ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Физика – математика факултети

“Математика” кафедраси

5130100- “Математика” таълим йўналиши бўйича бакалавр
даражасини олиш учун

КУРАНОВ МИРОЛИМНИНГ

«Ўқувчиларга математик амалларни ўргатишда қизиқарли масалаларнинг роли»
мавзусида

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Раҳбар: __________ физ-мат.ф.н., доц. Х.Норжигитов
имзо ф.и.ш. илмий даража, илмий унвон

БМИ “Математика” кафедрасининг 20___ йил __ май №__ сонли йиғилишида кўриб чиқилди ва ҳимояга тавсия этилади.

Кафедра мудири__________ физ-мат.ф.н., доц. Х.Норжигитов
имзо ф.и.ш. илмий даража, илмий унвон

Физика математика факултети декани томонидан ҳимоя қилишга рухсат этилади.

Факултет декани__________ п.ф.н. доц. Ш. Аширов
имзо ф.и.ш. илмий даража, илмий унвон

Гулистон - 2016

Мундарижа

КИРИШ

Битирув малакавий ишнинг долзарблиги: Ўқувчиларини математикага қизиқтириш осон иш эмас. Бунинг учун мактаб, академик лицей ва коллежларда ҳар хил математик тўгараклар ташкил этмоқ зарур. Ваҳоланки, таълим муассасаларида тўгараклар учун соатлар ажратилган. Агар ўқувчи, ҳеч бўлмаса битта масалани ўзи мустақил ечса, у албатта, масаланинг ечимидан роҳатланади ва ҳеч қачон эсдан чиқармайди. Ўқувчида математикага муҳаббат ўйғотиш учун, яъни масалани ўзи мустақил ҳал этишни ўргатиш учун, қизиқарли масаладан бошламоқ зарур деб ҳисоблайман. Аммо, ўқувчига қизиқарли ва осон ҳал бўладиган масалани топиш унчалик ҳам осон иш эмас. Шу сабабли, қизиқарли масалаларни тўплаш ва уларни ҳал этиш йўлларини ўрганиш долзарблиги натижасида мазкур битирув малакавий иш вужудга келди. Мактаб математикаси тўгараклари учун кўплаб қўлланмалар яратилган. Айниқса, [1],[3]-[6], [8],[10] адабиётлардақизиқрли математик масалалар жуда яхши ёритилган. Аммо тўгаракларга кам соат ажратилганлиги сабабли улардан фойдаланиш бирмунча қийинчилик туғдиради. Шу сабабли, тўгарак соатларига мос қилиб тўплаш жуда муҳим ҳисобланади.

Тадқиқот объекти ва предмети: Тадқиқотнинг объекти мактаб, лицей, коллежнинг математика тўгарагига қатнашувчи ўқувчилари бўлиб, унинг предмети турли хил қизиқарли математик масалалардан иборат.

Битирув малакавий ишнинг асосий мақсади ва вазифалари. Битирув малаквий ишнинг асосий мақсади мазкур ишдан фойдаланиб, ўқувчида озгина бўлса ҳам математикага қизиқиш ўйғотишдир. Натижада ўқувчида математик билим савияси ошади ва математиканинг барча мавзуларини чуқурроқ ўргнишга киришади.

Тадқиқот усули ва услубиёти: Ўқувчиларга дарсдан бўш вақтларида тўгаракларда иштирок этиб, математик масалаларни қизиқарли усулларда ечишга ўргатиш.

Олинган асосий натижалар: Мазкур битирув малакавий ишдаги кўплаб масалаларни, мен педагогик амалиёт жараёнида Гулистон шаҳридаги 9-сон мактаби 8-синф ўқувчилари билан биргаликда кўриб чиқдим. Натижада ўқувчилар баҳоларида озгина бўлса ҳам ўзгариш сезилди.

Натижаларнинг илмий янгилиги ва амалий аҳамияти: Мактаб математикасида қизиқарли математик масалалардан фойдаланиш битирув малакавий ишнинг асосий янгилигидир. Бундай янгилик ўқувчиларда математикага қизиқишни янада орттириши билан аҳамиятлидир.

Ишнинг ҳажми ва тузилиши: Битирув малакавий иш кириш, учта боб**,** еттита параграф, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

1-БОБ. БЕШИНЧИ АМАЛ

§.1.1 Учта бир хил рақамлар билан ишлаш

Алгебрани кўпинча “Етти амал арифметикаси” деб ҳам айтишади. Бу билан умуммаълум бўлган математикани тўртта амалига учта янгисини даражага кўтариш ва унга тескари иккита амални қўшилади.

Бизнинг алгебрага оид суҳбатларимиз “бешинчи амал” даражага кўтаришдан бошланади.

Бу янги амалга зарурият амалий ҳаёт туфайли юзага келганми? Сўзсиз биз ҳаётимизда у билан жуда кўп марта дуч келамиз. Одатда, юза ва майдонларини ҳисоблашда кўплаб учрайдиган сонларни иккинчи ва учинчи даражаларга кўтаришда тўғри келадиган ҳолларни эслайлик. Кейин: бутун олам тортиш кучи. Электростатик ва магнит ўзаро таъсир, ёруғлик, товуш масофанинг иккинчи даражасига пропорционал кучсизланадилар. Қуёш атрофида сайёралар (ва сайёралар атрофида йўлдошнинг) айланиш вақтлари айланиш марказидан уларгача бўлган масофалар билан даражали бўлган айланиш вақтининг иккинчи даражалари ўзаро нисбати масофаларнинг учинчи даражалари нисбати кабидир.

Амалиёт бизни иккинчи ёки учинчи даражалар билан тўқнаштиради-ю, юқори даражалар эса фақат алгебра масалалари китобларининг машқларида мавжуд деб ўйлаш керак эмас. Мустахкамликка оид ҳисоблашларни ўтказаётиб, муҳандис ҳамиша тўртинчи даража билан ҳисоб ўтказса, бошқа ҳисоблашларда эса (масалан, буғ ўтказгичлар диаметрини ҳисоблашда) ҳаттоки олтинчи даража билан иш кўтаради.

Тошни оқар сув қандай куч билан олиб кетишини ўрганаётиб, гидротехник, шунингдек олтинчи даражали боғланишга дуч келади. Агар бир дарёдаги сувнинг оқими тезлиги бошқасидагидан тўрт марта катта бўлса, у ҳолда тез оқар дарё ўз тубида секинроқ оқар дарёга қараганда 4^6 марта, яъни 4096 марта оғирроқ тошларни думалатади.

Биз қизиган жисмлар-масалан, электор лампа қизиш ипи равшанлигининг тепратурага боғланишини ўрганишда янада юқорироқ даражаларга дуч келамиз. Умумий ёруғлик оқ ранг қизишда темпратуранинг (“абсолют” темпратуранинг, яъни минус 273^0 дан ҳисобланадиган темпратуранинг) ўттизинчи даражасида ортади. Бу жисм 2000^0 дан 4000^0 гача қиздирилганда (абсолют темпратура) яъни икки марта кучлироқ қиздирадиган, 2^{12} карра бошқача айтганда, 4000 марта яқинроқ бўлади. Бу ўзига хос боғланишнинг электр ломпочкалар тайёрлаш техникасида қандай аҳамиятга эга эканлиги ҳақида биз яна бошқа жойда ҳам гапирамиз.

1.*Учта икки билан*

Ҳаммага, эҳтимол, маълумдир, учта рақамни шундай ёзиш керакки, улар билан имкони бўлган энг катта сонни тасвирлансин. Учта тўққизни олиб, уларни қуйидагича жойлаштириш керак

$$9^{9^9}$$

яъни 9 нинг учинчи “юқори даражасини” ёзиш керак.

Бу шундай дахшатли улкан сонки, ҳеч қандай солиштиришлар учун улканлигини ўзингга тасоввур қилишга ёрдам бермайди. Кўтарилиб турган коинотдаги электронлар сони унга солиштирганда жуда кичкина. Бу ҳақда кўплаб адабтётларда гапирилган. Бу масалага қайтишимга сабаб унга ўхшаш яна бир бошқа масалани таклиф қилишни ҳохлийман.

Учта икки билан, хеч қандай амалларни ишлатмай, мумкин бўлган энг катта сонни ёзиш керак.

Ечиш:

Тўққизларни уч қават жойлаштиришнинг янги таассуроти остида сиз, эҳтимол, иккиларини ҳам худди шундай жойлаштиришга тайёрсиз:

$$2^{2^2}$$

Бироқ бу гал кутилган самара ҳосил бўлмайди. Ёзилган сон катта эмас, ҳатто 222 дан ҳам кичик. Ҳақиқатдан ҳам, ахир биз фақатгина 2^4 ни яъни 16 ни ёздик.

Аслида учта иккида иборат энг катта сон 222 эмас ва 22^2 (яъни 484) эмас, балки

2^{22}=4194304.

Масала жуда ибратли. У математикадан ўхшашлик (анология) бўйича амал хавфли эканлиги кўрасатди: у осонгина хато ҳулосаларга олиб бориши мумкин.

2.*Учта уч билан*

М а с а л а

Энди, эҳтимол сиз эхтиёткорлик билан бу масалани ечишга киришасиз.

Учта уч билан амал белгиларини ишлатмасдан мумкин бўлган каттароқ сонни ёзиш керак.

Ечиш

Уч қаватли жойлашиш бу ерда ҳам кутилган самарага олиб келмайди, чунки

3^{3^3}, яьни 3^{27} сонни 3^{33} сонидан кичикдир.

Оҳирги жойлашув масала саволига жавоб бўлади.

3.*Учта тўрт билан*

М а с а л а

Учта тўрт билан амал белгиларини ишлатмасдан, мумкин бўлган каттароқ сонни ёзиш керак.

