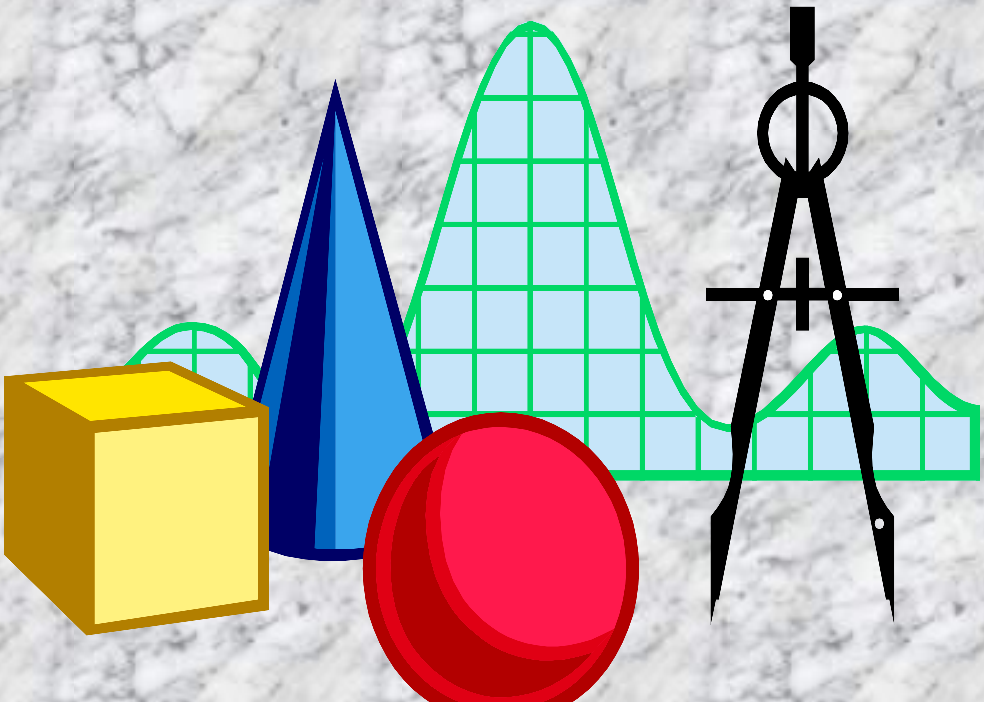
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT
TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI
RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
UNIVERSITETI
FARG'ONA FILIALI

"TABIIY FANLAR" KAFEDRASI



"DISKRET MATEMATIKA.SONLI USULLAR VA DASTURLASH" FANIDAN SONLI USULLAR VA DASTURLASH BO'LIMI BO'YICHA

MA'RUZA MATNI

FARG'ONA 2016

TATU Farona Filiali «Tabiiy fanlar» kafedrasi uslubiy seminarida muhokama qilingan. 2016.08.30 sanadagi O’quv-uslubiy kengashi yiilishida tasdiqlangan (Bayonnoma №1.) va ko’paytirishga tavsiya etilgan.

5330500 - «Kompyuter injiniringi(AT-servisi)»
5350400 - « AKT soxasidagi kasb ta‘limi»
5350100 - «Telekommunikasiya texnologiyalari»
5330500 - «Dasturiy injiniringi» bakalavr ta’lim yo‘nalishi uchun

Tuzuvchilar:	katta o’qituvchi	O. Nasriddinov
	katta o’qituvchi	Z. Tulakova
	assistent	D. Jarqinov

Taqrizchi: dots. M. Djalilov

EHM ustasi: F. Karimov

Ma’ruzalar matni Kompyuter injiniringi, Dasturiy injiniring, Telekommunikatsiya texnologiyalari va AKT sohasida kasbiy ta’lim yo’nalishlari uchun mo’ljallangan.

КИРИШ

Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А. Каримов Давлат ва жамият қурилиши академиясининг очилиш маросимида сўзлаган нутқида: «Юксак малакали мутахассислар – тараққиёт омили» –деган иборалари ва «Таълим тўғрисидаги қонун» хамда кадрлар тайёрлаш миллий дастурини қабул қилиниши - юқори малакали рақобатбардош мутахасислар тайёрлаш ва жамиятимизнинг ижтимоий-маънавий пойдеворини мустаҳкамлаш учун асосий омил бўлди. Бу эса ёш авлодни Ватан равнақи, юрт тинчлиги, халқ фаровонлиги каби олижаноб туйғулар руҳида тарбиялаш, юксак фазилатларга эга, эзгу ғоялар билан қуролланган комил инсонлар қилиб вояга етказиш, жаҳон андозаларига мос, кучли билимли, рақобатбардош кадрлар қилиб тайёрлаш демакдир.

Мутахассис амалий иш фаолияти давомида замонавий ҳисоблаш техника воситаларидан самарали фодаланиши учун компьютернинг дастурий таъминотини ва математик масалаларни дастурлаш ва уларнинг оптимал ечимини топиш учун оптималлаш усулларини билиш зарурдир. Шунинг учун олий ўқув юрти талабаларидан амалий иш фаолиятида ҳисоблаш техника воситаларидан кенг фойлалана билиш, дастурлаш тилларини мукаммал эгаллаш ва йўналиш бўйича махсус фанларни ўрганиш натижасида мухандис қурувчи, механика ва иқтисод масалаларини компьютерда ечиш учун дастурлар туза оладиш даражасида фанларни ўзлаибтириш талаб қилинади. Лекин, улар олган назарий ва амалий билимларини амалий масалаларни ечишга қўллашда кўпгина қийинчиликларга дуч келишади. Чунки уларда типик, тақрибий масалаларни ечишда олий математика курсидан олган билимларгина мавжуд. Лекин ҳаётий масалаларга тузилган математик моделларини аниқ ечимини ҳар доим ҳам топиш мумкин эмас, шунинг учун уларни ечишнинг сонли-тақрибий,тақрибий-аналитик усулларини ўрганишлари учун «Математик моделлаштириш» фанининг аҳамияти катта ҳисобланади.

Мазъкур маъруза матнида қуйидаги масалаларни тақрибий ечимини топиш учун тақрибий ҳисоблаш усуллари ва уларни ечиш дастурлар берилган ПАСКАЛЬ дастурлаш тилида берилган:

- чизиқсиз тенгламалар;
- чизиқли алгебраик тенгламалар системаси;
- аниқ интеграллар;
- биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- математик-физика тенгламалари;

Ҳар бир маъруза машғулот сўнгида талабалар ўз-ўзини текшириши учун ҳар бирига алоҳида топшириқлар берилган.

1 - маъруза машғулот

Миқдорларнинг тақрибий қийматлари. Хатоликлар назарияси. Абсолют ва нисбий хатоликлар.

Инсоният амалий фаолиятида сон катталикларни тақрибий натижасидан фойдаланади. Турли ҳисобларда миқдорларнини қийматлари тақрибан топилади. Масалан: узунликларни 1мм ёки 1 см, температурани 0.1 градусгача, тезликни 1 см/с аниқликда ўлчанади ва аниқланган сонлар устида турли амаллар бажаришда хатоликларга йўл қўйилади. Шунинг учун биз қуйидаги хатоликлар назария билан қисқача танишамиз.

1. Реал жараённингматематик тавсифланиши ноаниқлигидан келиб чиқадиган хатолик – математик модел хатолиги дейилади.
2. Бошланғич маълумотларнинг ноаниқлллиги туфайли юзага келадиган хатолик – бошланғич маълумотлар хатолтги дейилади.
3. Масалани ечишда қўлланилаётган усулларинг ноаниқлигидан келиб чиқадиган хатолик - усул хатолиги дейилади.
4. Ҳисоблашларда вужудга келадиган хатоликлар - ҳисоблаш хатолиги дейилади.
5. Яхлитлаш натижасида ҳосил бўладиган хато- йўқотилиб бўлмайдиган хатолик деб аталади.

Баъзан математик модел ва бошқанғич маълумотлар хатоликларини тузатиб бўлмайдиган хатоликлар дейидади.

1-таъриф.Ҳисоблашларда қатнашаётган тақрибий **a** сон билан шу соннинг аниқ қиймати А орасидаги фарқ **(A-a)** **<u>хатолик</u>** дейилади.

Агар **A<a** бўлса, хатолик мусбат ва **A>a** бўлса,хатолик манфий ўлади. Хатоликларни баҳолаш тўғри бўлиш учун абсолют хатолик тушунчаси киритилади.

2- таъриф. Хатолик модулига **a** тақрибий соннинг **абсолют хатоси** дейилади, яъни

$$\Delta a = |A - a| \qquad (1)$$

3- таъриф.Тақрибий **a** сони абсолют хатолигининг шу сон модулига нисбати **a** тақрибий соннинг нисбий хатолиги дейилади.

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|a|} \qquad (2)$$

Аниқ **A** сон номаълум бўлганлиги сабабли абсолют ва нисбий хатоликлар ҳам номаълум бўлади, шунинг учун хатоликнинг чегараси кўрсатилади.

4- таъриф $|A-a| \le h$ тенгсизликни қаноатлантирувчи **h** катталик абсолют **хатоликнинг чегараси** дейилади.

5 – таъриф. $\frac{|A-a|}{|a|} \le \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ε сони нисбий **хатоликнинг чегараси** дейилади.

Нисбий хатолик чегараси кўпинча процентларда ифодаланади. h ва ε сонлари имкони борича кичик қилиб олинади. Масалан: **A=**π бўлиб, **a=3.14** каби қабул қилинган бўлса, **h=0.002** деб олиниши мумкин. У ҳолда ε =0.07% бўлади.

Тақрибий **а** сонининг абсолют ва нисбий хатоликлари чегаралари таърифларига кўра $A = a \pm h$ ва $A = a(1 \pm \varepsilon)$ каби ёзиш мумкин.

<u>1 – мисол</u> .Тақрибий қиймат **а=0.67** бўлган **А**=2/3 соннинг нисбий хатолиги чегарасини топинг.

Ечиш. $\left|\frac{2}{3} - 0.67\right| = 0.01$ h=0.01/3=0.0034 деб оламиз .У ҳолда $\varepsilon = \frac{0.0034}{0.67}$ ёки $\varepsilon = 0.0051 = 0.51\%$ ҳосил бўлади.

<u>2- мисол.</u> 24.6 – бирор соннинг 0.4% нисбий хатоликдаги тақрибий қиймати бўлса, бу яқинлашиш қандай аниқликда бажарилган? **А** сон қандай чегараларда жойлашган?

Ечиш. Бизага $\varepsilon = 0.4\%$ **а=24.6** берилган У ҳолда **а*** $\varepsilon = 24.6 * 0.004 = 0.0984$ ҳосил бўлади. Соддалик учун h=0.1 деб оламиз. Бундан **А=24.6**∓ 0.1 ёки $24.5 \le A \le 24.7$

Қийматли рақам ва ишончли белги тушунчалари.

1-таъриф.Ўнли каср кўринишида ёзилган соннинг чапдан нолдан фарқли рақамидан бошланган барча рақамларига **қийматли рақамлар** дейилади.

Масалан: 0.003020 сони тўрта : 3,0,2,0 қийматли рақамларга эга: 25.5605 сони олтита: 2,5,5,6,0,5 қийматли рақамга эга.500 сони учта 5,0,0 қийматли рақамга эга; 0.00001 сони 1 қийматли рақамга эга ва ҳокозо.

2- таъриф .Агар берилган тақрибий соннинг абсолют хатоси **n**– қийматли рақами разряд бирлигининг ярмидан ошиб кетмаса, бу соннинг бошланғич **n** та қийматли рақами **ишончли** дейилади.

Шундай қилиб, **А** аниқ сонни алмаштирувчи **а** тақрибий сон маълум бўлса, у ҳолда

$$\Delta a = |A - a| \le \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$$

Бўлиб, бу соннинг бошланғич n $a_m, a_{m-1}, a_{m-1}, \ldots, a_{m-n+1}$ рақамлари қийматли бўлади.

Масалан: А=35.97 аниқ сон учун **а=36.00** тақрибий сон учта ишончли белги билан яқиндир, чунки $|A - a| \le \frac{1}{2} 0.1$

<u>1-мисол</u> .Қуйидаги тақрибий сонлардаги ишончли белгилар сонини аниқланг:

$$a) x = 3.14 \pm 0.01 \qquad b) y = 2.718 \pm 0.006$$

Ечиш. а) 3.14 тақрибий соннинг юздан бирлар хонасида жойлашган 4 рақам ишончсиз, чунки $0.005 \le 0.01$ Равшанки, олдинда келган иккита 3 ва 1 рақамлари ишончлидир.

в) 2.718 тақрибий сонинг охиргида турган **8** рақами ишончсиз бўлиб, қолганлари ишочли бўлади(чунки , $0.005 \le 0.006$.)

<u>2- мисол.</u>Агар 2.768 сонидаги барча рақамлар ишончли бўлса, унинг абсалют хатолигининг чегараси учун нима олиниши мумкин?

Ечиш. Берилган тақрибий соннинг барча рақамлари ишончли бўлганидан, унинг охирги рақамининг разряди ярмисига боғлиқ равишда хатолик чегараси аниқланади. Охирги рақам разряд бирлиги: 0.001. Шунинг учун 0.0005 сондан катта бўлмаган ҳар қандай сон берилган 2.768 тақрибий сони учун абсодют хатолик чегараси бўлада олади.

Яхлитлаш қоидаси.

Қўпгина ҳолларда берилган тақрибий сонларни яхлитлаш тўғри келади, яъни уни ишончли белгилар сони кам бўлган тақрибий сон билан алмаштиришга тўғри келади. Бунда яхлитлаш хатолиги минимал бўлишига харакат қилади.

Берилган тақрибий сонларни яхлитлаш қоидаси қуйидагича. Сони n та қийматли рақамгача яхлитлаш учун, n-қийматли рақамдан кейинги барча рақамлар ташлаб юборилади ёки агар керак бўлса, улар ноллар билан алмаштирилади.

1. Агар ташлаб юборилан рақамларининг биринчиси 5 дан кичик бўлса , у ҳолда қолган ўнли белгилар ўзгаришсиз қолдирилади;
2. Агар ташлаб юборилаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан ката бўлса, у ҳолда қолган рақамларнинг охиргисига 1 қўшилади.
3. Агар ташлаб юборилаётган рақамларнинг биринчиси 5 га тенг бўлса, у ҳолда ташланаёрган рақамларнинг эътибор қилинади. Яъни улар ноллардан иборат бўлмаса, қолган охирги рақамга бир қўшилади; агар ташланаётган рақамлар ноллардан иборат бўлса, қолган охирги рақам қарб, жуфт бўлса ташлаб юборилади, тоқ бўлса унга 1 қўшилади.

3- мисол. $\pi \approx 3.1415926535...$ тақрибий сони учта қийматли рақамгача яхлитланг.
Ечиш. Яхлитлаш кетма- кетлиги қуйидагича бўлиши мумкин:

$$3.1415926535 \approx 3.141592654 \approx 3.14159365 \approx 3.1415926 \approx 3.141593 \approx$$
$$\approx 3.14159 \approx 3.1416 \approx 3.1416 \approx 3.142 \approx 3.14$$

Ушбу мисолдаги охирги кетма- кет учта тақрибий соннинг абсолют хатолиги мос равишда $0.5 \cdot 10^{-4}$, $0.5 \cdot 10^{-3}$ *ва* $0.5 \cdot 10^{-2}$ дан ката эмас.

Хатоликнинг тарқалиши.

Юқорида биз сонларни яхлитлашда ҳосил бўладиган хатоликлар ва уларни баҳолаш ҳақида тўхтадик.Бундай хатоликлар турли арифметик амаллар натижаларини анализ қилинаётганда ҳисобга олиниши керак.Шунинг учун тақрибий сонлар устида турли амаллар бажарганда хатолик қандай **тарқалиши** муҳим касб этади.

Йиғиндининг хатолиги.

1 - теорема. Тақрибий сонлар алгебраик йиғиндисининг абсолют хатолиги, шу сонларнинг абсолют хатоликлари йиғиндисидан катта эмас.

Исботи. Берилган тақрибий сонлар x_1, x_2, x_3,…, x_n лардан иборат бўлсин.Уларнинг алгебраик йиғиндисини кўрайлик:

$$u = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_n$$

Равшанки

$$\Delta u = \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \Delta x_3 \pm \cdots \pm \Delta x_n$$

Бундан

$$|\Delta u| = |\Delta x_1| \pm |\Delta x_2| \pm |\Delta x_3| \pm \cdots \pm |\Delta x_n| \qquad (3)$$

Теорема исбот қилинди. Тақрибий сонларнинг алгебраик йиғиндисининг чегаравий абсолют хатолиги учун

$$|h_u| = h_{x1} + h_{x2} + h_{x3} + \cdots + h_n \qquad (4)$$

ни олиш мумкин.

Айирманинг хатолиги.

Икки x_1 ва x_2 тақрибий сонинг $u=x_1+x_2$ айирмасини кўрайлик. Юқорида кўрилган йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги формуласи (2) га кўра, айирманинг чегаравий абсолют хатолиги

$$h_u = h_{x1} + h_{x2} \qquad (5)$$

каби бўлади, яъни айирманинг чегаравий абсолют хатолиги айирилувчи ва айирувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари йиғиндисига тенг.

Бу ерда айириманинг нисбий чегараси учун

$$\varepsilon = \frac{h_{x_1} + h_{x_2}}{|x_1 - x_2|} \qquad (6)$$

ни олиш мумкин. Формуладан кўриниб турибдики, агар x_1 ва x_2 сонлар яқин жойлашган бўлса, хатоликлар жуда кичик бўлса ҳам, чегаравий нисбий хатолик етарлича катта бўлиши мумкин.

Кўпайтма хатолиги.

2- теорема. Нолдан фарқли тақрибий сонлар нисбий хатолик кўпайтмасининг нисбий хатолиги, шу сонларнинг нисбий хатоликлари йиғиндисидан катта эмас.

Исбот. $u = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$ бўлсин. Содда бўлсин учун берилган тақрибий сонлар мусбат бўлсин.У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n$$

$\Delta \ln x \approx d \ln x = \dfrac{\Delta x}{x}$ тақрибий формулани қўллаб, қуйидаги ҳосил қиламиз.

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n}$$

ҳосил бўлади ёки,

$$\delta(u) = \delta(x_1) + \delta(x_2) + \delta(x_3) + \cdots + \delta(x_{n1}) \qquad (7)$$

Натижада. Кўпайтманинг чегаравий нисбий хатолиги учун тақрибий сонланинг чегаравий нисбий хатоликлари йиғиндисинин олиш мумкин, яъни

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} + \varepsilon_{x_3} + \cdots + \varepsilon_{x_n} \qquad (8)$$

Бўлинманинг хатолиги.

3- теорема. Бўлинманинг нисбий хатолиги бўлинувчи ва бўлувчиларнинг нисбий хатоликлари йиғиндисигдан катта эмас.

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

бўлиб, бу ердан

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| - \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Ёки $\delta(u) \leq \delta(x_1) + \delta(x_2)$ бўлади.

Натижада.Бўлинманинг чегаравий нисбий хатоликлари йиғиндисини олиш мумкин.

$$h_u = h_{x1} + h_{x2} \qquad (9)$$

Даражанинг хатолиги.

$u = x^m$ (m- натурал сон) бўлсин, у ҳолда $\ln u = m \cdot \ln x$ ва

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = m\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \qquad (10)$$

бўлиб, бундан

$$\varepsilon_u = m\varepsilon_x$$

Каби ёзиш мумкин, яъни **m-** даражали соннинг чегаравий нисбий хатолиги тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолигидан даража кўрсаткичи **m** марта катта.

Илдизнинг хатолиги.

$u = \sqrt[m]{x}$ бўлсин, у ҳолда $u^m = x$.Даражанинг чегавий нисбий хатоли формуласига кўра

$$\varepsilon_u = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x \qquad (11)$$

Яъни, **m**- даражали илдизнинг чегаравий нисбий хатолиги илдиз остидаги тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолигидан илдиз кўрсаткичи **m** марта кичик.

Мисол. Қуйидаги функция қийматини хисоблашда ҳосил бўладиган хатоликларни топинг:

$$x = \frac{A^2 \cdot B^{^2}}{K}$$, бу ерда $A = 28.3 \pm 0.02$, $K = 0.678 \mp 0.003$, $B = 7.45 \pm 0.01.$

Ечиш. Қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$A^2 = 800.9; \quad B^2 = 413.5; \quad K = 0.8234;$$

булардан фойдаланиб,

$$x = \frac{800.9 \cdot 413.5}{0.8234} = 402200 = 4.02 \cdot 10^5$$

Сўнгра қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\varepsilon_A = 0.02/28.03 = 0.00071; \ \varepsilon_B = 0.01/7.45 = 0.00135 \ ;$$

$$\varepsilon_K = 0.003/0.678 = 0.00443; \ \varepsilon_X = 2 \cdot \varepsilon_A + 0.5 \cdot \varepsilon_K = 0.00405 + 0.00222 = 0.77\%.$$

$$h_X = 4.02 \cdot 10^5 0.0077 = 3.1 \cdot 10^3$$

шундай қилиб,

$$x = 4.02 \cdot 10^5 \pm 3.1 \cdot 10^3 \ ; \ \varepsilon_x = 0.77\%.$$

2 - маъруза машғулот

Чизиқли бўлмаган бир номаълумли тенгламаларни оралиқни иккига бўлиш усулида ечиш.

Ҳар бир мумахассис , жумладан инженер ва иқтисодчи ўзининг иш фаолиятида, ҳусусан, иншоат қисмларининг мустаҳкамлиги, сейсмик чидамлилигии лойиҳалашда ва ҳисоблашда, иссиқлик ва газ таъминоти масаларини ҳал қилишда чизиқли бўлмаган ёки трансцендент тенгламаларнинг ечимини топиш керак бўлади.

Ҳар доим ҳам тенгаламаларни ечимни аниқ усуллар билан топиб бўлмайди. Шунинг учун тақрибий усуллар қўлланилади.

Бир номаълумли ихтиёрий тенглама қуйидаги кўринига эга:

$$f(x)=0. \qquad (1)$$

1 – таъриф. Агар $f(x)$ функция кўпҳаддан иборат бўлса, яъни

$$f(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots..a_{n-1}x + a_n \text{ бўлса}$$

(1) тенглама алебраик тенглама дейилади.

2 – таъриф. Агар $f(x)$ функция элементар функциялардан(логарифимик, кўрсаткичли, тригонометрик ва ҳакозо) ёки махсус функциялардан иборат бўлса (1) тенглама трансцендент тенглама дейилади.

3 – таъриф. Агар **x^*** нинг қиймати (1) тенламани қоноатлантириса .яъни айниятга айлантирса x^* (1) тенгламанинг ечими дейилади.

4 – таъриф. Агар [a, b] оралиқда (1) тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий ечими бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция оралиқнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматлар қабул қилади, яъни $f(a)*f(в)<0$ нгсизлик бажарилади.

Масалан: x+sin(x)=0.5 тенгламанинг [0;1] оралиқдаги битта ҳақиқий илдизини $\varepsilon = 10^{-2} = 0.01$ аниқликда топиш талаб этилсин.

Мисолнинг ечиш тартиби.

1. Оралиқнинг четки қийматларида функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$f(a) = f(0) =0+\sin(0)-0.5=-0.5$; $f(b) = f(1) =1+\sin(1)-0.5=1.3415$.

2. $f(a) * f(b)=-0.5*1.3415<0$ шартдан бажарилди демак берилган оралиқда тенгламанинг камида битта илдизи мавжуд бўлади.

3. Оралиқни иккига бўламиз натижада иккита [a;c] ва [c;b]оралиққа эга бўламиз.Бу ерда: $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+1}{2} = 0.5;$

4.c=0.5 нуқтада функциянинг қийматини топамиз:
$f(0.5) = 0.5+\sin(0.5)-0.5=0.4795>0.01$ функциянинг қиймати берилган аниқликдан катта шунинг учун оралиқни бўлишни давом эттирамиз.

5. $f(a) * f(c)=-0.5*0.4795<0$ шартдан бажарилди демак илдиз [a;c]= [0;0.5] ётади.Шунинг учун b=0.5 деб оламиз.

6. Оралиқни иккига бўламиз натижада иккита [a;c] ва [c;b]оралиққа эга

бўламиз. Бу ерда: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.5}{2} = 0.25;$

7.c=0.25 нуқтада функциянинг қийматини топамиз:

f(0.25) = 0.25+sin(0.25)-0.5=-0.0026 функциянинг қиймати абсалют қиймати жиҳатидан берилган аниқликдан кчик шунинг учун оралиқ бўлишни давом эттирамаймиз ва c=0.25 тенгаманинг тақрибий илдизи деб қабўл қиламиз.

Тенгламанинг оралиқни иккига бўлиш усули билан ечимини топиш алгоритими.

1. Тенгламанинг **[a, b]** оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлса *f*(а)**f*(в)<0 шарт бажарилади ва тенгламанинг ечимини берилган $0 < \varepsilon < 1$ аниқликда ҳисобланади. Агар шарт бажарилмаса берилган оралиқда тенгламанинг ҳақиқий илдизи мавжуд бўлмайди ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.
2. **[a, b]** оралиқни иккига бўлсак иккита **[a, c]** ва **[c, b]** оралиқ ҳосил бўлади.

   Бу ерда: $c = \frac{a+b}{2}$
3. $|f(c)| < \varepsilon$ шарт бажарилса **x**= **c** сони берилган тенгламанинг тақрибий ечими деб қабул қилинади ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.
4. *f*(a)**f*(c)<0 шарт бажарилса тенгламанинг илдизи **[a, c]** оралиқда ётади. Шунинг учун **в=с** деб ҳисоблаш 2 пунктга узатамиз.
5. *f*(a)**f*(c)<0 шарт бажарилмаса тенгламанинг илдизи **[a, в]** оралиқда ётади. Шунинг учун **a=c** деб ҳисоблаш 2 пунктга узатамиз.

Қуйидаги Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида берилган x+sin(x)=0**.5** тенгламанинг [0;1] оралиқдаги илдизини $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$ аниқликда ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижаси : x=0.251 экан.

