бўлаклаб интеграллашдан фойдаланилади?

### Мустақил бажариш учун топшириқлар

Ушбу интегралларни ҳисобланг.

1.  $\int \sin 3x dx$ .
2.  $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx$ .
3.  $\int e^{-x^3} x^2 dx$ .
4.  $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ .
5.  $\int (e^x + e^{-\frac{x}{2}}) dx$ .
6.  $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$ .
7.  $\int (5-2x)^9 dx$ .
8.  $\int \sqrt[3]{7-3x} dx$ .
9.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx$ .
10.  $\int \cos(1-3x) dx$ .
11.  $\int \sin(5x+7) dx$ .
12.  $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ .
13.  $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .
14.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ .
15.  $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx$ .
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$ .
17.  $\int x^2 \sin x dx$ .
18.  $\int x \ln x dx$ .
19.  $\int \arctg x dx$ .
20.  $\int \arcsin x dx$ .
21.  $\int x^2 e^{2x} dx$ .
22.  $\int e^x \sin x dx$ .
23.  $\int (x+3) \sin x dx$ .
24.  $\int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ .
25.  $\int x \arctg x dx$ .
26.  $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$ .
27.  $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx$ .



### **Фойдаланилган адабиётлар рўйхати**

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: “Наука”, 1970.
2. В.С.Шипачев. Высшая математика. М.: “Высшая школа”, 1998.
3. Тожиев Ш.И. Олий математикадан масалалар ечиш. Т.: “Ўзбекистон”, 2002.
4. Р.Е.Данько ва бошқалар. Олий математика мисол ва масалаларда. Т.: “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2007.
5. Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.П.Прудников. Таблицы неопределённых интегралов. М.: Наука 1986. –192с.
6. Э.Файзибоев, А.Цирмиракс. Интегралга доир мисол ва масалалар тўплами. Т. “Ўқитувчи”, 1993.
7. J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus, 2012, Old Dominion University.
8. Ш.О. Алимов, Р.Р. Ашуров. Математик таҳлил. I-жилд. Т.: ”Камалак-пресс” 2012. –616 б.