Ечиш

Агар бу ҳолатда аввалги икки масаладаги каби ҳаракат қилсангиз яьни

4^{44}

Жавобини берсангиз хато қилсангиз. Чунки бу сафар ич қаватли жойлашув

$$4^{4^4}$$

Худди кутилган катта сонни берини. Ҳақиқаттан ҳам, $4^4 = 256$, 4^{256} эса 4^{44} дан катта

§1.2 ***Учта бир хил сонлар билан***

Бу масалани яратувчи холати чуқур ўрганиш ва нима учун баъзи рақамлар қаватли жойлашувда улкан сонлар бунёд этиши, баъзилар эса яратмаслигини аниқлашга ҳаракат қиламиз. Умумий ҳолатини кўрамиз.

Учта бир хил рақам билан, амаллар белгиларини ишлатмасдан, мумкин бўлган катта сонни ифодаланиг.

Рақамни $\grave{a}$ ҳарфи билан ифодалаймиз.

Ушбу,

$2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$ жойлашишга a^{11a} ёзиш мос келади.

Уч қаватли жойлашув умумий ҳолда

$$a^{a^{a}}$$

кўринишда тасвирланади.

a нинг қандай қийматида охирги жойлашув биринчи жойлашувга қараганда каттароқ сонни тасвирлашини топамиз.

Иккала ифода бир хил бутун асосли даражани ифодалаш сабабли катта кўрсаткичга катта катталик жавоб беради. Қачон

$a^{a} > 11a$

бўлади.

Тенгсизлик икки томони a га бўламиз ва

$a^{a-1} > 11$

ни оламиз. Осонгина кўриш мумкинки, a^{a-1} катталик 11 дан a факат 3 дан катта бўлган шартда каттадир, чунки

$4^{4-1} > 11,$

Ваҳоланки, 3^{2} ва 2^{1}даражалар 11 дан кичик.

Энди аввалги масалаларни ечишда биз тўқнашган тасодифлар тушунарлидир. Икки ва уч учун бир хил жойлашувини, тўрт ва ундан катта сонлар учун бошқасини олиш керак.

1. ***Тўрт бир билан. М а с а л а .***

Тўрт бир билан, ҳеч қандай математик амаллар белгиларини ишлатмасдан, мумкин бўлган каттароқ сонни ёзиш керак.

Ечиш.

Табиийки, ақлимизга келадиган 1111- масала шартига жавоб бермайди, чунки 11^{11} даражада жуда кўп марта сон. Бу сонни 11 га ўн карра кўпайтириб ҳисоблашга бирорта одамнинг чидами етиши даргумон.

Аммо унинг катталигини логорифмик жадвал воситасида баҳолаш мумкин.

Бу сон 285 миллиарддан катта ва, демак, 1111 дан 25 милион марта катта.

2.*Тўртта икки билан. М а с а л а .*

Кўрилаётган масалалар турини ривожлантириш учун кейинги қадамни босамиз ва ўз саволимизни тўртта икки учун қўямиз.

Тўртта икки қандай жойлашувда энг катта сонни тасвирлайди.

Ечиш.

Мумкин бўлган комбинациялар 8 та

$2222, 222^2, 22^{22}, 2^{22}$

$22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}}, 2^{2^2},$

Бу сонлардан қайси бири энг катта?

Аввал юқори қатор билан, яъни икки қават жойлашувини сонлар билан шуғулланамиз.

Биринчи сон – 222 – қолган учта сондан кичик. Навбатдаги икки сонни

222^2 ва 22^{22}

ни солиштириш учун улардан иккинчисини ўрганамиз.

$22^2 = 22^{22*11} = (22^{22})^{11} = 484^{11}$.

Оҳриги сон 222^2 га қараганда катта, чунки 484^{11} даражанинг асоси ва кўрсатгичи 222^2 никидан катта.

Энди 22^{22} ни биринчи қаторини тўртинчи сони 2^{222} билан солиштирамиз. 22^{22} ни ундан катта сон 32^{22} билан алмаштирамиз ва бу каттароқ сон қиймати жихатдан 2^{222} дан кичкиналигини кўрамиз.

Ҳақиқиатдан ҳам

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110},$$

Бу даражада сон 2^{222}, дан кичик.

Шундай қилиб, юқори қаторнинг энг катта сони - 2^{222}, энди бизга беш сонни ҳозир олинган сон ва қуйидаги тўртта сонни солиштириш қолди.

$$22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}}, 2^{2^{2^2}}.$$

Охриги 2^{16}, га тенг сон мусобоқадан дархол чиқию кетди. Сўнгра, бу қаторнинг биринчи сон 22^4 га тенг ва 32^4 ёки 2^{20} дан кичик бўлиб, кейинги хар бир сондан кичик. Энди 2 нинг даражаси бўлган учта сонни солиштириш зарур. 2 нинг даражалари орасида, равшанки, кўрсатгич каттаси катта. Аммо уч кўрсатгич

$$222{,}484 \text{ ва } 2^{20+2}\left(= 2^{10\cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4\right)$$

дан энг охригиси аниқ катта.

шунинг учун тўртта икки билан тасвирланиши мумин бўлган энг катта сон қуйидагидир.

$$2^{2^{22}},$$

Логорифимик жадвал мурожат қилмасдан биз бу соннинг катталиги ҳақида ўзимизга тахминий тасовурумизни тушушимиз мумкин. Бунинг учун қуйидаги тақрибий тенгликдан фойдаланамиз.

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6;\ 2^{2^{22}} \approx 2^{4000000} > 10^{1200000}.$$

Демак, бу сонда-миллиондан ортиқ рақам бор.

2-БОБ. ТЕНГЛАМА ТУЗИШ САНЪАТИ

§2.1 Алгебра тили-тенгламалари.

Сонлар ёки катталикларнинг мавҳум муносабатига мансуб саволларни ҳал этиш учун масалани ўз тилимиздан алгебра тилига ўтказиш керак. Деб ёзади буюк нуютон ўзининг “Барчага баровар тааллуқли арифметика” деб номланган алгебра дарслигида. Она тилидан алгебра тилига ўтказиш қандай бажаришни Нуютон мисолларда кўрсатган. Мана улардан бири:

Она тилида	**Алгебра тилида**
Савдогар маълум бир миқдор пулга эга эди.	x
Биринчи йил у 100 фунт сарф қилди.	$x-100$
Қолган суммага унинг учдан бирини қўшди.	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
Келгуси йил у яна 100 фунд сарф қилди.	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
Ва қолган суммани унинг учдан бир қисмини ортирди.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
Учинчи йил у яна 100 фунд сарф қилди.	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
Кейин қолдиққа унинг учдан бирини қўшди.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
Унинг капитали бошланғичидан икки марта катта бўлди.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Савдогарнинг бошланғич капиталини аниқлаш учун охриги тенгламани ечиш қолди.

Тенгламаларни ечишнинг кўп ҳоллари қийин эмас; тенгламаларни масала шартлари асосида тузиш кўпроқ қийинчилик туғдиради. Сиз ҳозиргина кўрдингизки, ҳақиқиатда тенгламаларни тузиш санъат “она тилига” ўтказишга келтиради. Алгебра тии кам сўзли; шунинг учун унга она тилининг кўпроқ бўлмаган ибораларни қийинчиликсиз ўтказиш мумкин. Турли қийинчиликдаги ўтказишлар учрайди. Бунга ўқувчи келгусида келтирилган биринчи даражали тенгламаларни тузишга оид келтирилган қатор мисолларда ишонч ҳосил қилади.

1. Диофантнинг ҳаёти

М а с а л а

Тарих бизга қадимги ажойиб математика Диофант биографиясининг кичик чизгиларини асраб қолдирган. У ҳақида маълум бўлган барча нарса унинг қабр тошдаги-математик масала шаклида тузилган ёзувлардир. Бу ёзувларни келтирамиз.

Она тилида	**Алгебра тилида**
Йўловчи. Бу ерда диофантнинг ҳоки кўмилган. Сонлар унинг ҳаёти қанчалик узоқ бўлганини билдиради.	x
Унинг олтидан бири гўзал болаликни ташкил этади.	$\frac{x}{6}$
Яна ҳаётнинг ўн иккидан бири ўтди-унинг ияги тук билан қопланган.	$\frac{x}{12}$
Ҳаётнинг йеттидан бирини боласиз никоҳда ўтказди.	5
Унинг отаси умрининг яримигача умр берди қисмат.	$\frac{x}{2}$

Тўнғичи вафотидан сўнг тўрт йил ўтиб, у ҳам рихлатга келди.	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$
Айт-чи, неча йил яшаб, Диофант ўлмини топди?	

Ечиш

Тенгламани ечиб ва $x=84$ эканлигини топиб, Диофант биографиясининг қуйидаги чизгиларини билиб оламиз: у 21 ёшида уйланган, 38 ёшида ота бўлган, фарзандидан 80 ёшида йўқотган ва 84 ёшда вафот этган.

2. От ва хачир

М а с а л а

Мана, яна бир она тилидан алгебра тилига осонликча ўтказилган қийин бўлмаган қадимги масала.

От ва хачир елкаларида оғир юк билан ёнма-ён кетадилар. От ўта оғир юкидан нола қилади. "Сен нимага нолийсан?-унга жавоб берарди хачир. – Ахир мен сендан битта қопни олсам, менинг юким сеникидан икки марта оғир бўлиб кетади. Мана сен мендан бир қопни олганигда, сенинг юкинг меники билан тенглашади".

Айтингчи, доно математиклар, от ва хачир нечда қопдан юк олиб кетадилар?

Ечиш

Агар мен сендан бир қопни олсам	$x-1$
Менинг юким	$y+1$
Сеникидан икки марта оғирроқ бўлади	$y+1=(x-1)\cdot 2$
Мана сен, агар менинг елкамдан бир қопни олганигда эди,	$y-1$

Сенинг юкинг	$x+1$
Меники билан бирдай бўларди.	$y-1=x+1$

Биз масалани кки нмаълумли тенгламалар системасига келтирамиз

$$\begin{cases} y+1=2(x-1), \\ y-1=x+1 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 2x-y=3, \\ y-x=2 \end{cases}$$

Уни ечиб, $x=5, y=7$ ни топамиз. От беш қоп хачир йетти қоп юк олиб борарди.