Паскал тилидаги дастури.

```
Label 10,20,30,40,50;
var
a,b,c,eps,x:real;
function f(x:real):real;
begin f:=x+sin(x)-0.5;end;
begin
writeln('Тенглама илдизи ётган ориликнинг чегаравий қийматларини киритинг');
write('  a=');read(a);write('  b=');read(b); writeln;
writeln('Ҳисоблаш аниқлигини киритинг'); read(eps);
if f(a)*f(b)>0 then goto 40;
10: c:=(a+b)/2;
if abs(f(c)) < eps then goto 30;
if f(a)*f(c)<0 then goto 20;
a:=c; goto 10;
20: b:=c; goto 10;
30: writeln(' Тенгламинингтақрибий илдизи   f(',c:8:5,')=',f(c):8:6); goto 50;
40: writeln('Берилган оралиқда тенгламанинг ҳақиқий илдизи мавжуд эмас');
50:end.
```

1-топширик.

1.Талаба 1 – жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича тенгламани олади.
2. Графи усулда тенгламанинг илдизини ётган ораликни тахминан аниқлайди.
3.Ораликни иккига бўлиш усули ёрдамида тенгламанинг илдизини 0.01 аниқликда тақрибий ечимни қўлда ҳисоблаб топади.
4. Паскал тилида тузилган дастурдан фойдаланиб, топилган ечимни 0.0001 аниқликгача ҳисоблайди.
5. Тенгламани оддий иттерация усулида ечимини топиш учун дастур тузади.
6.Maple дастуридаги тенгламанинг ечимини топиш функцияси ёрдамида берилган тенгламани ечимини топади.
7.Усул тўғрисида ўз фикрини билдиради.

1 - жадвл

Т.Р	F(x)=0	Т.Р	F(x)=0
1	$x^4+2x^3-4x^2-12=0$	16	x-5sin(x)-0/5=0
2	$x^3-0.2x^2-4x-7=0$	17	cos(2x+1)-3x+1=0
3	$2x^4-3x^3-4x^2-5=0$	18	x-2sin(x+1)=0
4	$e^x+4x+1=0$	19	sin(x+π/2)+2cosx+x=0
5	$3^x+2x-1=0$	20	e^x+cos(x+π/2)+2=0
6	$2^x-(x-2)^{-2}=0$	21	arcsin(x)-0.2x-0.1=0
7	x^{-1}-lg(x+1)=0	22	arcos(x)-$\sqrt{1-0.3x^2}$ =0
8	x-4lgx+1=0	23	arctg(x)-0.5x+1.5=0
9	x^2-2lgx+1=0	24	arcctg(x)-3x-0.1=0
10	lg(x^2+4)+5x=0	25	x-5sin(x)-0/5=0
11	$\log_3$(x+1)-2x^{-1}=0	26	3x^3arctg(x)-1=0
12	sin(x+1)-x^2=0	27	arctg$\sqrt{x+1}$-2x+3=0
13	cos(x)+$\sqrt{x+1}$=0	28	sh(x)-lg(x+2)=0
14	cos(x)-3x+1=0	29	arctg$\sqrt[3]{x+1}$-e^x+x=0
15	sin(2x)-2x+0.25=0	30	arcsin(2x)-2x+0.25=0

3 - маъруза машғулот

Алебраик ва трансцендент тенгламаларни уринмалар ва ватарлар усулида ечиш.

1.Уринмалар (Ньютон) усули.

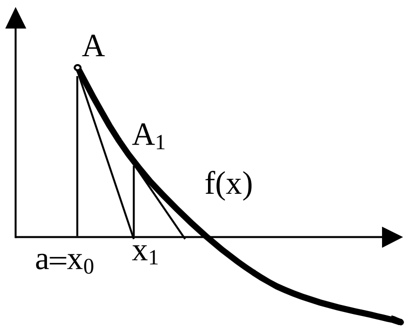
$$f(x)=0.$$

Бир номаълумли тенгламани ечимни юқори аниқликда ва тез топиш жиҳатидан бошқа усулларга нисбатан уринмалар усули устун туради. Лекин уринмалар усулида ечимни топиш учун f(x) ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи $f'(x)$ **[a;b]** оралиқда ишорасини ўзгартимаслиги керак. Ҳамда нолинчи яқинлашишда қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$f(x_0)*f''(x_0)>0$$

Усулнинг моҳияти қуйидагича:

$$f(x)=0$$



тенглама **[a;b]** оралиқда битта тақрибий илдизга эга деб фараз қилайлик. Дастлабки яқинлашиш сифатида a ёки b нуқталардан бирини олишимиз мумкин ва шу нақтадан уринма ўтказамиз. Айтайлик уринма A нуқтадан ўтсин. Уринманинг x ўқи билан кесишган нуқтаси x_1 га мос нуқтани A_1 деб олиб, энди A_1 нуқтадан уринма ўтказамиз, ва ҳоказо.

1 - расм

Уринманинг x ўқи билан кесишган нуқталари тақрибий илдиз x га етарли аниқликгача яқинлашгунча жараён давом этади.

Агар дастлабки x_0 яқинлашиш тўғри танланса, аниқ ечим жуда тез топилади. Шунинг учун дастлабки яқинлашиш x_0 ни танлаш масаласига алоҳида эътибор берамиз. Уринмалар усулининг тенгламанинг илдизини топиш формуласи:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,1,2,3\ldots$$

x0 бошланғич яқинлашишда $f(x_0)*f''(x_0)>0$ шарт бажарилиши керак.

Масалан: x+sin(x)=0.5 тенгламанинг [0;1] оралиқдаги битта ҳақиқий илдизини $\varepsilon=10^{-2}=0.01$ аниқликда топиш талаб этилсин.

Мисолнинг ечиш тартиби.

1. Функция ва ҳосиласини аниқлаб оламиз. f(x) = x+sin(x)-0.5 ; f'(x)=1+cos(x) ;

2. $f(x_0)*f''(x_0)>0$ шартдан нолинчи яқинлашишни аниқлаймиз. f''(x)=-sin(x);

x_0=0.01 нуқтада шартни текширамиз.

$f(0.01) = 0.01+\sin(0.01)-0.5<0$; $f''(0.01)=-\sin(0.01)<0$; $f(0) * f''(0)>0$

Демак нолинчи яқинлашишни x_0=0.01 деб оламиз.

3. Биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.01 - \frac{f(0.01)}{f'(0.01)} = 0.01 - \frac{-0.48}{2} = 0.01 + 0.0013 = 0.25$$

4.Тенглама илдизини топиш аниқлигини текширамиз:

$|x_1 - x_0| = |0.01 - 0.25| = 0.24 > \varepsilon = 0.01$ илдизлар орасидаги фарқ берилган

аниқликдан катта бўлгани учун кейинги яқинлашишни топамиз.

5. Иккинчи яқинлашишни ҳисоблаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}25 - \frac{f(0.25)}{f'(0.25)} = 0.25 - \frac{-0.0026}{1{,}9689} = 0.25 + 0.0013 = 0.2513$$

6.Тенглама илдизини топиш аниқлигини текширамиз:

$|x_2 - x_1| = |0.2513 - 0.25| = 0.0013 < \varepsilon = 0.01$ илдизлар орасидаги фарқ берилган аниқликдан кичик шунинг учун x_2=0.2513 берилган тенгламанинг илдизи деб қабул қиламиз.

Уринмалар усулининг ҳисоблаш алгоритими.

1. Тенгламанинг **[a, b]** оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлса f(а)*f(в)<0 шарт бажарилади ва тенгламанинг ечимини берилган $0 < \varepsilon < 1$ аниқликда ҳисобланади. Агар шарт бажарилмаса берилган оралиқда тенгламанинг ҳақиқий илдизи мавжуд бўлмайди ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.

2. Бошланғич яқинлашишда $f(x_0)*f''(x_0)>0$ шарт бажарилиши керак акс ҳолда ҳисоблаш жараёни тўхтатилади. n=0 бўлсин**.**

3. n=n+1;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Топилган яқинлашиш нуқтасида $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ шарт бажарилса ҳисоблаш жараёни тўхтатилади. Акс ҳолда ҳисобдлаш 3 пунктга узатилади.

Қуйидаги Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида берилган x+sin(x)=0**.5** тенгламанинг [0;1] оралиқдаги илдизини $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$аниқликда ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижаси : x=0.251 экан.

```
label 10,20,30,40,50;
var
eps,x:real;
function f(i:integer;x:real):real;
begin case i of
1: f:=x+sin(x)-0.5; 2: f:=1+cos(x);3:f:=-sin(x);end;end;
begin
10:writeln(‘Тенгламанинг нолинчи яқинлашиш қийматини киритинг‘);
write(‘  x=’);read(x); if f(1,x)*f(3,x)>0 then goto 20;
writeln(‘Бошлангич яқинлашиш нотўғри берилган бошқа қиймат беринг’); goto 10;
20: writeln(‘Ҳисоблаш аниқлигини киритинг’); read(eps);
30: x:=x-f(1,x)/f(2,x);
if abs(f(1,x)) >eps then goto 30;
writeln(‘ Тенгламинингтақрибий илдизи   f(‘,x:8:5,’)=’,f(1,x):8:6);
end.
```

Ватарлар усули ва унинг моҳияти қуйидагидан иборат.

$$f(x)=0$$

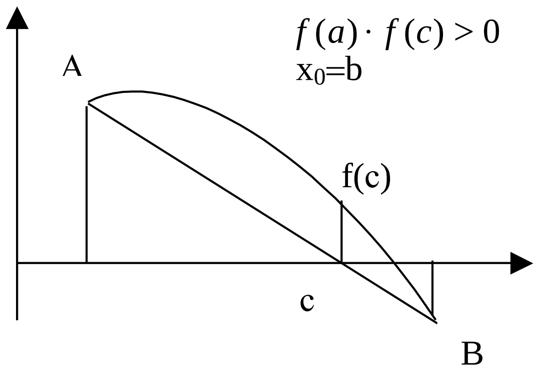
$y=\ f(x)$ функциянинг графининг $(a,\ f(a))$ ва $(b,\ f(b))$ нуқталардан ўтувчи ватарни Ox ўқи билан кесишиш нуқтаси c нинг қийматини тўғри чизиқ тенгламасидан аниқлаймиз.

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

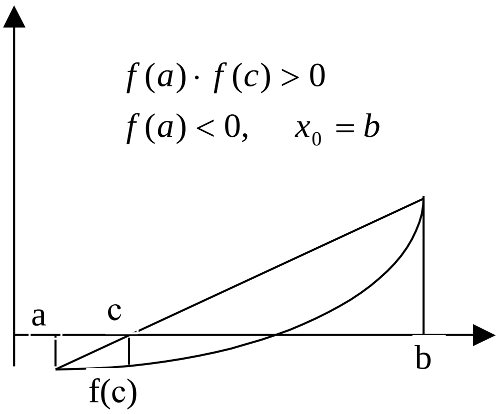
Ватарнинг Ox ўқи билан кесишиш нуқтаси c_0 да $x=c_0,\ y=0$ бўлади.

$$c\ =a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$

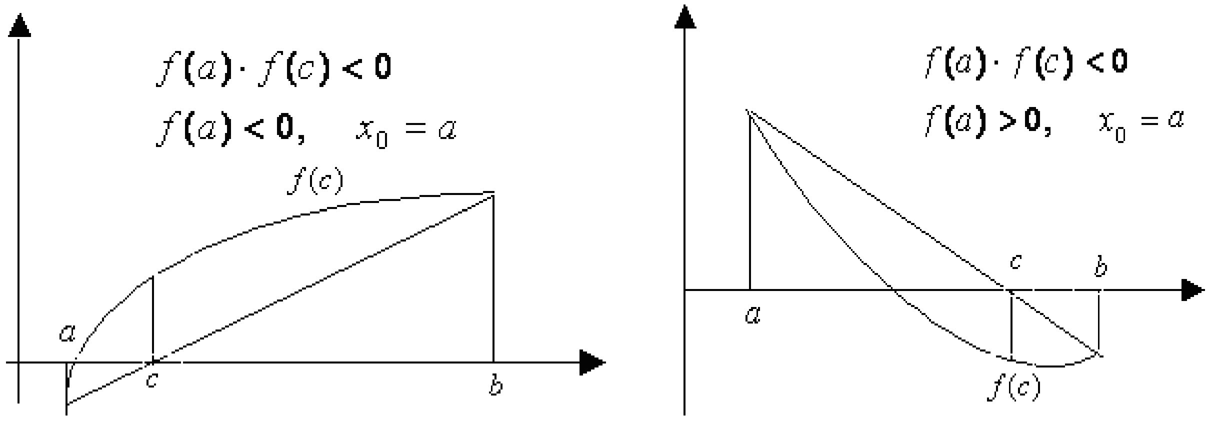
c маълум бўлгач, $f(c)$ нинг қийматини ҳисоблаш мумкин. Бошланғич яқинлашишни танлаш ҳолларини кўриб чиқайлик:



1)



2)



3) 4)

6 - расм

a a c b $f(c)$

1) $f(a)>0$ ва $f(a)\cdot f(c)>0$, бўлса $x_0=b$

2) $f(a)<0$ $f(a)$<0 ва $f(a)\cdot f(c)>0$, бўлса $x_0=b$

3) $f(a)<0$ $f(a)$<0 ва $f(a)\cdot f(c)<0$, бўлса $x_0=a$

4) $f(a)>0$ $f(a)$>0 ва $f(a)\cdot f(c)<0$, бўлса $x_0=a$

Ватарлар усулининг умумий формуласи:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

n=0,1,2,3…

x_0 бошланғич яқинлашишда $f(x_0)*f''(x_0)<0$ шарт бажарилиши керак.

Масалан: x+sin(x)=0.5 тенгламанинг [0;1] ораликдаги битта ҳақиқий илдизини $\varepsilon=10^{-2}=0.01$ аниқликда топиш талаб этилсин.

Мисолнинг ечиш тартиби.

1. Ораликнинг четки қийматларида функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

f(a) = f(0) =0+sin(0)-0.5=-0.5 ; f(b) = f(1) =1+sin(1)-0.5=1.3415.

2. f(a) * f (b)=-0.5*1.3415<0 шартдан бажарилди демак берилган ораликда тенгламанинг камида битта илдизи мавжуд бўлади.

2. $f(x_0) * f''(x_0)>0$ шартдан нолинчи яқинлашишни аниқлаймиз. f''(x)=-sin(x); x_0=1 нуқтада шартни текширамиз.

f(1) = 1+sin(1)-0.5=1.3415>0; f''(1)=-sin(1)=- 0.841471<0; f(1) * f''(1)<0

Демак нолинчи яқинлашишни x_0=1 деб оламиз.

3. Биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)(x_0-a)}{f(x_0)-f(a)}=1-\frac{f(1)(1-0)}{f(1)-f(0)}=1-\frac{1.3415}{1.8415}=1-0.7285=0.2715$$

4.Тенлама илдизини топиш аниқлигини текширамиз:

$|x_1-x_0|=|1-0.2715|=0.7285>\varepsilon=0.01$ илдизлар орасидаги фарқ берилган аниқликдан катта бўлгани учун кейинги яқинлашишни топамиз.

5.Иккинчи яқинлашишни ҳисоблаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)} = 0.2715 - \frac{f(0.2715)(0.2715 - 0)}{f(0.2715) - f(0)} =$$

$$= 0.2715 - \frac{0.0108}{0.5397} = 0.2715 - 0.02 = 0.2515$$

6.Тенлама илдизини топиш аниқлигини текширамиз:

$|x_2 - x_1| = |0.2515 - 0.2715| = 0.0202 > \varepsilon = 0.01$ илдизлар орасидаги фарқ берилган аниқликдан катта бўлгани учун кейинги яқинлашишни топамиз.

7.Учинчняқинлашишни ҳисоблаймиз:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - a)}{f(x_2) - f(a)} = 0.2515 - \frac{f(0.2515)(0.2515 - 0)}{f(0.2515) - f(0)} =$$

$$= 0.2515 - \frac{0.0001}{0.5004} = 0.2515 - 0.0002 = 0.2513$$

8.Тенлама илдизини топиш аниқлигини текширамиз:

$|x_3 - x_2| = |0.2513 - 0.2515| = 0.0002 < \varepsilon = 0.01$ илдизлар орасидаги фарқ берилган аниқликдан кичик шунинг учун x_2=0.2513 берилган тенгламанинг илдизи деб қабул қиламиз.

Ватарлар усулининг ҳисоблаш алгоритими.

1. Тенгламанинг **[a, b]** оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлса f(а)*f(в)<0 шарт бажарилади ва тенгламанинг ечимини берилган $0 < \varepsilon < 1$ аниқликда ҳисобланади. Агар шарт бажарилмаса берилган оралиқда тенгламанинг ҳақиқий илдизи мавжуд бўлмайди ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.

2. Бошланғич яқинлашишда $f(x_0)*f''(x_0)<0$ шарт бажарилиши керак акс ҳолда ҳисоблаш жараёни тўхтатилади. n=0 бўлсин**.**

3. n=n+1;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

4. Топилган яқинлашиш нуқтасида $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ шарт бажарилса ҳисоблаш жараёни тўхтатилади. Акс ҳолда ҳисобдлаш 3 пунктга узатилади.

Қуйидаги Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида берилган x+sin(x)=0**.5** тенгламанинг [0;1] оралиқдаги илдизини $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$ аниқликда ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижаси : x=0.251 экан.

Паскал тилидаги дастури.

```
label 10,20,30,40,50;
var
eps,b,x:real;
function f(i:integer;x:real):real;
begin case i of
1: f:=x+sin(x)-0.5; 2: f:=-sin(x);end;end;
begin
10:writeln(‘Тенгламанинг нолинчи яқинлашиш қийматини киритинг‘);
write(‘  x=’);read(x); if f(1,x)*f(3,x)<0 then goto 20;
writeln(‘Бошлангич яқинлашиш нотўғри берилган бошқа қиймат беринг’); goto 10;
20 : writeln(‘Оралиқнинг иккичи қийматини киритинг’); read(b);
writeln(‘Ҳисоблаш аниқлигини киритинг’); read(eps);
30: x:=x-f(1,x)*(b-f(1,x)/(f(1,b)-f(1,x));
if abs(f(1,x)) >eps then goto 30;
writeln(‘ Тенгламинингтақрибий илдизи   f(‘,x:8:5,’)=’,f(1,x):8:6);
end.
```

2 - топшириқ.

1. Талаба 1 – жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича тенгламани олади.
2. Тенгламанинг илдизини 0.01 аниқликда тақрибий ечимни уринма ёки ватарлар усулида ечимини қўлда ҳисоблаб топади.
3. Тенгламанинг илдизини 0.0001 аниқлиқгача уринма ва ватарлар усулида топиш учун Паскал тилидаги тузилган дастурдан фойдаланади.
4. Оралиқ ечимларни топиб, яқинлашиш кетма- кетлиги тўғрисида ўз фикрини билдиради.
5. Уринмалар ва ватарлар усулини биргаликда қўллаш учун дастур тузади.

4 - маъруза машғулот

Чизиқли алебраик тенгламалар системасининг Гаусс усулида ечиш.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари сонли усуллар орасида муҳим ўрин тутади. Чунки халқ ҳўжалиги ва ишлаб чиқаришнинг жуда кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли алгебрик тенгламалар системаси орқали ифодаланади.

n -тартибли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг кўриниши қуйидаги ифодадан ииборат:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда $a_{ij}(ij = 1, n)$ лар маълум сонлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг коэффициентлари дейилади, $x_1, x_2, ..., x_{\text{n}}$ - номаълумлар, $b_1, b_2, ..., b_{\text{n}}$ - (1) система тенгламаларининг озод ҳадлари, улар ҳам маълум сонлардан иборат.

Тенгламалар сиетемасининг матрица кўриниши:

$$AX = B \qquad (2)$$

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Бунда A - n та сатр ва n та устундан иборат квадрат матрица, a_{ij} элементларнинг сони x^2 та, X $B - n$ та элементлардан иборат вектор устунлар.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш деб (1) ёки (2) системалардан $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ номаълумларни топишга айтилади. Топилган $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ қийматлар (1) ёки (2) системаларга қўйилганда тенгламаларни айниятга айлантирса, улар системанинг ***ечими*** дейилади.

Системанинг ягона ечими мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти A матрица детерминантининг нолдан фарқли бўлишидир, яъни

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

Агар $D = 0$ бўлса, системалар махсус системалар дейилади ва уларнинг ечими ёки мавжуд эмас, ёки чексиз кўп бўлади (бундай системаларни айниган системалар деб аталади).

Гаусс усулининг моҳияти.

Гаусс усули номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулининг умумий схемаси бўлиб унинг ёрдамида **А** мартицанинг диоганал элементларидан пастки қисмида жойлашагн матрица элементларини нолга айлантиришдан иборотдир. Гаусс усулини уч номаълумли уч тенгламалар системасини кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \end{cases} \qquad (5)$$

Биринчи тенгламада $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Агар бу шарт бажарилмаса, биринчи тенглама сифатида бошқа, x_1 олдидаги коэффиценти 0 га тенг бўлмаган тенгламани олишимиз мумкин. Бир вақтнинг ўзида барча $a_{ij}(i = 1,4)$ коэффицентлар 0 - га тенг бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли $a_{11} \neq 0$ шарти ҳамма вақт бажарилувчи шартдир. (5) тенгламалар системасида биринчи тенгламани а$_{11}$ коэфицентга бўлиб,

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \qquad (6)$$

бу ерда

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \; j = 2,3; \; b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Охирги (6) тенгламадан фойдаланиб (5) системадан x_1 номаълумни йўқотиш (чиқариш) мумкин. Бунинг учун (6) тенгламани a_{21} га кўпайтириб (6) системанинг иккинчи тенгламасидан, a_{31} га кўпайтириб учинчи тенгламасидан айириш керак. Бу амалларни бажариш натижасида

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = b_2^{(1)} \\ \quad a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \tag{7}$$

система эга бўламиз. Бунда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}^{(1)} \; ; \; b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} b_1^{(1)} \; ; \; (i, j \geq 2)$$

Энди (7) системанинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)} \neq 0$ коэффицентга бўламиз:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)}, \qquad a_2^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad . \tag{8}$$

Юқоридаги сингари бу ерда ҳам $a_{22}^{(1)} \neq 0$ шартни ҳамма вақт таъминлашимиз мумкинлигини кўрсатиш қийин эмас.

Учинчи тартибли (6.8) системада худди x_1 номаълум йўқотилгани каби, x_2 номаълумни йўқотамиз:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ \quad a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} \tag{9}$$

Бу ерда

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{23}^{(2)} : a_{33}^{(2)} = b_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_2^{(2)}$$

х3 ва x_1 , x_2 номаълумларни (9) тенгламадан топилади:

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \; : x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_{3,} : \; x_1 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_{3,}$$

Масалан: Қуйидаги тенгламалар системасининг ечимини

$$\begin{cases} 1.84x_1 + 1.22x_2 - 1.22x_3 = 3.46 \\ -2.25x_1 + 4.36x_2 + 5.52x_3 = 2.23 \\ 4.33x_1 + 3.49x_2 + 4.56x_3 = 1.22 \end{cases}$$

$\varepsilon = 10^{-2} = 0.01$ аниқликда топиш талаб этилсин.

Тенгламалар системасини ечиш учун қуйидаги кетма кетликни бажарамиз:

1. $a_{11} = 1.84 \neq 0$ бўлгани учун қуйидаги амални бажарамиз:

$$x_1 + \frac{1.22}{1.84} x_2 - \frac{1.22}{1.84} x_3 = \frac{3.46}{1.84}$$

$$a_{12} = \frac{1.22}{1.84} = 0.663; a_{13} = \frac{-1.22}{1.84} = -0.663; \; b_1 = \frac{3.46}{1.84} = 1.8804$$

2.Қолган тенгламалар олдидаги коэффицентларни аниқлаймиз.

$$a_{22} = a_{22} - a_{21}a_{12} = 4.46 - (-2.25) * 0.663 = 5.0518$$
$$a_{23} = a_{23} - a_{21}a_{13} = 5.52 - (-2.25) * (-0.663) = 4.0228\;;$$
$$b_2 = b_2 - a_{21}b_1 = 2.23 - (-2.25) * 1.8804 = 6.461$$
$$a_{32} = a_{32} - a_{31}a_{12} = 3.496 - 4.33 * 0.663 = 0.619$$
$$a_{33} = a_{33} - a_{31}a_{13} = 4.56 - 4.33 * (-0.663) = 7.431$$
$$b_3 = b_3 - a_{31}b_1 = 1.22 - 4.33 * 1.8804 = -6.9223$$

Натижада қуйидаги системага эга бўламиз.

$$\begin{cases} x_1 + \ 0.663x_2 - \ 0.663x_3 \ = 1.8804 \\ \quad 5.0518x_2 + 4.0228x_3 \ = 6.461 \\ \quad 0.619x_2 + \ 7.431x_3 \ = -6.9223 \end{cases}$$

3. $a_{22} = 5.0518 \neq 0$ бўлгани учун қуйидаги амални бажарамиз:

$$x_2 + \frac{4.0228}{5.0518}x_3 \ = \frac{6.461}{5.0518} \quad ; \ a_{23} = \frac{4.0228}{5.0518} = 0.7963; \ b_2 = \frac{6.461}{5.0518} = 1.279$$
$$a_{33} = a_{33} - a_{32}a_{23} = 7.436 - 0.619 * 0.7963 = 6.9381$$
$$b_3 = b_3 - a_{32}b \ = -6.9223 - 0.619 * 1.279 = -7.714$$

Натижада қуйидаги системага эга бўламиз.

$$\begin{cases} x_1 + \ 0.663x_2 - \ 0.663x_3 \ = 1.8804 \\ \qquad\qquad x_2 + 0.7963x_3 \ = 1.279 \\ \qquad\qquad\quad 6.9381x_3 \ = -7.714 \end{cases}$$

4. $a_{33} = 6.9381 \neq 0$ бўлгани учун қуйидаги амални бажараиб, x_3 топамиз:

$$x_3 \ = \frac{-7.714}{6.9381} = \text{-1.1118}$$

$$x_2 \ = 1.279 - 0.7963 * (-1.1118) = 2.1644$$
$$x_1 = 1.8804 - 0.663 * 2.1644 + 0.663 * (-1.1118) \ = \text{-0.2917}$$

Демак тенгламалар системасининг ечими: x_1=-0.2917 ; x_2=2.1644 ; x_3=-1.1118

Тенгламалар системасини Гаусс усулида ечиш алгоритими.

