ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Физика – математика факультети

“Математика” кафедраси

Хасанов Шерзод Рустамовичнинг

5130100 – математика таълим йўналиши бўйича

бакалавр даражасини олиш учун

«**Комплекс ўзгарувчили элементар функцияларни даражали қаторга ёйиш**»мавзусидаги

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Раҳбар: __________ Ж.С.Маматов

БМИ “Математика” кафедрасининг 2016 йил ______ №____ сонли йиғилишида кўриб чиқилди ва ҳимояга тавсия этилади.

Кафедра мудири __________ ф.-м.ф.н., доцент Ҳ. Норжигитов

Физика-математика факультети декани томонидан ҳимоя қилишга рухсат этилади.

Факультет декани __________ п.ф.н., доцент Ш. Аширов

Гулистон – 2016

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Битирув малакавий ишнинг долзарблиги. Ушбу битирув малакавий иш комплекс ўзгарувчили функцияларнинг голоморфлиги, уларни дифференциаллаш, интеграллаш ва убу амаллар ёрдамида айрим комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш усуллари ўрганилган.

Математиканинг ҳар бир бўлими ёки у арифметика, ёки у геометрия, ёки у анализ бўлмасин у ўрганадиган объектларни, қонуниятларни очувчи қатор методлар яратилган. Уларнинг баъзилари муайян масалалар учун махсус яратилган бўлса, айримлари умумматематик аҳамиятга эгадир. Ҳар бир фанни эгаллаш ундаги турли-туман фактларни, асосий қонуниятларни билиб олиш билан бирга шу фандаги тадқиқ қилиш методларини ўзлаштиришни ҳам тақазо қилади.

Ана шундай умумий характердаги методларни мукаммал эгаллаш математика фани соҳасида яхши мутахассис бўлишнинг, унинг ички сирларини англаб етишнинг зарурий шартидир.

Комплекс анализ фани ҳам математик анализ фани каби тахлилий фан бўлиб унда фақат комплекс сонлар тўпламида амаллар бажарилади. Бунда эса математик анализнинг тўлдирувчиси, жоиз бўлса унинг кенгайтмаси деб аташ мумкин.

Комплекс анализда функцияларни текшириш айрим ҳолларда математик анализнинг бир неча муҳим тариф ва теоремаларидан мукаммал фойдаланилади.

Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш орқали бу функцияни тўла очиб берилади. Унда тадқиқотчи функцияларнинг барча хоссаларини ўрганади ва хоссалар орқали функцияларнинг тадбиқлари мукаммал амалга оширилади.

Битирув малакавий ишнинг тадқиқот мақсади.Ҳар бир комплекс сонга текисликда тайин бир нуқтанинг мос келишлигидан фойдаланиб унинг геометрик маъноси аниқланади. Бунинг учун z-комплекс соннинг қийматларига тегишли нуқталарни (z) (комплекс сонлар текислиги) текисликка, $w=f(z)$ функциянинг қийматларига тегишли нуқталарни эса (w) (комплекс ўзгарувчили функциялар текислиги) текисликка жойлаймиз. У вақтда (z) текисликдаги бирор E тўпламдан олинган ҳар бир z нуқтага (w) текисликдаги бирор w нуқта мос келади. Натижада E тўпламнинг акси (w) текисликка тушиб бирор E_1 тўпламни ҳосил қилади.

Шундай қилиб, $w=f(z)$ функционал муносабат ёрдамида (z) текисликдаги E тўпламни (w) текисликдаги E_1 тўпламга кўчирар эканмиз. Бу эса E тўпламни E_1 тўпламга *акс эттириш (*ёки *акслантириш)* дейилади.

Битирув малакавий ишнинг тадқиқот объекти.Ҳар қандай даражали қаторни текширганимизда қуйидагича уч ҳол бўлиши мумкин:

1) Қатор фақат ўзининг марказида $(z=a)$ яқинлашади;
2) Қатор барча чекли z нуқталарда яқинлашади;
3) Қатор айрим нуқталарда яқинлашади, айрим нуқталарда эса узоқлашади.

Бундай уч ҳол ёрдамида қаторнинг яқинлашиш ва узоқлашиш нуқталарини топиш мумкин бўлади. Маълумки, агар қатор узоқлашувчи бўлса унинг йиғиндиси ҳақила гапириш маъносиздир.

Битирув малакавий ишнинг тадқиқот муаммоси.Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйишда унинг айрим талаблари бор ва функция шу қўйилган талабаларга тўла жавоб бериши керак бўлади. Функцияларни қаторларга ёйиш орқали айрим амалий мисолларни ҳал этишимиз мумкин. Масалан, ушбу $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ функцияни қарайлик. Равшанки бу функция $C\setminus\{z=0\}$ тўпламда голоморф бўлиб, $a=0$ нуқта унинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади. Чунки, $f(z)=\sin z$ функцияни даражали қаторга ёйсак, $\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+$....кўринишга келади. У ҳолда

$$\lim_{z\to 0}=\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\lim_{z\to 0}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...\right)=1$$

ҳосил бўлади. Демак $z=a$ нуқта берилган функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлади.

Шу каби муаммоларни бартараф этиш ишнинг тадқиқот муаммоси ҳисобланади.

Битирув малакавий ишнинг илмий фарази. $w=f(z)$ функцияларни даоражали қаторларга ёйилмаси орқали функцияларнинг назариядаги ҳамда амалий формулалардаги ноаниқликларни бартараф этишга кўмаклашишдир. Шу билан бирга бунда ўқувчида мантиқий ва математик тафаккурларини ривожлантириш, абстракт тасаввурларини кенгайтириш орқали илмийлик муҳитини шакллантиришдан иборат.

Битирув малакавий ишнинг вазифалари.Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш учун аввал функциянинг голоморфлиги текширилади, функция узлуксизлиги исботланади, унинг исталганча тартибли ҳосиласи мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ўрганилади. Ҳақиқий сонлар анализида ҳал этилмаган айрим мулоҳазалар тўлдирилади. Масалан, математик анализ курсидан маълумки,

$$1-x^2+x^4-x^6+....(*)$$

Қатор $|x|<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар учун яқинлашувчи бўлиб, унинг йиҳиндиси $\frac{1}{1+x^2}$ га тенг. Бу функция эса x ўзгарувчи $-\infty$дан $+\infty$ гпча ўзгарганда аниқланган.

Ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги (*) қаторнинг йиғиндиси барча x ларда аниқланган бўлишига қарамай, нима учун текширилаётган қатор $x\leq1$ ва $x\geq1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг қийматларида яқинлашувчи бўлмайди, деган саволга жавоб бера олмаймиз. Агарда юқоридаги қаторни комплекс соҳада текширсак, бу саволга дарҳол жавоб берамиз, чунки $\frac{1}{1+x^2}$ функция учун $z=\pm i$ махсус нуқталар бўлади, шунинг натижасида текширилаётган қаторнинг яқинлашиш радиуси 1 га тенг.