3. Тўрт ака-ука

М а с а л а

Тўрт ака-укада 45 сўм пул бор эди. Агар бириничисининг пули 2 сўмга ошириб, иккинчисини пули 2 сўмга камайтирилса, учинчисининг пули икки марта ошириб, тўртинчисининг пулини икки марта камайтирилса, у ҳолда ҳаммаларининг пуллари тенг бўлиб қолади. Ҳар бирида қанчадан пул бор?

Ечиш

Тўрт ака-укада 45 сўм	$x+y+z+t=45$
Биринчисининг пулини 2 сўмга оширилса,	$x+2$
Иккинчисининг пули 2 сўмга камайтирилса,	$y-2$
Учинчисининг пули 2 марта оширилса,	$2z$
Тўртинчисининг пули 2 марта камайтирилса,	$\frac{t}{2}$
У ҳолда ҳаммаларида бир хил пул бўлар эди.	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

Охирги тенгламани учта алоҳида тенгламага ажратамиз:

$$x+2=y-2,$$
$$x+2=2z,$$
$$x+2=\frac{t}{2}.$$

бу ердан

$$y=x+4,$$
$$2=\frac{x+2}{2},$$
$$t=2x+4.$$

Бу қийматларни биринчи тенгламага қўйиб,

$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45$$

ни оламиз, бунда $x=8$ эканлигини маълум бўлади. Шундан сўнг: $y=12,\ z=5,\ t=20$ ни топамиз. Демак, ака-укаларда 8 сўм, 12 сўм, 5 сўм бўлган.

4. Дарё ёнидаги қушлар

XI аср бир араб математигидан қуйидаги масалани топамиз.

Бир дарёнинг икки қирғоғида бири-иккинчисининг рўпарасида биттадан палма ўсади. Бирининг бўйи - 30 тирсак, иккинчисининг – 20 тирсак. Асослари орасидаги масофа – 50 тирсак. Ҳар бир палма учида биттадан қуш ўтирибди.

Тасодифан иккала қуш палмалар орасидаги сув сиртининг сўзиб чиққан балиқни кўриб қолдилар, улар бараварига унга ташландилар ва бир вақтда етиб бордилар.

Баландроқ палма асосида қандай масофада балиқ пайдо бўлади.

Ечиш

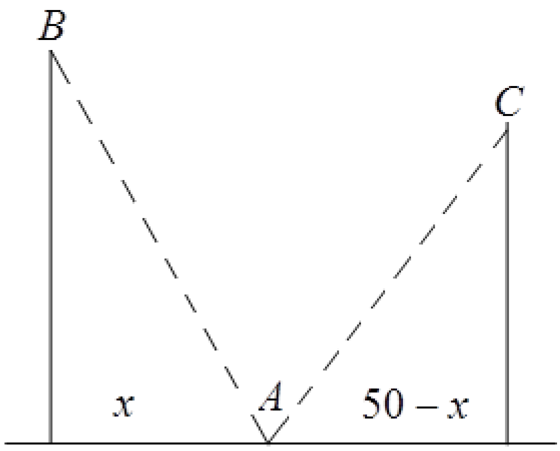
Схематик чизмада Пифогор теоремасидан фойдаланиб

$$AB^2 = 30^2 + x^2, \ \ AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

эканлигини аниқлаймиз. Лекин $AB = AC,$ чунки бу масофаларни иккала қуй бир хил вақтда учиб ўтдилар. Шунинг учун

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Қавсларни очиб ва соддалаштиришларни бажариб, биринчи даражали тенглама $100x = 2000$ ни оламиз, бу ердан $x = 20.$



1-расм.

Балиқ баландлиги 30 тирсак бўлган палмадан 20 тирсак нарида пайдо бўлган.

5. Сайр

Масала.

- Менинг олдимга эртага кундузи киринг, - деди кекса доктор ўз танишига.

- Миннатдорман. Мен соат учда чиқаман, балки сиз ҳам сайр қилишни хоҳларсиз, у ҳолда ўша вақтда чиқинг, йўлнинг ўртасида учрашамиз.

- Сиз менинг қария эканлигимни унутяпсиз, соатига фақат 3 км юраман, сиз эса ёшсиз, секин юрганизда ҳам соатига 4 км ўтасиз.

- Тўғри. Мен сиздан соатига 1 км ортиқ юрганим учун, сизни тенглаштириш учун сиз шу 1 км ни бераман, яни чорак соат олдин чиқаман. Етарлими?

- Сиз томондан бу жуда илтифотлилар, -рози бўлишга шошилди қария.

Ёш одам шундай қилади ҳам: уйидан соат чоракам учда чиқди ва соат 4 км тезлик билан юрди. Доктор эса роса соат учда чиқди ва соатига 3 км ўтди. Улар учрашгандан сўнг, қария орқага бурилди ва уйга ёш дўсти билан биргаликда кетди.

Уйга қайтгандан сўнг ёш одам имтиёзли чорак соати туфайли, умуман олганда, у докторга нисбатан икки марта эмас, балки тўрт марта кўп масофа ўтганини англаб етди.

Докторнинг уйидан унинг дўстининг уйигача бўлган масофа қанча?

Ечиш

Улар орасидаги масофани x (км) деб белгилаймиз. Ёш одам ҳаммаси бўлиб, $2x$ йўл ўтди, доктор эса тўрт марта кам, яъни $\frac{x}{2}$ йўл ўтди. Учрашгунча доктор ўз ўтган йўлининг ярми, яъни $\frac{x}{4}$ км юрди, ёш одам эса қолган масофани, яъни $\frac{3x}{4}$ км ни ўтди. Йўлнинг ўз қисмини доктор $\frac{x}{12}$ соатда, ёш одам эса $\frac{3x}{16}$ соатда ўтди, шу билан бирга биламизки, у йўл докторга нисбатан $\frac{1}{4}$ соатга кўпроқ бўлган.

Қуйидаги тенгламани етамиз.

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$$

бу ерда $x = 2{,}4$ км

Ёш одам уйида докторнинг уйигача 2,4 км.

6. Ўроқчилар артели

Машхур физик А.В.Сингер ўзининг Л.Н.Толстой ҳақидаги эсдаликларида қуйидаги масала ҳақида ҳикоя қилади, бу масала буюк ёзувчига жуда ёқарди:

“Ўроқчилар артели икки ўтлоқни ўриши керак эди, бир ўтлоқ иккинчисидан икки марта катта. куннинг ярмида артел катта ўтлоқда ўт ўрди. Шундан сўнг артел тенг иккига бўлинди: биринчи ярми катта ўтлоқда қолди ва уни кечга қадар ўриб бўлди; иккинчи ярми кичик ўтлоқни ўрди, унда кечга томон эртасига бир ўроқчи бир иш куни давомида ўриб бўладиган бўлак қолди.

Артелда нечта ўроқчи бор эди?”

Ечиш

Бу ҳолда, асосий номаълум – биз x деб белгилайдиган ўроқчилар сонидан ташқари, яна ёрдамчи номаълум, чунончи бир ўроқчи бир кунда ўрадиган майдон ўлчамини ҳам киритиш қулай; уни y орқали белгилаймиз. Гарчи масала уни топишини талаб қилмаса ҳам, y бизга асосий номаълум топишини енгилаштиради.

Катта ўтлоқ юзини x ва y орқали ифодалаймиз. Бу ўтлоқни x ўроқчи ярми кун ўрди; улар $x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$ майдонни ўриб бўлишди.

Куннинг иккинчи ярмида артелнинг ярми, яъни $\frac{x}{2}$ ўроқчи ўрди; улар

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$$

майдонни ўрдилар.

Кечгача бутун ўтлоқ ўриб бўлгани учун унинг майдони қуйидагига тенг:

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

Энди x ва y орқали кичик ўтлоқ майдонини ифодалаймиз.

Уни ярим кун $\frac{x}{2}$ та ўроқчи ўрди ва $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y=\frac{xy}{4}$ майдонни ўриб бўлди. Бир ўроқчиларнинг бир кунда ўрганда y га тенг майдонни ўрилмаган майдонга қўшиб, кичик ўтлоқ майдонини оламиз:

$$\frac{xy}{2}+y=\frac{xy+4y}{4}.$$

“Биринчи ўтлоқ иккичи ўтлоқдан икки марта катта”, деган иборани алгебра тилида ўтказиш қолади ва тенглама тузилади:

$$\frac{3xy}{4}:\frac{xy+4y}{4}=2 \quad \text{ёки} \quad \frac{3xy}{xy+4y}=2.$$

Касрнинг чап томонини y га қисқартирамиз: ёрдамчи номаълум шу туфайли чиқариб ташланади ва тенглама қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\frac{3x}{x+4}=2 \quad \text{ёки} \quad 3x=2x+8,$$

бунда $x=8.$

Артелда 8 та ўроқчи бўлган.

§2.2. Диофант тенгламаларига келтириладиган масалалар

1.Светер сотиб олиш. М а с а л а

Сиз дўконда сотиб олинган светрингиз учун 19 сўм тўлашингиз керак. Сизда фақат уч сўмлик, кассирда эса фақат беш сўмликлар. Шундай пуллар бўлганида сиз касир билан ҳисоблаша оласизми ва қандай?