1.Тенгламалар системасидаги номаълумлар сони n ва улар олдидаги коэффицентлар a_{ij} ва b_i озод ҳадларнинг қийматларини аниқлаб оламиз.

2.Биринчи қадамни k=1 деб оламиз.

3. k – тенглама ва k- номаълум олдидаги коэффицент аниқлаймиз.

4. Агар $a_{kk} \neq 0$, бўлса ҳисоблаш 7- пунктга . бўлмаса 5- пунктга узатилади.

5. k- устуннинг қолган k- қаторида кейинги қаторларидан x_k номаълум коэффиценти $a_{ik} \neq 0$ ($i = k+1,..,n$) нолдан фарқлигини текширамиз.

6. Агар $a_{ik} \neq 0$ топилмаса тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлмайди

ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.Агар $a_{ik} \neq 0$ элемент топилса k- тенглама i- тенглама билан алмаштирилади.

7. k- тенгламани $a_{kk} \neq 0$ сонга бўламиз, натижада тенглама номаълумлари олдидаги коэффицентларнинг ва озод ҳаднинг қийматлари қуйидагича ҳисобланади:

$$a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \ , \ b_k = \frac{b_k}{a_{kk}} \ , \ j = k+1, k+2, ..., n.$$

8.k+1- тенгламадан бошлаб қолган тенгламаларнинг коэффицентлари қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj} \ , \ b_i = b_i - a_{ik}b_k \ ; \ i, j = k+1, k+2, ..., n.$$

9. k=k+1 ; Агар $k \leq n$ бўлса ҳисоблаш 5- пунктга узатилади, акс ҳолда тенгламалар системасининг ечими топилган ҳисобланади ва натижа олинади.

Тенгламалар системасини Гаусс усулида ечиш учун ПАСКАЛЬ тилидаги дастури.

```
label 10,20,30;
var
i,j,k,n,n1:integer;
a1:real; x: array[1..10] of real;
a,d:array[1..10,1..11] of real;
begin cls; write(‘  Номаълумлар сонини киритинг  n=’);read(n); n1:=n+1;
writeln(‘  Номаълумлар олдидаги коэффицент қийматини киритинг  ’);
for i:=1 to n do begin for j:=1 to n do begin
write(‘     a(‘,i:2,’,’,j:2,’)=’); read(a[i,j]); end;
write(‘     b(‘,i:2,’)=’); read(a[i,n1]); writeln;end;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do d[i,j]:=a[i,j];
for k:=1 to n-1 do begin if a[k,k]<>0 then goto 20;
for i:=k+1 to n do begin
if a[i,k]<>0 then goto 10;
end; writeln(‘  Тенгламалар системаси ягона ечимга эга эмас  ’); goto 30;
10: for j:=k to n1 do begin
a1:=a[i,j]; a[i,j]:=a[k,j]; a[k,j]:=a1; end;
20: for j:=k+1 to n1 do a[k,j]:= a[k,j]/ a[k,k] ;
for i:=k+1 to n do for j:=k+1 to n do
a[i,j]:= a[i,j]- a[i,k ]*a[k,j]; end;x[n]:= a[n,n1]/ a[n,n] ;
for i:= 1 to n-1 do begin k:=n-i; x[k]:= a[k,n1] ;
for j:=k+1 to n do x[k]:= x[k]-a[k,j]* x[j]; end;
writeln(‘  Тенгламалар системаси  ечими  ’);
for i:=1 to n do begin write(‘     x(‘,i:2,’)=’,x[i]:8:4); writeln;
writeln('  Текшириш натижасида озод хадларининг қийматлари ҳосил бўлади.  ');
for i:=1 to n do begin a1:=0;
for j:=1 to n do a1:=a1+d[i,j]*x[j]; write('  ',s,'  ');end;
30: end.
```

3- топшириқ.

1. Талаба 2– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Тенглмалар системасини ечимини қўлда ҳисоблаб топади.
3. Паскал тилида тузилган дастур ва **Maple** дастури ёрдамида тенламалар системасининг ечимини топади ва қўлда топилган ечими билан натижани текширади.
4. Оддий иттерация усулида ечимини топиш учун дастур тузади.

2- жадвал

Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад	Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад
		1	2	3				1	2	3	
1	1	4.96	0.25	1.36	-2.41	2	1	-0.73	1.22	3.29	-1.11
	2	0.47	8.26	-1.28	0.75		2	5.88	8.56	-1.56	2.03
	3	3.16	1.59	-0.95	-4.79		3	2.06	1.02	3.2	4.31
3	1	3.88	0.66	2.24	1.48	4	1	-0.73	1.22	3.29	-1.11
	2	1.33	4.78	2.11	-0.75		2	5.88	8.56	-1.52	2.03
	3	3.16	1.59	-0.95	-4.75		3	2.06	1.02	3.2	4.31
5	1	1.21	0.11	-0.56	0.21	6	1	9.76	-0.25	3.76	0.21
	2	2.03	4.97	0.86	-0.75		2	0.46	8.26	-1.35	0.75
	3	0.46	2.22	-5.94	4.72		3	3.31	1.53	6.55	4.72
7	1	8.86	1.25	-3.36	4.41	8	1	3.41	1.71	6.97	-0.28
	2	1.47	-3.36	1.28	5.75		2	0.88	1.21	0.05	7.25
	3	5.31	-2.53	0.75	-4.75		3	-7.03	4.21	5.37	8.21
9	1	10.71	0.48	4.71	-2.61	10	1	3.21	1.02	2.38	2.21
	2	0.78	0.75	2.81	7.21		2	5.88	8.56	-1.52	33.3
	3	0.23	0.72	9.39	2.81		3	3.16	1.59	-0.95	-4.75
11	1	-0.73	1.22	3.26	-1.11	12	1	14.71	4.75	7.21	-2.41
	2	5.88	8.57	-1.52	2.03		2	7.21	12.31	4.28	6.34
	3	2.06	1.02	3.2	4.31		3	4.91	2.83	0.49	2.72
13	1	10.21	11.02	9.33	4.77	14	1	13.34	2.72	0.49	6.75
	2	3.22	19.46	9.32	-0.28		2	1.25	8.36	1.32	4.53
	3	3.73	19.25	12.21	3.72		3	0.75	1.59	-7.53	-2.63
15	1	-9.11	2.44	3.48	2.61	16	1	6.28	2.37	7.95	4.71
	2	4.23	8.78	7.95	-0.49		2	2.32	6.49	1.45	2.75
	3	2.81	3.45	0.35	2.61		3	0.79	2.66	-8.78	-4.75
17	1	2.81	0.28	1.61	4.71	18	1	7.44	0.28	3.44	-2.28
	2	0.28	4.44	2.03	2.75		2	6.71	9.76	2.01	-0.75
	3	0.75	1.31	3.48	-4.75		3	3.41	2.64	8.04	-6.21

Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад	Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад
		1	2	3				1	2	3	
19	1	3.48	0.75	0.49	4.71	20	1	4.49	2.21	0.31	3.28
	2	0.78	0.75	0.15	-0.02		2	3.31	13.29	2.79	-0.76
	3	0.73	1.21	3.49	0.53		3	3.75	2.81	13.21	12.15
21	1	31.2	82.76	4.75	7.61	22	1	13.72	2.71	6.71	-0.53
	2	4.23	18.16	12.02	4.45		2	9.21	4.71	2.61	4.23
	3	3.75	2.81	13.21	4.11		3	0.91	1.23	3.49	-2.68
23	1	2.81	102	1.29	4.75	24	1	1.51	-0.56	3.19	1.37
	2	0.85	4.81	2.86	3.28		2	2.42	1.06	0.68	2.85
	3	4.71	0.97	11.71	2.95		3	2.7	0.18	-5.88	-2.45
25	1	3.25	0.22	3.24	-3.22	26	1	7.81	-1.02	3.31	2.21
	2	0.11	-1.26	4.53	1.16		2	5.82	12.76	-1.48	0.33
	3	2.15	0.21	-3.66	-3.11		3	3.85	0.12	11.54	4.42
27	1	2.84	1.02	1.49	4.75	28	1	7.81	-1.02	3.31	2.21
	2	0.25	4.36	2.32	3.23		2	5.82	12.76	-1.48	0.33
	3	4.75	0.52	11.53	2.92		3	13.37	-1.39	10.23	1.05
29	1	2.84	1.02	1.49	4.75	30	1	1.84	1.22	-1.22	3.46
	2	0.28	4.36	2.32	32.3		2	-2.25	4.36	5.52	2.23
	3	4.75	0.59	11.53	2.92		3	4.33	3.49	4.56	1.22

Чизиқли тенгламалар системаси Зейдел усулида ечиш.

n -тартибли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг кўриниши қуйидаги ифодадан иборат:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда $a_{ij}\,(ij = \overline{1,n})$ лар маълум сонлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг коэффициентлари дейилади, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - номаълумлар, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - (1) система тенгламаларининг озод ҳадлари, улар ҳам маълум сонлардан иборат.

Тенгламалар сиетемасининг матрица кўриниши:

$$AX = B \qquad (2)$$

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Зейдел усулининг моҳияти. А матрицанинг диагонал элементлари нолдан фарқли бўлсин $a_{ii} \neq 0$ i=1,2,3,…,n. Системанинг биринчи тенгламасини x_1 га, иккинчи тенгламасини x_2 га ва ҳоказо n – тенгламасини x_n га нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} \end{cases} \qquad (4)$$

системага эга бўламиз, бу ерда

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \;, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \;, \quad i, j = 1,2,3,\ldots,n. \;\; i \neq j; \;\; \textit{ва} \;\; a_{ij} = 0, \;\; \textit{агар} \;\; i = j.$$

Зейдел усули кетма – кет яқинлашиш усулининг бошқача кўриниши бўлиб, унда (k+1) – яқинлашишни ҳисоблашда янги топилган $x_1, x_2, \ldots, x_k$ номаълумнинг (k+1)-яқинлашиши (итерация усулида k– яқинлашиш) эътиборга олигнади.

x_i номаълумнинг k – яқинлашиши маълум бўлсин, у ҳолда (k+1) – яқинлашиш қуйидаги формула билан топилади.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=3}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k+1)} + \sum\limits_{j=4}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} \end{cases}$$

Аргар келтирилган (4) система учун $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}| < 1$ *ёки* $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}| < 1$; i,j=1,2,3,…n. шартларнинг бирортаси ўринли бўлса Бошланғич яқинлашиш қандай танланишидан қатъий назар тенгламалар системаси ягона ечимга яқинлашади. (1)система учун итерация усулида яқинлашиш шарти

$$|a_{ii}| \ge \sum_{i \ne j} |a_{ij}| \qquad j = 1,2,3,....,n.$$

Масалан: Қуйидаги тенгламалар системасининг ечимини

$$\begin{cases} -7.5x_1 + 1.42x_2 + 2.11x_3 = -3.5 \\ 3.5x_1 + 7.21x_2 - 0.35x_3 = 2.5 \\ 2.1x_1 + 3.8x_2 - 8.91x_3 = 5.55 \end{cases}$$

$\varepsilon = 10^{-2} = 0.01$ аниқликда топиш талаб этилсин.

Тенгламалар системасини ечиш учун қуйидаги амалларни бажарамиз.

1. $|a_{ii}| \ge \sum\limits_{i \ne j} |a_{ij}| \qquad j = 1,2,3.$ Шартни текширамиз,яъни

$$|a_{11}| = |-7.5| \ge |a_{12}| + |a_{13}| = |1.42| + |2.11| = 3.53$$
$$|a_{22}| = |7.21| \ge |a_{21}| + |a_{23}| = |3.5| + |-0.35| = 3.85$$
$$|a_{33}| = |-8.91| \ge |a_{31}| + |a_{23}| = |2.1| + |3.8| = 5.9$$

2. Шарт бажарилаяпти демак тенгламалар системасини Зейдел усулида ечимни топиш мумкин.
3. Тенгламалар системасини мос равишда x_1, x_2,x_3 номаълумларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{3.5}{7.5} + \dfrac{1.42}{7.5} x_2^{(k)} + \dfrac{2.11}{7.5} x_3^{(k)} = 0.4667 + 0.1893 x_2^{(k)} + 0.2813 x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{2.5}{7.21} - \dfrac{3.5}{7.21} x_1^{(k+1)} + \dfrac{0.35}{7.21} x_3^{(k)} = 0.3467 - 0.4854 x_1^{(k+1)} + 0.0485 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{5.55}{8.91} + \dfrac{2.1}{8.91} x_1^{(k+1)} + \dfrac{3.81}{8.91} x_2^{(k+1)} = 0.2813 + 0.4667 x_1^{(k+1)} + 0.1893 x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

4.k=0 деб биринчи яқинлашишни аниқлаймиз.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.4667 + 0.1893x_2^{(0)} + 0.2813x_3^{(0)} = 0.4667 \\ x_2^{(1)} = 0.3467 - 0.4654x_1^{(1)} + 0.0485x_3^{(0)} = 0.3467 - 0.4654 * 0.4667 = 0.1202 \\ x_3^{(1)} = -0.6229 + 0.2357x_1^{(1)} + 0.4276x_2^{(1)} = -0.6229 + 0.2357 * 0.4667 + 0.42760.1202 = -0.4615 \end{cases}$$

5.k=1 деб иккинчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.4667 + 0.1893x_2^{(1)} + 0.2813x_3^{(1)} = 0.4667 + 0.1893 * 0.1202 + 0.2813 * (-0.4615) = 0.3597 \\ x_2^{(2)} = 0.3467 - 0.4654x_1^{(2)} + 0.0485x_3^{(1)} = 0.3467 - 0.4654 * 0.3597 + 0.0485 * (-0.4615) = 0.1497 \\ x_3^{(2)} = -0.6229 + 0.2357x_1^{(2)} + 0.4276x_2^{(2)} = -0.6229 + 0.2357 * 0.3597 + 0.4276 * 0.1497 = -0.4741 \end{cases}$$

6. Яқинлашиш шартини текширамиз:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0.3597 - 0.4667| = 0.107 > 0.01;$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0.1497 - 0.1202| = 0.0295 > 0.01;$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0.4741 + 0.4615| = 0.0126 > 0.01.;$$

Топилган ечим берилган аниқликни қаноатлантирмаяпти шунинг учун жараённи давом эттирамиз.

7.k=3 деб учунчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.4667 + 0.1893x_2^{(2)} + 0.2813x_3^{(3)} = 0.4667 + 0.1893 * 0.1497 + 0.2813 * (-0.4741) = 0.3618 \\ x_2^{(3)} = 0.3467 - 0.4654x_1^{(3)} + 0.0485x_3^{(2)} = 0.3467 - 0.4654 * 0.3618 + 0.0485 * (-0.4741) = 0.1481 \\ x_3^{(3)} = -0.6229 + 0.2357x_1^{(3)} + 0.4276x_2^{(3)} = -0.6229 + 0.2357 * 0.3618 + 0.4276 * 0.1481 = -0.4743 \end{cases}$$

8. Яқинлашиш шартини текширамиз:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0.3618 - 0.3597| = 0.0021 < 0.01;$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0.1481 - 0.1497| = 0.0016 < 0.01;$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0.4743 + 0.4741| = 0.0002 < 0.01.;$$

Топилган ечим берилган аниқликни қаноатлантиряпти. Демак тенгламалар системасининг тақрибий ечими: x_1=0.3618; x_2 =0.1481; x_3=-0.4743 экан.

Тенгламалар системасини Зейдел усулида ечиш алгоритими.

1. Тенгламалар системасидаги номаълумлар сони n ва улар олдидаги коэффицент-лар a_{ij} ва b_i озод ҳадларнинг қийматларини ҳамда ҳисоблаш аниқлиги ε ни аниқлаб оламиз.
2. $|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad j = 1,2,3,....,n.$ шарт бажарилса ҳисоблаш 3- пунктга узатилади. Агар бажарилмаса ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.

3 $a_{ii} \neq 0;$ ҳар бир тенгламани мос равишда x_i нисбатан ечиб оламиз.

4. Нолинчи яқинлашишни : $x_i^{(0)} = 0$ (i=1,2,3,…,n.) ва k =0 деб оламиз.
5. k = k +1 деб k яқинлашишни қуйидаги формула орқали ҳисоблаймиз.

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \ ,$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \quad \text{i,j=1,2,3,…n.}$$

6. Агар $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$, $(i = 1,2,3,...,n)$ шарт бажарилса , $x_i^{(k+1)}$ ни тенгламалар системасининг ечими деб қабул қилинади ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади. Агар шарт бажарилмаса ҳисоблаш 3- пунктга ўзатилади.

Тенгламалар системасини Зейдел усулида ечиш учун Паскал тилидаги дастури.

```
label 10,20,30,40,50,60;
var
i,j,n:integer;  eps,s:real;
x,x1,b:array[1..10] of real;
a:array[1..10,1..10] of real;
begin cls;
write('Номаълумлар сонини киритинг n=');read(n);writeln;
write('Хисоблаш аниклигини киритинг eps=');read(eps);writeln;
writeln('       Номаълумлар олдидаги коэффициентларни ва озодларнинг');
writein('             кийматларини киритинг');
for i:=1 to n do begin   for j:=1 to n do begin
write('  A(',i:2,',',j:2,')=');read(a[i,j]);end;
write('  b(',i:2,')=');read(b[i]);end;
for i:=1 to n do begin s:=0;
for j:=1 to n do begin
if i=j then goto 10;
s:=s+abs(a[i,j]); 10: end;
if abs(a[i,i])<s then goto 50;  end;
for i:=1 to n do begin  for j:=1 to n do begin
if i=j then goto 20;
a[i,j]:=a[i,j]/a[i,i]; 20: end;b[i]:=b[i]/a[i,i]; x[i]:=0;end;
30: for i:=1 to n do x1[i]:=x[i];
for i:=1 to n do begin x[i]:=b[i];
for j:=1 to n do begin if i=j then goto 40;
x[i]:=x[i]-a[i,j]*x[j];
40: end;end;
for i:=1 to n do
if abs(x[i]-x1[i])>eps then goto 30;
writeln('          Тенгламалар системасининг ечими');
for i:=1 to n do
writeln('     X(',i:2.')=',x[i]:8:4);goto 60;
50:writeln('Тенгламалар системасининг ечимини Зейдел усулида топиб бўмайди');
60:end.
```

4- топшириқ.

1. Талаба 3– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Тенглмалар системасини ечимини 0.01 аниқликда қўлда ҳисоблаб топади.
3. Паскал тилида тузилган дастур ва **Maple** дастури ёрдамида тенламалар системасининг ечимини 0.0001 аниқликда топади ва қўлда топилган ечими билан натижани текширади.

3- жадвал

Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад	Топшириқ Тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад
		1	2	3				1	2	3	
1	1	13.47	-2.03	3.29	2.32	2	1	9.66	2.01	3.03	-2.29
	2	2.75	11.11	2.28	4.75		2	3.22	12.41	1.65	2.64
	3	0.28	6.25	-9.21	2.25		3	1.69	-2.17	13.65	-6.48
3	1	15.75	2.91	3.6	-2.84	4	1	12.88	0.28	0.99	-2.64
	2	3.63	12.02	6.71	9.81		2	1.77	9.79	2.81	4.78
	3	2.28	3.48	15.78	2.71		3	2.83	3.02	11.79	-2.71
5	1	12.85	0.75	3.21	-1.74	6	1	-6.75	0.24	1.21	0.08
	2	-0.97	11.04	4.48	2.83		2	7.75	19.75	0.95	-1.75
	3	0.77	1.43	9.71	0.92		3	2.81	2.63	13.45	4.86
7	1	17.28	3.48	2.64	-2.22	8	1	3.75	0.28	1.05	1.28
	2	3.44	12.35	2.66	2.38		2	0.75	4.95	3.07	3.75
	3	4.48	2.88	-14.37	-4.75		3	4.88	-0.88	6.75	0.08
9	1	18.88	0.29	1.75	-4.35	10	1	9.77	0.37	1.43	-2.33
	2	0.78	19.99	8.78	2.35		2	3.23	18.91	8.71	0.78
	3	4.75	0.75	10.37	-0.47		3	4.48	-9.77	15.75	3.78
11	1	7.71	2.83	1.08	2.39	12	1	17.79	3.21	6.71	0.73
	2	0.77	16.61	-8.91	-0.33		2	2.22	-3.33	-0.7	2.81
	3	0.48	-8.84	18.63	6.61		3	2.93	3.96	14.75	-0.78
13	1	13.75	2.69	0.71	3.33	14	1	3.78	-0.75	1.21	2.83
	2	2.33	12.78	3.75	-6.36		2	0.48	3.73	0.75	-7.38
	3	2.34	4.72	-15.76	4.77		3	1.31	-0.76	-4.76	3.22
15	1	7.79	1.21	1.33	-7.77	16	1	3.48	0.02	3.4	2.89
	2	0.35	10.21	3.23	-2.88		2	3.33	-4.04	0.05	3.28
	3	0.49	-1.31	7.75	2.88		3	4.71	6.74	14.71	0.81
17	1	21.7	0.35	1.71	0.35	18	1	13.45	2.94	4.91	3.04
	2	0.79	11.31	-3.71	2.93		2	2.85	3.75	0.03	4.75
	3	3.93	-1.71	9.79	-2.81		3	1.39	-2.73	7.49	-2.88

Топшириқ тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад	Топшириқ Тартиби		А матирицанинг коэффициенлари			Озод ҳад
		1	2	3				1	2	3	
19	1	3.79	1.21	0.09	-2.83	20	1	3.46	0.75	-1.21	2.37
	2	10.91	14.79	-2.71	2.34		2	-0.37	7.37	2.61	3.47
	3	2.08	3.24	9.75	12.64		3	0.49	-0.28	4.35	-2.61
21	1	9.75	0.37	0.75	0.37	22	1	10.35	2.35	1.28	2.08
	2	-0.73	0.65	2.44	2.75		2	2.33	9.99	-2.81	0.35
	3	0.23	-0.74	2.35	2.01		3	-2.37	-0.93	9.33	-0.27
23	1	14.35	0.79	1.94	-2.85	24	1	12.61	2.33	0.81	1.18
	2	0.45	12.34	-4.76	2.71		2	4.79	12.18	-3.71	0.94
	3	0.93	1.23	11.21	-3.75		3	2.04	4.71	11.01	0.34
25	1	9.77	1.23	0.07	2.91	26	1	7.61	1.21	3.33	1.75
	2	0.77	9.76	-6.01	3.73		2	-2.33	4.79	-1.01	-0.08
	3	0.01	-2.01	4.76	2.23		3	2.33	0.77	3.96	2.39
27	1	0.01	-2.01	4.76	2.23	28	1	7.71	2.83	1.08	2.39
	2	7.27	0.09	1.04	0.91		2	2.93	3.96	14.75	-0.78
	3	10.35	2.35	1.28	2.08		3	6.36	0.78	3.75	2.83
29	1	0.93	1.23	11.21	-3.75	30	1	9.66	2.06	3.03	-2.29
	2	2.04	4.71	11.01	0.34		2	3.63	12.02	6.71	9.81
	3	4.75	-0.85	1.28	0.78		3	2.83	3.02	11.79	-2.71

5 - маъруза машғулот

Юқори тартибли матрицанинг детерминатни Гаусс усулида ҳисоблаш.

Гаусс усули ёрдамида (nxn) тартибли А – матрицани D-учбурчакли матрица кўринишига кетириш мумкин. D - учбурчакли матрица детерминантининг қиймати алгебра назариясидан маълумки, А – матрица детерминантининг қийматини тенгдир. Маълумки, бундай ҳолда, учберчакли мартицининг детерминанти унинг асосий диагонали элементлари кўпайтмасига тенг.

(nxn) – тартибли А – матрица берилган бўлсин.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

А – матирицани Гаусс усули ёрдамида алмаштиришлар бажариб, учбурчакли матирицага келтирамиз ва ҳосил қилинган матрицани D орқали белгилаймиз:

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Гаусс усулининг тўғри йўлида баъзан диагонал элементларидан бирортаси, масалан $a_{kk}^{(k-1)}=0$ бўлганда, у ҳолда сатр ўрнини алмаштириш лозим.Матрицада сатр ёки устунлар ўрнини алмштириш аниқловчининг қийматини қарама- қарши ишорага алмаштиради. Бундай ҳолда берилган матрицанинг детерминантини қуйидаги формула орқали топилади:

$$\det A=(-1)^k a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdots a_{nn}^{(n-1)} \qquad (3)$$

Бунда k А – мартицининг D - матрицага келтиришдаги сатр алмаштиришлар сони.

Масалан: қуйидаги матрицанинг детерминанти топилсин.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ечиш.Тўртинчи тартиб матрицанинг детерминантини учбурчак усулида ҳисоблаш мумкин эмас шунинг учун 4- тартибли матрицани 3- тартибли матрицаларга келтириб олиб ҳисоблаймиз, яъни:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\5&2&3&6\\2&4&1&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&4&1\\2&3&6\\4&1&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&4&1\\5&3&6\\2&1&3\end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}2&3&1\\5&2&6\\2&4&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\5&2&3\\2&4&1\end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot 3+4\cdot 6\cdot 4+2\cdot 1\cdot 1-1\cdot 3\cdot 4-2\cdot 4\cdot 3-1\cdot 6\cdot 3-$$

$$-2\cdot(2\cdot 3\cdot 3+4\cdot 6\cdot 2+5\cdot 1\cdot 1-1\cdot 3\cdot 2-5\cdot 4\cdot 3-1\cdot 6\cdot 2)+3\cdot(2\cdot 2\cdot 3+3\cdot 6\cdot 2+5\cdot 4\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2-5\cdot 3\cdot 3-4\cdot 6\cdot 2)+$$

$$+4\cdot(2\cdot 2\cdot 1+3\cdot 3\cdot 2+5\cdot 4\cdot 4-4\cdot 2\cdot 2-5\cdot 3\cdot 1-4\cdot 3\cdot 2)=$$

$$=27+96+2-12-24-18-2\cdot(18+48+5-6-60-12)+3\cdot(12+36+20-4-45-48)-$$

$$-(4+18+80-16-15-24)=71+2\cdot 7-3\cdot 29-4\cdot 47=71+14-87-188=-190$$

Матрицанинг тартиби қанча юқори бўлса матирица детерминантини учбурчак усулида ҳисоблаш учун шунча кўп арифметик амлларни бажариш керак бўлади.