Битирув малакавий ишнинг янгилиги.Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш орқали уларнинг яқинлашиш соҳаси ва яқинлашиш радиусларини топиш усуллари очиб берилган.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$қатор $(z-a) < R$ доирада яқинлашиб, унинг ташқарисида узоқлашувчи бўлиб қолади. $|z-a| = R$ айлананинг ўзида эса қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши масаласи очиқ қолади. Мана шундай хусусиятга эга бўлган R сон қаторнинг *яқинлашиш радиуси*, $|z-a| < R$ доира эса *яқинлашиш доираси* деб аталади. Қатор коэффициентларидан қуйидаги сонлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$|c_1|,\ \left|\sqrt{c_2}\right|,\ \left|\sqrt[3]{c_3}\right|, ..., \left[\sqrt[n]{c_n}\right[, ...$$

Бу кетма-кетликнинг энг катта лимитини L орқали белгилаб оламиз, яъни $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Қаторнинг яқинлашиш раиуси $R = \frac{1}{L}$ формула билан аниқланади.

Битирув малакавий ишнинг аҳамияти. $f(z)$функция, $|z-a| = R$айлананинг барча нуқталарида аналитик бўлмас экан, яъни бу айланада функциянинг камида битта махсус нуқтаси бор. Бундан қуйилдаги хулоса келиб чиқади: a нуқтада аналитик бўлган $f(z)$ функция маркази a да ва чегараси aга энг яқин бўлган $f(z)$ функциянинг махсус нуқтасидаг ўтувчи доирада Тейлор қатори билан ифодаланади. Бу изоҳ $f(z)$ функция табиати билан бу функция ёйилган даражали қатор яқинлашиш радиуси ўртасидаги боғланишни очиб беради. У даражали қаторлар назарияси ўзининг тўла ифодасини фақат комплекс соҳада топишини кўрсатади.

Битирув малакавий ишнинг тузилиши. Битирув малакавий иш кириш, иккита боб, олтита параграф, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат.

Битирув малакавий ишнинг биринчи бобида комплекс ўзгарувчили функциялар ҳақида умумий тушунча берилган. Функцияларнинг ҳосилалари, уларни интеграллаш қоидалари ҳамда ундан келиб чиқадиган хулосалар баён этилган.

Иккинчи бобда комплекс ўзгарувчили функцияларни қаторларга ёйиш усуллари ҳамда айрим элементар функциялар қаторларга ёйиб кўрсатилган.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати 24 номдаги адабиётларни ўз ичига олади.

I-боб. КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ.

1.1§. КОШИ-РИМАН ШАРТИ. АНАЛИТИК ФУНКЦИЯ

С комплекс текисликда D тўплам берилган бўлсин.

Тариф 1.1. *Агар D тўпламда олинган ҳар бир $z = x + iy$ комплекс сонга бирор қонун ёки қоида ёрдамида аниқ бир комплекс сон мос келтирилса, у ҳолда Dтўпламда функция берилган дейилади ва $w = f(z)$ каби белгиланади. z га эркли ўзгарувчи ёка аргумент дейилади, w га эса эрксиз ўзгарувчи ёки функция дейилади.*

Dга функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.Агар аргументнинг ҳарбир қийматига, функциянинг бита қиймати мос келса, $w = f(z)$функция бир қийматли дейилади. Масалан $w = z$ $w = \frac{1}{z}$ бир қийматли функциялар, $w = \sqrt{z}$ икки қийматли функция.

Комплекс ўзгарувчили функциянинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Бунингучун $z = x + iy$ нинг қийматларига мос келувчи нуқталарни z текислиги деб, $w = u(x, y) + iv(x, y)$ $f(z)$ функциянинг z ўзгарувчи z_0 нуқтага интилгандаги лимити дейилади ва $\lim f(z) = A$ каби белгиланади. Тариф 1.1 га мос келувчи нуқталарни w текислиги деб оламиз. Шундай қилиб, $w = f(z)$ функционал муносабат ёрдамида z текисликдан D тўпламни оламиз ва w текисликдаги Г тўпламга акслантирамиз. Бу еса D тўпламни Г тўпламга акслантириш дейилади.

Теорема 1.1. *Агар* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *функция* $z\in D$ *нуқтада моноген бўлса,* $u(x,y)$, $v(x,y)$) *функцияларнинг хусусий ҳосилалари мавжуд бўлиб,*

$$\partial u \big/ \partial x = du \big/ dy, \quad \partial u/\partial y, \partial v/\partial y = -\partial v/\partial x \qquad (A)$$

тенгсизлик бажарилади.

Юқориридаги тенгламалар системасига Коши-Риман шарти дейилади.

Исботи. $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ Ҳосиланинг таърифига кўра

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}[(u(x+\Delta x,y)-u(x,y))/\Delta x+i(v(x+\Delta x,y)-v(x,y))/\Delta x]=$$
$$=\partial u/\partial x+i\partial v/\partial x$$

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta X=0}}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\,\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}\right]=\frac{\partial u}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

Бу тенгликларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун ўнг томонларини ҳам тенглаштирамиз. Натижада (A) келиб чиқади.

Таъриф 1.2. D *соҳада берилган бирқийматли* $w=f(z)$ *функция* $z\in D$ *нуқтада ва унинг атрофида дифференциалланувчи бўлса , бу функция* z *нуқтада аналитик (голоморф) дейилади.* D *соҳанинг ҳарбир нуқтасида аналитик бўлган функция шу соҳада аналитик дейилади.*

Коши – Риман шартининг бажарилиши функциянинг аналитик бўлишлиги учун етарлими деган савол туғилади. Бундай эмаслигини кўрсатувчи қуйидаги мисолни келтирамиз.

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

Бу функция фақат $z=0$ нуқтада ҳосилага эга бўлиб,бошқа нуқталарда ҳосилага эга эмас, таърифга кўра аналитик бўлмайди.

Теорема 1.2. $f(z)=u+iv$ *функциянинг* D *соҳада аналитик бўлишлиги учун*

$u(x,y),\ v(x,y)$ *функциялар дифференциалланувчи бўлиб. (А) шартининг бажарилиши зарурва етарли.*

Исботи. Зарурлиги теорема 1.1дан келиб чиқади.

Етарлилиги. $u(x,y),\ v(x,y)$ функциялар дифференциалланувчи бўлганлигидан:

$$\Delta г=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+\eta_1(x,y,\Delta x,\Delta y)$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\eta_2(x,y,\Delta x,\Delta y),$$

бунда η_1 ва η_2 лар $\left|\,|\Delta я|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right.$ ганисбатанюқоритартибличексизкичикмиқдорлар. (А) шартидан фойдаланамиз:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+\eta_1(x,y,\Delta x,\Delta y),$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y+\eta_2(x,y,\Delta x,\Delta y)$$

Ихтиёрий $z\in D$ нуқтада ҳосила мавжудлигини кўрсатамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x(\Delta x+i\Delta y)+v'_x(i\Delta x-\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta x + i\Delta y} = (u'_x + iv'_x) \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = u'_x + iv'_x = f'(z)$$

Чекли ҳосила мавжуд бўлганлиги учун $w = f(z)$ функция D соҳада аналитик бўлади. Агар $f(z)$ ва $g(z)$) функциялар аналитик бўлса. Уларнинг йиғиндиси, айирмаси,кўпайтмаси ва ҳам аналитик бўлади.