Масаланинг саволи шундан иборатки, сиз кассирга қанча уч сўмлик бериб ва қайтимига сўмликлар олиб 19 сўм тўлашингиз керак. Маладаги нмаълумлар иккита ва беш сўмликлар сони (y). Аммо фақат битта тенглама тузиш мумкин:

$$3x-5y=19$$

Гарчи икки нмаълумли битта тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлса ҳам, лекин аввалдан уларнинг орасидаги маълум эмас (эслайлик, бу кредит билетлар сони). Мана шунинг учун алгебра шунга ўхшаш “аниқмас” тенгламаларни ечиш методларини ишлаб чиқди. Уларни алгебрага киритиш хизматлари бу фаннинг биринчи Эвропа вакилиги, қадимги машҳур математик Диофантга тегишли, шунинг учун бундай тенгламалар ***диофнт тенгламалари*** деб атаалади.

Ечиш

Келтирилган мисолда бунга ўхшаш тенгламаларни қандай ечилишини кўрсатамиз.

Бу ерда

$$3x-5y=19$$

тенгламадаги x ва y нинг қийматларини бунда x ва y - бутун ва мусбат сонлар эканлигини билган ҳолда топиш керак.

Коэффиценти кичик номаълумни, яъни $3x$ ҳади яккалаймиз; бу ҳолда қуйидагини оламиз:

$$3x=19+5y,$$

бу ерда

$$x=\frac{19+5y}{3}=6+y+\frac{1+2y}{3}.$$

x, 6 ва y - бутун сонлар бўлгани учун, тенглик $\frac{1+2y}{3}$ ҳам бутун сон бўлгандагина тўғри бўлади. уни t билан белгилаймиз. у ҳолда

$$x=6+y+t,$$

бунда

$$t=\frac{1+2y}{3}$$

ва, демак,

$$3t=1+2y=3t-1.$$

Бу тенгламадан y ни топамиз

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}.$$

y ва t бутун сонлар бўлгани учун, $\frac{t-1}{2}$ ҳам бирор бутун t_1 сон бўлиши керак. Шундай қилиб,

$$y = t + t_1$$

Шу билан бирга

$$t_1 = \frac{t-1}{2}$$

бу ерда

$$2t_1 = t - 1 \quad \text{ва} \quad t = 2t_1 + 1.$$

$t = 2t_1 + 1.$ қиймати аввалги тенгликларга қўямиз:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$
$$x = 6y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Шундай қилиб, x ва y учун қуйидаги ифодаларни топдик:

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1.$$

x ва y сонлар биламизки-нафақат бутун, балки мусбат ҳамдир, яъни 0 дан каттадир. Демак,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$1 + 3t_1 > 0.$$

Бу тенгсизликлардан қуйидагиларни топамиз:

$$5t_1 > -8 \quad \text{ва} \quad t_1 > -\frac{8}{5},$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{ва} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Шу билан t_1 катталик чегараланади; у $\left(-\frac{1}{3}\right)$дан катта (ва, демак, турган гапки, $-\frac{8}{5}$ дан катта). Аммо, t_1-бутун сон, бунда хулоса қиламизки, унинг учун қуйидаги қийматларгина мумкин:

$t_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,...$

x ва y га мос келувчи қийматлар қуйидагилар:

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23,...$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ \ 7,\ \ 10,...$$

Энди биз ҳақнинг қандай тўланиши мумкинлигини аниқладик:

Сиз ёки 8 та уч сўмлик тўлайсиз ва қайтимига битта 5 сўмлик оласиз:

$$8 \cdot 3 - 5 = 19$$

ёки 13 та уч сўмлик тўлайсиз ва қайтимига 4 ва 5 сўмлик оласиз:

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19,$$

ва ҳ.к.

Назарий жихатдан масала саноқсиз ечимлар қаторига эга, амалий эса ечимларлар сони чегараланган, чунки на харидорда ва на кассирда саноқсиз кўп кредит билетлар йоқ. Агар, масала, ҳар бирида ҳаммаси бўлиб 10 тадан билет бўлса, у ҳолда ҳақни тўлаш биргина усул билан амалга оширилди: 8 та уч сўмликни бериш ва 5 сўм қайтим олиш. Кўрамизки, аниқмас тенгламалар амалий жихатдан тўла аниқ ечимлар жуфтларини беришлари мумкин.

Бизнинг малаларга қайтар эканмиз, ўқувчига машқ сифатида унинг вариантини мустақил ечишни, яъни айнан харидорда фақат беш сўмликлар, кассирда эса фақат уч сўмликлар бор ҳолатни кўриб чиқишни таклиф этамиз.

Натижада қуйидаги ечимлар қатори ҳосил бўлади:

$$x = 5,\ 8,\ 11,,...$$
$$y = 2,\ \ 7,\ \ 12,...$$

Ҳақиқиатдан ҳам,

$$5\cdot 5-2\cdot 3=19,$$
$$8\cdot 5-7\cdot 3=19,$$
$$11\cdot 5-12\cdot 3=19,$$

Бу натижаларни биз асосий масаланинг тайёр ечимидан оддий алгебра усулида фойдаланиб олишимиз ҳам мумкин эди. Чунки беш сўмликларни бериш ва уч сўмликларни олиш, бу манфий беш сўмликларни олиш ва манфий уч сўмликларни беришнинг ўзидир, у ҳолда масаланинг янги варианти биз асосий масалага тузган тенгламанинг ўзи билангига ечилади:

$$3x-5y=19,$$

Аммо энди x ва y га манфий сонлар бўлган шартда.

Шунинг учун

$$x=8+5t_1,\quad y=1+3t_1$$

Тенгликлардан биз, $x<0$ ва $y<0$ эканлигини билган ҳолда

$$8+5t_1<0,\ 1+3t_1<0$$

ни келтириб чиқамиз ва, демак,

$$t_1<-\frac{8}{5}.$$

$t_1=-2,-3,-4,$ ва ҳ.к. деб олиб, биз олдинги формулалардан x ва y учун қуйидаги қийматларни ҳосил қиламиз:

$$t_1=-2,-3,-4,$$
$$x=-2,-7,-12,$$
$$y=-5,-8,-11.$$

Ечимларнинг биринчи жуфт, $x=-2, y=-5$ шуни билдирадики, ҳаридор “минус 2 та уч сўмлик тўлайди” ва 5 та беш сўмлик тўлайди ва қайтимига 2 та уч сўмлик олди. Худди шунга ўхшаш тарзда қолган ечимларни тушунтирамиз.

2. Дўкон тафтиши

М а с а л а

Дўконнинг савдо китобларини тафтиш қилинганда ёзувлардан бири сиёҳ тўкилган ва у қуйидаги кўринишга эга эди:

1 метрига 49 сўм36 тийиндан шохи	7 сўм 28 тийи

Сотилган метрлар сонини билиб бўлмади, аммо шубхасиз, бу сон каср эмас эди; олинган суммада охриги учта рақамни фарқласа бўлар эди ва уларнинг олдида яна бошқа учта борлигини ўрнатса бўларди.

Бу излар асосида тафтиш комиссияси ёзувни тиклай оладими?

Ечиш

Метрлар сонини x деб белгилаймиз. Тушум суммаси тийинларида

$$4936x$$

орқали ифодаланади.

Пул суммаси ёзувидаги сиёҳ босган учта рақам билан ифодаланувчи сонни y деб белгилаймиз. Бу равшанки, минг тийинлар сони, ҳамма сумма тийинларда эса қуйидагича тасвирланади.

$$1000y + 728$$

Қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$4936x = 1000y + 728,$$

ёки 8 га қисқартирганимиздан сўнг:

$$617x - 125y = 91.$$

Бу тенгламада x ва y -бутун сонлар ва шу билан бирга y 999 дан катта эмас, чунки у учтадан кўп рақамдан тузулиши мумкин эмас. Тенгламани аввал кўрсатилгандек ечамиз:

$$125y = 617x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Бу ердан биз $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$ деб олдик, чунки бизга кам қолдиқ олиш фойдали.

$$\frac{2(17-4x)}{125}$$

каср-бутун сон, 2 сонни 125 га бўлинмагани учун $\frac{17-4x}{125}$ бутун сон бўлиши керак, уни биз t деб белгиладик).

Кейин биз

$$\frac{17-4x}{125}=t$$

тенгламада

$$17-4x=125t,$$

$$x=4-31t+\frac{1-t}{4}=4-31t+t_1$$

эга бўламиз, бу ерда

$$t_1=\frac{1-t}{4},$$

ва, демак,

$$4t_1=1-t,$$

$$t=1-4t_1,$$

$$x=125t_1-25,$$

$$y=617t_1-134.$$ [1)]

Биламизки,

$$100\le y<1000.$$

Демак,

$$100\le 617t_1-134<1000.$$

Бу ерда

$$t_1\ge\frac{234}{617}\quad \text{ва}\quad t_1\ge\frac{1134}{617}.$$

Равшанки, t_1 учун фақат битта тутун қиймат мавжуд:

$$t_1=1.$$

ва бу ҳолда

$$x = 98, \quad y = 483,$$

яъни 98 метр шохи 4837 сўм 28 тийин сотилган.

3-БОБ. АРИФМЕТИКАГА ЁРДАМ

§3.1 Оний кўпайтириш

Моҳир ҳисобловчилар кўп ҳолатларда ўзларига ҳисоблаш ишларини мураккаб бўлмаган аргебраик ўзгартиришлардан фойдаланиб енгиллаштириладилар. Масалан, 988^2 нинг ҳисобланиши қуйидагича бажарилади:

$$988\cdot 988=(988+120)\cdot(988-12)+12^2=$$
$$1000\cdot 976+144=976144.$$

Осонгига фаҳмлаш мумкинки, ҳисобловчи бу ҳолда қуйидаги алгебраик ўзгартиришлардан фойдаланади:

$$a^2=a^2-b^2+b^2=(a+b)(a-b)+b^2.$$

Амалиётда биз бу формуладан оғзаки ҳисоблашларда мувоффақият билан фойланишимиз мумкин.