Матрица детерминантини Гаусс усулида ҳисоблаш учун қуйидаги кетма кетликни бажарамиз.

1. $a_{11}=1$ нолга тенг бўлмагани учун матрицанинг биринчи қатор элеменларини $a_{11}=1$ га бўламиз, қолган қатор элементлари қуйидаги формуладан топамиз:

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i1}^{(1)}\qquad i,j=2{,}3{,}4.$$

Натижада янги матирица топамиз:

$$A=\begin{pmatrix}[1]&2&3&4\\2&3&4&1\\5&2&3&6\\2&4&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&[-1]&-2&-7\\0&-8&-12&-14\\0&0&-5&-5\end{pmatrix}$$

2. $a_{22}^{(1)}=-1$ нолга тенг бўлмагани учун матрицанинг иккинчи қатор элеменларини $a_{22}^{(1)}=-1$ га бўламиз, қолган қатор элементлари қуйидаги формуладан топамиз:

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{1j}^{(2)}\cdot a_{i1}^{(1)}\qquad i,j=3{,}4.$$

Натижада янги матирица топамиз:

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&7\\0&0&[4]&42\\0&0&-5&-5\end{pmatrix}$$

3. $a_{33}^{(2)}=4$ нолга тенг бўлмагани учун матрицанинг учинчи қатор элеменларини $a_{33}^{(2)}=4$ га бўламиз, тўртинчи қатор элементлари қуйидаги формуладан топамиз:

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{1j}^{(3)} \cdot a_{i1}^{(2)} \qquad i, j = 4.$$

Натижада янги матирица топамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \left[\frac{95}{2}\right] \end{pmatrix}$$

4.Демак берилган матрицанинг детерминантининг киймат қуйидаги га тенг экан:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot a_{44}^{(3)} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \frac{95}{2} = 190.$$

Натижалар бир хил чиқди.

Юқори тартиб детерминантни Гаусс усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Детерменат тартиби **n** қийматлари a_{ij} аниқлаб оламиз.

2.Биринчи қадамни k=1 ва D=1 деб оламиз.

3. k – қатордан k – устун элементини аниқлаймиз.

4. Агар $a_{kk} \neq 0$, бўлса ҳисоблаш 7- пунктга . бўлмаса 5- пунктга узатилади.

5. k- устуннинг қолган k- қаторида кейинги қаторларидан элементи $a_{ik} \neq 0$ ($i = k+1,..,n$) нолдан фарқлигини текширамиз.

6.Агар $a_{ik} \neq 0$ топилмаса дететминантнинг D=0 бўлади ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.Агар $a_{ik} \neq 0$ элемент топилса k- қатор билан i- қатор алмаштирилади ва P=- P.

7. k- қатор $a_{kk} \neq 0$ сонга бўламиз :

$$a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \ , \ j = k+1, k+2, ..., n. \quad \text{ва} \quad P = P \cdot a_{kk} \text{ ни ҳисоблаймиз.}$$

8.k+1- қатордандан бошлаб, қатор коэффицентлари қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \qquad i, j = k+1, k+2, ..., n.$$

9. k=k+1 ; Агар $k < n$ бўлса ҳисоблаш 5- пунктга узатилади, акс ҳолда ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.

10. $P = P \cdot a_{nn}$ ҳисоблаймиз ва натижани оламиз.

Юқори тартиб детерминантни Гаусс усулида ҳисоблаш учун ПАСКАЛЬ тилидаги дастури.

```
label 10,20,30;
var
i,j,k,n,n1:integer;
p,a1:real;
a:array[1..10,1..11] of real;
begin cls; write('  Детерминантнинг тартибини киритинг  n=');read(n);
writeln('  Детерминантнинг элементларини киритинг  ');
for i:=1 to n do begin for j:=1 to n do begin
write('     a(',i:2,',',j:2,')='); read(a[i,j]); end;
writeln;end;
for k:=1 to n-1 do begin if a[k,k]<>0 then goto 20;
for i:=k+1 to n do begin
if a[i,k]<>0 then goto 10;
end; p:=0; goto 30;
10: for j:=k to n do begin
a1:=a[i,j]; a[i,j]:=a[k,j]; a[k,j]:=a1; end; p:=-p;
20: for j:=k+1 to n do a[k,j]:= a[k,j]/ a[k,k] ;
for i:=k+1 to n do for j:=k+1 to n do
a[i,j]:= a[i,j]- a[i,k ]*a[k,j]; end;
p:= p* a[n,n] ;
30: writeln('  Детерминатнинг қиймати D=  ',p:8:4);
end.
```

5- топшириқ.

1. Талаба 4– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Детерминантнинг қийматини қўлда ҳисоблаб топади.
3. Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида детерминантнинг қийматини топади ва қўлда топилган ечими билан натижани текширади.

4- жадвал

Топшириқ тартиби		А матирицанинг элементлар				Топшириқ тартиби		А матирицанинг элементлар			
		1	2	3	4			1	2	3	4
1	1	-1	5	0	2	2	1	2	3	1	0
	2	6	11	7	3		2	1	12	5	2
	3	5	1	-2	4		3	6	-10	3	4
	4	2	3	3	8		4	7	8	11	17
3	1	3	4	0	1	4	1	1	5	3	7
	2	12	6	5	2		2	11	10	3	0
	3	5	-1	2	3		3	3	2	12	6
	4	4	3	15	1		4	7	2	8	3
5	1	1	1	0	3	6	1	1	3	7	35
	2	2	3	5	1		2	0	-3	2	5
	3	3	4	1	-1		3	2	5	-1	8
	4	5	2	4	3		4	7	3	2	4
7	1	3	2	-1	2	8	1	9	4	1	1
	2	4	11	3	5		2	2	3	-2	1
	3	13	-2	9	0		3	1	3	2	1
	4	1	2	3	4		4	7	5	16	-3
9	1	1	2	-3	1	10	1	9	4	1	1
	2	3	1	-4	7		2	2	3	-2	8
	3	11	13	2	1		3	1	3	2	1
	4	1	5	0	2		4	7	5	16	-3
11	1	1	13	2	3	12	1	12	3	-1	4
	2	0	-1	11	7		2	7	15	2	8
	3	3	-2	8	1		3	0	11	10	3
	4	6	7	2	1		4	1	6	5	-1
13	1	1	2	6	1	14	1	2	7	-3	1
	2	2	-1	1	10		2	1	-2	4	11
	3	3	-3	-16	2		3	2	-2	5	6
	4	4	1	-3	3		4	3	7	9	12
15	1	1	3	3	1	16	1	2	-1	8	2
	2	-2	2	4	-5		2	18	0	1	12
	3	8	12	15	1		3	1	-1	3	-3
	4	6	7	-2	0		4	3	2	1	5
17	1	1	2	3	4	18	1	3	-1	5	7
	2	5	4	2	1		2	2	2	-2	11
	3	3	1	-7	9		3	1	-2	1	18
	4	0	5	-2	3		4	3	5	7	13

4- жадвал

Топшириқ тартиби		А матирицанинг элементлар				Топшириқ тартиби		А матирицанинг элементлар			
		1	2	3	4			1	2	3	4
19	1	2	6	11	-2	20	1	1	-5	11	12
	2	17	5	-8	3		2	3	12	3	4
	3	-3	4	1	16		3	2	-2	-6	3
	4	1	3	3	17		4	5	7	9	11
21	1	4	1	-3	3	22	1	3	7	9	12
	2	1	2	3	4		2	2	-1	8	2
	3	-2	2	4	-5		3	18	0	1	12
	4	8	12	15	1		4	1	-1	3	-3
23	1	1	2	3	4	24	1	3	-1	5	7
	2	5	4	2	1		2	2	2	-2	11
	3	3	1	-7	9		3	1	-2	1	18
	4	0	5	-2	3		4	3	5	7	13
25	1	2	6	11	2	26	1	1	4	11	12
	2	17	5	-8	3		2	3	12	3	4
	3	-3	4	1	16		3	2	-2	-6	3
	4	1	3	3	17		4	5	7	9	11
27	1	-3	1	-6	3	28	1	2	1	15	2
	2	3	11	4	1		2	3	2	12	1
	3	13	-4	3	2		3	-1	3	11	8
	4	1	0	-3	4		4	4	-5	17	3
29	1	12	-6	-1	2	30	1	2	14	1	-2
	2	7	2	-3	2		2	8	2	13	2
	3	1	4	11	6		3	3	2	16	-3
	4	11	2	-3	7		4	2	1	11	1

Тескари матрицани Гаусс усулида топиш.

n -тартибли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг кўриниши қуйидаги ифодадан иборат:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда $a_{ij}(ij = \overline{1,n})$ лар маълум сонлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг коэффициентлари дейилади, x_1, x_2, ..., x_n - номаълумлар, b_1, b_2,..., b_n - (1) система тенгламаларининг озод ҳадлари, улар ҳам маълум сонлардан иборат.

Тенгламалар сиетемасининг матрица кўриниши:

$$AX = B \qquad (2)$$

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{..................} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечимини тескари матрица усулида ҳам топиш мумкин, яъни:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \ ,$$

бу ерда $A^{-1} \cdot A = E$, бирлик матрицага тенг шунинг учун (2) тенгламалар системасининг ечими: $X = A^{-1} \cdot B$ тенг бўлади.

Тескари матрицани Карамер усулида топиш учун жуда кўп арифметик ҳисоблашларни бажариш керак. Гаусс усулида эса кам ҳисоблаш ёрдамида топиш мумкин.

Масалан:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Матрицани тескарисини Гаусс усулида топиш учун қуйидаги кетма – кетликни бажарамиз.

1. Қуйидаги қўшимча матрицани тузиб оламиз.

$$A \cdot E = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Бирнчи қатор ва биринчи устун элементи $a_{11} \neq 1$ нолдан фарқли бўлган учун қатор элементларини $a_{11} \neq 1$га бўламиз ва бирнинчи қаторнинг қолган устун элементларини нолга айлантирамиз.Бунинг учун биринчи устун эелементи
(-1)га, сунгра 2 га кўпайтириб, мос равишда иккинчи ва учунчи устундан айирамиз. Бу амаллар қуйидагича амалга оширилади:
Бирнчи матрица элементларини ҳисоблаймиз:

$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -3 - (-1) \cdot 3 = 0$; $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{12} \cdot a_{31} = -3 - (-1) \cdot 2 = -1$;

$a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{13} \cdot a_{21} = 7 - 2 \cdot 3 = 1$; $a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} = 5 - 2 \cdot 2 = 1$;

Иккинчи матрицанинг элеменларини ҳисоблаймиз.

$b_{12}^{(1)} = b_{12} - a_{12} \cdot b_{11} = 0 - (-1) \cdot 1 = 1$; $b_{22}^{(1)} = b_{22} - a_{12} \cdot b_{21} = 1 - (-1) \cdot 0 = 1$;

$b_{32}^{(1)} = b_{32} - a_{12} \cdot b_{31} = 0 - (-1) \cdot 0 = 0.$

$b_{13}^{(1)} = b_{13} - a_{13} \cdot b_{11} = 0 - 2 \cdot 1 = -2$; $b_{23}^{(1)} = b_{23} - a_{13} \cdot b_{21} = 0 - 2 \cdot 0 = 0$;

$b_{33}^{(1)} = b_{33} - a_{13} \cdot b_{31} = 1 - (-1) \cdot 0 = 1.$

Натижада матрица қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$A \cdot E = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

3. Иккинчи қатор иккинчи устун элементи $a_{22} = 0$ бўлгани учун кейинги устун элементини текширамиз, яъни $a_{23} = 1 \neq 0$ бўгани учун иккинчи ва учунчи устун элементларини алмаштирамиз, яъни:

$$A \cdot E = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Янги матрицанинг $a_{22} = 1$ га иккичи қаторнинг қолган устун элементларини нолга айлантирамиз.Бунинг учун иккинчи устун эелементи 3 га, сунгра 0 га кўпайтириб, мос равишда биринчи ва учунчи устундан айирамиз. Бу амаллар қуйидагича амалга оширилади:
Бирнчи матрица элементларини ҳисоблаймиз:

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \cdot a_{21}^{(2)} = 2 - 1 \cdot 3 = -1 ; ;$$

Иккинчи матрицанинг элеменларини ҳисоблаймиз.

$b_{11}^{(2)} = b_{11}^{(1)} - b_{12}^{(1)} \cdot a_{21}^{(2)} = 1 - (-2) \cdot 3 = 7$; $b_{21}^{(2)} = b_{21}^{(1)} - b_{22}^{(1)} \cdot a_{21}^{(2)} = 0 - 0 \cdot 3 = 0$;

$b_{31}^{(2)} = b_{31}^{(1)} - b_{32}^{(1)} \cdot a_{21}^{(2)} = 0 - 1 \cdot 3 = 3.$

Иккинчи қатор учинчи устун элементи 0 га тенг бўлган учун иккала матрицанинг учинчи устун элементлари ўзгаришсиз қолади.

$$A \cdot E = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

4. Учинчи қатор $a_{33} = -1$ бўлгани учун бирнчи иккинчи матрицанинг учинчи устун элеменларини $a_{33} = -1$ га бўламиз.

$$A \cdot E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Охирги қадам бўлгани учун биринчи матрицанинг элементини ҳисобламаймиз. Иккинчи матрицанинг эелеменларини ҳисоблаймиз.

$$b_{11}^{(3)} = b_{11}^{(2)} - b_{13}^{(3)} \cdot a_{31}^{(2)} = 7 - (-1) \cdot (-1) = 6;\ b_{12}^{(3)} = b_{12}^{(2)} - b_{23}^{(3)} \cdot a_{31}^{(2)} = 0 - (-1) \cdot (-1) = -1\,;$$

$$b_{13}^{(3)} = b_{13}^{(3)} - b_{33}^{(1)} \cdot a_{31}^{(2)} = -3 - 0 \cdot (-1) = -3.$$

$$b_{21}^{(3)} = b_{21}^{(2)} - b_{13}^{(3)} \cdot a_{32}^{(2)} = -2 - (-1) \cdot 1 = -1;\ b_{22}^{(3)} = b_{22}^{(2)} - b_{23}^{(3)} \cdot a_{32}^{(2)} = 0 - (-1) \cdot 1 = 1\,;$$

$$b_{23}^{(3)} = b_{23}^{(3)} - b_{33}^{(1)} \cdot a_{32}^{(2)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1.$$

Элементлани ўрнига қўйамиз.

$$A \cdot E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Натижада А матрицага тескари бўлган матрицани топамиз:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Натижани тўғрилигини тенкширамиз:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \cdot 6 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 6 + (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 7 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot 0 \\ 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Демак топилган ечим тўғри экан.

Текари матрицани Гаусс усулида топиш алгоритими.

1.Матрица тартиби n ва элементлари a_{ij} ва b_i аниқлаб оламиз.

2.Бирлик матрица $b_{ij} = \begin{cases} 1 & агар \quad i = j \\ 0 & агар \quad i \neq j \end{cases}$

3.Биринчи қадамни k=1 деб оламиз.

4. k – тенглама ва k- номаълум олдидаги коэффицент аниқлаймиз.

5. Агар $a_{kk} \neq 0$, бўлса ҳисоблаш 7- пунктга . бўлмаса 5- пунктга узатилади.

6. k- устуннинг қолган k- қаторида кейинги қаторларидан x_k номаълум коэффиценти $a_{ki} \neq 0$ ($i = k+1,..,n$) нолдан фарқлигини текширамиз.

7. Агар $a_{ki} \neq 0$ топилмаса тескари матрица мавжуд бўлмайди, яъни матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлади ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.Агар $a_{ik} \neq 0$ элемент топилса k- тенглама i- тенглама билан алмаштирилади.

8. k- тенгламани $a_{kk} \neq 0$ сонга бўламиз, натижада тенглама номаълумлари олдидаги коэффицентларнинг ва озод ҳаднинг қийматлари қуйидагича ҳисобланади:

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \ ,i = k+1, k+2,...,n.\ b_{ik} = \frac{b_{ik}}{a_{kk}} \ ,\ i = 1,2,...,n.\ i \neq k$$

9. k+1- тенгламадан бошлаб қолган тенгламаларнинг коэффицентлари қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj} \ ,\ i,j = k+1, k+2,...,n.b_{ij} = b_{ij} - a_{ik}b_{ik} \ ;\ i,j = 1,2,...,n.\ i \neq j$$

10**.** k=k+1 ; Агар $k \leq n$ бўлса ҳисоблаш 5- пунктга узатилади, акс ҳолда тескари матрица топилган ҳисобланади ва натижа олинади.

Тескари матрицани Гаусс усулида топиш учун ПАСКАЛЬ тилидаги дастури.

```
label 10,20,30,40;
var
i,j,k,n:integer;
a1:real;
a,b:array[1..10,1..10] of real;
begin cls; write(‘ Матрица тартибини киритинг n=’);read(n);
writeln(‘ Матрица элеменларини киритинг ’);
for i:=1 to n do begin
for j:=1 to n do begin
write(‘    a(‘,i:2,’,’,j:2,’)=’); read(a[i,j]);
if i=j then b[i,j]:=1 else b[i,j]:=0;
end;
writeln;end;
for k:=1 to n-1 do begin
 if a[k,k]<>0 then goto 20;
for j:=k+1 to n do begin
 if a[k,j]<>0 then goto 10;
end; writeln(‘ Тескари матрица мавжуд эмас ’);
 goto 30;
10: for i:=k to n do begin
a1:=a[i,j]; a[i,j]:=a[k,j]; a[k,j]:=a1;
a1:=b[i,j]; b[i,j]:=b[k,j]; b[k,j]:=a1; end;
20: for j:=k+1 to n1 do
a[j,k]:= a[j,k]/ a[k,k] ;
```

```
for i:= 1 to n do begin
if i=k then goto 40;
for j:= 1 to n do
b[i,j]:= b[i,j]- a[i,k ]*b[k,j]; end;40: end;
for i:=k+1 to n do
 for j:=k+1 to n do
a[i,j]:= a[i,j]- a[i,k ]*a[k,j]; end;
writeln(‘     Тескари матрица ’);
for i:=1 to n do begin
 for j:=1 to n do
write(‘     b(‘,i:2,’,’,j:2,’)=’,b[I,j]:8:4); end;
writeln; end;
30: end.
```

6- топшириқ.

1. Талаба 4– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Тескари мтрицани қўлда ҳисоблаб топади ва ечимни текширади..
3. Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида тескари матрицани топади.

6 - маъруза машғулот

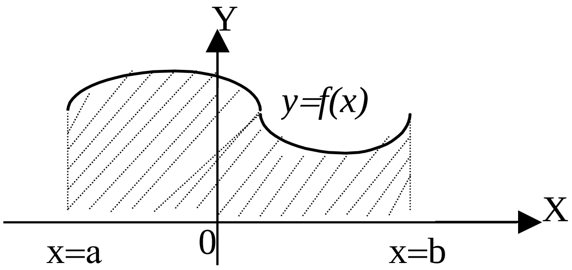
Аниқ интегрални тўғри тўрт бурчак усулида тақрибий ҳисоблаш.

Амалда аниқ интегрални ҳисоблашда интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топиш керак бўлади, лекин ҳамма вақт ҳам бошланғич функцияни топиб бўлмайди. Шунинг учун бундай аниқ интеграллларининг қийматларини тақрибий усуллар ёрдамида ҳисобланиди.

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш эгри чизиқли трапециянинг юзи ҳақидаги масаланинг геометрик ечими билан узвий боғлиқдир. Қуйидан Ox ўқдаги $[a;b]$ кесма билан, юқоридан мусбат қиймат қабул қиладиган $y = f(x)$ узлуксиз функциянинг графиги билан, ён томонлардан $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқларнинг кесмалари билан чегараланган фигурани эгри чизиқли трапеция дейилади. $[a;b]$ кесмани эса эгри чизиқли трапециянинг асослари дейилади. Эгри чизиқли трапециянинг юзини

$$S = \int_a^b f(x)$$

бунда $F(x)$ - берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси. Юқорида таъкидланганидек бошланғич функцияни интеграллаш қоидалари ва формулалар ёрдамида ҳисоблаш имкони бўлмаганда уни интеграл йиғиндилар ёрдамида тақрибан ҳисобланади.



Тўғри тўртбурчаклар усулининг моҳияти.

Эгри чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзини, хусусан эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш аниқ интеграл орқали амалга оширилади. Трапециянинг асоси бўлган $[a;b]$ кесмани $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нуқталар билан n та кесмаларга бўламиз. У ҳолда бўлиниш оралиғи узунлиги $h = \dfrac{b-a}{n}$ формула билан ифодаланади. $x_0 = a$ десак, $x_i = x_{i-1} = h$ нуқталарни белгилаб оламиз, бунда $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталардан чегаравий эгри чизиқ билан кесишгунга қадар вертикал параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва кесишиш нуқталарининг ординаталарини қуйидагича $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_i), \ldots$

каби белгилаймиз. Ҳар бир ораликдаги ординатаси узунлиги $y(x_i)$ га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзаларини топамиз.

$$S_i = h \cdot y(x_i)$$

n та тўғри тўртбурчакнинг юзини қўшамиз:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + ... + y(x_n))$$

Юзаларни ҳисоблашда $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ деб олсак, вертикал тўғри чизиқларга нисбатан ўнг томондаги тўғри тўртбурчаклар олингани учун ўнг тўғри тўртбурчаклар усулининг формуласи келиб чиқади:

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a + n \cdot h)\right] = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ деб олсак, вертикал тўғри чизиқларга нисбатан чап томондаги тўғри тўртбурчаклар олингани учун чап тўғри тўртбурчаклар усулининг фрмуласи келиб чиқади.

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a+h) + ... + f(a + (i-1)h)] = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$$

Аниқ интегрални тақрибан ҳисоблаганда маълум хатоликка йўл қўйилади. Оралиқни бўлишлар сони **n** қанча катта ёки қадамлар сони h қанча кичик бўлса тақрибан топилган ечим аниқ ечимга шунча яқин бўлади. Шунинг учун ҳисоблаш аниқлиги ε асосан h қадам қуйидаги тенгсизлик орқали топилади.

$$R_n(f) = \frac{b-a}{2} f''(\xi)h^2 \quad , \ \xi \in [a;b] \quad |R_n(f)| < \varepsilon$$

Бу ерда $f''(\xi)$ функция $x \in [a;b]$ оралиқдаги $f''(x)$нинг абсолют жиҳатдан энг катта қийматидир.

Масалан : $S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx$ интегрални 0.1 аниқликда ҳисоблаш талаб этилсин.

Ечиш. $F(x) = \sqrt{x}$ интеграл ости функцияси учун [0.25 ; 1] кесмада қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{2}{3}}, \ |f''(x)| < 2 \ , \ a = 0.25 \ , \ b = 1 \, , \ h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.75}{n}$$

$$|f''(a)| = \max|f''(\xi)| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25^3}} = 0.25 \cdot \frac{1}{0.5^3} = 2$$

$$|R_n(f)| < \frac{0.75}{2} \cdot 2(\frac{0.75}{n})^2 \quad = \quad \frac{0.421875}{n^2}$$

Демак, **n=2** қабул қилиши мумкин. У ҳолда $h = \frac{0.75}{2} = 0.375$.

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$x_0 = a = 0.25$; $x_1 = x_0 + h = 0.25 + 0.375 = 0.625$; $x_2 = x_1 + h = 0.625 + 0.375 = 1$

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{0.25} = 0.5$; $y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{0.625} = 0.7906$; $y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1} = 1$

Топилган қийматлардан фойдаланиб берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = h(y_0 + y_1) = 0.375(0.5 + 0.7906) = 0.4839$$

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = h(y_1 + y_2) = 0.375(0.7906 + 1) = 0.6714$$

Аниқ ечими:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1^3} - \sqrt{0.25^3}) = 0.5833$$

Ҳисоблаш хатоликни текширамиз:

$$\Delta = |0.5833 - 0.4839| = 0.0994 \; ; \; \Delta = |0.6714 - 0.5833| = 0.0871 \; .$$

Аниқ интегрални тўғри тўрт бурчак усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Интеграл остидаги *f(x)* функцияни , $x \in [a;b]$ оралиқни ва ε ҳисоблаш аниқлигини аниқлаб оламиз.

2. Оралиқни бўлишлар сонини n=0 ва S=0; бўлсин.
3. S1= S; n=n+10; интегрални тақрийбан ҳисоблаймиз:

$$h = \frac{b-a}{n} \; ; \; x_i = a + i \cdot h; \; i = 0,1,2,\cdots,n-1;$$

$$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

4. Агар n=10 бўлса ҳисоблаш 3 – пунктга борсин акс ҳода 5- пунктга борсин.
5. Агар $|S1 - S| < \varepsilon$ бўлса ҳисоблаш 6- пунктга борсин акс ҳолда 3 – пунктга борсин.
6. Ҳисоблаш натажасини босмага чиқарамиз.