Аналитик функцияларнинг суперпозициялари ҳам аналитик бўлади.

1.2.§ КОМПЛЕКС ТЕКИСЛИКДА ИНТЕГРАЛНИНГ ТАЪРИФИ

С комплекс текисликда тўғриланувчи Г Жордан чизиғини оламиз.Г нинг бошланғич нуқтаси α охирги нуқтаси β бўлиб, α дан β га йўналган бўлсин.

$f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ функция Γ да берилган ва узликсиз бўлсин. Γ да кетма-кет келган $z_k = x_k + y_k \ k=1,2....n$ нуқталарни оламиз. қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$s=\sum_{k=0}^{n} f\,(\varsigma_k)\Delta z_k \qquad (1.2)$$

бу ерда $\varsigma_k = \xi_k + i\eta_k \in z_k z_{k+1} \subset \Gamma, \Delta z_k = z_{k+1} - z_{k,} z_0 = \alpha, z_{n+1} = \beta$

қуйидагича йиғиндининг ёзамиз:

$$s = s_1 +$$

$$+is_2 = \sum_{k=0}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=0}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,$$

$$\lambda = \frac{\max}{k}|\Delta z_k|.$$

Эгри чизиқли интеграл таърифига кўра:

$$\lim_{\lambda\to 0} s_1 = \int_\Gamma u(x,y)dy - v(x,y)dx, \quad \lim_{\lambda\to 0} s_2 = \int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

Г эгри чизиқ силлиқ ва $f(z)$ функция узликсиз бўлганлиги учун

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx \qquad (1.2)$$

Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{\Gamma^-} f(z)dz$

Буерда «-« интеграллаш тескари йўналишда эканлигини кўрсатади.

2.Агар $f_k(z), k=1,2,...\mathrm{n}, \ \Gamma$ да узликсиз функция бўлиб, $c_{k,} k=1,2,...,\mathrm{n}$ ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\Gamma}\sum_{л=1}^{n} c_k f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz \qquad (1.3)$$

3.Агар тўғриланувчи Γ чизиғи $\Gamma_1, \Gamma_2,...,\Gamma_\mathrm{n}$ қисмлардан иборат бўлса,у ҳолда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz$$

4.Агар $f(z)$ узлуксиз бўлси, $|f(z)|$ интегралланувчи бўлади ва

$$/\int\limits_{\Gamma} f(z)dz| \le \int\limits_{\Gamma}|f(z)||dz| \le \max_{z\in\Gamma}|f(z)|l$$

тенгсизлик бажарилади. Бунда, l , Γ эгри чизиқнинг узунлиги.

5.Агар $\{f_k(z)\}$ узликсиз функциялар кетма-кетлиги $f(z)$ функцияга текис яқинлашса, $f(z)$ интегралланувчи ва қуйидаги лимит мавжуд

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz$$

6. Γ егри чизиқ $z=z(\iota), \iota\in[\alpha,\beta]$ параметрик тенглама билан берилган бўлиб, $f(z)$ функция Γ да узликсиз бўлсин, уҳолда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(\iota)]z'(\iota)d\iota$$

Мисол1. Γ эгри чизиқ айлана, $\iota \in [0,2\pi]$, $f(z) = (z-a)^n, n \in Z$, функциядан олинган интегрални хисобланг.

Ечиш. $\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\iota} d\iota, n \neq -1,$ бўлсин.

$$\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} i \{ \int\limits_0^{2\pi} \cos(n+1)\iota d\iota + i \int\limits_0^{2\pi} \sin(n=1)\iota d\iota \} = 0,$$

$n = -1$ бўлсин,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(re^{i\iota})}{re^{i\iota}} = i \int\limits_0^{2\pi} \frac{re^{i\iota} d\iota}{re^{i\iota}} = i \int\limits_0^{2\pi} d\iota = 2\pi i$$

Демак $\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = \{0, n \neq -1, 2\pi i, n = -1\}$

II–боб. КОМПЛЕКС ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР.

2.1 §. СОНЛИ ҚАТОРЛАР.

Ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган қаторлар математик анализ курсида ўрганилади. Ҳадлари комплекс сонлардан тузилган ушбу

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \quad (2.1)$$

кўринишидаги қаторлар *комплекс ҳадли қаторлар* дейилади. Бу қатордаги ҳар бир $z_n = x_n + iy_n$ ҳад комплекс сондан иборат бўлиб, x_n ва y_n лар ҳақиқий сонлардир.

(2.1) қаторнинг хусусий йиғиндиларини тузамиз:

$$\begin{aligned} &s_1 = z_1, \\ &s_2 = z_1 + z_2, \\ &s_3 = z_1 + z_2 + z_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Мана шу ҳусусий йиғиндиларнинг

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n, \ldots$$

Кетма-кетлигига асосланиб (2.1) қаторнинг яқинлашишига таъриф бериш мумкин.

Таъриф. *Агар* n *чексизликка интилганида (2.2) кетма-кетлик бирор чекли* s *лимитга интилса, яъни (2.2) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2.1) қатор яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.*

Демак, таърифга кўра,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

($s-$аниқ сон) бўлганда (2.1) қатор яқинлашувчи бўлиб, s сон қаторнинг йиғиндиси дейилади:

$$s = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

Агар (2.2) кетма-кетлик ∞ га интилса ёки ҳеч қандай лимитга интилмаса, (2.1) қатор узоқлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси ҳақида сўзлаш маъносиздир.

Энди s_n йиғинидини бошқача кўринишга келтириб ёзамиз:

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots (x_n + iy_n) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \alpha_n + i\beta_n .$$

бунда

$$\alpha_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$\beta_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Шу сабабли (2.1) дан қуйидаги қаторлар келиб чиқади:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \qquad (2.3)$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots \qquad (2.4)$$

Буларнинг ҳусусий йиғиндиларидан мос равишда ушбу кетма-кетликларни ҳосил қилиш мумкин:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n, \ldots, \qquad (2.5)$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n, \ldots, \qquad (2.6)$$

Юқоридаги таърифга кўра, агар

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \text{ ва } \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \qquad (2.7)$$

($\alpha,\ \beta -$аниқ сонлар) бўлса, (2.3) ва (2.4) қаторларнинг иккаласи ҳам яқинлашувчи бўлади.

Теорема. *Агар ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган (2.3) ва (2.4) қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда комплекс* *сонлардан тузилган (2.1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.*

Исбот. Фараз қилайлик, (2.3) ва (2.4) қаторларнинг иккаласи ҳам яқинлашувчи, яъни (2.7) лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолдалимитларнинг хоссасига кўра:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + i\beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + i\lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha + i\beta = s,$$

бунда $s = \alpha + i\beta$ аниқ сон бўлгани учун, таърифга кўра яқинлашувчидир. Аксинча s аниқ сон бўлса, α ва β ҳам аниқ сон бўлади.

Мана шу теоремага асосан, агар (2.1) қаторнинг яқинлашишини текширмоқчи бўлсак, унинг ўрнига (2.3) ва (2.4) қаторларнинг яқинлашишини текшириш кифоя. Сўнгги қаторларнинг ҳадлари ҳақиқий сонлар бўлганлиги учун уларнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши математик анализ курсидакўрсатилган аломатлар билан текширилади.