Масалан:

$$27^2=(27+3)(27-3)+3^2=729,$$
$$62^2=66\cdot 60+3^2=3969,$$
$$18^2=20\cdot 16+2^2=324,$$
$$37^2=40\cdot 34+3^2=1369,$$
$$48^2=50\cdot 46+2^2=2304,$$
$$54^2=58\cdot 50+4^2=2916.$$

Кейин, $986\cdot 997$ кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

$$986\cdot 997=(986-3)\cdot 1000+3\cdot 14=983042.$$

Бу усул нимага асосланган? Кўпайтувчиларни

$$(1000-14)\cdot(1000-3)$$

кўринишда тасвирлаймиз ва бу иккиҳаднинг алгебра қоидаларига кўра кўпайтирамиз:

$$1000\cdot 1000-1000\cdot 14-1000\cdot 3+14\cdot 3.$$

Ўзгартиришларни бажарамиз:

$$1000(1000-14)-1000\cdot 3+14\cdot 3=1000\cdot 986-$$
$$-1000\cdot 3+14\cdot 3=1000(986-3)+14\cdot 3$$

Озирги қатор ғисобловчининг усули тасвирлайди.

Ўнликлар бир хил, бирликларни йиғиндиси 10 га тенг бўлган иккита уч хонали сонни кўпайтириш учули жуда қизиқдир.

Масалан,

$$783\cdot 787$$

кўпайтириш қуйидагича амалга оширилади:

$$78\cdot 79=6162;\quad 3\cdot 7=21;$$

натижа

$$616221.$$

усулни асослаш қуйидаги ўргартиришлардан равшан:

$$(780+3)(780+7)=780\cdot 780+780\cdot 3+780\cdot 7+3\cdot$$
$$\cdot 7=780\cdot 780+780\cdot 10+3\cdot 7=780(780+10)+3\cdot 7)=$$
$$=780\cdot 790+21=616200+21.$$

Шунга ўхшаш кўпайтиришларни бажаришнинг бошқа усули яна хам содда:

$$783\cdot 787=(782-2)(785+2)=785^2-$$
$$-4=616225-4=616221$$

Бу мисолда бизга 785 ни квадратга оширишга тўғри келади. 5 билан туговчи сонларни квадратга тез оширишда қуйидаги усул жуда қулай:

$35^2;$ $\quad 3\cdot 4=12$ **Жавоб:** 1225,

$65^2;$ $\quad 6\cdot 7=42$ **Жавоб:** 4225,

$75^2;$ $\quad 7\cdot 8=56$ **Жавоб:** 5625.

Қоида ўнликлар сонни бирга кўп бўлмаган сонга кўпайтириш ва кўпайтмага 25 ни қўшимча равишда ёзиб қўйиш иборат. Усул қуйидагига асосланган.

ўнликлар сони a бўлса бунда барча бундай сонларни қуйидагича тасвирлаш мкмин.

$$10\cdot a+5.$$

Бу соннинг квадрати иккиҳаднинг квадрати сифатида қуйидагига тенг

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

$a(a+1)$ ифодани ўнликлар сонниг энг яқин юқори сонга кўпайтиришдир. Сонни 100 га кўпайтириб, 25 ни қўшиш сонга 25 ни қўшимча қилиб ёзишнинг ўзи.

Бу усулдан яна бутун сон ва $\frac{1}{2}$ дан тузилган тонларнинг квадратга оширишнинг осон усули келиб чиқади. Масалан

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3{,}5^2=12{,}25=12\frac{1}{4};$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2=56\frac{1}{4},\left(8\frac{1}{2}\right)^2=72\frac{1}{4}.$$

§3.2 Сонлардаги қонуниятлар

1. 1, 5 ва 6 рақамлари

Эҳтимол, сезган бўлсангиз кеоак, бир ёки беш билан тугалланувчи бир қатор сонларни кўпайтиришда шу сон билан тугалловчи сон ҳосил бўлади. Айтилган бу фикр 6 сонига ҳам мос эканлиги анча кам маълум. Шунинг учун, айтгандай, олти билан тугалланадиган соннинг ҳар қандай даражаси ҳам олти билан тугайди.

Масалан, $46^2=2116;\; 46^2=97336.$

1, 5 ва 6 рақамларининг бу қизиқарли хусусиятларини алгебра йўли билан асослаш мумкин. Уни 6 учун кўриб чиқамиз. Олти билан тугалланувчи сонлар қуйидагича ифодаланилади.

$$10a^2++,10b+6\ va\ h.k$$

бу ерда a ва b - бутун сонлар.

Бундай икки соннинг кўпайтмаси қуйидагига тенг:

$$100a+60b+60a+36=10(10ab+6b+6a)+$$
$$+30+6=100(10ab+6b+6a+3)+6.$$

Кўряпмизки, кўпайтма бир неча ўнликлан ва 6 рақамдан тузилади ва у, албатта, охирида бўлади.

Исботлашнинг бу усули 1 га ва 5 га ҳам қўллаш мумкин.

Айтилганлар бизга қуйидагини тасдиқлаш имконини беради; масалан,

386^{2567} сони 6 билан тугалланади,

815^{7225} сони 5 билан тугалланади,

491^{1732} сони 1 билан тугалланади ва ш.ў

2. 25 ва 76 сонлари

1, 5 ва 6 сонларининг шу хоссасига эга бўлган икки хонали сонлар ҳам бор. Бу 25 сони ва, эҳтимол, кўпчиликка кутилмаган 36 сони. Ҳар қандай 76 билан тугалланувчи икки соннинг кўпайтмаси 76 билан тугаллайдиган сонни беради.

Буни исботлаймиз. Бунга ўхшаш сонларнинг умумий ифодаси қуйидагича:

$$100a+76, 100b+76 \ \ va \ \ h.k$$

Шу кўринишдаги икки сонни кўпайтирамиз:

$$10000ab+7600b+7600a+5776=$$
$$=1000ab+7600b+7600a+5700+76=$$
$$=100(100ab+76b+76a+57)+76$$

ни оламиз.

Қоида исботланади. Кўпйтма 76 сони билан тугалланади. Бу ердан шу нарса келиб чиқадики, 76 билан тугалланадиган сонни исталган даражаси худди шунга ўхшаш сондир.

$$376^2=141376, 576^3=191102076 \ \ va \ \ sh.\ o'$$

3. Чексиз “сонлар”

Яна бошқаузунроқ рақамлар гуруҳлари борки, улар сонлар охрида туриб, бу сонларнинг кўпайтмаларида ҳам сақланади. Бундай рақамлар гуруҳлари сони чексиз катта эканлигини кўрсатамиз.

Биз бундай хоссага эга икки хонали рақамлар гуруҳларини биламиз: булар 25 ва 76. Уч хонали рақамлар гуруҳини топиш учун 25 ва 76 сони олдига шундай рақамни гуруҳи талаб қилинган хоссага эга бўлсин.

76 сони олдига қандай рақамни ёзиб қўйиш керак? Уни k орқали ифодалаймиз. У ҳолда изланаётган уч хонали сон қуйидагича тасвирланади.

$$100k+76.$$

Бу рақамлар гуруҳи билан тугалланувчи сонлар учун умумий ифода шундай:

$$1000a+100k,\ 1000b+100k+76\ \ va\ \ h.k$$

Шу кўринишдаги икки сонни кўпайтириб, куйидагини оламиз:

$$100000ab+10000ak+100000bk+76000a+$$
$$+76000b+10000k^2+15200k+5776.$$

Охирги икки қўшилувчидан бошқа қўшилувчилар охрида учтадан кам бўлмаган нолларга эга. Шунинг учун айирма

$$15200k+5776-(100k+76)=15100k+5700=$$
$$15000k+5000+100(k+7)$$

1000 га бўлинса, кўпайтма $100k+76$ билан тугайди. Бу равшанки, фақат $k=3$ да бўлади.

Шундай қилиб, қидираётган рақамлар гуруҳи 376 кўринишга эга. Шунинг учун ҳам 376 сонинг исталган даражаси 376 та тугалланади. Масалан,

$$376^2=141376$$

Агар биз энди шу хоссали тўрт хонали рақамлар гуруҳини топишини хоҳласак, 376 олдига яна бир рақамани ёзиб қуйишимиз зарур. Агар бу рақамини l билан белгиласак, қуйидаги масала l қандай бўлганида

$(10000a+1000l+376)(1000b+1000l+376)$ кўпайтма $1000l+376$ га тугалланади. Агар бу кўпайтмада қавсларни очсак ҳамда 4 ва ундан ортиқ нол билан тугалланадиган қўшилувчиларни ташлаб юборсак, қуйидаги ҳадлар қолади

$$752000l+141376.$$

Агар

$$752000l+141376-(1000l+376)=751000l+$$
$$141000=(750000l+141000)+1000(l+1)$$

айирма 10000 га бўлинса, кўпайтма $1000l+1000l(l+1)$ билан тугалланади. Бу, равшанки, фақат $l=9$ бўлган амалга ошади.

Қидирилаётган тўрт хонали рақамлар гуруҳи 9376. Ҳосил қилинган тўрт хонали рақамалар гуруҳларини яна бир рақам рақам тўлдириш мумкин, бунинг учун худди юқоридагидек мулоҳаза юритиш керак. Биз 09376 ни оламиз. Яна бир қадам қўйиб, 109376 рақамлар гуруҳини топамиз, кейин 7109376 ва ҳ.к.

Бундай чап томонга рақам ёзиб қўйишни чексиз давом эттириш мумкин. Натижада биз шундай "сонни" оламизки, унда рақамлар чексиз кўпдир:

. . . 7109376

Бунга ўхшаш "сонларни" одатдаги қоидалар бўйича қўшиш ва кўпайтириш мкмин: ахир улар ўнгдан чапга томон ёзилади, қўшиш ва кўпайтириш ("устун бўйича") ҳам ўнгдан чапга бажарилади, шунинг учун икки шундай соннинг йиғиндисида ва кўпайтмасида бир рақамни бошқасидан кейин-нечта рақам керак бўлса, шунча ҳисоблаш мумкин.