Аниқ интегрални тўғри тўрт бурчак усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
label 10;
var
i,n:integer;
a,b,h,x,eps,s,s1:real;
function f(x:real);real; begin f:=sqrt(x); end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b);
write('   Хисоблаш аниклигини киритинг  EPS=');read(eps);
n:=0;s:=0;
10:n:=n+10; s1:=s; h:=(b-a)/n;s:=0;
for i:=0 to n-1 do begin
x:=a+i*h; s:=s+f(x); end; s:=s*h;
if n=10 then goto 10;
if abs(s1-s)>eps then goto 10;
write('Интегралнинг такрибий кийматии   S=';s:8:4);end.
```

7- топшириқ.

1. Талаба 5– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Аниқ интегрални тўғри тўрт бурчак ечимини қўлда 0.01 аниқликда топади .
3. Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида аниқ интегралнинг 0.0001аниқликдаги ечимни топади.
4. Maple дастуридан аниқ интегрални қийматини ҳисоблайди.
5. Топилган натижаларни таҳлил қиламиз.

5 – жадвал.

Т.Р	Аниқ интеграл	Т.Р	Аниқ интеграл	Т.Р	Аниқ интеграл
1	$\int_{0.5}^{1..5}\frac{\sqrt{x^2+0.5}}{\sqrt{x^2-1+4x}}dx$	**2**	$\int_{2}^{9}\sqrt{6x^2-3x+4}dx$	**3**	$\int_{1.3}^{2.3}\frac{\sqrt{0.5x^2+1.5}}{\sqrt{0.6x^2+1.3x+1.2}}dx$
4	$\int_{0.4}^{1..4}\frac{\sqrt{3.1x\ \ +4}}{\sqrt{0.5x^3+x+1.4}}dx$	**5**	$\int_{0.7}^{1.4}\frac{x^2+4}{\sqrt{3x^2+2+x}}dx$	**6**	$\int_{0.5}^{2.5}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{2x^2+1+2x}}dx$
7	$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2x^3-3x^2+1}}dx$	**8**	$\int_{0..3}^{1..3}\frac{1}{\sqrt{2x^2+1.8x+1}}dx$	**9**	$\int_{1.2}^{2.2}\frac{\sqrt{x\ \ +1}}{\sqrt{2x^2+x+2}}dx$
10	$\int_{1}^{2}\frac{3x+2.1}{\sqrt{2x^2+4}}dx$	**11**	$\int_{1.1}^{2..1}\frac{1}{\sqrt{2x^2+6}}dx$	**12**	$\int_{0.4}^{1.4}\frac{\sin(x+1)}{2+\cos(x^2+1)}dx$
13	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos(x^2+0.4)}{0.2+\sin(x+0.5)}dx$	**14**	$\int_{0.2}^{0.8}\frac{\sin(0.4x^2+0.1)}{0.2+\sin(x+0.5)}dx$	**15**	$\int_{0.5}^{1.5}\frac{\cos(0.4x+0.6)}{0.4+3\sin(0.5x+1)}dx$
16	$\int_{0.2}^{1.2}(3x+1)\sin(x)dx$	17	$\int_{0.4}^{0.8}\frac{\sin(x^2+0.5)}{2x^2+1}dx$	18	$\int_{0.5}^{1.3}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{x^2+1}}dx$
19	$\int_{0.5}^{1.4}\sqrt{x+1}\cos(x)dx$	20	$\int_{0.4}^{1.8}(2+3x)\sin(x^2+1)dx$	21	$\int_{0.5}^{2.4}x^2\lg(x)dx$
22	$\int_{1.2}^{1.4}\frac{\ln(x^2+3)}{x^2+3}dx$	23	$\int_{0.5}^{1.5}\frac{tg(x^2+1)}{x+1}dx$	24	$\int_{0.5}^{1..5}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin(x^2)}dx$
25	$\int_{0.5}^{2}(\lg(x+1)+2.8)dx$	26	$\int_{0.5}^{1..5}\left(\frac{x}{4}+1\right)\cos(\frac{x}{4})dx$	27	$\int_{1.2}^{2.4}\frac{x}{4}\ln(\frac{x}{4}+2)dx$
28	$\int_{0.6}^{1.3}(\sqrt{x}+1)\sin(2x)dx$	29	$\int_{0.5}^{1.5}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sin(x^2+1)}e^{x+1}dx$	**30**	$\int_{0.5}^{1.3}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin(x)}dx$

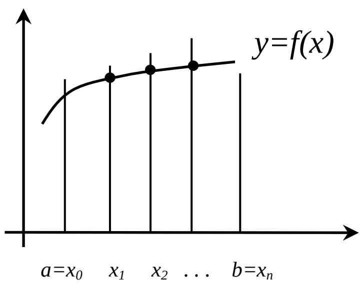
Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг трапеция ва Симпсон (параболалар) усули.

1.Трапеция усули.

Бу усулда ҳам тўғри тўртбурчаклар усулидаги каби $[a;b]$кесмани $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз. Ҳар бир тугун нуқталар орасидаги масофа $h = \frac{a-b}{n}$ $[a;b]$ кесмани бўлувчи нуқталардан чегаравий эгри чизиқ билан кесишгунга қадар перпендикуляр ўтказамиз. Эгри чизиқ мос нуқталариннг ординаталарининг $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(x_n)$

Перпендикулярларнинг $y = f(x)$ чизиқ билан кесишган қўшни нуқталарини ватарлар билан бирлаштирамиз ва ҳосил қилинган ҳар бир тўғри чизиқли трапецияларнинг юзини топамиз:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; \quad \cdots \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$



Барча n та трапеция юзини қўшамиз

$$S = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2}\right]$$

Демак. Эгри чизиқли трапециянинг юзи тақрибан қуйидагига тенг

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

ёки $y_0 = f(a),\ y_n = f(b),\ x_i = a = ih$ десак, трапеция усулининг фомуласи

$$S = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{\mathbf{2}} + \sum_{k=\mathbf{1}}^{n-\mathbf{1}} f(a + kh)\right]$$

бўлади.

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг барча усулларида n бўлинишлар сонини орттириш туфайли хатолик миқдорини камайтириш мумкин, чунки бўлинишлар натижасида ҳосил бўлган юза қанчалик кичик бўлса, формула орқали топаётган фигуранинг юзи эгри чизиқли трапециянинг юзига шунчалик яқин бўлади.

Ҳисоблаш аниқлиги ε асосан h қадам қуйидаги тенгсизлик орқали топилади.

$$R_n(f) = \frac{b-a}{12} f''(\xi)h^2 \quad , \ \xi \in [a;b] \quad |R_n(f)| < \varepsilon$$

Бу ерда $f''(\xi)$ функция $x \in [a;b]$ оралиқдаги $f''(x)$нинг абсолют жиҳатдан энг катта қийматидир.

Масалан : $S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx$ интегрални 0.1 аниқликда ҳисоблаш талаб этилсин.

Ечиш. $F(x) = \sqrt{x}$ интеграл ости функцияси учун [0.25;1] кесмада қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{2}{3}} , \ \left| f''(x) \right| < 2 \ , \ a = 0.25 \ , \ b = 1 \, , \, h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.75}{n}$$

$$\left| f''(a) \right| = \max \left| f''(\xi) \right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25^3}} = 0.25 \cdot \frac{1}{0.5^3} = 2$$

$$\left| R_n(f) \right| < \frac{0.75}{12} \cdot 2(\frac{0.75}{n})^2 \quad = \quad \frac{0.03515625}{n^2}$$

Демак, **n=2** қабул қилиши мумкин. У ҳолда $h = \frac{0.75}{2} = 0.375$.

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$x_0 = a = 0.25 \ ; \ x_1 = x_0 + h = 0.25 + 0.375 = 0.625 \, ; \ x_2 = x_1 + h = 0.625 + 0.375 = 1$

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{0.25} = 0.5 \ ; \ y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{0.625} = 0.7906 \ ; \ y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1} = 1$

Топилган қийматлардан фойдаланиб берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = h(\frac{y_0 + y_2}{2} + y_1) = 0.375(\frac{0.5+1}{2} + 0.7906) = 0.577725$$

Аниқ ечими:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1^3} \ \text{-} \sqrt{0.25^3}) = 0.5833$$

Ҳисоблаш хатоликни текширамиз:

$$\Delta = \left| 0.5833 - 0.5777 \right| = 0.0054 \ ;$$

Аниқ интегрални трапеция усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Интеграл остидаги *f(x)* функцияни , $x \in [a;b]$ оралиқни ва ε ҳисоблаш аниқлигини аниқлаб оламиз.

2. Оралиқни бўлишлар сонини n=0 ва S=0; бўлсин.

3. S1= S; n=n+10; интегрални тақрийбан ҳисоблаймиз:

$$h = \frac{b-a}{n} \ ; \ x_i = a + i \cdot h; \ i = 0,1,2,\cdots,n;$$

$$S = h \cdot [\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)]$$

4. Агар n=10 бўлса ҳисоблаш 3 – пунктга борсин акс ҳода 5- пунктга борсин.

5. Агар $\left| S1 - S \right| < \varepsilon$ бўлса ҳисоблаш 6- пунктга борсин акс ҳолда 3 – пунктга борсин.

6. Ҳисоблаш натажасини босмага чиқарамиз.

Аниқ интегрални трапеция усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
label 10;
var
i,n:integer;
a,b,h,x,eps,s,s1:real;
function f(x:real);real; begin f:=sqrt(x); end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b);
write('   Хисоблаш аниклигини киритинг  EPS=');read(eps);
n:=0;s:=0;
10:n:=n+10; s1:=s; h:=(b-a)/n;s:=(f(a)+f(b))/2;
for i:=0 to n do begin
x:=a+i*h; s:=s+f(x); end; s:=s*h;
if n=10 then goto 10;
if abs(s1-s)<eps then goto 10;
write('Интегралнинг такрибий кийматии   S=';s:8:4);end.
```

2.Симпсон усули.

$[a;b]$ кесма узунлигини $h=\frac{a-b}{2n}$ бўлган $2n$ та жуфт бўлакка $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}$ нуқталар орқали ажратамиз.

$\lfloor x_0;x_2 \rfloor$, $\lfloor x_2;x_4 \rfloor$, $\ldots$, $\lfloor x_{2n-2};x_{2n} \rfloor$ кесмалар хосил бўлади. $x_0=0$, $x_{2n}=b$ бўлади. Бу кесмаларнинг ўрталари мос равишда $x_1, x_3, ..., x_{2n-1}$ нуқталар бўлади.У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \ldots = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

интеграл йиғиндига ажратамиз.

Ҳар бир $\lfloor x_{2i};x_{2i-2} \rfloor$, $\lfloor x_{2i};x_{2i-2} \rfloor$ $(i=0$ дан $n-1$ гача) кесмаларда $(x_{2i};y_{2i})$, $(x_{2i-1};y_{2i-1})$, $(x_{2i-2};y_{2i-2})$ нуқталар орқали ҳамма вақт парабола ўтказиш мумкин, шу билан бирга бундай парабола $[x_{2i};y_{2i+2}]$ кесмада фақат битта бўлади. Ёрдамчи парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзи тақрибан берилган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \left(Ax^2 + Bx + C \right) dx$$

Параболага тегишли ҳар учта нуқта учун юқоридаги тенгламани ёзамиз:

$$\begin{cases} ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\ ax_{2i+1}^2 + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\ ax_{2i+2}^2 + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2} \end{cases}$$

Ҳосил бўлган a, b, c номаълумли учта тенгламалар системасини ечиб, a, b, c ларнинг қийматини интеграл ифодага қўйиб, ҳисоблаймиз. Ҳар бир кесмалар учун уларнинг қийматини қўшиб, параболалар усулига мос формулани ҳосил қиламиз.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + (2i-1)h) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + 2ih) \right];$$

бу ерда $h = \dfrac{(b-a)}{2n}$

Ҳисоблаш аниқлиги ε асосан h қадам қуйидаги тенгсизлик орқали топилади.

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180} f^{(iv)}(\xi)h^4 \quad , \ \xi \in [a;b] \quad |R_n(f)| < \varepsilon$$

Бу ерда $f^{''}(\xi)$ функция $x \in [a;b]$ оралиқдаги $f^{''}(x)$нинг абсолют жиҳатдан энг катта қийматидир.

Масалан : $S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx$ интегрални 0.1 аниқликда ҳисоблаш талаб этилсин.

Ечиш. $F(x) = \sqrt{x}$ интеграл ости функцияси учун [0;0.25] кесмада қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$f^{''}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{2}{3}} , \ |f^{''}(x)| < 2 \ , \ a = 0.25 \ , \ b = 1 \, , \ h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.75}{n}$$

$$|f^{''}(a)| = \max|f^{''}(\xi)| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25^3}} = 0.25 \cdot \frac{1}{0.5^3} = 2$$

$$|R_n(f)| < \frac{0.75}{180} \cdot 2(\frac{0.75}{n})^4 \quad = \quad \frac{0.00263671875}{n^4}$$

Демак, **n=4** қабул қилиши мумкин. У ҳолда $h = \dfrac{0.75}{2} = 0.375$.

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$x_0 = a = 0.25$; $x_1 = x_0 + h = 0.25 + 0.375 = 0.625$; $x_2 = x_1 + h = 0.625 + 0.375 = 1$

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{0.25} = 0.5$; $y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{0.625} = 0.7906$; $y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1} = 1$

Топилган қийматлардан фойдаланиб берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1) = \frac{0.375}{3}(0.5 + 1 + 4 \cdot 0.7906) = 0.5828$$

Аниқ ечими:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1^3} - \sqrt{0.25^3}) = 0.5833$$

Ҳисоблаш хатоликни текширамиз: $\Delta = |0.5833 - 0.5828| = 0.0005$;

Аниқ интегрални Симпсон усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Интеграл остидаги *f(x)* функцияни , $x \in [a;b]$ оралиқни ва ε ҳисоблаш аниқлигини аниқлаб оламиз.

2. Ораликқни бўлишлар сонини n=0 ва S=0; бўлсин.
3. S1= S; n=n+5;   интегрални тақрийбан ҳисоблаймиз:

$$h = \frac{b-a}{2n}\ ;\ x_i = a + i \cdot h;\ i = 0{,}1{,}2{,}\cdots{,}2n;$$

$$S = \frac{h}{3} \cdot [\, f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i})]$$

4. Агар n=5 бўлса ҳисоблаш 3 – пунктга борсин акс ҳода 5- пунктга борсин.
5. Агар $|S1 - S| < \varepsilon$ бўлса ҳисоблаш 6- пунктга борсин акс ҳолда 3 – пунктга борсин.
6. Ҳисоблаш натажасини босмага чиқарамиз.

Аниқ интегрални Симпсон усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
label 10;
var
i,k,n:integer;
a,b,h,x,eps,s,s1:real;
function f(x:real);real; begin f:=sqrt(x); end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b);
write('   Хисоблаш аниклигини киритинг  EPS=');read(eps);
n:=0;s:=0;k:=0;
10:k:=k+5;n:=n+2*k; s1:=s; h:=(b-a)/n;s:=f(a)-f(b); x:=a;
for i:=1 to k do begin
x:=x+i*h; s:=s+4*f(x);
x:=x+i*h; s:=s+2*f(x); end; s:=s*h;
if n=10 then goto 10;
if abs(s1-s)<eps then goto 10;
write('Интегралнинг такрибий кийматии   S=';s:8:4);end.
```

8 – топшириқ.

1. Талаба 5– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Аниқ интегрални ечимини трапеция ва Симпсон усулида қўлда 0.01 аниқликда топади .
3. Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида аниқ интегралнинг 0.0001 аниқликдаги ечимни топади .
4. Тўғри тўрт бурчак, трапеция ва Симпсон усулларнда олинган ечимларни таҳлил қилади.

7 - маъруза машғулот

Оддий дифференциал тенглама Эйлер усулида ечиш.

Дифференциал тенгламалар иккита асосий синфга, яъни **оддий дифференциал** ва **хусусий ҳосилали дифференциал** тенгламалар.

Оддий дифференциал тенгламаларда фақат бир ўзгарувчига боғлиқ функция ва унинг ҳосилалари қатнашади, яъни

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

(1) тенгламада қатнашувчи ҳосилаларнинг энг юқори тартиби дифференциал тенгламаларнинг **тартиби** дейилади. Агар тенглама изланувчи функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, унга **чизиқли дифференциал** тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламанинг **умумий ечими** деб, уни айниятга айлантирувчи x ва n та $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ ўзгармасларга боғлиқ ихтиёрий функцияга айтилади. Масалан (1) тенгламанинг умумий ечими $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ кўринишдаги функциялардан иборат. Агар $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ ўзгармасларга муайян қийматлар берилса, умумий ечимдан хусусий ечим ҳосил қилинади. Хусусий ечимни топиш учун $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ ўзгармасларнинг мос қийматларини аниқлаш лозим. Бунинг учун эса ечимни қаноатлантирувчи қўшимча шартларга эга бўлишимиз керак. Агар дифференциал тенглама n-тартибли бўлса, ягона хусусий ечимни топиш учун худди шунча қўшимча шартлар керак. Хусусан, i-тартибли тенглама $F(x, y, y') = 0$ нинг умумий ечими $y = \varphi(x, c)$ даги c ўзгармасни топиш учун i та қўшимча шартнинг берилиши кифоя.

Қўшимча шартлар берилишига кўра дифференциал тенгламалар учун 2 хил масала қўйилади:

1) **Коши масаласи.**
2) **Чегаравий масала**.

Агар қўшимча шартлар битта $x = x_0$ нуқтада берилса, дифференциал тенгламани ечиш учун қўйилган масала **Коши масаласи** дейилади. Коши масаласидаги қўшимча шартлар **бошланғич шартлар,** $x = x_0$ нуқта эса **бошланғич нуқта** деб аталади. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг чизма, аналитик, тақрибий ва сонли ечиш усуллари мавжуд.

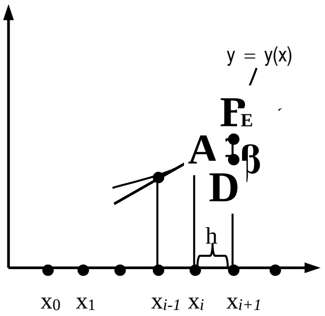
Аналитик усулларда дифференциал тенгламанинг ечимлари аниқ формулалар орқали аниқланади.

Тақрибий усулларда дифференциал тенглама ва қўшимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонроқ масалага келтирилади.

Сонли усулларда эса ечим аналитик шаклда эмас, балки сонлар жадвали кўринишида олинади. Албатта бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Натижада сонли усуллар воситасида олинган ечим ҳам тақрибий бўлади.

Умуман олганда, оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини аналитик усул ёрдамида топиш имкони жуда кам бўлганлиги учун, амалда кўпинча уларни сонли усуллар ёрдамида тақрибий ҳисобланади.

Эйлер усули



Бизга қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенглама (Коши масаласи) ни

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

$[a,b]$ оралиқдаги $y_0 = y(x_0)$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Коши масаласини Эйлер усули ёрдамида ечиш учун, дастлаб дифференциал тенгламанинг ечими қидириладиган $[a,b]$ кесмани $x_1, x_2, ..., x_n$ тугун нуқталар билан бўлакларга бўламиз. Тугун нуқталарнинг координаталари $x_{i+1} = a + i \cdot h \ \left(i = \overline{0,\ n-1}\right)$ формула орқали аниқланади. Ҳар бир тугунда $y(x_i)$ ечимнинг қийматларини чекли айирмалар ёрдамида тақрибий y_i қийматлар билан алмаштирилади.

Маълумки, $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқта атрофидаги Тейлор қаторига ёйилмасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 \cdot y'(x_i) + ...$$

Ушбу чексиз қаторнинг бошидаги иккита ҳад билан чегараланиб, биринчи тартибли ҳосила қатнашган ҳадни аниқлаш натижасида қуйидаги чекли айирмали формулани ҳосил қиламиз:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \qquad (3)$$

(2) ва (3) дан $y'_i = f(x_i, y_i)$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (4)$$

Ҳосил қилинган (4) формула Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи бўлиб, унинг ёрдамида тугун нуқталарга мос бўлган дифференциал тенгламанинг y_i хусусий ечимларини топиш мумкин. Юқоридаги формуладан кўриниб турибдики, y_{i+1} ечимни топиш учун y_i ечимнигина билиш кифоя. Демак, Эйлер усули бир қадамли усуллар жумласига киради.

Масалан: қуйидаги дифференциал тенглама

$$y' = x + y$$

бошланғич шарт

$$y(0) = 1$$

асосида Эйлер усулида $[0;1]$ оралиқдаги сонли ечимини топамиз.

Бунинг учун қуйидаги кетма – кетликни бажарамиз.

1. $[0;1]$ оралиқни 10 та бўлакка бўламиз:

$$h=\frac{1-0}{10}=0.1 \ ; \ x_i=a+i\cdot h=0+i\cdot 0.1=0.1\cdot i \quad ; \quad i=1,2,3,\cdots,10.$$

2. Қуйидаги формула ёрдамида y_i функциянинг қийматларини топамиз.

$$x_1=1\cdot 0.1=0.1 \ ; \ y_1=y_0+h\cdot f(x_0)=1+0.1\cdot(x_0+y_0)=1+0.1\cdot(0+1)=1.1$$

$$x_1=1\cdot 0.1=0.1 \ ; \ y_1=y_0+h\cdot f(x_0)=1+0.1\cdot(x_0+y_0)=1+0.1\cdot(0+1)=1.1$$

$$x_2=2\cdot 0.1=0.2 \ ; \ y_2=y_1+h\cdot f(x_1)=1.1+0.1\cdot(x_1+y_1)=1.1+0.1\cdot(0.1+1.1)=1.22$$

$$x_3=3\cdot 0.1=0.3 \ ; \ y_3=y_2+h\cdot f(x_2)=1.22+0.1\cdot(x_2+y_2)=1.22+0.1\cdot(0.2+1.22)=1.362$$

$$x_4=4\cdot 0.1=0.4 \ ; \ y_4=y_3+h\cdot f(x_3)=1.362+0.1\cdot(x_3+y_3)=1.362+0.1\cdot(0.3+1.362)=1.5282$$

$$x_5=5\cdot 0.1=0.5 \ ; \ y_5=y_4+h\cdot f(x_4)=1.5282+0.1\cdot(x_4+y_4)=1.5282+0.1\cdot(0.4+1.5282)=1.7210$$

$$x_6=6\cdot 0.1=0.6 \ ; \ y_6=y_5+h\cdot f(x_5)=1.7210+0.1\cdot(x_5+y_5)=1.721+0.1\cdot(0.5+1.721)=1.9431$$

$$x_7=7\cdot 0.1=0.7 \ ; \ y_7=y_6+h\cdot f(x_6)=1.9431+0.1\cdot(x_6+y_6)=1.9431+0.1\cdot(0.6+1.9431)=2.1974$$

$$x_8=8\cdot 0.1=0.8 \ ; \ y_8=y_7+h\cdot f(x_7)=2.1974+0.1\cdot(x_7+y_7)=2.1974+0.1\cdot(0.7+2.1974)=2.8159$$

$$x_9=9\cdot 0.1=0.9 \ ; \ y_9=y_8+h\cdot f(x_8)=2.8159+0.1\cdot(x_8+y_8)=2.8159+0.1\cdot(0.8+2.8159)=3.1875$$

$$x_{10}=10\cdot 0.1=1 \ ; \ y_{10}=y_9+h\cdot f(x_9)=3.1875+0.1\cdot(x_9+y_9)=3.1875+0.1\cdot(0.9+3.1875)=3.6062$$

3.Берилган диффетенциал тенгламанинг ечими: $y=2\cdot e^x-x-1.$

Тарибий ечимни аниқ ечим билан солиштириш жадвали.

Т.р	Аргумент **х** нинг қиймати	Аниқ ечим $y=2\cdot e^x-x-1.$	Эйлер усулида топилган ечим	Тақрибий ечим топишдаги хатолик
1	0.1	1.1103	1.1000	0.0103
2	0.2	1.2428	1.2200	0.0228
3	0.3	1.3997	1.3620	0.0377
4	0.4	1.5836	1.5282	0.0554
5	0.5	1.7974	1.7210	0.0764
6	0.6	2.0442	1.9431	0.1011
7	0.7	2.3275	2.1974	0.1301
8	0.8	2.6511	2.4872	0.1639
9	0.9	3.0192	2.8159	0.2033
10	1.0	3.4366	3.1875	0.2491

Дифференциал тенгламани Эйлер усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Дифференциал тенгламанинг *f(x,y)* функциясини , $x \in [a;b]$ оралиқни ва **n** **о**ралиқни бўлишлар сонини аниқлаймиз.

2. Қадамни аниқлаймиз: $h = \dfrac{b-a}{n}$.

3. қуйидаги формула ёрдамида y_i функциянинг қийматларини топамиз.

$$x_i = a + i \cdot h \quad ; \quad y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \;\; ; \;\; i = 1,2,3,\cdots,10.$$

Дифференциал тенгламани Эйлер усулида усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
var
i,k,n:integer;
a,b,h,x:real;
function f(x,y:real);real; begin f:= x+y; end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b); writeln;
writeln('   Бошлангич шартни киритинг  y=');read(y);
writeln('   Ораликнинг бўлишлар сонини киритинг  n=');read(n);
h:=(b-a)/n;
writeln('      Дифференциал тенгламанинг ечими);
for i:=1 to n +1 do begin
x:=x+i*h; y:=y+h*f(x,y);
writeln('    x(’ i:2,’)=’,x:8:4,’        y(‘,i:2,’)=’,y:8:4);end; end.
```

9 – топшириқ.

1. Талаба 6– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Дифференциал тенгламани берилган оралиқдаги ечимини оралиқни 10 та нуқтага бўлиб, қўлда ҳисоблайди.
3. Паскал тилида тузилган дастурлар ёрдамида дифференциал тенгламанинг ечимни топади .
4. Ечимларни таҳлил қилади.

6- жадвал.