Энди (2.1) қатор ҳадларининг модулларидан қуйидаги қаторларни тузамиз:

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + \|z_n\| + \ldots \qquad (2.8)$$

бунда $|z_n| = |x_n + i|y_n\| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$

агар (2.8) қатор яқинлашса (2.1) қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Агар (2.1) қатор яқинлашувчи, лекин (2.8) қатор узоқлашувчи бўлса, (2.1) қатор *шартли яқинлашувчи* қатор дейилади.

2.1-мисол. Ушбу $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots.$ қаторни яқинлашувчи ёки узоқлашувчанликка текширинг.

Ечиш. Қаторнинг ҳусуий йиғндисини тузамиз:

$$s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^n}{1-a}.$$

Бу қаторда $a -$ ҳар қандай комплекс сон.

Агар $|a| < 1$ бўлса, $|a^n| = |a|^n$ сон n катталашиши билан нолга интилади, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0.$ Аксинча, агар $|a| > 1$ бўлса, a^n чексизликка интилади. Демак,

$$|a| < 1 \text{ бўлганда } \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-a} = s,$$

$$|a| > 1 \text{ бўлганда } \lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

Яъни биринчи ҳолда қатор абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси $s = \dfrac{1}{1-a}$ дан иборат бўлиб, иккинчи ҳолда қатор узоқлашувчидир.

Агар $|a| = 1$ бўлса, қатор яна узоқлашувчи бўлади, чунки s_n аниқ сонга интилмайди.

2.2-мисол. Ушбу

$$(1-i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}i\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}i\right) + \ldots.$$

қаторнингн яқинлашиши текширилсин, бунда $n = 0,1,2,\ldots$

дастлаб қаторнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларидаг тузилган қаторларни ёзиб оламиз:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \ldots \frac{1}{3^n} - \ldots$$

Буларнинг ҳар бири геометрик прогрессия бўлиб, махражи $|q|<1$ дан иборатдир. Шу сабабли мос қаторларнинг йиғиндилари қуйидагича бўлади:

$$\alpha=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \text{ ва } \beta=\frac{-1}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}.$$

Демак қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$s=\alpha+i\beta=2-\frac{3}{2}i$$

га тенг бўлади.

Энди бу қаторнинг абсолбт яқинлашишини текшириб кўрамиз:

$$\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(-\frac{1}{3^n}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}}<\sqrt{\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

яъни

$$\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}i\right|<\frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

бўлиб, ўнг томондаги сон

$$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$

яқинлашувч қаторнинг умумий ҳадидир. Демак, берилган қатор абсолют яқнлашувчи ҳам экан.

2.2§.ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

Ҳадлари ўзгармас комплокс сонлардан иборат бўлган сонли қаторлар ҳақида юқорида баён этдик. Энди ҳар бир ҳади бирор соҳада аниқланган комплекс ўзгарувчили функциядан иборат бўлган функционал қаторлар билан танишамиз.

Фараз қилайлик бирор тўпламда

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

Функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \quad (2.9)$$

ифода функционал қатор дейилади ва унинг йиғиндиси $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \quad (2.10)$$

Бу функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларини тузамиз.

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1(z), \\ s_2 &= f_1(z)+f_2(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_n &= f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

Таъриф 2.2. *Агар* $n \to \infty$ *да* $\{S_n(z)\}$ *функционал кетма-кетлик бирор тўпламда яқинлашувчи бўлиб,* $\lim_{n\to\infty} S_n(z)=s(z)$ *бўлса у ҳолда (2.10) функционал қатор шу тўпламда яқинлашувчи,* $s(z)$ *эса унинг йиғиндиси дейилади.*

Агар G соҳага тегишли бирор z_0 ўзгармас сонни (2.9) га қўйганда ҳосил бўлган ушбу

$$f_1(z_0)+f_2(z_0)+\ldots+f_n(z_0)+\ldots$$

Сонли қатор яқинлашувчи бўлса, ҳолда берилган (2.10) функционал қатор ҳам $z=z_0$ нуқтада яқинлашувчи дейилади.

Таъриф. *(Вейерштрасс аломати). Агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(z)$ $(n=1,2,3,\ldots)$*ҳади* M *тўпламда* $(M \subset C_z)$

$$|f_n(z)| \le a_n$$

тенгсизликни қаноатлантириб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолода $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$*функционал қатор* M *тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.*

Функционал қаторни интеграллаш.

Ушбу $f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$(1)функциональ қаторнинг ҳар бир ҳади G соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, қаторнинг ўзи эса шу соҳада текис яқинлашувич бўлсин дейлик. У ҳолда бу қаторнинг

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

йиғиндиси ҳам Gда узлуксиз бўлади. Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема 2.2.*Агар (2.9) қаторнинг ҳар бир ҳади* G *соҳада узлуксиз ва қаторнинг ўзи шу соҳада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* G *соҳада ётувчи ҳар қандай* Γ *чизиқ бўйлаб қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz + \ldots \quad (2.11)$$

Бу интеграл формулани (2.10) га муфовиқ қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma}[f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots]dz =$$
$$= \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz + \ldots$$

Теоремада икки шарт қўйилган бўлиб, уардан бири, қатор ҳадларининг G соҳада узлуксиз бўлиши ва иккинчиси, қаторнинг текис яқинлашишидир. Бу шартлардан бирортаси бажарилмай қолса, у ҳолда теорема умуман ўринли бўлмайди, яъни (2.9) даги $f(z)$дан бирор контур бўйича олинган интеграл ўнг томондаги ҳар бир ҳаддан олинган интеграллар йиғиндисига тенг тенг бўлавермайди.

Исбот. (2.9) қаторнинг ҳусусий йиғиндисини олайлик

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

ва бу қаторнинг қолдиқ ҳадини $R_n(z)$ оқали белгилаймиз. Теорема шартиги кўра қаторти текис яқинлашувчи бўлганлиги учун ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай мусбат $N(\varepsilon)$сонни топиш мумкинки, бунда $n \geq N(\varepsilon)$ бўлганда $|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ бўлади. Энди Γ чизиқнинг узунлигини l орқали белгиласак, интегралнинг хоссаларига кўра

$\left|\int_{\Gamma}[f(z)-s_n(z)]dz\right| = \left|\int_{\Gamma} R_n(z)dz\right| < \varepsilon l$ тенгсизликка эга бўламиз.Бунинг маъноси, $n \to \infty$ ҳолда, тенгсизлик чап томонининг лимити нолга тенг демакдир:

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma} S_n(z)dz \right\| = 0.$$

Лекин биринчи интегралла n иштирок этмайди, шунинг учун

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma} S_n(z)dz = \lim_{n\to\infty}\left[\int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz\right] =$$
$$= \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz + \ldots.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Функционал қаторни дифференциаллаш.