Юқорида ёзилган чексиз "сон", қанчалик маҳол туйилмасин,

$$x^2=x$$

тенгламани қаноатлантириши қизиқ.

Ҳақиқиатдан ҳам, бу "соннинг" квадрати (яъни унинг ўзига кўпайтмаси) 76 га тугалланади, чунки ҳар бир кўпайтувчи охрида 76 га тенг; шу сабабга кўра ёзилган “соннинг” квадрасти ҳам 376 га тугалланади; 9376 га бўлганда x^2 “соннинг” рақамларини бирининг кетидан иккинчисини ҳисоблаб, биз x сонида бўлган рақамларни оламиз, шунинг учун

$$x^2 = x.$$

Биз 76 билан тугалланувчи рақамлар гуруҳларини кўриб, чиқдик. Агар айнан шунга ўхшаш фикрини, 5 билан туговчи рақамлар гуруҳлари учун юритсак, у ҳолда биз қуийдаги рақамлар гуруҳларини оламиз.

$$5, 25,\ 625,\ \ 0625,\ 90625,\ \ 890625,\ 2890625\ va\ h.k$$

Натижада биз яна бир чексиз “сонни” юза оламиз:

. . . 2890625,

бу сон ҳам $x^2 = x$ тенгламани қаноатлантиради. Бу чексиз “сон”

$$\left(\left(5^2\right)^2\right)^2$$

га “тенглигини” кўрсатиш мумкин бўлади.

Ҳосил қилинган қизиқ натижада чексиз “сонлар” тилида қуйидагича фаърифланади; $x^2 = x$ тенглама (одатдаги $x = 0$ва $x = 1$дан ташқари) иккита “чексиз” ечимга эга.

$x = \ldots 7109376$ ва $x = \ldots 2890625,$

ҳамда бошқа ечимларга (ўнлик саноқ системасида) эга эмас.

4. Қўшимча ҳақ

Қадим замонларда бир куни шундай воқеа содир бўлади. Икки жаллоб ўзларига тегишли ҳўкизларни подасини сотдилар, бунда улар ҳар бир ҳўкиз учун подада қанча ҳўкиз бўлса, шунча сўм олдилар. Тушган пулларга қўй ва бир қўзичоққа 10 сўмдан бериб, қўй подаси сотиб олдидар. Тенг бўлишганда биттасига ортиқча қўй тегди, бошқаси эса қўзичоқ ва шеригидан тегишли қўшимча ҳақ олди. Қўшимача ҳақ қанча (қўшимча ҳақ бутун сонли сўмда ифодаланади деб олинади)?

Ечиш

Масалани тўғридан тўғри “алгебра тилига” ўтказиб бўлмайди, унинг учун тенглама тузиб бўлмайди. Буни алоҳида усул билан, айтиш мумкинки, эркин математика ҳам алгебра арифметикасига сезиларли ёрдам беради.

Бутун поданинг баҳоси сўмларда аниқ квадратдан иборат, чунки пода n та ҳўкизни ҳар бир ҳўкизни n сўмдан иборат пулга сотиб олинган эди. Шериклардан бирига битта ортиқча қўй тегди, демак, ўйинлар сони тоқ; бинобарин, n^2 сонда ҳам ўнлар сони тоқ. Бирликлар рақами қандай?

Исботлаш мумкинки, агар тиниқ квадратда ўнликлар сони тоқ бўлса, у ҳолда ундаги бирликлар сони фақат 6 та. Ҳақиқатдан ҳам, a та ўнликли ва b та бирликли, ҳар қандай соннинг квадрати, янги $(10a+b)^2$ қуйидагига тенг:

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2.$$

Бу сонда ўнликлар $10a^2+2ab$ та ва b^2 да бор бўлган бир нечта ўнлик сон. Аммо ўн $10a^2+2ab$ та сон 2 га бўлинади. –бу жуфт сон. Шунинг учун b^2 даги ўнликлар сони тоқ бўлса, $(10a+b)^2$да бор бўлган ўнликлар сони тоқ бўлади. b^2нинг эканлигни эслайлик. Бу –бирликлар рақамни квадрат, яъни қуйидаги 10 та сонниннинг биттаси:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Буларнинг орасида тоқ сондаги ўнликлар фақат 16 ва 36 да – иккаласи 6 билан тугалланади. Демак,

$$100a^2+20ab+b^2$$

аниқ квадрат 6 билан тугаллангандагина, тоқ сондаги ўнликлар эга бўлиши мумкин.

Энди масала саволига жавоб топишимиз осон. Равшанки, қўзичоқ 6 сўмга сотилган. У теккан шерик 4 сўмга кам пул олган. Улушларининг тенглаш учун, қўзичоқ эгаси ўз шерларидан 2 сўм қўшимча ҳақ олиши керак. Қўшимча ҳақ 2 сўмга тенг.

5. 11 га бўлинувчанлик

Алгебра авван, бўлишни бажармасдан берилган сон у ёки бўлинувчига бўлиниши белгиларини топишни жуда енгилаштирди. $2,\ 3,\ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9,\ 10$ га бўлинувчанлик белгилари ҳаммага маълум. 11 ша бўлувчанлик белгиларини келтириб чиқарамиз; у жудда содда ва амалийдир.

Айтайлик, кўп хонали N сонининг ўнлар рақами $b,$ юликлар рақами $c,$ мингликлар рақами d ва ҳ.к. бўлсин, яъни

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots = a + 10(b + 10c + \\ + 100d + \ldots),$$

бу ерда кўп нуқта кейинги хоналарнинг йиғиндисини билдиради. N дан 11 га карралик бўлган $11(b + 10c + 100d + \ldots)$ сонни айирамиз. У ҳолда ҳосил бўлган айирма

$$a - b - 10(c + 10d + \ldots)$$

га тенглиги осонликча кўрилиб ва у N сон каби 11 га бўлиниш қолдиғига тенг бўлади. Бу айирмага 11 га каррали $11(c + 10d + \ldots)$ сонни қўшиб, биз

$$a - b + c + 10(d + \ldots)$$

сонни оламиз, у ҳам N сонни 11 га бўлишда ҳосил бўлган қолдиққа эга. Унда 11 га каррали $11(d + \ldots)$ сонни айирамиз ва ҳ.к. Натижада биз қуйидаги сонни оламиз.

$$a - b + c - d + \ldots = (a + c \ldots) - (b + d + \ldots),$$

у бошланғич N сонни 11 га бўлишда қоладиган қолдиққа эга бўлади.

Бу ерда 11 га бўлувчанлик қуйидаги белгиларни кўлиб чиқади: тоқ ўринда турувчи барча рақамлар йиғиндисидан жуф ўринда турувчи барча рақамлар йиғиндисини айиириш керак; агар айирмада 0 ёки 11 га каррали (мусбат ёки манфий) сон ҳосил бўлса, у ҳолда текширилаётган сон ҳам 11 га каррали; акс ҳолда бизнинг сонимиз 11 га қолдиқсиз бўлмайди.

Масалан, 87635064 сонини текшириб кўрамиз:

$$8+6+5+6=25,$$
$$7+3+0+4=14,$$
$$25-14=11.$$

Демак, берилган сон 11 га бўлинади.

Унчалик узун бўлмаган сонлар учун 11 га бўлинишнинг қўлай бўлмаган яна бошқа белгиси ҳам мавжуд. У текширилаётган сонни ўндан чапга қараб тикка рақамли ёқларга бўлиб чиқиш ва бу ёқларни қўшишдан иборат. Агар ҳосил бўлган йиғинди 11 га қолдиқсиз бўлнса, у ҳолда текширилаётган сон ҳам 11 га каррали, акс ҳолда – йоқ. Масалан, 582 сони текшириб кўрилсин. Сонни ёқларга ажратамиз (5/28) ва икки ёқни қўшамиз:

$$5+28=33.$$

33 сони 11 га қолдиқсиз бўлингани учун 528 сони ҳам 11 га каррали:

$$528:11=48.$$

Бўлинувчанликнинг бу белгисини исботлаймиз. Кўп хонали N сонни ёқларга ажратамиз. У ҳолда икки хонали (ёки бир хонали)сонларни оламиз ва уларни (ўнгдан чапга томон) a,b,c ва ҳ.к. билан белгилаймиз, демак, N сони қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлади.

$$N=a+100b+10000c+\ldots=a+100(b+100c+\ldots)$$

N дан 11 га каррали $99(b+100c+\ldots)$ сонни айирамиз.

Ҳосил бўлган

$$a+(b+100c+\ldots)=a+b+10(c+\ldots)$$

сон N сонни 11 га бўлшанда ҳосил бўладиган ўша қолдиққа эга бўлади. бу сондан 11 га каррали $99(c+\ldots)$ сонни айирамиз ва ҳ.к. Натижада биз N сон 11 га бўлишда у

$$a+b+c+\ldots$$

сонни 11 га бўлганда эга бўладиган қолдиққа эга бўлишини топамиз.

6. Атомашина рақами

М а с а л а

Шаҳар бўйлаб сайр қилоётиб, уч математик-талаба автомашина ҳайдовчисининг йўл ҳаракати қоидасини қўпол бузганини кўриб қолишди. Машина тартиб рақами (тўрт хонали) ҳеч бир талабаэслаб қолмади, аммо математик бўлганлари учун уларнинг ҳар бири бу тўрт хонали соннинг бирор ўзига хос хусусиятларини эслаб қолди. Талабалардан бири биринчи иккита рақам бир хил эканлигини эслади. Ва, ниҳоят учинчиси бу тўрт хонали аниқ квадрат эканлигини тасдиқлади. Бу маълумотлар асосида машининг тартиб рақамини билиб олиш мумкинми?