Т.Р	Тенглама	Бошлангич шарт	Оралиқ
1	$y' = (x+1)y + 2\sqrt{x}$	$y(1) = 1$	[1 ; 2]
2	$y' = \sqrt{x^2+1}\cdot y + x^3 + 1$	$y(0) = 1.4$	[0 ; 1]
3	$y' = \sqrt{x+1}\cdot y - \sqrt{x+2}$	$y(2) = 0.8$	[2 ; 3]
4	$y' = 2\sqrt{x}\cdot y - x^3$	$y(1) = -2$	[1 ; 2]
5	$y' = \sqrt[3]{x^2+1}\cdot y + 3\cdot x^2$	$y(3) = 1.6$	[3 ; 4]
6	$y' = 0.5\cdot x^2\cdot y - x^2$	$y(1) = 0.6$	[1 ; 2]
7	$y' = 3.5\cdot x^2\cdot y + 2\cdot x$	$y(0) = 0.4$	[0 ; 1]
8	$y' = 4.2\cdot x\cdot y - 3\cdot x^3$	$y(1) = 2.4$	[1 ; 2]
9	$y' = 3.4\cdot x\cdot y + 2.5\cdot x^2$	$y(2) = 1.06$	[2 ; 3]
10	$y' = 6.5\cdot x^2\cdot y - 3.3\cdot x$	$y(3) = 2.07$	[3 ; 4]
11	$y' = 2.8\cdot x^2\cdot y - \sqrt{x+1}$	$y(0) = 1.8$	[0 ; 1]
12	$y' = 3.5\cdot x^3\cdot y - \sqrt{x^3+1}$	$y(1) = 2.8$	[1 ; 2]
13	$y' = 4.2\cdot x\cdot y - \sqrt{x+1}$	$y(2) = 2.7$	[2 ; 3]
14	$y' = 22.6\cdot x3\cdot y - x^2 + 1.4$	$y(3) = -5.04$	[3 ; 4]
15	$y' = 3.5\cdot\sqrt{x+1}\cdot y - x^3$	$y(0) = 2.9$	[0 ; 1]
16	$y' = 0.4\cdot x\cdot y + 0.6\cdot x^2 + 1$	$y(1) = 0.28$	[1 ; 2]
17	$y' = 0.5\cdot x^2\cdot y + \sin(x)$	$y(2) = 2.19$	[2 ; 3]
18	$y' = \sqrt[3]{1.4\cdot x + 1.2}\cdot y - x^3 + 1.4\cdot x$	$y(3) = 10.04$	[3 ; 4]
19	$y' = 2.1\cdot\sqrt{x}\cdot y - 1.5\cdot x$	$y(0) = 12.8$	[0 ; 1]
20	$y' = 3.3\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot y - 2.8\cdot x^2$	$y(1) = 2.15$	[1 ; 2]
21	$y' = \sqrt{x^2+2.5}\cdot y - 3.5\cdot x$	$y(2) = 11.18$	[2 ; 3]
22	$y' = \sqrt{x^2+1.2}\cdot y - 2.5\cdot x$	$y(3) = -6.05$	[3 ; 4]
23	$y' = (x^2+1)\cdot y - 3.4\cdot x$	$y(0) = 4.6$	[0 ; 1]
24	$y' = \sqrt{3\cdot x^2+4}\cdot y + 3.6\cdot x^2$	$y(2) = -1.14$	[2 ; 3]
25	$y' = \sqrt{3\cdot x^2+1}\cdot y - 2.5\cdot x^2$	$y(3) = 4.3$	[3 ; 4]
26	$y' = \sin(x)\cdot y - \sqrt{x}$	$y(0) = 0.9$	[0 ; 1]

Оддий дифференциал тенглама Рунге - Кутта усулида ечиш.

Эйлер усулида дифференциал тенгламанинг ечимини топганда қадам қанча кичик бўлса ечимни шунча аниқлик топиш мумкин. Қадам кичик бўлганда ҳисоблаш кўп бўлиши натижасида шунча хатоликлар пайдо бўлади. Масаланинг юқори аниқликда ечимини берадиган бир қадамли ошкор усулларнинг бошқа бир неча хиллари ҳам мажуд. Уларнинг ичида амалда энг кўп ишдлатиладигани Рунге-Кутта усули ҳисобланади. Усул шартига кўра ҳар бир янги x_{i+1} тугун нуқтадаги y_{i+1} ечимни топиш учун $f(x,y)$ функцияни 4 марта ҳар хил аргументлар учун ҳисоблаш керак.

Биринчи тартибли дифференциал тенглама (Коши масаласи) ни

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

$[a,b]$ оралиқдаги $y_0 = y(x_0)$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Усулнинг ишчи формуласи қуйидагича ёзилади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0,1,...,n$$

бу ерда $k_0 = f(x_i, y_i);$

$$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\cdot k_0);$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\cdot k_1);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h\cdot k_2);$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\cdot h.$$

Масалан: қуйидаги дифференциал тенглама

$$y' = x + y$$

бошланғич шарт

$$y(0) = 1$$

асосида Рунге - Кутта усулида $[0;1]$ оралиқдаги сонли ечимини топамиз.

Бунинг учун қуйидаги кетма – кетликни бажарамиз.

1. $[0;1]$ оралиқни 10 та бўлакка бўламиз:

$h = \frac{1-0}{10} = 0.1$; $x_i = a + i\cdot h = 0 + i\cdot 0.1 = 0.1\cdot i$; $i = 1,2,3,\cdots,10.$

1 -қадам: $x_0 + \frac{h}{2} = 0 + 0.05 = 0.05$; $i = 1;$ y_1 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1;$$

$$k_1 = f(x_0 + 0.05, y_0 + 0.05 \cdot k_0) = 0.05 + 1 + 0.05 \cdot 1 = 1.1;$$

$$k_2 = f(x_0 + 0.05, y_0 + 0.05 \cdot k_1) = 0.05 + 1 + 0.05 \cdot 1.1 = 1.105;$$

$$k_3 = f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1 \cdot k_2) = 0.1 + 1 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2105$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) = 1 + \frac{0.1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) = 1.110342$$

<u>2 -қадам</u>: $x_1 + \frac{h}{2} = 0.12 + 0.05 = 0.25$; $i = 1$; y_2 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1.210342; \; k_1 = f(x_1 + 0.05, y_1 + 0.05 \cdot k_1) = 1.320889;$$

$$k_2 = f(x_1 + 0.05, y_1 + 0.05 \cdot k_1) = 1.326385; \; k_3 = f(x_1 + 0.1, y_1 + 0.1 \cdot k_2) = 1.4429804.$$

$$y_2 = 1.110342 + \frac{0.1}{6} \cdot (1.210342 + 2 \cdot 1.320889 + 2 \cdot 1.326385 + 1.442980) = 1.242805$$

<u>3 -қадам</u>: $x_2 + \frac{h}{2} = 0.2 + 0.05 = 0.25$; $i = 2$; y_3 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_2, y_2) = x_2 + y_2 = 1.442805; \; k_1 = f(x_2 + 0.05, y_2 + 0.05 \cdot k_1) = 1.564945;$$

$$k_2 = f(x_2 + 0.05, y_2 + 0.05 \cdot k_1) = 1.571052; \; k_3 = f(x_2 + 0.1, y_2 + 0.1 \cdot k_2) = 1.699910$$

$$y_3 = 1.242805 + \frac{0.1}{6} \cdot (1.442805 + 2 \cdot 1.564945 + 2 \cdot 1.571052 + 1.699910) = 1.399717$$

<u>4 -қадам</u>: $x_3 + \frac{h}{2} = 0.3 + 0.05 = 0.35$; $i = 3$; y_4 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_3, y_3) = x_3 + y_3 = 1.699717; \; k_1 = f(x_3 + 0.05, y_3 + 0.05 \cdot k_1) = 1.834703;$$

$$k_2 = f(x_3 + 0.05, y_3 + 0.05 \cdot k_1) = 1.983862; \; k_3 = f(x_3 + 0.1, y_3 + 0.1 \cdot k_2) = 1.983862$$

$$y_4 = 1.399717 + \frac{0.1}{6} \cdot (1.699717 + 2 \cdot 1.834703 + 2 \cdot 1.983862 + 1.983862) = 1.583648$$

<u>5 -қадам</u>: $x_4 + \frac{h}{2} = 0.4 + 0.05 = 0.45$; $i = 4$; y_5 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_4, y_4) = x_4 + y_4 = 1.983648; \; k_1 = f(x_4 + 0.05, y_4 + 0.05 \cdot k_1) = 2.132831;$$

$$k_2 = f(x_4 + 0.05, y_4 + 0.05 \cdot k_1) = 2.140290; \; k_3 = f(x_4 + 0.1, y_4 + 0.1 \cdot k_2) = 2.297677$$

$$y_5 = 1.583648 + \frac{0.1}{6} \cdot (1.983648 + 2 \cdot 2.132831 + 2 \cdot 2.140290 + 2.297677) = 1.797441$$

<u>6 -қадам</u>: $x_5 + \frac{h}{2} = 0.5 + 0.05 = 0.55$; $i = 5$; y_6 аниқлаймиз.

$$k_0 = f(x_5, y_5) = x_5 + y_5 = 2.297441; \; k_1 = f(x_5 + 0.05, y_5 + 0.05 \cdot k_1) = 2.462313;$$

$$k_2 = f(x_5 + 0.05, y_5 + 0.05 \cdot k_1) = 2.470557; \; k_3 = f(x_5 + 0.1, y_5 + 0.1 \cdot k_2) = 2.644497$$

$$y_6 = 1.797441 + \frac{0.1}{6} \cdot (2.297441 + 2 \cdot 2.462313 + 2 \cdot 2.470557 + 2.644497) = 2.044236.$$

7 -қадам: $x_6 + \frac{h}{2} = 0.6 + 0.05 = 0.65$; $i = 6;$ y_7 аниқлаймиз.

$k_0 = f(x_6, y_6) = x_6 + y_6 = 2.644236;\ k_1 = f(x_6 + 0.05, y_6 + 0.05 \cdot k_1) = 2.826448$;

$k_2 = f(x_6 + 0.05, y_6 + 0.05 \cdot k_1) = 2.835558;\ k_3 = f(x_6 + 0.1, y_6 + 0.1 \cdot k_2) = 3.027792$

$$y_6 = 2.044236.+ \frac{0.1}{6} \cdot (2.644236 + 2 \cdot 2.826448 + 2 \cdot 2.835558 + 3.027792) = 2.327503.$$

8 -қадам: $x_7 + \frac{h}{2} = 0.7 + 0.05 = 0.75$; $i = 7;$ y_8 аниқлаймиз.

$k_0 = f(x_7, y_7) = x_7 + y_7 = 3.027503;\ k_1 = f(x_7 + 0.05, y_7 + 0.05 \cdot k_1) = 3.228878;$

$k_2 = f(x_7 + 0.05, y_7 + 0.05 \cdot k_1) = 3.238947;\ k_3 = f(x_7 + 0.1, y_7 + 0.1 \cdot k_2) = 3.451398$

$$y_7 = 2.327503..+ \frac{0.1}{6} \cdot (3.027503 + 2 \cdot 3.228878 + 2 \cdot 3.238947 + 3.451398) = 2.651079.$$

9 -қадам: $x_8 + \frac{h}{2} = 0.8 + 0.05 = 0.85$; $i = 8;$ y_9 аниқлаймиз.

$k_0 = f(x_8, y_8) = x_8 + y_8 = 3.451079;\ k_1 = f(x_8 + 0.05, y_8 + 0.05 \cdot k_1) = 3.673633;$

$k_2 = f(x_8 + 0.05, y_8 + 0.05 \cdot k_1) = 3.684761;\ k_3 = f(x_8 + 0.1, y_8 + 0.1 \cdot k_2) = 3.919555$

$$y_9 = 2.651079 + \frac{0.1}{6} \cdot (3.451079 + 2 \cdot 3.673633 + 2 \cdot 3.684761 + 3.919555) = 3.019203.$$

10 -қадам: $x_9 + \frac{h}{2} = 0.9 + 0.05 = 0.95$; $i = 9;$ y_{10} аниқлаймиз.

$k_0 = f(x_9, y_9) = x_9 + y_9 = 3.919203;\ k_1 = f(x_9 + 0.05, y_9 + 0.05 \cdot k_1) = 4.165163$;

$k_2 = f(x_9 + 0.05, y_9 + 0.05 \cdot k_1) = 4.177461;\ k_3 = f(x_9 + 0.1, y_9 + 0.1 \cdot k_2) = 4.436949$

$$y_{10} = 3.019203 + \frac{0.1}{6} \cdot (3.919203 + 2 \cdot 4.165163 + 2 \cdot 4.1774611 + 4.436949) = 3.436559.$$

Тарибий ечимни аниқ ечим билан солиштириш жадвали.

Т.р	Аргумент **x** нинг қиймати	Аниқ ечим $y = 2 \cdot e^x - x - 1.$	Рунге - Кутта усулида топилган ечим	Тақрибий ечим топишдаги хатолик
1	0.1	1.110342	1.110342	0.000000
2	0.2	1.242806	1.242805	0.000000
3	0.3	1.399718	1.399717	0.000001
4	0.4	1.583649	1.583648	0.000001
5	0.5	1.797443	1.797441	0.000001
6	0.6	2.044238	2.044236	0.000002
7	0.7	2.327505	2.327503	0.000002
8	0.8	2.651082	2.651079	0.000003
9	0.9	3.019206	3.019203	0.000003
10	1.0	3.436564	3.436559	0.000004

Дифференциал тенгламани Рунге - Кутта усулида ҳисоблаш алгоритими.

1. Дифференциал тенгламанинг *f(x,y)* функциясини , $x \in [a;b]$ оралиқни ва **n** **о**раликни бўлишлар сонини аниқлаймиз.
2. Қадамни аниқлаймиз: $h = \dfrac{b-a}{n}$.
3. Қуйидаги формула ёрдамида y_i функциянинг қийматларини топамиз.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0,1,\ldots,n$$

бу ерда $$h = \frac{b-a}{n} \ , \ x_i = a + i \cdot h.$$

$$k_0 = f(x_i, y_i) \ ; \quad k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0);$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1); \ k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Дифференциал тенгламани Рунге - Кутта усулида усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
var
i, n:integer;
a,b,h,h1,x,y,k0,k1,k2,k3:real;
function f(x,y:real);real; begin f:= x+y; end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b); writeln;
writeln('   Бошлангич шартни киритинг  y=');read(y);
writeln('   Ораликнинг бўлишлар сонини киритинг  n=');read(n);
h:=(b-a)/n; h1:=h/2;
writeln('       Дифференциал тенгламанинг ечими);
for i:=1 to n  do begin
k0:=f(x,y); k1:=f(x+h1,y+h1*k0);
k2:=f(x+h1,y+h1*k1); k3:=f(x+h,y+h*k2);
x:=x+i*h; y:=y+h*(k0+2*k1+2*k2+k3)/6;
writeln('   x(‘, i:2,’)=’,x:8:4,’        y(‘,i:2,’)=’,y:8:4);end; end.
```

10 – топшириқ.

1. Талаба 6– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топширикни олади.
2. Дифференциал тенгламани берилган оралиқдаги Рунге - Кутта усулида ечимини оралиқни 10 та   нуқтага бўлиб, қўлда ҳисоблайди.
3. Паскал тилида тузилган дастур ёрдамида дифференциал тенгламанинг ечимни топади .
4. Ечимларни таҳлил қилади.

8 - маъруза машғулот

Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасини ва юқори тартибли оддий дифференциал тенглама ни Рунге - Кутта усулида ечиш.

Биринчи тартиб оддий дифферетенциал тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} y_1^{'} = F_1(x_1,\ y_1, y_2,\ y_3,\ \cdots,\ \ y_m) \\ y_2^{'} = F_2(x_1,\ y_1, y_2,\ y_3,\ \cdots,\ \ y_m) \\ y_3^{'} = F_3(x_1,\ y_1, y_2,\ y_3,\ \cdots,\ \ y_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{'} = F_m(x_1,\ y_1, y_2,\ y_3,\ \cdots,\ \ y_m) \end{cases} \qquad (1)$$

бошланги шартлар

$$\begin{cases} y_1(x_0) = C_1 \\ y_2(x_0) = C_2 \\ y_3(x_0) = C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m(x_0) = C_m \end{cases} \qquad (2)$$

бу ерда $C_j \quad ,(j = 1,2,3,\cdots,m)$ ўзгармас сонлардир.

(1) дифференциал тенгламага қўйилган (2) – Коши масаласини умумий кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{cases} y_j^{'} = F_j(x,Y) \\ y_j(x_0) = C_j. \end{cases} \quad j = 1,2,3,\cdots,m. \qquad (3)$$

бу ерда $Y = (y_1, y_2,\ y_3,\ \cdots,\ \ y_m)$ вектор ўзгарувчидир.

Дифференциал тенгламалар системасини Рунге – Кутта усулидаги ишчи формуласи қуйидагича ёзилади:

$$y_{i+1}^j = y_i^j + \frac{h}{6}(k_0^j + 2k_1^j + 2k_2^j + k_3^j) \quad i = 0,1,...,n. \quad j = 0,1,...,m. \qquad (4)$$

бу ерда

$$k_0^j = f(x_i, Y_i);$$

$$k_1^j = F_j(x_i + \frac{h}{2}, Y_i^j + \frac{h}{2} \cdot k_0^j);$$

$$k_2^j = F_j(x_i + \frac{h}{2}, Y_i^j + \frac{h}{2} \cdot k_2^j);$$

$$k_3^j = F_j(x_i + h, Y_i^j + h \cdot k_2^j);$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \ x_i = a + i \cdot h.$$

Юқори тартибли дифференциал тенгламаберилган бўлсин. Масалан:

$$y^{(n)} = F(x, y, y^{'}, y^{''}, \cdots, y^{(n-1)}). \qquad (5)$$

Белгилаш йўли билан берилган дифференциал тенгламани оддий дифференциал тенгламалар системасига келтириш мумкин,яъни:

$$\begin{cases} y^{'} = z_1 \ , \\ z_1^{'} = z_2 \ , \\ z_1^{'} = z_2 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1}^{'} = f(x, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}). \end{cases} \qquad (6)$$

Натижада юқоридаги (4) формуладан фойдаланиб,(5) дифференциал тенгламаниечимини топиш мумкин.

Масалан: қуйидаги дифференциал тенгламани ечимини Рунге – Кутта усулида топиш кўрамиз.

$$y''+2\cdot y^{'} - y = 2 + 4\cdot x - x^2 \qquad (7)$$

бошланғич шартни

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y^{'}(1) = 2 \end{cases} \qquad (8)$$

[1 ; 1.5] ораликдаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Ечиш:

$y^{'} = z$; $y^{''} = z^{'}$ белгилаш киритиб, икки номаълумли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} y^{'} = z \ , \\ z^{'} = 2 + 4\cdot x - x^2 - 2\cdot z + y \end{cases}$$

бошланғич шартлар:

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ z(1) = 2 \end{cases}$$

Рунге – Куттанинг ишчи формуласини ёзамиз:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) \ , \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) \end{cases} \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

бу ерда

$$\begin{cases} k_0^1 = z_i \quad ; \\ k_1^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1; \\ k_2^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1; \\ k_3^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2 + 4 \cdot x_i - x_i^2 - 2 \cdot z_i + y_i \ ; t_i = x_i + \dfrac{h}{2}; \\ k_1^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^2) + y_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^1 \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + h \cdot k_3^2) + y_i + h \cdot k_3^1 \end{cases}$$

$$h = \frac{1.5 - 1}{5} = 0.1, \quad x_i = 1 + i \cdot 0.1.$$

Масаланинг ечиш кетма – кетлиги.

1. $i = 1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 2$ маълумотлардан фойдалиниб y_1 , z_1 ;

$$\begin{cases} k_0^1 = z_0 = 2 \ ; \\ k_1^1 = z_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1 = 2 + 0.05 \cdot 2 = 2.1; \\ k_2^1 = z_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 = 2 + 0.05 \cdot 2.1 = 2.099875; \\ k_3^1 = z_0 + h \cdot k_2^1 = 2 + 0.1 \cdot 2.105 = 2.200275. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2 + 4 \cdot x_0 - x_0^2 - 2 \cdot z_0 + y_0 = 2 + 4 \cdot 1 - 1^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 \ ; t_0 = x_0 + 0.05 = 1 + 0.05 = 1.05; \\ k_1^2 = 2 + 4 \cdot t_0 - t_0^2 - 2 \cdot (z_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 = 1{,}997500; \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_0 - t_0^2 - 2 \cdot (z_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_0 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 = 2.002750; \\ k_3^2 = 2 + 4 \cdot t_0 - t_0^2 - 2 \cdot (z_0 + h \cdot k_2^2) + y_0 + h \cdot k_2^1 = 1.999438. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) = 1.2100 \ ; \\ z_1 = z_0 + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) = 2.199999. \end{cases}$$

2. $i=2$; $x_1=1.1$; $y_1=1.2100$; $z_1=2.199999$ маълумотлардан фойдалиниб y_2 , z_2 ;

$$\begin{cases} k_0^1 = z_1 = 2.199999 \; ; \\ k_1^1 = z_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1 = 2.299999; \\ k_2^1 = z_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 = 2.299874 \\ k_3^1 = z_1 + h \cdot k_2^1 = 2.4002743. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2 + 4 \cdot x_1 - x_1^2 - 2 \cdot z_1 + y_1 = 2.200003; \; t_1 = x_1 + 0.05 = 1.15; \\ k_1^2 = 2 + 4 \cdot t_1 - t_1^2 - 2 \cdot (z_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^2) + y_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1 = 1.997502; \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_1 - t_1^2 - 2 \cdot (z_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_1 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 \;\; = 2.002752; \; t_1 = x_1 + 0.1 = 1.2 \\ k_3^2 = 2 + 4 \cdot t_1 - t_1^2 - 2 \cdot (z_1 + h \cdot k_2^2) + y_1 + h \cdot k_2^1 \;\;\; = 1.999439; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) = 1.440001; \\ z_2 = z_1 + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) = 2.3999998. \end{cases}$$

3. $i=3$; $x_1=1.2$; $y_2=1.440001$; $z_2=2.3999998$ маълумотлардан фойдалиниб y_3 , z_3 ;

$$\begin{cases} k_0^1 = z_2 = 2.399998 \; ; \\ k_1^1 = z_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1 = 2.499998; \\ k_2^1 = z_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 = 2.499873; \\ k_3^1 = z_2 + h \cdot k_2^1 = 2.6500274. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2 + 4 \cdot x_2 - x_2^2 - 2 \cdot z_2 + y_2 = 2.000004; \; t_2 = x_2 + 0.05 = 1.25; \\ k_1^2 = 2 + 4 \cdot t_2 - t_2^2 - 2 \cdot (z_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^2) + y_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1 = 1.997504; \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_2 - t_2^2 - 2 \cdot (z_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_2 + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 \;\; = 2.002754; \; t_2 = x_2 + 0.1 = 1.3 \\ k_3^2 = 2 + 4 \cdot t_2 - t_2^2 - 2 \cdot (z_2 + h \cdot k_2^2) + y_2 + h \cdot k_2^1 \;\;\; = 1.999441; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = y_2 + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) = 1.690001; \\ z_3 = z_2 + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) = 2.599997. \end{cases}$$

4. $i=4$; $x_3=1.3$; $y_3=1.6939$; $z_3=2.5967$ маълумотлардан фойдалиниб y_4 , z_4 ;

$$\begin{cases} k_0^1 = z_3 = 2.599997 \ ; \\ k_1^1 = z_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^1 = 2.699998; \\ k_2^1 = z_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^1 = 2.699873; \\ k_3^1 = z_3 + h\cdot k_2^1 = 2.800273. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2+4\cdot x_3 - x_3^2 - 2\cdot z_3 + y_3 = 2.000006; \ t_3 = x_3 + 0.05 = 1.35; \\ k_1^2 = 2+4\cdot t_3 - t_3^2 - 2\cdot(z_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^2) + y_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^1 = 1.977505; \\ k_2^2 = 2+4\cdot t_3 - t_3^2 - 2\cdot(z_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^2) + y_3 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^1 \ = 2.002755; t_3 = x_3 + 0.1 = 1.4 \\ k_3^2 = 2+4\cdot t_3 - t_3^2 - 2\cdot(z_3 + h\cdot k_2^2) + y_3 + h\cdot k_2^1 \quad = 1.999442; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = y_3 + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) = 1.960001; \\ z_4 = z_3 + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) = 2.799997. \end{cases}$$

5. $i=5$; $x_4=1.4$; $y_4=1.960001$; $z_4=2.799997$ маълумотлардан фойдалиниб y_5 , z_5 ;

$$\begin{cases} k_0^1 = z_4 = 2.799997 \ ; \\ k_1^1 = z_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^1 = 2.899997; \\ k_2^1 = z_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^1 = 2.89972; \\ k_3^1 = z_4 + h\cdot k_2^1 = 3.000273. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0^2 = 2+4\cdot x_4 - x_4^2 - 2\cdot z_4 + y_4 = 2.000007; \ t_4 = x_4 + 0.05 = 1.45; \\ k_1^2 = 2+4\cdot t_4 - t_4^2 - 2\cdot(z_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^2) + y_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_0^1 = 1.997506; \\ k_2^2 = 2+4\cdot t_4 - t_4^2 - 2\cdot(z_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^2) + y_4 + \dfrac{h}{2}\cdot k_1^1 \ = 2.002756; t_4 = x_4 + 0.1 = 1.5 \\ k_3^2 = 2+4\cdot t_4 - t_4^2 - 2\cdot(z_4 + h\cdot k_2^2) + y_4 + h\cdot k_2^1 \quad = 1.99443; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_5 = y_4 + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1) = 2.999997; \\ z_5 = z_4 + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) = 2.500001. \end{cases}$$

Тарибий ечимни аниқ ечим билан солиштириш жадвали.

Т.р	Аргумент **x** нинг қиймати	Аниқ ечим $y = x^2$	Рунге - Кутта усулида топилган ечим	Тақрибий ечим топишдаги хатолик
1	1.1	1.210000	1.210000	0.000000
2	1.2	1.440000	1.440001	0.000001
3	1.3	1.690000	1.690001	0.000001
4	1.4	1.960000	1.960001	0.000001
5	1.5	2.250000	2.250001	0.000001

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламани Рунге - Кутта усулида ҳисоблаш алгоритими.

1. Дифференциал тенгламанинг *f(x,y)* функциясини , $x \in [a;b]$ оралиқни ва **n** **о**ралиқни бўлишлар сонини аниқлаймиз.
2. Қадамни аниқлаймиз: $h = \dfrac{b-a}{n}$.
3. Қуйидаги формула ёрдамида y_i функциянинг қийматларини топамиз.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_0^1 + 2k_1^1 + 2k_2^1 + k_3^1)\ , \\ z_{i+1} = z_i + \dfrac{h}{6}(k_0^2 + 2k_1^2 + 2k_2^2 + k_3^2) \end{cases} \qquad i = 0,1,\dots,n$$

бу ерда $x_i = a + i \cdot h.$

$$\begin{cases} k_0^1 = z_i \ ; \\ k_1^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_0^1; \\ k_2^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1; \\ k_3^1 = z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^1. \end{cases} \qquad \begin{cases} k_0^2 = 2 + 4 \cdot x_i - x_i^2 - 2 \cdot z_i + y_i \ ; t_i = x_i + \dfrac{h}{2}; \\ k_1^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^2) + y_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_1^1 \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^2) + y_i + \dfrac{h}{2} \cdot k_2^1 \\ k_2^2 = 2 + 4 \cdot t_i - t_i^2 - 2 \cdot (z_i + h \cdot k_3^2) + y_i + h \cdot k_3^1 \end{cases}$$

$$h = \frac{b-a}{n}\ ,\ x_i = a + i \cdot h.$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламани Рунге - Кутта усулида ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
var
i, n:integer;
a,b,h,h1,x,y,z,k0,k1,k2,k3,zk0,zk1,zk2,zk3:real;
function f(i:integer;x,y,z:real):real;
begin case i of 1: f:=z;
2:f:= 2+4*x-x*x-2*z+y; end;end;
begin cls;
write('   Ораликнинг чегаравий кийматларини киритинг  A=');read(a);
write('    B=');read(b); writeln;
writeln('   Бошлангич шартни киритинг  y=');read(y);
write('    z=');read(b); writeln;
writeln('   Ораликнинг бўлишлар сонини киритинг  n=');read(n);
h:=(b-a)/n;h1:=h/2;x:=a;
writeln('       Диференциал тенгламининг ечими ');
for i:=1 to n  do begin
k0:=f(1,x,y,z); zk0:=f(2,x,y,z);
k1:=f(1,x+h1,y+h1*k0,z+h1*zk0);zk1:=f(2,x+h1,y+h1*k0,z+h1*zk0);
k2:=f(1,x+h1,y+h1*k1,z+h1*zk1);zk2:=f(2,x+h1,y+h1*k1,z+h1*zk1);
k3:=f(1,x+h,y+h*k2,z+h*zk2);zk3:=f(2,x+h,y+h*k2,z+h*zk2);
y:=y+h*(k0+2*k1+2*k2+k3)/6;
z:=z+h*(zk0+2*zk1+2*zk2+zk3)/6; x:=a+i*h;
writeln('    x(', i:2,')=',x:8:4,'        y(',i:2,')=',y:8:4);end; end.
```

11 – топшириқ.