Теорема 2.3. *Агар бирор G соҳада аналитик функциялардан тиузилган*

$$f_1(z_0) + f_2(z_0) + \ldots + f_n(z_0) + \ldots (2.12)$$

қатор G да тўла ётувчи ихтиёрий ёпиқ G_1 соҳада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда:

1) қаторнинг йиғиндиси $f(z)$ G да аналитик функция бўлади

2) қаторни исталган марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots \text{(2.13)}$$

3) дифференциаллашдан ҳосил бўлган барча қаторлар G_1 соҳада текис яқинлашувчи бўлади.

Исботи. (2.9) қаторнинг ҳадлари G да аналитик (демак узлуксиз) функциялар бўлиб, қатор G_1 да текис яқинлашувчи бўлгани учун унинг йиғиндиси $f(z)$ функция G га нисбатан ички бўлган ихтиёрий ёпиқ G_1 соҳада узлуксиз, демак барча G да узлуксиз бўлади. Энди $f(z)$ нинг Gда аналитиклигини кўрсатамиз. Gнинг ихтиёрий нуқтаси z бўлсин. G_1 нинг чегарасани Γ_1 билан белгилаб оламиз. G_1 соҳа G га тегишли ихтиёрий соҳа бўлганлиги учун уни z нуқтани ўз ичига оладиган қилиб танлашимиз мумкин. Γ_1нинг ихтиёрий нуқтаси ζ бўлсин ($\zeta - z \neq 0$).

Ушбу

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots$$

қатор Γ_1 да текис яқинлашувчи бўлади, шунинг учун уни ҳадлаб интеграллаш мумкин: $\frac{1}{2\pi i}$ га кўпайтириб, Γ_1 бўйлаб интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \ldots$$

$f_n(z)$ функциялар G да аналитик бўлгани учун ўнг томондаги ҳар бир интегралга Кошининг интеграл формуласини татбиқ этса, ушбу

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = f(z)$$

тенглик ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $f(z)$ функция Γ_1 да узлуксиз бўлиб, $f(z)$ Коши типидаги интеграл орқали ифода қилингани учун z нуқтада аналитик функциядир.

2.3§.ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

Функционал қаторнинг ҳусусий ҳоли бўлмиш даражали қатоpалр тажрибада кўп ишлатилади. $z-a$ айирмага нисбатан ушбу кўринишга эга бўлган

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \quad (2.14)$$

ёки

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... + c_n(z-a)^n + ... \quad (2.15)$$

қаторлар *даражали қаторлар* дейилади. Бу қаторда қатнашаётган $a = \alpha + i\beta$ ва $c_n = \sigma + i\tau_n$ комплекс сонлардир. $c_0,\ c_1,\ ...,\ c_n, ...$ комплекс сонлар даражали қаторнинг коэффициентлари дейилади. Агар (2.15) қаторда $z - a = \xi$ ёки $a = 0$ бўлса у ҳолда (2.15) қатор (2.14) қатор кўринишига келади. Бинобарин (2.14) кўринишидаги қаторни ўрганиш етарли бўлиб қолади.

Даражали қаторнинг яқинлашишига доир Абельнинг муҳим теоремасини келтирамиз.

Теорема (Абель теоремаси). *Агар (2.14) даражали қатор* z_0 *нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор* $|z-a| < |z_0 - a|$ *доиранинг ҳамма нуқталарида абсолют яқинлашади. Шунингдек, у ҳар қанда й ёпиқ* $|z-a| \le r$ *доирада ҳам текис яқинлашади, бунда* $r < |z_0 - a|$.

Исбот. Теореманинг шартига мувофиқ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Сонли қатор яқинлашувчи бўлгани учун унинг умумий ҳади нолга интилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} c_n (z_0 - a)^n = 0$$

Ва демак, барча n лар учун

$$\left| c_n (z_0 - a)^n \right| \le M.$$

Фараз қилайлик, z ушбу

$$|z - a| \le r, \ \ (r < |z_0 - a|)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда мана шу тенгсизликка ва (2.14) нинг умумий ҳадига асосланиб қуйидагини ёза оламиз:

$$\left| c_m (z - a)^n \right| = \left| c_n (z_0 - a)^n \right| \cdot \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \le M \left(\frac{r}{|z_0 - a|} \right)^n = Mq^n, \quad (2.16)$$

бунда $q = \dfrac{r}{|z_0 - a|} < 1$ бўлганлигидан ушбу

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$$

чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган қатор яқинлашувчи. У ҳолда (2.16) га асосан, (2.14) қатор ушбу

$$|z-a| \le r$$

доирада текис яқинлашувчи бўлади. Энди r ни $|z_0-a|$ га нисбатан яқинлаштириш мумкин бўлгани учун (2.14) қатор

$$|z-a| < |z_0-a|$$

доирада яқинлашувчи бўлади. Шу сабабли Абель теоремаси исбот бўлди.

Сўнгги тенгсизликнинг геометрик маъноси шундан иборатки, бу тенгсизлик маркази a нуқтада ва z_0 нуқтадан ўтувчи доирани ифодалаб, z лар унинг ички нуқталаридир, $|z-a| \le r$ эса ўша доира ичидаги a марказли ихтиёрий доирадир. Демак, мана шу ички доираларда (2.14) қатор текис ва абсолют яқинлашади, лекин катта доира ичида эса фақат абсолют яқинлашади. Агар $a=0$ бўлса, доира маркази координаталар бошида бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий (2.14) даражали қаторни текширганимизда уч ҳол бўлиши мумкин:

4) Қатор фақат ўзининг марказида $(z=a)$ яқинлашади;
5) Қатор барча чекли z нуқталарда яқинлашади;
6) Қатор айрим нуқталарда яқинлашади, айрим нуқталарда эса узоқлашади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш доираси ва радиуси. Коши-Адамар формуласи.

Даражали қатор айрим нуқталарда яқинлашиши ва айрим нуқталарда узоқлашиши мумкин бўлган ҳолда даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси ва яқинлашиш радиусини топиш масаласи билан шуғулланамиз. Бунинг учун (2.14) қатор z_1 нуқтада яқинлашувчи ва z_2 нуқтада узоқлашувчи бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, Абель теоремасига кўра, $|z-a|<|z_1-a|=R_1$ доира ичида қатор яқинлашувчи ва $\|z-a\|>|z_2-a|=R_2$ доира ташқарисида узоқлашади $(R_1<R_2)$. Қаторнинг ҳалқада яқинлашиши ёки узоқлашиши мавҳумдир.

Агар $R_1=R_2=R$ бўлса, $|z-a|<R$ доира ичида қатор яқинлашиб, ташқарисида узоқлашади. Агар $R_1 \neq R_2$ бўлса, $\frac{R_1+R_2}{2}=R_3$ деб белгилаймиз. Абель теоремасига мувофиқ, $|z-a|=R_3$ айлананинг бирор z_3 нуқтасида (2.14) қатор яқинлашса, $|z-a|<R_3$ доира ичида ҳам яқинлашади. Аксинча, агар z_3 нуқтада узоқлашса, $|z-a|>R_3$ да ҳам узоқлашади. Шу билан биз R_1 ва R_2 радиусли доиралар орасидаги ҳалқани торайтира борамиз. (расм 2.1)

Фараз қилайлик, $|z-a|<R_3$ доирада (2.14) қатор яқинлашувчи бўлсин. У вақтда

$$\frac{R_2+R_3}{2}=R_4$$

деб юқоридаги мулоҳазани такрорлаймиз. Шу хилда чексиз давом этилса, шундай R сонга эга бўламизки (бунда Rнинг мавжудлиги бир-бирига жойлашган кесмалар ҳақидаги леммадан келиб чиқади), натижада (2.14) қатор $(z-a)<R$ доирада яқинлашиб, унинг ташқарисида узоқлашувчи бўлиб қолади. $|z-a|=R$ айлананинг ўзида эса қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши масаласи очиқ қолади. Мана шундай хусусиятга эга бўлган R сон (2.14) қаторнинг *яқинлашиш радиуси*, $|z-a|<R$ доира эса *яқинлашиш доираси* деб аталади.