Ечиш

Қидирилаётган соннинг биринчи (ва иккинчи) рақамини a билан, учинчисини (ва тўртинчисини) b билан белгилаймиз. У ҳолда бу сон қуйидагига тенг бўлади:

$$1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b).$$

Бу сон 11 га бўлинмайди, шунинг учун хам (аниқ квадрат бўлганида) у 11^2 га ҳам бўлинади. Бошқачасига айтганда, $100a+b$ сон 11 га бўлинади. 11 га бўлинувчанликнинг юқорида икки белгисидан бири қўллаб, $a+b$ нинг 11 га бўлинишини топамиз. Аммо бу

$$a+b=11$$

эканлигини билдиради, чунки $a,\ b$ рақамларнинг ҳар бири 10 дан кичик. Аниқ квадрат бўлган соннинг хриги b рақами фақат қуйидаги қийматларни қабул қилиши мумкин:

$$0,\ 1,\ 4,\ \ 5,\ 6,\ 9.$$

Шунинг учун 11-b га тенг бўлган a рақами учун қуйидаги мумкин юўлган рақамларни топамиз:

$$11,\ 10,\ 7,\ \ 6,\ 5,\ 2.$$

Биринчи иккита қиймат яроқсиз ва қуйидаги имкониятлар қолади.

$b = 4,$ $a = 7,$

$b = 5,$ $a = 6,$

$b = 6,$ $a = 5,$

$b = 9,$ $a = 2.$

Кўрамизки, автомашина тартиб рақамини қуйидаги тўрт сон орасидан қидириш керак:

$7744,\ 6655,\ 5566,\ 2299.$

Аммо охриги учта сон аниқ квадрат эмас: 6655 сони 5 га бўлинади, лекин 25 га бўлинмайди; 5566 сони 2 га бўлинади, аммо 4 га бўлинмайди; $2299 = 121 \cdot 19$ сони ҳам квадрат эмас. Фақат $7744 = 88^2$ қолади; у масала ечимини беради.

7. 19 га бўлинувчанлик

19 га бўлинувчанлик қуйидаги белгисини асослансин. Сон 19 га фақат унинг ўнликлари сони билан иккиланган бирликлари сони йиғиндиси 19 га каррали бўлганда ва шундагина қолдиқсиз бўлинади.

Ечиш

Ҳар қандай N сонни қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$N = 10x + 2y$$

бу ерда $x -$ ўнликлар сони (ўнликлар хонасидагинадаги рақам эмас балки N сондаги ўнларнинг жами сони), $y -$ бирликлар рақами. Биз

$$N' = x + 2y$$

сон 19 га каррали бўлганлигина ва фақат ўунингдек N сон 19 га каррали эканлигини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун N'ни 10 га кўпайтирамиз ва бу кўпайтмадан N ни айирамиз; қуйидагини оламиз:

$$10N' - N = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y.$$

Бу ердан кўринадики, агар N' сон 19 га қолдиқсиз бўлинса,

$$N = 10N' - 19y$$

Ҳам 19 га қолдиқсиз бўлинади; ва тескарисини, агар N сон 19 га қолдиқсиз бўлинса,

$$10N' = N + 19y$$

сон 19 га каррали, равшанки, N' ҳам 19 га қолдиқсиз бўлинади.

Айтайлик, 47045881 сонини 19 га бўлиниш-бўлинмаслиги аниқлаш талаб этилсин.

Биз ўзимизнинг бўлиниш белгимизни кетма кет қўллаймиз:
19 сони 19 га қолдиқсиз бўлингани учун 19 га 57, 475, 4712, 47063, 470459, 4704590, 47045881 сонлари каррали.
Шундай қилиб, билнинг сонимиз 19 га бўлинади.

8. София Жермен теоремаси

Мана машҳур француз математиги София Жермен таклиф қилган масала: ҳар бир $a^4 + 4$ кўринишдаги сон мураккаб сон (агар a сон 1 га тенг бўлмаса) эканлиги исботлансин.

Ечиш

Исбот қуйидаги ўзгартиришлардан келиб чиқади:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^4 + 4 - 4a^2 = \left(a^2 + 2\right)^2 - 4a^2 =$$
$$= \left(a^4 + 2\right)^2 - (2a)^2 = \left(a^2 + 2 - 2a\right)\left(a^2 + 2 + 2a\right).$$

$a^4 + 4$ сони, ўзига ва бирга тенг бўлмаган икки кўпайтувчининг кўпайтмаси кўринишда ифодаланиши мумкинлигига ишонч ҳосил қилдик, бошқа сўз билан айтганда у мураккаб сон.

9. Мураккаб сонлар

Туб сондар деб аталувчи сонлар, яъни бирдан катта ҳамда бир ва ўзидан бошқа ҳеч қандай бутун сонларга қолдиқсиз бўлинмайдиган сонлар чексиз кўп.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$ сонлардан бошланиб, уларни қатори чексиз давом этади. Мураккаб сонлар орасига суқулиб кириб улар натурал жсонлар қаторини мураккаб сонларнинг бир мунча узунлкдаги учаскаларга ажратилади. Бу участкалар қандай узунликда бўлишлари мумикн? Бирорта туб сон билан узилмайдиган, масалан, мингта мураккаб сон кетма-кет бир жойда бўлиши мумкин?

Гарчи бу ҳақиқиатда ўхшамаса ҳам исботлаш мумикнки, туб сонлар орасида исталган узунликдаги мураккаб сонлар участкалари бўлиши мумикн. Бундай учаскалар учун чегара йўқ: улар минглаб, милонлаб, триллионлаб ва ҳ.к. мураккаб сонларда тузилган бўлиши мумикн.

Қулайлик учун $n!$ шартли символдан фойдаланамиз, у 1 дан n гача бўлган барча сонлар кўпайтмасини билдиради. Масалан, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$

Биз ҳозир

$$[(n+1)!+2], \quad [(n+1)!+1], \quad [(n+3)!+3], \quad [(n+1)!+4], \ldots$$
$$dan \quad [(n+1)!+n+1]$$

гача бўлган қатор охригисини ҳам ҳисобга олинган n та кетма-кет мураккаб сондан ташкил топганлигини исботлаймиз.

Бу сонлар натурал қаторда бевосита бирин кетин келади, чунки ҳар бир кейингиси олдингисидан 1 га катта. уларнинг ҳаммаси мураккаб сон эканлигини исботлаш қолди, холос.

Биринчи сон

$$(n+1)!+2 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot (n+1) + 2$$

жуфт, чунки унинг иккала қўшилувчиси 2 кўпайтувчига эга. 2 дан катта ҳар қандай жуфт сон – бу мураккаб сон.

Иккинчи сон

$$(n+1)!+3 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot (n+1) + 3$$

ҳам ҳар бири 3 га каррали бўлган иккита қўшилувчидан тузилган. Демак, бу сон ҳам мураккаб сон.

Учинчи сон

$$(n+1)!+4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot (n+1) + 4$$

4 га қолдиқсиз бўлинади, чунки 4 га каррали қўшилувчилар тузилган.

Шунга ўхшаш ҳолда кейинги сон

$$(n+1)!+5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot (n+1)+5$$

5 га каррали эканлигини аниқлаймиз ва ҳ.к. бошқача қилиб айтганда, бизнинг қаторимизнинг ҳар бир сон 1 дан ва ўзидан фарқли кўпайтувчига эга; демк; у мураккаб сондир;

Агар сиз, масалан бешта кетма-кет келадиган мураккаб сонни ёзмоқчи бўлсангиз, юқорида келтирилган қаторда n ўрнига 5 сонини қўйишингиз етарли. Сиз қуйидаги қаторни олсангиз:

$$722,\ 723,\ 724,\ 725,\ 726.$$

Аммо бу- бешта кетма-кет мураккаб сондан иборат ягона қатор эмас. Бошқалари ҳам бор. Масалан,

Ёки булардан ҳам кичик сонлар

$$24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28.$$

Қуйидаги масалани ечишга уриниб кўрамиз:

Ечиш

Аввал айтилганларга асосланиб, қилинаётган ўнта сондан бири сифатида

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 10\cdot 11\cdot 12+2=39816802$$

ни олиниш мумкинлигини аниқлаймиз. Қидирилаётган сонлар серияси сифатида, демак, қуйидагилар хизмат қилиши мумикн:

$$39846802,\ 39816803,\ 39816804\ va\ h.k$$

Бироқ ўнта сондан иборат анча кичик мураккаб сонлар кетма-кетлиги мавжуд. Жумладан иккинчи юзликдаёқ ўн учта кетма-кет мураккаб сон сериясини кўрсатиш мумкин.

$114,\ 115,\ 116,\ 117\ \ va\ h.k\ 126$ ни қўшиб ҳисоблаганга қадар.

10. Туб сонлар сони

Ҳар қандай (билганча) узуникдаги мураккаб сонлар кетма-кетлиги сериясининг мавжудлиги туб сонлар қатори ҳақиқатдан ҳам чегарага эга эмаслигига шубҳа уйғотишга қодир. Бу ерда туб сонлар қатори чексизлигининг исботини келтириш ортиқчалик қилмайди.

Исбот қадимги Юоноистон математиги Эвклидга тегишли ва унинг машҳур (бошланғичларига) киради. У “тескарисидан” исботлаш тоифасига мансуб. Фараз қилайлик туб сонлар қатори чекланган ва бу қатор охриги туб сонни N ҳарифи билан белгилаймиз. Қуйидаги кўпаймани тузамиз:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N = N!$$

ва унга бирни қўшамиз. Қуйидагини оламиз.

$$N! + 1$$

Бу сон бутун бўлиб, ҳеч бўлмаганда битта эга бўлиши керак. Яъни хеч бўлмаганда битта туб сонга бўлиниши керак. Аммо ҳамма туб сонлар, фаразимизга кўра, N дан катта эмас, $N!+1$ сон эса N га тенг ёки ундан кичик ҳеч бир сонга қолдиқсиз бўлинмайди. Ҳар сафар 1 қолдиқ ҳосил бўлади. шундай қилиб, туб сонлар қатори чекланган деб қабул қилиш мумкин эмас: бу фараз зиддиятликка олиб келади. Демак, натурал сонлар қаторида қандай узунликдаги мураккаб сонлар кетма-кетлиги сериясини учратмайлик, биз ундан кейин яна туб сонлар яна чексиз кўп топилишига ишонч хосил қилишимиз мумкин.