1. Талаба 7– жадвлдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Дифференциал тенгламанинг ечимини Рунге - Кутта усулида берилган оралиқни 5 та   нуқтага бўлиб, қўлда ҳисоблайди.
3. Паскал тилида тузилган дастурлар ёрдамида дифференциал тенгламанинг ечимни 0.0001 аниқлик билан топади .
4. Ечимларни таҳлил қилади.

7 - жадвал.

Т.Р	Тенглама	Биринчи бошланғич шарт	Иккинчи бошланғич шарт	Оралиқ
1	$y^{''}+2x\cdot y^{'}+3\cdot y=1.5$	$y(0.6)=1.1$	$y'(0.6)=2$	[0.6 ; 1,1]
2	$y^{''}-xy^{'}+3y=x+1$	$y(0.8)=1$	$y^{'}(0.8)=1.4$	[0.8 ; 1.8]
3	$y^{''}+y^{'}/3+xy=2$	$y(0.6)=1.1$	$y'(0.6)=2$	[0.6 ; 1.6]
4	$y^{''}-0.6y^{'}-2y/x=x$	$y(0)=1$	$y^{'}(0)=2.4$	[0 ; 1]
5	$y^{''}+xy'-y/(2x)=1$	$y(2)=2.1$	$y'(2)=3.22$	[2 ; 2.8]
6	$y^{''}+4xy'-2yx=4x$	$y(0.8)=1$	$y^{'}(0.8)=1.4$	[0.8 ; 1.8]
7	$y^{''}+(1.5)y'-(3x+5)y=4$	$y(0.6)=1.1$	$y'(0.6)=2$	[0.6 ; 1.6]
8	$y^{''}+\sin xy'+2yx=1.2$	$y(0)=1.14$	$y^{'}(0)=2.2$	[0 ; $\pi/2$]
9	$y^{''}-\sin xy^{'}+(x+1)y=2x$	$y(0.1)=1.4$	$y'(0.1)=2.3$	[0.1 ; 1.1]
10	$y^{''}-\cos xy^{'}+3x^{2}y=x$	$y(0)=0.5$	$y^{'}(0)=2.4$	[0 ; 1]
11	$y^{''}-3xy^{'}-1.5y=x+1$	$y(1.1)=1.4$	$y'(1.1)=2.1$	[1.1 ;1.2]
12	$y^{''}-(x+1)y^{'}+3xy=2x^{2}$	$y(1.4)=1$	$y^{'}(1.4)=1.2$	[1.4 ; 2.4]
13	$y^{''}-(2x+1)y^{'}-3xy=x$	$y(0)=1.1$	$y'(0)=2$	[0 ; 1]
14	$y^{''}-(x+3)y^{'}-4xy=2x$	$y(0)=1.4$	$y^{'}(0)=2.4$	[0 ; 1]
15	$y^{''}+2xy^{'}-xy=1.7$	$y(0)=1$	$y'(0)=1.4$	[0 ; 1.4]
16	$y^{''}+ctgxy^{'}-y=3$	$y(0)=1$	$y^{'}(0)=1.6$	[0 ; $\pi/2$]
17	$y^{''}+2xy^{'}-(5x+1)y=2$	$y(0)=2$	$y'(0)=2.6$	[0 ; 1]
18	$y^{''}+\sin xy^{'}-2y=3x+1$	$y(0)=1.2$	$y^{'}(0)=1.8$	[0 ; $\pi/4$]
19	$y^{''}+3xy^{'}-1.8xy=1.4$	$y(0)=2$	$y'(0)=2.6$	[0 ; 1]
20	$y^{''}+(0.2x+1)y^{'}-4y=3x$	$y(1.1)=1.7$	$y^{'}(1.1)=3.6$	[1.1 ; 2.1]
21	$y^{''}+xy^{'}-1.4y=2x+1$	$y(0)=1.6$	$y'(0)=4.2$	[0 ; 0.6]
22	$y^{''}-3xy^{'}+y=3x\sin x$	$y(0)=3.3$	$y^{'}(0)=4.2$	[0 ; $\pi/2$]
23	$y^{''}+2.3xy^{'}-6xy=4x$	$y(0)=1.2$	$y^{'}(0)=1.4$	[0 ; 0.8]
24	$y^{''}+3xy^{'}-\cos xy=\sin x$	$y(1,1)=1$	$y^{'}(1,1)=2$	[1.1 ; 2.1]
25	$y^{''}-(3x+1)y^{'}-4x=2$	$y(0)=2$	$y'(0)=2,5$	[0 ; 0.4]
26	$y^{''}+y^{'}/(3x)-y=3/x$	$y(0.6)=1,3$	$y^{'}(0.6)=2.4$	[0.6 ; 1.6]
27	$y^{''}+2x^{2}y^{'}+4y=x+1$	$y(0.7)=1$	$y'(0.7)=2,3$	[0.7 ; 1.7]
28	$y^{''}-3xy^{'}-y/(2x)=0.7$	$y(0.4)=1,4$	$y^{'}(0.4)=2,1$	[0.4 ; 0.7]
29	$y^{''}-y^{'}/2+2y/x=x/4$	$y(1.1)=0.9$	$y'(1.1)=1.8$	[1.1 ; 1.6]
30	$y^{''}+3y^{'}-y/x=x+1$	$y(0.5)=1$	$y^{'}(0.5)=1.4$	[0.5 ; 0.8]

9 - маъруза машғулот

Чегаравий масалаларни ечишнинг чекли-айирмалар усули.

Иккинчи тартибли, ўзгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ечимларига $[a, b]$ оралиқнинг четки a ва b нуқталарида

$$\begin{cases} m_0 y(a) + m_1 y'(a) = m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) = g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

чегаравий шартлар берилган бўлсин, (1) тенглама ва (2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функция дифференциал тенгламанинг **хусусий ечими дейилади.**

(1) да берилган p(x), q(x), $f(x)$ коэффициент функцияларнинг [a, b] оралиқда узлуксизлиги талаб қилинади. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ чегаравий шарт белгилари бўлган ўзгармас сонлар ҳисобланади.

Чекли айирмалар усули.

Иккинчи тартиб (1) дифференциал тенгламага қўйилган (2) чегаравий масалани чекли айирмалар усули билан ечиш учун [a,b] оралиқни $x_i = a + i \cdot h$ формула ёрдамида бўлакларга бўламиз, бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$ қадам, n - оралиқни бўлакка бўишлар, ёки тугун нуқталар сони.

x_i нуқталар учун юқоридаги (1) тенглама ўринли бўлгани учун, уни шу нуқталарда ёзиб оламиз:

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = f(x_i) \qquad (3)$$

қулайлик учун, бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y''_i + p_i y'_i + q_i y_i = f_i \qquad (4)$$

(4) тенгламадаги $y_i^{'}, y_i^{''}$ ҳосилалар ўрнига қуйидаги уларнинг чекли айирма формулаларни қўямиз:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h^2} \qquad (5)$$

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Натижада (1) дифференциал тенглама ўрнига ҳосилалар қатнашмаган ва y_i номаълумлардан иборат тенгламалар системасини :

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i. \qquad i=1,2,3,\cdots,n-1.$$

Ҳосил бўлган тенгламани ҳар иккала томонини h^2 га кўпайтирамиз ва мос ҳадларни группалаймиз, натижада қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$A_iy_{i+1}-B_iy_i+C_iy_{i-1}=D_i \ . \qquad (6)$$

Бу ерда:

$$A_i=1+\frac{h}{2}p_i \qquad C_i=1-\frac{h}{2}p_i \qquad i=1,2,3,\cdots,n-1.$$

$$B_i=2-h^2q_i \qquad D_i=h^2f_i$$

ёки

$$\begin{cases} A_1y_2-B_1y_1+C_1y_0=D_1 \\ A_2y_3-B_2y_2+C_2y_1=D_2 \\ A_2y_3-B_2y_2+C_2y_1=D_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1}y_n-B_{n-1}y_{n-1}+C_{n-1}y_{n-2}=D_{n-1}. \end{cases} \qquad (7)$$

Ҳосил бўлган система $y_0, y_1, ..., y_n$ лардан иборат $(n+1)$та номаълумли, $(n-1)$та тенгламадан иборат уч диагоналли чизиқли тенгламалар системасидан иборат.

Уч диагоналли бўлишига сабаб, системадаги ҳар бир тенгламада фақат 3 тадан номаълум қатнашган ҳадлар мавжуд бўлиб, системада уларнинг жойлашган ўрни асосий диагонал, уни пасти ва юқорисидаги диагоналларга мос келади

Маълумки, тенгламалар системасининг ягона ечимини аниқлаш учун тенгламалар ва номаълумлар сони тенг бўлиши керак. Шунинг учун иккита тенгламани чегаравий шарт ҳисобига тўлдириб оламиз. x_0 ва x_n оралиқнинг четки нуқталари учун (2) шартларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} m_0y_0+m_1y_0^{/}=m_2 \\ g_0y_n+g_1y_n^{/}=g_2 \end{cases}$$

$y_0^{/}, y_n^{/}$-ларни мос равишда (10) ва (11) чекли айирмалар формулалар билан алмаштирамиз, яъни $y(x)$ни $x=x_0$ ёки $x=a$ нуқтадаги ҳосиласи учун ўнг чекли айирма формуласини, $x=x_n$ ёки $x=b$ нуқтадаги ҳосиласи учун чап чекли айирма формуласини қўямиз:

$$\begin{cases} m_0y_0+m_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=m_2 \\ g_0y_n+g_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=g_2 \end{cases}$$

қуйидагича белгилашларни киритиб ,

$$A_0=hm_0-m_1 \ ; \ B_0=m_1 \ ; \ C_0=hm_2$$

$$A_n=hg_0+g_1 \ ; \ B_n=-g_1 \ ; \ C_n=hg_2.$$

Ҳосил қилинган тенгламаларни (7) тенгламалар системасига қўшамиз натижада $(n+1)$та номаълумли, $(n+1)$та тенгламадан иборат $y_0, y_1, ..., y_n$ номаълумли қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0 \\ A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \qquad (i = 1, \overline{n-1}) \\ A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \end{cases} \tag{8}$$

Маълумки, қидирилаётган тақрибий ечимнинг аниқлик даражасини ошириш учун [a,b] оралиқда киритилган $x_i = a + i \cdot h$ тўрнинг h қадамини кичрайтириш лозим. Бу миқдорни кичрайтириш учун эса ўз навбатида тугун нуқталар x_i нинг сонини кескин ошишига олиб келади. Шундай қилиб, қўйилган масалани зарур аниқликда ечиш учун ҳосил қилинган (8) системанинг тартиби минг, айрим ҳолларда эса ўн мингдан ҳам ортиқ бўлиши мумкин.

Юқорида эслатганимиздек, системанинг ҳар бир тенгламасида фақат учтадангина номаълум қатнашган ҳадлар мавжуд қолган номаълумларнинг коэффицентлари 0 га тенг. Агарда биз бундай системани анъанавий усуллар (Гаусс, Крамер, тескари матрица каби) ёрдамида ечмоқчи бўлсак, ноллар устида маъносиз бўлган хажмдаги амалларни бажаришимизга тўғри келади.

Шунинг учун, бундай махсус системаларни ечишнинг махсус усуллари ишлаб чиқилган. Бу усулларнинг энг соддаси, дастурлашга қулайи, хатолар йиғилмасини ҳосил қилмайдигани “ҳайдаш” усули ҳисобланади.

Қуйида “Хайдаш ” усулининг қисқача моҳияти билан танишиб чиқамиз.

Махсус, диагоналли системаларни ечишга мўлжалланган “Хайдаш” усули икки босқичдан иборат:

- номаълум коэффицентларни аниқлаш (тўғри босқичи);
- системанинг ечимларини аниқлаш (тескари) босқичи.

1-босқичда (8) системанинг номаълум ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \tag{9}$$

бу ерда α_{i+1} ва β_{i+1} номаълум ҳайдаш коэффицентлари.

Номаълум $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ коэффицентларни топиш учун (9) тенгликни $x = x_{i-1}$ нуқталардаги кўринишини (8) формуладаги иккинчи тенгламага қўйиб қуйидаги тенгламалар системасини:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i (\alpha_i y_i + \beta_i) = D_i \tag{10}$$

(10) тенгликни y_i нсбатан ечамиз , яъни:

$$y_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i} \cdot y_{i+1} + \frac{C_i \cdot \beta_i - D_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i} \tag{11}$$

(9) ва (11) тенгликлардан $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ номаълум коэффицентларни топимиз:

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{C \cdot_i \beta_i - D_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i}; \quad i = \overline{1, n-1} \tag{12}$$

Мазкур реккурент формуладаги барча α_{i+1} ва β_{i+1} ларни аниқлаш учун дастлабки α_1 ва β_1 қийматларни топишимиз керак. Бу қийматларни топишимиз учун $x=a$ нуқтадаги чегаравий шартдан ҳосил қилинган (8) формуладаги биринчи тенгламадан фойдаланмиз.

$A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0$ тенгламани ҳар иккала томонини A_0 га бўлиб, y_0 ни топамиз:

$$y_0 = -\frac{B_0}{A_0} y_1 + \frac{C_0}{A_0};$$

(9) формуланинг $i=0$ даги қийматида ҳосил қилинган $y_0 = \alpha_1, y_1 + \beta_1$ билан солиштиришиб α_1 ва β_1 аниқлаймиз:

$$\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0} = -\frac{m_1}{h*m_0 - m_1}\ ; \quad \beta_1 = \frac{C_0}{A_0} = \frac{h*m_2}{h*m_0 - m_1}..$$

α_1, β_1 лар маълум бўлгач, барча кейинги α_i, β_i лар (12) реккурент формуладан топилади. Бу жараён “ҳайдаш” усулининг тўғри босқичини ташкил этади.

2-босқичда α_i, β_i барча қийматлари топилгач (9) реккурент формула ёрдамида ечим y_i ларни топиш мумкин, бу ерда ҳам дастлабки қиймат сифатида y_n ни аниқлаш лозим. Бу ишни бажариш учун $x=b$ нуқтадаги чегаравий шартдан ҳосил қилинган (8) системанинг учинчи тенгламаси

$$A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \tag{13}$$

ва $i=n-1$ деб (9) формуладан $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$ аниқлаймиз ва (13) тенгликка қўйиб y_n ни аниқлаймиз:

$$y_n = \frac{C_n - B_n\beta_n}{A_n + B_n\alpha_n} = \frac{h\cdot g_2 + g_1\cdot\beta_n}{h\cdot g_0 + g_1 - g_1\cdot\alpha_n}\ . \tag{14}$$

Демак y_i ларни қуйидаги формуладан аиқлаймиз:

$$y_i = \alpha_{i+1}\cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (i = \overline{n-1,0})\ .$$

Масалан: қуйидаги дифференциал тенгламани ечимини Рунге – Кутта усулида топиш кўрамиз.

$$y'' + 2\cdot y' - y = 2 + 4\cdot x - x^2 \tag{15}$$

бошланғич шартни

$$\begin{cases} 4\cdot y(1) + 2\cdot y'(1) = 8 \\ 3\cdot y(2) - 2\cdot y'(2) = 4 \end{cases} \tag{16}$$

$[\,1;\ 2\,]$ ораликдаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Ечиш: $[\,1;\ 2\,]$ оралиқни 10 та бўлакка бўламиз.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1\ ;\ x_0 = 1\,;\ x_i = 1 + i\cdot h\,;$$

(15) тенгламадаги y_i', y_i'' ҳосилалар ўрнига қуйидаги уларнинг чекли айирма формулаларни қўямиз:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h^2} \qquad ; \qquad y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \ .$$

Бу ерда:

$p_i = 2$; $q_i = -1$; $f_i = 2 + 4 \cdot x_i - x_i^2$; $m0 = 4$; $m1 = 2$; $m2 = 8$; $go = 3$; $g1 = -2$; $g2 = 4$;

$$A_i = 1 + \frac{h}{2} p_i \qquad C_i = 1 - \frac{h}{2} p_i \qquad i = 1,2,3,\cdots, 9.$$

$$B_i = 2 - h^2 q_i \qquad D_i = h^2 f_i$$

$\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ номаълум коэффицентларни тўғри йўл биланқуйидаги формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{C \cdot_i \beta_i - D_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i}; \quad i = \overline{1,9} \quad (17)$$

$$\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0} = -\frac{m_1}{h * m_0 - m_1} \ ; \ \beta_1 = \frac{C_0}{A_0} = \frac{h * m_2}{h * m_0 - m_1}. \qquad .$$

Берилган масала учун:

$$A_0 = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot p_i = 1 + 0.1 = 1.1 \ ; \ B_0 = 2 - 0.01 \cdot (-1) = 2.01; \ C_0 = 1 - 0.1 = 0.9;$$

$$\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0} = -\frac{m_1}{h * m_0 - m_1} = 1.25; \ \beta_1 = \frac{C_0}{A_0} = \frac{h * m_2}{h * m_0 - m_1} = 0.5 \ ;$$

Демак y_i ларни тескари йўл билан қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (i = \bar{9},0) \ .$$

бу ерда :

$$y_{10} = \frac{C_{10} - B_{10}\beta_{10}}{A_{10} + B_{10}\alpha_{10}} = \frac{h \cdot g_2 + g_1 \cdot \beta_n}{h \cdot g_0 + g_1 - g_1 \cdot \alpha_n} = 3.9255.$$

$h = 0.1$ қадам билан ҳисоблаш нитижаларини қуйидаги жадвал келтиримиз.

Т.Р	Аргумент	α_i қиймати	β_i қиймати	Аниқ ечим	Тақрибий ечим	Ҳисоблаш хатолиги
1	1.1	1.2500	0.5000	1.2100	1.1109	0.0991
2	1.2	1.2429	-0.5671	1.4400	1.3500	0.0900
3	1.3	1.2341	-0.6328	1.6900	1.6067	0.0833
4	1.4	1.2231	-0.6945	1.9600	1.8814	0.0786
5	1.5	1.2099	-0.7495	2.2500	2.1745	0.0755
6	1.6	1.1942	-0.7948	2.5600	2.4864	0.0736
7	1.7	1.1762	-0.8273	2.8900	2.8172	0.0728
8	1.8	1.1562	-0.8447	3.2400	3.1673	0.0727
9	1.9	1.1347	-0.8457	3.6100	3.5367	0.0733
10	2.0	1.1125	-0.8303	4.0000	3.9255	0.0745

$h=0.01$қадам билан ҳисоблаш нитижаларини қуйидаги жадвал келтиримиз.

Т.Р	Аргумент	α_i қиймати	β_i қиймати	Аниқ ечим	Тақрибий ечим	Ҳисоблаш хатолиги
1	1.1	1.01944	-0.04533	1.2100	1.20075	0.00925
2	1.2	1.01817	-0.04996	1.4400	1.43140	0.00860
3	1.3	1.01668	-0.05399	1.6900	1.68186	0.00814
4	1.4	1.01498	-0.05717	1.9600	1.95216	0.00784
5	1.5	1.01312	-0.05932	2.2500	2.24234	0.00766
6	1.6	1.01114	-0.06033	2.5600	2.55241	0.00759
7	1.7	1.00912	-0.6018	2.8900	2.88240	0.00760
8	1.8	1.00714	-0.05898	3.2400	3.23233	0.00767
9	1.9	1.00528	-0.05691	3.6100	3.60220	0.00780
10	2.0	1.00359	-0.05421	4.0000	3.99202	0.00798

Демак ораликни бўлишлар сони қанча кичик бўлса аниқли шунча юқори бўлади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масалани “ Ҳайдаш “ усулида ҳисоблаш алгоритими.

1.Дифференциал тенгламанинг *p(x), q(x), f(x,y)* функциясини , $x\in[a;b]$ ораликни ва **n** **о**раликни бўлишлар сонини аниқлаймиз.

2. Чегаравий шартлардаги $m_0\,,m_1\,,m_2\,,g_0\,,g_1\,,g_2\,.$ коэффициентлар қийматларини аниқлаймиз.

3. Қадамни аниқлаймиз: $h=\dfrac{b-a}{n}$.

4. α_{i+1},β_{i+1} номаълум коэффицентларни тўғри йўл биланқуйидаги формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\alpha_{i+1}=\frac{A_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_i};\quad \beta_{i+1}=\frac{C\cdot_i\beta_i-D_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_i};\quad i=\overline{1,9}$$

бу ерда $\alpha_1=-\dfrac{B_0}{A_0}=-\dfrac{m_1}{h*m_0-m_1}$; $\beta_1=\dfrac{C_0}{A_0}=\dfrac{h*m_2}{h*m_0-m_1}$.

$$x_i=a+i\cdot h;\ A_i=1+\frac{h}{2}p_i\ \ ,B_i=2-h^2q_i\ \ ,C_i=1-\frac{h}{2}p_i\ \ ,D_i=h^2f_i$$

5. y_i ларни тескари йўл билан қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$y_i=\alpha_{i+1}\cdot y_{i+1}+\beta_{i+1}\qquad(i=\overline{n-1},0)\ .$$

бу ерда :

$$y_n=\frac{h\cdot g_2+g_1\cdot\beta_n}{h\cdot g_0+g_1-g_1\cdot\alpha_n}.$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масалани “ Ҳайдаш “ ҳисоблашнинг Паскал дастури.

```
var
i,n:integer;
a,b,x,a1,b1,c1,h,m0,m1,m2,g0,g1,g2,y0:real;
alfa,betta,y:array[1..10] of real;
function f(i:integer;x:real):real;
begin case i of
1: f:=2;2:f:=-1;
3:f:=2+4*x-x*x; end;end;
begin cls;
write('Ораликнинг чегаравий  қийматларини киритинг ');
write('a=');read(a);
write('â=');read(b);
writeln('Биринчи чегаравий шартнинг коэффициентларни киритинг ');
write('m0=');read(m0);write('m1=');read(m1);write('m2=');read(m2);
writeln('Иккинчи чегаравий шартнинг коэффициентларни киритинг ');
write('g0=');read(g0);write('g1=');read(g1);write('g2=');read(g2);
write('Ораликни бўлишлар сонини киритинг n=');read(n);
h:=(b-a)/n;
alfa[1]:=-m1/(h*m0-m1);
betta[1]:=h*m2/(h*m0-m1);
for i:=1 to n-1 do begin x:=a+i*h;
a1:=1+h*f(1,x)/2;
b1:=2-h*h*f(2,x);
c1:=1-h*f(1,x)/2;
alfa[i+1]:=a1/(b1-c1*alfa[i]);
betta[i+1]:=(c1*betta[i]-h*h*f(3,x))/(b1-c1*alfa[i]);
end;
y[n]:=(h*g2+betta[n]*g1)/(h*g0+g1-alfa[n]*g1);
for i:=n-1 downto 1 do
y[i]:=alfa[i+1]*y[i+1]+betta[i+1];
write('  Дифференциал тенгламанинг ечими ');
for i:=1 to n do begin x:=a+i*h;
writeln('   x=',x:8:4,'   y(',i:2,')=',y[i]:8:5);
end;end.
```

12– топширик.

1. Талаба 8– жадвалдан журналдаги тартиб рақами бўйича топшириқни олади.
2. Дифференциал тенгламаниг ечимини “ Ҳайдаш “ усулида берилган оралиқни 5 та нуқтага бўлиб, қўлда ҳисоблайди.
3. Паскал тилида тузилган дастурлар ёрдамида дифференциал тенгламанинг ечимни 0.0001 аниқликда топади .
4. Рунге – Кутта ва “ Ҳайдаш “ усулида топилган ечимларни таҳлил қилади.

8 - жадвал.