(2.14) қатор коэффициентларидан қуйидаги сонлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$|c_1|,\ |\sqrt{c_2}|,\ |\sqrt[3]{c_3}|,\dots,\left[\sqrt[n]{c_n}\right[,\dots\dots(2.17)$$

Бу кетма-кетликнинг энг катта лимитини L орқали белгилаб оламиз, яъни

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \qquad (2.18)$$

(2.14) қаторнинг яқинлашиш раиуси $R=\dfrac{1}{L}$ формула билан аниқланади. Бу формула Коши-Адамар формуласи дейилади.

Мисол. Ушбу $z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^3}+...+\frac{z^n}{n^n}+....$ қаторнинг яқинлашиш радиуси топилсин.

Ечими. Бунда қаторнинг умумий ҳади $c_n=\frac{1}{n^n}$ га тенг бўлиб, (2.18) формулага кўра $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0$. Демак, $R=\infty$, яъни қатор текисликнинг ҳамма чекли нуқталарида яқинлашади.

III - боб. ТЕЙЛОР ҚАТОРИ.

3.1§.Тейлор қатори

Ушбу $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + \mathrm{c_n}(z - z_0)^n + ...$ (3.1) даражали қаторнинг яқинлашиш $R > 0$ бўлсин дейлик. Абель теоремасига кўра бу қатор R`радиусли $(R`< R)$ ҳар қандай доирада текис яқинлашувчидир. Қаторнинг ҳар бир ҳади чекли текисликда, жумладан юқорида айтилган доирада аналитик бўлгани учун Вейерштрасс теоремасига мувофиқ қатор йиғиндиси

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + \mathrm{c_n}(z - z_0)^n + ... \quad (3.2)$$

Шу доирада аналитик бўлади ҳамда (3.2) дан исталганча ҳосила олиш мумкин бўлиб, ҳосилавий қаторлар $|z - a| \le R`$ доирада текис яқинлашади.

$$f'(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + \mathrm{c_n}(z - z_0)^n + ...$$

$$f''(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + \mathrm{c_n}(z - z_0)^n + ...$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + \mathrm{c_n}(z - z_0)^n + ...$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Булардаги $z = x + iy -$яқинлашиш доираси ичидаги ихтиёрий нуқтадир. Хусусий ҳолда $z = a$ доира марказидан иборат бўлиб, сўнгги тенгликка кўра

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2!c_2, ..., \; f^{(k)}(a) = k!c_k, ...$$

ёки

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \; c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots$$

формулалар келиб чиқади. Мана шу қийматларни (2.2) тенгликка қўйсак,

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \text{(3.3)}$$

ҳосил бўлиб, бу қатор $f(z)$ функциянинг *Тейлор қатори* деб аталади. $c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \; c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots$ сонлар эса *Тейлор коэффициентлари дейилади.* Демак ҳар қанда мусбат даражали қаторни Тейлор қаторига айлантириш мумкин. Шу билан бирга қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.1. *Даражали* $c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$*қатор йиғиндиси яқинлашиш доираси ичида аналитик функциядан иборат бўлиб, бу қатор ўз йиғиндисининг Тейлор қаторидир.*

Функцияни Тейлор қаторига ёйиш.

Юқорида ҳар қандай мусбат даражали қаторни Тейлор қаторига ёйишни кўриб чиқдик. Энди берилган функцияни даражали қаторга яъни Тейлор қаторига ёйишни ўрганамиз. Бунинг учун ўша функция малум бир шартга бўйсуниши керак.

$f(z)$ функция, K айлана билан чегараланган $|z-a| < R$ доира ичида аналитик бўлсин деб фараз қиламиз. Мана шу K айлана ичидиги ихтиёрий нуқтани z билан белгилаб, маркази a нуқтага жойлашган R`радиусли $(R` < R)$ бир янги C айлана чизийликки, z нуқта шу айлана ичида қолсин.(чизма 3.1)

Берилган $f(z)$ функция C айланада ва унинг ичидаги доирада аналитик бўлгани учун Кошининг формуласи ўринлидир:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

Бунда ζ нуқта C айлана устидаги ихтиёрий нуқта, z эса C ичидаги нуқтадир.

Қўйиладиган масала мана шу $f(z)$ аналитик функцияни $x-a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйишдан иборат. Равшвнки,

$$\frac{1}{\zeta - z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)}. \quad (3.4)$$

Энди чизмадан:

$$|z-a|<|\zeta-a|, \text{ демак, } q=\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1.$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n+\ldots. \quad (3.5)$$

бўлиб, уни (3.4) га қўйсак, ушбу

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta - a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots \quad (3.6)$$

C ичидаги ёпиқ доирада абсолют ва текис яқинлашувчи қаторга эга бўламиз. Бу қаторнинг икки томонини $f(\zeta)$ аналитик функцияга кўпайтирилса ҳам у текис яқинлашувчи бўлиб қолаверади, чунки $|f(\zeta)|$

чеклидир. Шу сабабли уни ҳадлаб интеграллай оламиз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} + (z-a)\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^2} + (z-a)^2\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \ldots$$

$$\ldots + (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots.$$

тенгликнинг чап томони Коши формуласига асосан $f(z)$га тенг ва ўнг томонидаги интегралларни эса $f(z)$ нинг a нуқтадаги мос ҳосилалари билан алмаштирилса,

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \quad (3.7)$$

Тейлор қатори ҳосил бўлади. Демак, Тейлор қатори коэффициентлари $c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ldots.$

га асосан,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (3.8)$$

Тейлор коэффициентларини ҳисоблаш интеграл формулаларига эга бўлдик.

Хусусий ҳолда, $a = 0$ бўлиб (3.4) га асосан

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)z^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+....(3.9)$$

Тейлор қаторининг коэффициентлари интеграллар ёрдамида ҳам ҳисобланади. Тейлор қаторининг яҳинлашиш доирасининг маркази z_0нуқтада бўлсин ва z нуқта шу доира ичида ётсин, у ҳолда Коши интегралига асосан

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z} \qquad (3.10)$$

БундаC яқинлашиш доирасининг чегараси. (3.10) ни n марта кетма-кет дифференциаллаймиз ва $z=z_0$ деб оламиз:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z_0},\ f^{(n)}(z_0)=\frac{n|}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

формулаларга кўра қуйидагиларни топамиз:

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z_0},c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}},n=1,2,,,,$$

Юқорида кўрдикки ҳар қандай аналитик функцияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин, бу тасдиқнинг тескариси ҳам мавжуд.