Т.Р	**Тенглама**	**Чегаравий шартлар.**		**Оралиқ**
1	$y'' + 2x \cdot y' + 3 \cdot y = 1.5$	$y'(0.6) = 1.1$	$0.4y(1) + y'(1) = 2$	[0.6 ; 1,1]
2	$y'' - xy' + 3y = x + 1$	$y(0.8) - 0.5y'(0.8) = 1$	$y(1.8) = 1$	[0.8 ; 1.8]
3	$y'' + y'/3 + xy = 2$	$y(0.6) = 1.4$	$2y(1.6) - 1.5y'(1.6) = 1.8$	[0.6 ; 1.6]
4	$y'' - 0.6y' - 2y/x = x$	$y(0) = 1$	$y(1) - 0.5y'(1) = 1.8$	[0 ; 1]
5	$y'' + xy' - y/(2x) = 1$	$y(2) + 2y'(2) = 1$	$y(2.8) = 2.5$	[2 ; 2.8]
6	$y'' + 4xy' - 2yx = 4x$	$y(0.2) - 1.5y'(0.2) = 1$	$y(1.2) - 0.5y'(1.2) = 2$	[0.2 ; 1.2]
7	$y'' + (1.5)y' - (3x + 5)y = 4$	$y(0.6) = 1.4$	$2y(1.6) - 1.5y'(1.6) = 1.8$	[0.6 ; 1.6]
8	$y'' + \sin xy' + 2yx = 1.2$	$y(0) = 1.4$	$y(\pi/2) - 2y'(\pi/2) = 2$	[0 ; $\pi/2$]
9	$y'' - \sin xy' + (x + 1)y = 2x$	$y(0.1) = 1.4$	$y(1.1) - 2.3y'(1.1) = 2.1$	[0.1 ; 1.1]
10	$y'' - \cos xy' + 3x^2y = x$	$y(0) = 0.5$	$y(1) = 2.4$	[0 ; 1]
11	$y'' - 3xy' - 1.5y = x + 1$	$2y(1.1) + 6y'(1.1) = 1.4$	$y(1.2) - 0.5y'(1.2) = 2.1$	[1.1 ;1.2]
12	$y'' - (x + 1)y' + 3xy = 2x^2$	$y(1.4) = 1$	$y(2.4) - 3.2y'(2.4) = 1.2$	[1.4 ; 2.4]
13	$y'' - (2x + 1)y' - 3xy = x$	$1.1y(0) - 0.2y'(0) = 1.1$	$y(1) + 0.5y'(1) = 2$	[0 ; 1]
14	$y'' - (x + 3)y' - 4xy = 2x$	$y(0) = 1.41$	$y'(1) = 2.4$	[0 ; 1]
15	$y'' + 2xy' - xy = 1.7$	$y(0) = 1$	$2y(1) + 0.5y'(1) = 1.4$	[0 ; 1.4]
16	$y'' + ctgxy' - y = 3$	$y(0) = 1$	$y(p/2) = 1.6$	[0 ; $\pi/2$]
17	$y'' + 2xy' - (5x + 1)y = 2$	$y(0) = 1$	$2y(1) + 0.4y'(1) = 1.8$	[0 ; 1]
18	$y'' + \sin xy' - 2y = 3x + 1$	$y(0) = 1.2$	$y(\pi/4) = 1.8$	[0 ; $\pi/4$]
19	$y'' + 3xy' - 1.8xy = 1.4$	$y(0) = 2$	$y(1) + 0.8y'(1) = 2.6$	[0 ; 1]
20	$y'' + (0.2x + 1)y' - 4y = 3x$	$y(1.1) = 1.7$	$y(2.1) + 2.4y'(2.1) = 3.6$	[1.1 ; 2.1]
21	$y'' + xy' - 1.4y = 2x + 1$	$y(0) + 1.4y'(0) = 1.6$	$y'(0.6) = 4.2$	[0 ; 0.6]
22	$y'' - 3xy' + y = 3x\sin x$	$y(0) + 1.2y'(0) = 3.3$	$y(\pi/2) - 4y'(\pi/2) = 4$	[0 ; $\pi/2$]
23	$y'' + 2.3xy' - 6xy = 4x$	$y(0) - 1.2y'(0) = 1.2$	$y(0.8) = 1.4$	[0 ; 0.8]
24	$y'' + 3xy' - \cos xy = \sin x$	$y(1.1) - 1.4y'(1.1) = 1$	$y(2.1) - 2.1y'(2.1) = 2$	[1.1 ; 2.1]
25	$y'' - (3x + 1)y' - 4x = 2$	$y(0) + 1.4y'(0) = 2$	$y'(0.4) = 2.5$	[0 ; 0.4]
26	$y'' + y'/(3x) - y = 3/x$	$y(0.6) = 1.3$	$0.5y(1.6) - y'(1.6) = 4$	[0.6 ; 1.6]
27	$y'' + 2x^2y' + 4y = x + 1$	$y(0.7) - 2y'(0.7) = 1$	$y(1.7) - 3y'(1.7) = 2.3$	[0.7 ; 1.7]
28	$y'' - 3xy' - y/(2x) = 0.7$	$y(0.4) = 1.4$	$y(0.7) + 1.4y'(0.7) = 2.1$	[0.4 ; 0.7]
29	$y'' - y'/2 + 2y/x = x/4$	$1.1y(1.1) - y'(1.1) = 9$	$3y(1.6) + 0.5y'(1.6) = 1.8$	[1.1 ; 1.6]
30	$y'' + 3y' - y/x = x + 1$	$y(0.5) = 1$	$y(0.8) - 2y'(0.8) = 1.4$	[0.5 ; 0.8]

Галёркин усулида чегаравий масала ечиш .

Тақрибий-аналитик усулда берилган дифференциал тенгламанинг ечими тақрибий аниқланган формулалар ёрдамида топилади ва албатта, ечим ҳам аналитик кўринишда ифодаланади. Айниқса, кўпгина физика ва механика масалаларининг ечимини аналитик кўринишда қидириш лозимлиги, тақрибий аналитик усулларни ўрганишга катта эҳтиёж туғдиради.

Деярли барча тақрибий-аналитик усулларнинг алгоритмлари бир-бирига ўхшаш бўлгани учун қуйида Галёркин усулини ўрганиш билан чекланамиз.

Бизга яна аввалги мавзудаги каби, қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин, яъни:

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=f(x) \qquad (1)$$

тенглама ва

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимни топиш керак.

Олий математика курсидан маълумки, ихтиёрий узлуксиз функцияни чексиз қатор кўринишида ифодалаш мумкин.

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

Галёркин усулида ушбу қатордаги n та чекли ҳад билан чегараланиб, чегаравий масаланинг ечимини қуйидаги кўринишда қидириш таклиф этилади.

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

Бу ерда шуни эслатиб ўтиш лозимки, усулнинг йўл қўйилган ягона ва асосий хатолиги чексиз ҳадли қаторни чекли ҳадли қаторга алмаштиришдан иборатдир. Қатордаги ҳадлар сонини қанча кўп олсак, шунчалик олинган натижалар ишончли ва аниқ ечимга яқин бўлади. Лекин, иккинчи томондан, қатордан кўпроқ ҳад олишга интилиш қўлда бажариладиган амаллар сонини кескин орттириб юборади. Бу эса йўл қўйилиши мумкин бўлган хатолик эҳтимолини кескин орттиради. Шунинг учун амалдаги ҳисоб ишларида $n \le 10$ шартидан келиб чиқилади.

Энди эътиборимизни яна ечимни қидиришга қаратсак, формуладаги $c_1, c_2, ... c_n$-лар қийматлари номаълум бўлган ўзгармаслар ҳисобланади.

$u_0(x), u_1(x), ..., u_n(x)$ лар эса ҳисоб ишларини бажарувчи томонидан танлаб олинадиган $[a, b]$ кесмада икки марта узлуксиз дифференцалланувчи, чизиқли боғлиқ бўлмаган функциялар ҳисобланади, яъни улар базис системасини ташкил қилиб, ўзаро ортогоналлик шартини қаноатланириши керак. Функцияларни ортогоналлик шарти қуйидагича аниқланади.

$$\int_a^b u_n(x)\cdot u_m(x)\cdot dx=\begin{cases} 0 & агар\_\_n \ne m \\ \lambda & агар\_\_n = m \end{cases} \qquad \text{бўлса}$$

бу ерда λ -ортогоналлик коэффициенти.

Базис функцияларни танлашда қуйидаги шартларни ҳисобга олсак, (3) формула билан аниқланувчи масаланинг ечими $c_1, c_2, ..., c_n$ ўзгармасларнинг ихтиёрий танланган ҳадида ҳам чегаравий масаланинг (2) чегаравий шартларини қаноатлантиради.

Базис функцияларни танлаш қуйидагича амалга оширилади.

Аввал қуйидаги операторларни муомалага киритайлик:

$$
\begin{aligned}
&L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x),\\
&L_a[y(x)] = m_0 y(x) + m_1 y'(x)\\
&L_b[y(x)] = g_0 y(x) + g_1 y'(x)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

1) $u_0(x)$ функция - берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи функция бўлиши лозим, яъни:

$$
\begin{cases} m_0 u_0(a) + m_1 u_0^{/}(a) = m_2 \\ g_0 u_0(b) + g_1 u_0^{/}(b) = g_2 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{aligned} L_a[u_0(a)] = m_2 \\ L_b[u_0(b)] = g_2 \end{aligned}.
$$

2) $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ функциялари эса берилган чегаравий шартнинг 1-жинсли ҳолотини қаноатлантирувчи функциялар бўлиши лозим, яъни:

$$
\begin{cases} m_0 u_i(a) + m_1 u_i^{/}(a) = 0 \\ g_0 u_i(b) + g_1 u_i^{/}(b) = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{ёки} \quad \begin{aligned} L_a[u_i(a)] = 0 \\ L_b[u_i(b)] = 0 \end{aligned}
$$

Соддалик учун $n = 2$ деб $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ базис функцияларни танлаймиз натижада энди чегаравий масаланинг ечими фақат c_1 ва c_2 номаълум коэффицентларга боғлиқ бўлиб қолди. c_1 ва c_2 ўзгармасларни эса Галёркин усулида аниқлаш учун, дастлаб (3) тенгламани (1) дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидаги тафовут функциясини ҳосил қиламиз:

$$
R(x, c_1, c_2) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^{2} c_k \cdot L[u_k(x)] - f(x) \qquad (5)
$$

Бу функция чегаравий масала ечимининг аниқ ечимдан фарқини характерловчи миқдор бўлиб, у c_1, c_2 ўзгармасларга чизиқли боғлиқдир. Агар тавофут функцияси айнан 0 га тенг бўлса, тақрибий ечим масаланинг ечими билан устма-уст тушади, лекин тафовутни ҳамма вақт ҳам 0 га айлантириб бўлавермайди. c_1 ва c_2 номаълум коэффицентларни тафовут функцияни min га эриштириш шартидан аниқлаймиз, яъни $min\{R(x, c_1, c_2)\}$.

Тафовут функцияни минималлаштириш шарти Галёркин усулида қуйидагича ифодаланади.

$$
\begin{cases} \int_a^b R(x, c_1, c_2) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x, c_1, c_2) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (6)
$$

Яъни тафовут функцияни $u_i(x)$, $(i = \overline{1,n})$ базис функцияларга ортогоналлик шартидан фойдаланамиз. (5) формуладаги R –тафовут функциясини (6) системага қўямиз.

$$\begin{cases} \int\limits_a^b (L[u_0] + c_1 \cdot L[u_1] + c_2 \cdot L[u_2] - f(x)) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int\limits_a^b (L[u_0] + c_1 \cdot L[u_1] + c_2 \cdot L[u_2] - f(x)) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \int\limits_a^b L[u_0] \cdot u_1(x) \cdot dx + c_1 \cdot \int\limits_a^b L[u_1] \cdot u_1(x) \cdot dx + c_2 \cdot \int\limits_a^b L[u_2] \cdot u_1(x) \cdot dx - \int\limits_a^b f(x) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int\limits_a^b L[u_0] \cdot u_2(x) \cdot dx + c_1 \cdot \int\limits_a^b L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx + c_2 \cdot \int\limits_a^b L[u_2] \cdot u_2(x) \cdot dx - \int\limits_a^b f(x) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(7) система учун қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$m_{11} = \int\limits_a^b L[u_1] \cdot u_1(x) \cdot dx; \qquad m_{12} = \int\limits_a^b L[u_2] \cdot u_1(x) \cdot dx;$$

$$m_{21} = \int\limits_a^b L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx; \qquad m_{22} = \int\limits_a^b L[u_2] \cdot u_2(x) \cdot dx;$$

$$b_1 = \int\limits_a^b (f(x) - L[u_0]) \cdot u_1(x) \cdot dx \qquad b_2 = \int\limits_a^b (f(x) - L[u_0]) \cdot u_2(x) \cdot dx$$

Натижада:
$$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = b_1 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \quad (8)$$

c_1 ва c_2 номаълумларни (8) чизиқли алгебраик тенгламалар системадан топамиз. Натижада $y(x)$ тақрибий - аналитик ечимни қуйидаги кўринишда ёза оламииз :

$$y(x) = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x) \quad (9)$$

Масалан:Чегаравий масаланинг дифференциал тенгламаси қуйидагича кўринишда берилган бўлсин:

$$y'' - 2y' + x^3 \cdot y = 12x^2 - 8x^3 + x^7 \quad (10)$$

Дифференциал тенгламанинг ечимига қўйилган чегаравий шартларга эса

$$\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{matrix} . \quad (11)$$

Галёркин усулида чегаравий масала ечиш учун қуйидаги кетма – кетликни бажарамиз.

1. Базис функцияларни қуйидаги тартибда танлаб оламиз:
   1) $u_0(x)$ ни берилган чегаравий шарт, яъни $u_0(0) = 0$ ва $u_0(1) = 1$ шартни қаноатлантирадиган қилиб, қуйидагича танлаб оламиз: $u_0(x) = x$.
   2) $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ларни эса берилган чегаравий шартга мос бир жинсли

шартларни, яъни $u_1(0)=0, u_1(1)=0$ $u_1(1)=0$ ва $u_2(0)=0$, $u_2(1)=0$ шартни қаноатлантирадиган ва ўзаро чизиқли боғлиқсиз қилиб, қуйидагича танлаб оламиз:

$$u_1(x)=x(x-1)=x^2-x;$$
$$u_2(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2.$$

Ишчи формулаларда фойдаланиладиган қуйидаги операторларни ҳисоблашни ташкил қилайлик.

$$L[u_1]\equiv 2-2(2x-1)+x^3(x^2-x)=2-4x+2+x^5-x^4=$$
$$=x^5-x^4-4x+4$$
$$L[u_2]\equiv 6x-2-2(3x^2-2x)+x^3(x^3-x^2)=$$
$$=6x-2-6x^2+4x+x^6-x^5=x^6-x^5-6x^2+10x-2;$$
$$\boldsymbol{L[u_0]\equiv x''-2x'+x^3x=0-2+x^4=x^2-2}$$

Энди қуйидаги тенгламалар системасининг коэффицентлари ва озод ҳадларини ҳисоблашни ташкил этайлик.

$$\begin{cases} m_{11}c_1+m_{12}c_2=b_1 \\ m_{21}c_1+m_{22}c_2=b_2 \end{cases} \qquad (12)$$

$$m_{11}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1 (x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^2-x)dx=\int_0^1 (x^7-2x^6+x^5-4x^3+8x^2-4x)dx=$$
$$=(\frac{1}{8}x^8-\frac{2}{7}x^7+\frac{1}{6}x^6-x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{8}-\frac{2}{7}+\frac{1}{6}-1+\frac{8}{3}-2=\text{-}0.32738;$$
$$m_{12}=\int_0^1 L[u_2]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1 (x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^2-x)dx=\int_0^1 (x^8-2x^7+x^6-4x^4+8x^3-4x^2)dx=$$
$$=(\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{4}x^8+\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{5}x^5+2x^4-\frac{4}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{4}{5}+2-\frac{4}{3}=0.40397.$$
;
$$m_{21}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_2(x)\cdot dx=\int_0^1 (x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx=\int_0^1 (x^8-2x^7+x^6-4x^4+4x^3-4x^2)\cdot dx= \quad ;$$
$$=(\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{4}x^8+\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{5}x^5+x^4-\frac{4}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{4}{5}+1-\frac{4}{3}=\text{-}1.129365$$
$$m_{22}=\int_0^1 (x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx=\int_0^1 (x^9-2x^8+x^7-6x^5+16x^4-12x^3+2x^2)\cdot dx= \quad ;$$
$$=(\frac{1}{10}x^{10}-\frac{2}{9}x^8+\frac{1}{8}x^8-x^6+\frac{16}{5}x^5-3x^4-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{10}-\frac{2}{9}+\frac{1}{8}-1+\frac{16}{5}-3-\frac{2}{3}=\text{-}1.463888$$
$$b_1=\int_0^1 (12x^2-8x^3+x^7-x^2+2)\cdot(x^2-x)dx=\int_0^1 (x^9-x^8-8x^5+19x^4-11x^3+2x^2-2x)\cdot dx=$$
$$=(\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{9}x^9+\frac{4}{3}x^6+\frac{19}{5}x^5-\frac{11}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{10}-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}+\frac{19}{5}-\frac{11}{4}+\frac{2}{3}-1=2.038888$$

$$b_2 = \int_0^1 (12x^2 - 8x^3 + x^7 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x^2) dx == \int_0^1 (x^{10} - x^9 - 8x^6 + 19x^5 - 11x^4 + 2x^3 - 2x^2) \cdot dx =$$

$$= (\frac{1}{11} x^{11} - \frac{1}{10} x^{10} + \frac{8}{7} x^7 + \frac{19}{6} x^6 - \frac{11}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{2}{3} x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{10} + \frac{8}{7} + \frac{19}{6} - \frac{11}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 1.1004329$$

Топилган коэффициентларни (12) чизикли алгебраик тенгламалар системаси қўйамиз.

$$\begin{cases} -.32738c_1 + 0.40397c_2 = 2.03889 \\ -1.129365c_1 - 1.46389c_2 = 1.10043 \end{cases} \qquad (13)$$

(13) тенгламалар системасидан $c_1 = -3.6656$ ва $c_2 = 2.0764$ ларни аниқлаб топамиз ва (9) формулага қўйсак (10) ва (11) масаланинг ечимини оламиз:

$$y = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x) = x - 3.6656(x^2 - x) + 2.0764(x^3 - x^2) = 4.6656x + 5.742x^2 + 2.0764x^3 .$$

10- маъруза машғулот

Энг кичик квадратлар усули.

Амалий масалаларда учрайдиган масалаларнинг кўриниши кўпинча мураккаб бўлиб, уларнинг аналитик ифодасини топиш мумкин эмас. Бундай ҳолларда берилган мураккаб функцияни ўрганиш қулайроқ бўлган соддароқ функция билан ёки дифференциал тенгламаларнинг хусусий сонли ечимларга мос келадиган бирорта функция билан алмаштириш мақсадга мувофиқдир.

Бунинг учун эркли ўзгарувчи аргемуент билан функциянинг сонли мос қийматлари орасидаги муносабатни функционал боғланишнинг тақрибий ёки аниқ аналитик ифодасини **интерполяция** формулалари ёки энг кичик квадратлар усули орқали тузиш мумкин.

Кўпинча турмушда кузатишлар ва тажрибалар орқали эмпирик формулаларни келтириб чиқариш мумкин.

Масалан: ҳароратнинг кўтарилиши ёки аксинча пасайишини, симоб устунининг кўтарилиши ёки пасайишига қараб билиш мумкин. Демак, ҳарорат билан симоб устини ўртасидаги чизиқли боғланиш борлигини тажриба орқали билиш мумкин.

Энг кичик квадратлар усули биринчи марта 1874 йилда Гаусс томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, айрим адабиётларда бу усул Гаусс усули деб аталади.

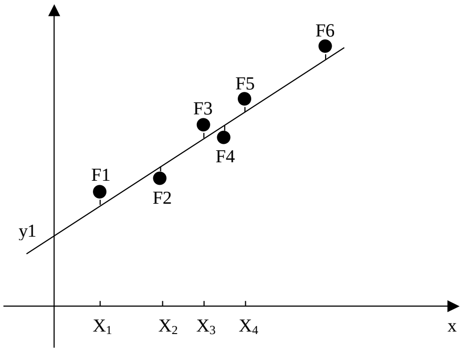
Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти.

Тажриба ва амалий масалаларни ечишда берилган маълумотлар асосида уларга мос натажалар олинган бўлсин, яъни n та берилган $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ эркли ўзгарувчиларнинг қийматларига мос $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ функция қийматлари берилган бўлсин. Қуйидаги мисолларда энг кичик квадратлар усулини кўриб чиқамиз.

Масалан: маълумотлар жадвал кўринишда бўлсин.

X	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n
Y	Y_1	Y_2	Y_3	$\dots$	Y_n

Бу қийматларга мос нуқталарни координата текислигида тасвирлайлик.



Демак, бу X ва $У$ ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни қуйидаги ча белгилаймиз:

$$Y = F(X) \qquad (1)$$

Масалани ечиш учун биз ана шу тажриба нуқталардан жуда кам фарқ қиладиган $y = ax + b$ функцияни кўришимиз керак.

x_i аргумент ва $y_i = ax_i + b$ функция қиймати билан берилган X_i ва Y_i маълумот қийматлари айирмасининг квадратлари йиғиндиси минимум бўлсин:

$$Z(a;b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 \qquad \min z = ? \qquad (2)$$

Ушбу шарт бажарилиши учун, ноъмалум коэффицентлардан олинган хусусий хосилалар нолга тенг бўлиши керак, яъни $\frac{\partial z}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial b} = 0;$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = 0$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} y_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + b\sum_{i=1}^{n} 1 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

ёки

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (5)$$

(5) системадан *а* ва *в* номаълум коэффицентларни топамиз ва натижада чизиқли

$$y = ax + b$$

функцияни ифодасини ҳосил қиламиз.

Масалан: ночизиқли ва параметрик занжирларда сигналларни ўзгартириш.

Ночизиқли қаршиликни вольт – ампер тавсифи (ВАТ) жадвалда келтирилган. Шу тавсифни графикда ифодаланг ва уни иккинчи даражали кўпҳад билан аппроксимацияланг.

Uk	U_1	U_2	U_3	……	U_n
ik	i_1	i_2	i_3	……	i_n

$$i = \varphi(U) = a_0 + a_1 \cdot U + a_2 \cdot U^2 \qquad (6)$$

Квадратлари йиғиндисининг айирмасини функциясини тузамиз:

$$Z(a_0;a_1;a_2) = \sum_{k=1}^{n}(i_k - (a_0 + a_1 \cdot U_k + a_2 \cdot U_k^2))^2 \qquad \min z = ? \qquad (7)$$

Номаълум коэффицентлардан олинган хусусий хосилалар нолга тенглаймиз:

$$\frac{\partial z}{\partial a_0}=0; \qquad \frac{\partial z}{\partial a_1}=0 \ ; \quad \frac{\partial z}{\partial a_2}=0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial a_0}=-2\sum_{k=1}^{n}(i_k-(a_0+a_1\cdot U_k+a_2\cdot U_k^2))=0 \ ; \\ \frac{\partial z}{\partial a_1}=-2\sum_{k=1}^{n}(i_k-(a_0+a_1\cdot U_k+a_2\cdot U_k^2))\cdot U_k=0 \ ; \\ \frac{\partial z}{\partial a_2}=-2\sum_{k=1}^{n}(i_k-(a_0+a_1\cdot U_k+a_2\cdot U_k^2))\cdot U_k^2=0 \ . \end{cases} \qquad (8)$$

Натижада номаълум коэффициентларга нисбатан тенгламалар системасига келамиз:

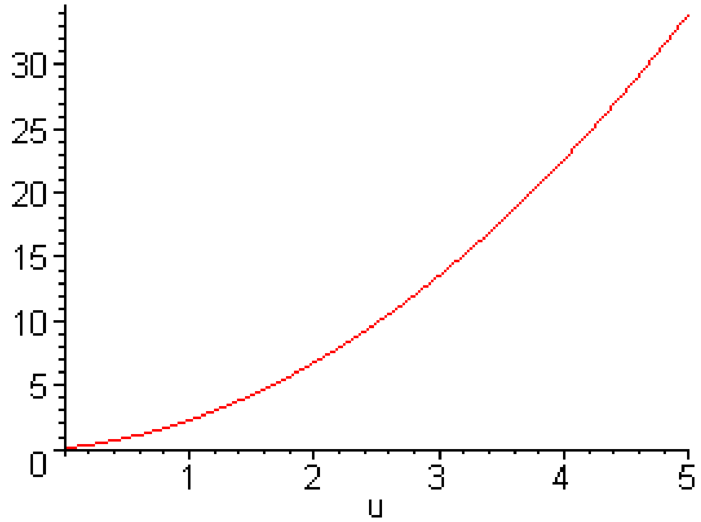
$$\begin{cases} a_0\sum_{k=1}^{n}1+a_1\sum_{k=1}^{n}U_{ki}+a_2\sum_{k=1}^{n}U_k^2=\sum_{k=1}^{n}i_k \quad , \\ a_0\sum_{k=1}^{n}U_k+a_1\sum_{k=1}^{n}U_k^2+a_2\sum_{k=1}^{n}U_k^3=\sum_{k=1}^{n}i_kU_k \quad , \\ a_0\sum_{k=1}^{n}U_k^2+a_1\sum_{k=1}^{n}U_k^3+a_2\sum_{k=1}^{n}U_k^4=\sum_{k=1}^{n}i_kU_k^2 \quad . \end{cases} \qquad (9)$$

Тенгламалар системасини ечиб, номаълум a_0 ,a_1 ,a_2 коэффициентларни аниқлаймиз ва (6) формулага кўйсак жавалда келтирилган маълумотларга асосан аппроксимация функцияни топамиз.Масалан аппроксимация функцияси қуйидагича бўлсин.

$$i=\varphi(U)=0.1+1.03\cdot U+1.15\cdot U^2$$

Функция графигини Maple тилининг икки ўлчовли графикас ёрдамида чизамиз.

```
>plot(0.1+1.03*u+1.15*u^2,u=0..5,color=red);
```



Фойдаланилган адабиётлар рўйҳати

1. Б.Х.Хўжаёров. Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари. Тошкент, «Ўзбекистон». 1995 й.
2. Т.Х.Холматов,Н.И.Тойлоқов. Амалий математика, дастурлаш ва компьютернинг дастурий таъминоти. Тошкент. 2000 й.
3. М.И.Исроилов . Ҳисоблаш методлари.Ўзбекистон наширёти, Тошкент 2003й.
4. С.К.Рахмонов. Математик дастурлаш ва оптималлаш усуллари. Маърузалар матни . Фарғона , 2007 й.
5. Т.Дадажонов. Символли ва сонли компьютер матемиатикаси. Maple. Фарғона , 2005 й.
6. В.П.Дьяконов. Спрочник по алгоритам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. Москва, Наука , 1987г.
7. www.Lib_km.ru
8. www.izcity.com
9. www.softcraft.ru