Теорема3.2.(Тейлор.) D соҳада аналитик бўлган $f(z)$ функцияни шу соҳанинг ҳарбир нуқтаси атрофида Тейлор қаторига ёйиш мумкин.

Исбот. z_0 D соҳада ётувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, γ эса z_0 ни сақловчи радиусиd гатенгбўлганайлана.Кошинингинтегралформуласигакўра

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}\qquad(3.11)$$

Ихтиёрий z учун $|z-z\quad|\prec d$ бўлганидан $|\frac{z-z_0}{t-z_0}|=\delta\prec 1,\ t\in\gamma$

интегралтагидагикасргеометрикқаторнингйиғиндисидир:

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{z-z_0}{t-z_0})^k$$

Буни (3.11) формулага қўямиз

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{f(t)}{t-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{t-z_0})^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k\qquad(3.12)$$

Буерда

$$c_л=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1,}},k=0,1,2,\ldots.\qquad(3.13)$$

Демак аналитик функция аниқланиш соҳасининг ихтиёрий нуқтаси атрофида(3.12) қаторга ёйилади ва унинг коеффициенти (3.13) формула ёрдамида ҳисобланади. Теорема исботланди.

(3.8)даражали қаторнинг $s(z)$йиғиндиси $|z-z_0|\prec R$, доирада чегараланган бўлсин. яъни

$$|S(z)|\prec M,M-\text{мусбат сон}\qquad(3.14)$$

(3.13) га асосан Тейлор қаторининг коеффициентлари қуйидагича ҳисобланади:

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}\qquad(3.15)$$

буерда $\gamma\,|\,t-z_0\,|\prec\delta,\ \delta\prec R$ доиранинг чегараси.

(3.14) дан фойдаланиб. (3.15) ни баҳолаймиз

$$|\,c_k\,|\leq -\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}}M=\frac{M}{\delta^k}$$

$\delta\to R$ да лимитга ўтамиз ва қуйидаги Коши тенгсизлигига келамиз.

$$|\,c_k\,|\leq\frac{M}{R^k} \tag{3.16}$$

Теорема3.3.(Лиувилл)Агар $f(z)$ функция $\overline{C}$ кенгайтирилган комплекс текисликда аналитик ва чегараланган бўлса, у ўзгармас бўлади.

Исбот. $f(z)$ функция $\overline{C}$ текисликда аналитик бўлганлиги учун (3.10) тенгсизликдан $R\to\infty$ да лимитга ўтамиз. Натижада $c_k=0, k=1,2,,,,$

Демак, $f(z)=c_0$ -ўзгармас. Теорема исботланди.

Теорема3.4.(Морера) Агар $f(z)$ функция D соҳада узлуксиз бўлиб, шу сиҳада тўла жойлашган Г ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлса , $f(z)$ функция аналитик бўлади.

Исбот.Теореманинг шарти Коши теоремасини ифодалайди шунинг учун

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

интеграл интеграллаш йўлига боғлиқэмас ва $F'(z)=f(z)$ тенглик бажарилади.

Чап томондаги функция аналитик бўлганлиги учун ўнг томондаги ҳам аналитик бўлади. Теорема исботланди.

Тариф3.1.Агар $f(z)$ функция z_0 нуқта атрофида яқинлашувчи даражали қаторга ёйилган бўлса, голоморф функция дейилади.

Теорема3.4. $f(z)$ функцияниг z нуқтада аналитиклик ва голоморфлик таърифлари эквивалентдир.

Исбот. $f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф бўлсин , у ҳолда бу функция таърифга кўра яқинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндиси бўлади, шунинг учун у аналитик бўлади.

$f(z)$ функция z_0 нуқтада аналитик бўлсин, уни яқинлашувчи даражали қаторга ёйиш мумкин бўлади. Демак $f(z)$ функция z нуқтада голоморф.

Теорема исботланди.

Теорема3.5.*Берилган* a *нуқтада аналитик бўлган ҳар қандай* $f(z)$ *функцияни шу нуқтанинг бирор атрофида* $(z-a)$ *нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйиш мумкин. Бу қатор* $f(z)$*аналитик бўлган* $|z-a|<R$ *доирада яқинлашувчидир.*

Изоҳ. $f(z)$ функция $|z-a|=R$айлананинг барча нуқталарида аналитик бўлиши мумкин эмас. Ҳақиқатна, акс ҳолда бу айлананинг ҳар бир ζ нуқтаси учун $|z-\zeta|<r_\zeta$доира мавжуд бўлиб, $f(z)$ бу доирада аналитик бўлади. r радиус r_ζрадиусларнинг энг кичиги бўлсин. У ҳолда равшанки, $f(z)$ функция $|z-a|<R+r$

доирада ҳам аналитик бўлади, демак аввалги теоремага асосан, $f(z)$ функция Тейлор қаторининг яқинлашиш радиуси ҳам $R+r$ га тенг бўлиши керак. Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки шарт бўйича у радиус R га тенг экан. Шундай қилиб, $|z-a|=R$ айлананинг барча нуқталарида $f(z)$ функция аналитик бўлмас экан, яъни бу айланада функциянинг камида битта махсус нуқтаси бор. Бундан қуйилдаги хулоса келиб чиқади: a нуқтада аналитик бўлган $f(z)$ функция маркази a да ва чегараси a га энг яқин бўлган $f(z)$ функциянинг махсус нуқтасидаг ўтувчи доирада Тейлор қатори билан ифодаланади. Бу изоҳ $f(z)$ функция табиати билан бу функция ёйилган даражали қатор яқинлашиш радиуси ўртасидаги боғланишни очиб беради. У даражали қаторлар назарияси ўзининг тўла ифодасини фақат комплекс соҳада топишини кўрсатади.

Масалан, математик анализ курсидан маълумки,

$$1-x^2+x^4-x^6+....(*)$$

Қатор $|x|<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар учун яқинлашувчи бўлиб, унинг йиҳиндиси $\frac{1}{1+x^2}$ га тенг. Бу функция эса x ўзгарувчи $-\infty$дан $+\infty$ гпча ўзгарганда аниқланган.

Ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги (*) қаторнинг йиғиндиси барча x ларда аниқланган бўлишига қарамай, нима учун текширилаётган қатор $x \le 1$ ва $x \ge 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг қийматларида яқинлашувчи бўлмайди, деган саволга жавоб бера олмаймиз. Агарда юқоридаги қаторни комплекс соҳада текширсак, бу саволга дарҳол жавоб берамиз, чунки $\frac{1}{1+x^2}$ функция учун $z = \pm i$ махсус нуқталар бўлади, шунинг натижасида текширилаётган қаторнинг яқинлашиш радиуси 1 га тенг.

Одатда $f(z)$ функция a нуқта атрофида $(z-a)$нинг даражалари бўйича қаторга ёйилса, уни a нуқтада *голоморф функция* дейилади. Демак, $f(z)$ функциянинг a нуқтадаги голоморфлиги билан аналитиклиги ўзаро эквивалент тушунчалардир.

3.2§.Элементар функцияларни даражали қаторларга ёйиш.

Маълумки, e^z, $\sin z$, $\cos z$ функциялар текисликнинг ҳар қандай чекли G қисмимда аналитик бўлгани учун маркази ноль нуқтада ётувчи ҳар қанда й C айлана ичида ҳам аналитик бўлиб, қаторга ёйиш мумкин.

Мисол 1. $f(z)=e^z$ функцияни Тейлор қаторига ёйинг.

$$f'(z)=\left(e^z\right)'=e^z,$$

Ечими. $f''(z)=e^z,\ldots,$

$$f^{(n)}(z)=e^z,\ldots$$

бу ҳосилаларни $z=0$ даги қийматларини топамиз:

$$f(0)=1,$$
$$f'(0)=1,$$
$$f''(0)=1,\ldots,$$
$$f^{(n)}(0)=1,\ldots$$

бўлганлиги сабабли (3.9) га асосан:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots.$$

Мисол. $f(z)=\sin z$ функцияни даражали қаторга ёйинг.

$$f'(z)=\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right),$$

Ечими. $f''(z)=-\sin z=\sin(\pi+z),\ldots,$

$$f^{(n)}(z)=\sin\left(\frac{\pi n}{2}+z\right),\ldots$$

бўлгани учун

$$f(0)=\sin 0=0,$$
$$f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$
$$f''(0)=\sin\pi=0,\ldots$$

бўлиб, буларни (3.9)га қўйсак

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots.$$

Мисол 2. $f(z)=\ln z$ функцияни $z-1$ га нисбатан қаторга ёйилсин.

Ечими.
$$f'(z)=(\ln z)'=\frac{1}{z}=z^{-1},$$
$$f''(z)=-z^{-2},$$
$$f'''(z)=2zh-3,$$
$$f^{(4)}(z)=-2\cdot 3\cdot z^{-4},$$
$$f^{(5)}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot z^{-5},\ldots,$$
$$f^{(n)}(z)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,z^{-k}\,(k=1,2,3,\ldots)$$

Булардан:

$$f(1)=\ln 1=0$$
$$f'(1)=1$$
$$f''(1)=-1,$$
$$f'''(1)=2,$$
$$f^{(4)}(1)=-3!,$$
$$f^{(5)}(1)=-4!,$$
$$\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

У ҳолда (3.9) формулага кўра:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}(z-1)^n + \ldots.$$

Бунинг яқинлашиш доираси $|z-1|<1$ дан иборат эканлигини текшириб кўриш қийин эмас.

Мисол 3. $f(z) = arctgz$ функцияни z га нисбатан даражали қаторга ёйилсин.

Ечими.
$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

$$f''(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2},$$

$$f'''(z) = -\frac{2(1-3z^2)}{(1+z^2)^3},$$

....

Бу топилганлардан:

$$f(0)=0,$$

$$f'(0)=1,$$

$$f''(0)=0$$

$$f'''(0)=2!$$

$$f^{(4)}(0)=0$$

Ҳосил бўлиб, (3.9) формулага қўйсак,

$$arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

Бу мисолни иккинчи бир усул билан ҳам ечиш мумкин:

Маълумки,

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \ldots$$

қаторда $a = -z^2$ десак

$$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^3-z^6+\ldots+\ldots$$

қаторнинг абсолют ва текис яқинлашмоғи учун $|a|=\left|-z^2\right|=r<1$ бўлиши етарли. Шу сабабли бу қаторни ҳадлаб интеграллаш қонунийдир, демак,

$$arctgz=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z dz-\int_0^z z^2dz+\int_0^z z^4dz-\int_0^z z^6dz=$$

$$=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots$$

Бу усулнинг қулайлиги шундан иборатки, $f(z)=arctgz$ дан юқори тартибли ҳосилаларнинг умумий формуласини излаб ўтиришнинг ҳожати йўқ.

ХУЛОСА

Ушбу битирув малакавий ишкомплекс ўзгарувчили функцияларнинг хоссалари ва уларни даражали қаторларга ёйиш масалаларини ечишга қаратилган.

$w = f(z)$функцияларни даоражали қаторларга ёйилмаси орқали функцияларнинг назариядаги ҳамда амалий формулалардаги ноаниқликларни бартараф этишга кўмаклашишдир.

Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш орқали уларнинг яқинлашиш соҳаси ва яқинлашиш радиусларини топиш усуллари очиб берилган.

Комплекс аргументли функцияларни даражали қаторларга ёйиш учун аввал функциянинг голоморфлиги текширилади, функция узлуксизлиги исботланади, унинг исталганча тартибли ҳосиласи мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ўрганилган.

$f(z)$ функция табиати билан бу функция ёйилган даражали қатор яқинлашиш радиуси ўртасидаги боғланишни очиб берилган. У даражали қаторлар назарияси ўзининг тўла ифодасини фақат комплекс соҳада топишини кўрсатилган.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги Қонуни. Тошкент, 1997 й., 29 август № 463-1.
2. Ўзбекистон Республикасининг «Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури тўғрисида»ги қонуни. Тошкент, 1997 й., 29 август, №463-1.
3. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ. (маърузалар). – Т.,"Университет" ,1998.
4. Садуллаев А., Худойбергангов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Туйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ).- Т., "Ўзбекистон", 2000.
5. Т. Азларов, Ҳ. Мансуров, «Математик анализ», 1-, 2- том, Тошкент, «Ўзбекистон» – 1994, 1995.
6. Мақсудов Ш.,Салохитдинов М., Сирожиддинов С. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. – Тошкент, "Ўқитувчи", 1996.
7. G. Xudoyberganov, A.K. Vorisov, H.T. Mansurov, B.A. Shoimqulov, «Matematikanalizdanma'ruzalar», Тошкент – 1991.
8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1-қ.- М.,"Наука", 1976.
9. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. "Наука", 1975.
10. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. –М., "Наука" 1972.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., "Наука", 1973.
12. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. "Наука", 1976.

13. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. -М., “Просвещение”, 1977.
14. Г.Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», Том I, II, III. Москва,«Физматлит», 2001.
15. А. Саъдуллаев, Ҳ. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Ғуломов «Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами», 2- том, Тошкент, «Ўзбекистон» – 1996.
16. Б.П.Демидович, «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Изд. 13-е, Москва, «ЧеРо», 1997.
17. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1– қисм. – М.,”Наука”, 1996.
18. Т.Т.Тўйчиев, Д.Х.Джумабоев, А.А.Абдуллаев. “Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустақил ишлар”, – Тошкент, “Университет” , 2004.
19. МаматовЖ.С., УмаровҲ.Р. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан машқлар тўплами, (улубий қўлланма), 1 –, 2– қисм. ГулДУ нашриёти, 2014, 2015.
20. Босс В. Лекции по математике. Том 9: ТФКП. – М.: Издательство ЛКИ, 2007.
21. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб.пособие. – 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
22. И. И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач, «Математический анализ: Рыди, функции векторного аргумента», Том 2, Москва, 2003.
23. И. И. Привалов. «Введение в теорию функций комплексного переменного», – 4-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
24. Е. М. Чирка. «Комплексные аналитические множества», – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1997.