§3.3.Илдиздан чиқариш. Арифметиканинг олтинчи амали

Қўшиш ва кўпайтириш биттадан тескари амалган эгалар, уларни айириш ва бўлиш дейилади. Бешинчи математик амал даражага кўтариш *иккита тескари* амалга эга: асосни қидириш ва кўрсатгични қидириш. Асосни қидириш олтинчи математик амалдир ва уни *илдиздан* чиқариш деб аталади. Кўрсатгични топиш етинчи амал *логарифлаш* деб аталади. Нима учун даражага кўтариш иккита тескари амалга эга эканлиги, қўшиш ва кўпайтириш эса биттадан тескари амалган эга эканлиги сабабини билиш қийин эмас: қўшилувчилар тенг ҳуқуқли, уларнинг ўрнини алмаштириш мумкин; бу кўпайтириш учун хам ўринли; бироқ даража кўрсатгичииштирок этувчи сонлар, яъни асос ва даража кўрсатгичи ўзаро тенг ҳуқуқли эса; умуман олганда уларнинг ўрнини алмаштириш мумкин эмас (масалан

$3^5 \neq 5^3$). Шунинг учун қўшиш ва кўпайтириш иштирок этиувчи ҳар бир сонни қидириб топиш бир хил усулда амалга оширилади, даража асосини ва даража кўрсатгичини қидириб топиш эса турли хилда бажарилади.

Олтинчи амал, илдиз чиқариш $\sqrt{}$ белгиси билан белгиланади. Аммо ҳамма биладики, бу – лотин ҳарф r ни “илдиз”ни билдирувчи лотин сўз бош ҳарфи кўринишни ўзгартириш. Илдиз белгиси сифатида R бош ҳарф хизмат қилган вақтлар бўлган (ХВИ аср), унинг ёнида эса “квадрат” лотин сўзини биринчи ҳарфи (q) ёки “куб” (c) қўйилган, у қандай илдиз олишни талаб этилишини кўрсатган.

Масалан, ҳозирги белгилаш

$$\sqrt{4352}$$

нинг ўрнига,

$$R.\ \ q.\ 4352$$

ни ёзилган.

Агар бунга ўша даврда умумий истемолига кирмаган плус ва минуснинг ҳозирги белгилари ўрнига p ва m. ҳарфларни ёзишлари ва бизнинг қавсларимизни $\lfloor\ \ \rfloor$ белгилар алмаштирилганлигини қўшсак, у ҳолда равшан бўладики, ўша вақтдаги алгебраик ифодалар ҳозирги замон кўзида ғайриоддий кўринишга эга бўлар эди.

Мана қадимги математик Бамбелли (1572)нинг китобидан мисо:

$$R.\ c.\ \lfloor [R.q.\ 4352\ \ p.16 \rfloor m\ R.\ c. \lfloor R.q.\ 4352\ \ p.16 \rfloor$$

Биз бу ёзувни бошқа белгилар билан қуйидагича ёзган бўлар эдик:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}$$

$\sqrt[n]{a}$ белгисидан ташқари бу амал учун бошқа, умумлаштириш маъносида жуда қулай бўлган $a^{\frac{1}{n}}$ ишлатилади: у ҳар бир илдизнинг даража эканлигини яққол кўрсатди. У ажойиб голланд математиги Стевин томондан 17- асрда таклиф этилган.

1. Қайси бири катта

1-м а с а л а

Қайси бири катта $\sqrt[5]{5}$ ми ёки $\sqrt{2}$ ми?

Бу ва бошқа масалаларни илдиз қийматларини ҳисобламасдан ечиш талаб этилади.

Ечиш

Икки ифодани 10 даражага кўтариб,

$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10} = 5^2 = 25, \ \left(\sqrt{2}\ \right)^{10} = 2^5 = 32$$

ни оламиз, $32 > 25$ бўлгани учун

$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.

2-м а с а л а

Қайси бири катта: $\sqrt[4]{4}$ ми ёки $\sqrt[7]{7}$ ми?

Е ч и ш

Иккала ифодани 28-даражага кўтариб,

$\sqrt[4]{4} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 = 128^2$,

$\sqrt[7]{7}^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2$

ни оламиз $128 > 49$ бўлгани учун

$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$

3 – м а с а л а

Қайси бири катта: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ ми ёки $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ ми?

Е ч и ш

Иккала ифодани квадратга кўтариб,

$\left(\sqrt{7} + \sqrt{10}\right)^2 17 + 2\sqrt{70},$

$\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)^2 = 22 + 2\sqrt{57}$

ни оламиз. Иккала ифодани 17 га камайтирамиз, бизда

$2\sqrt{70}$ ва $5 + 2\sqrt{57}$

қолади. Бу ифодаларни квадратга кўтарамиз:

280 ва $253+20\sqrt{57}$

253 ни айириб,

27 ва $20\sqrt{57}$

ни солиштирамиз. $\sqrt{57}>2$ бўлганидан $20\sqrt{57}>40,$ демак,

$\sqrt{3}+\sqrt{19}>\sqrt{7}+\sqrt{10}.$

2. Бир назар билан ечиш

М а с а л а

Ушбу тенглама

$$x^{x^3}=3$$

га диққат билан қаранг ва x нимага тенглигини айтинг.

Ечиш

Алгебраик символларни яхши ўзгартириб олган ҳар бир одам

$$x=\sqrt[3]{3}$$

эканлигини дарҳол топади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$x^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=3$$

ва, демак,

$$x^{x^3}=x^3=3.$$

ана шу талаб қилинган эди.

Бу бир назар билан ечишга кучи етмайдиган одам номаълумни қидиришни қуйидаги йўл билан осонлаштириш мумкин.

Айтайлик,

$$x^3=y$$

бўлсин. У ҳолда

$$x=\sqrt[3]{y}$$

ва тенглама ушбу кўриниш олади:

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)^y = 3$$

Ёки куба кўтарсак,

$$y^y = 3^3.$$

равшанки, $y = 3$ ва, демак,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

3. Алгебра ҳазиллари

1 масала

Олтинчи математик амал $2 \cdot 2 = 5,\ 2 = 3$ ва ш.ў. сюужетларга оид чинакам алгебраик ҳазиллар ва майнобозчиликларни ижро этиш имкониятини беради. Бундай математик чиқишларнинг ҳазли жуда содда-ҳато биз оз ниқобланганлигида ва кўзга ташланмаслигида яширинган. Алгебра соҳасидаги бу комик реператуардан иккита пйеса ижро этамиз.

Биринчиси:

$$2 = 3.$$

Саҳна аввал рад қилиб бўлмайдиган ушбу тенглик пайдо бўлади:

$$4 - 10 = 9 - 15$$

Кейинги кўринишда тенгликнинг иккала қисмига $6\frac{1}{4}$ га тенг қиймат қўшилади:

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

Комедиянинг кейинги юриши қуйидаги ўзгаришлардан иборат:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Тенгликни иккала қисмида квадарат илдиз чиқариб,

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$$

ни оладилар.

Иккала қисмига $\frac{5}{2}$ ни қўшиб, бемаьни тенгликка келадилар.

§3.4.Логарифмлаш. Арифметиканинг еттинчи амали

Бешинчи амал-даражага кўтариш иккита тескари амалга эгалигини эслаган эдик. Агар

$$a^b = c$$

бўлса, a ни қидириб топиш битта тескари амал – илдиз чиқариш; b ни топиш эса-бошқа логарфимлаш амали. Ўйлайманки, бу китобим ўқувчиси логарифмлар ҳақидаги таъминот асослари билан мактаб курси ҳажмида таниш. Унинг учун, масалан

$$a^{\lg ab}$$

ифода нимага тенг бўлишини фахмлаш, эҳтимол, оғирлик қилмайди.

Агар логарифмлар асоси a ни b сонининг логарифм даражасига кўтарилса, натижа b сон ҳосил бўлиши кераклигини тушуниш қийин эмас.

Логарифимик нима учун ўйлаб топилган? Албатта ҳисоблашларни тезлаштириш ва соддалаштириш учун. Биринчи логарифмик жадваллари ихтиро этган Непер ўзининг хоҳиши ҳақида шундай сўзлайди:

Мен одатда, жуда кўпчиликни математикани ўрганишда чўчитадиган зерикарли ҳисоблашлардан иложи борича ва билганимча уларнинг қйинчилиги ва зерикишидан узоқлашган ҳаракат қилар эдим.

Ҳақиқатан хам, логарифимлар ғисоблашларини жуда ҳам енгиллаштиради ва тезлаштиради. Логарифимлар шундай амалларни бажаришга имкон берадики, бу амал уларнинг уларнинг ёрдамисиз бажариш жуда қийин эканлигини (исталган даражадаги илдизларни олишни) гапирмаса хам бўлади.

Асосли равишда “логарифларнинг ихтиро қилиниши бир неча ойлик ҳисоблашларни бир неча кунлик меҳнатга келтириб, астроном ҳаётини гўёки икки марта узайтиради”, деб ёзилган эди Лаплас. Буюк математик астроном ҳақида гапиради, чунки улар айниқса, қийин ва чарчатадиган ҳисоблашларни бажаришларига тўғри келади. Бироқ унинг сўзлари тўла хуқуқ билан умуман ҳамма сонли ҳисоблар билан ишловчиларга нисбатан ҳам айтиш мумкин.

Логарифимларни ишлатиш ва улар томонидан ҳисоблашларни енгиллаштириб беришга кўниккан бизлар учун улар узларининг яралишларида яратилган ажабланиш ва ғурурланишни тасаввур қилиш қийин. Кергусида ўнли логарифимларни ихтиро қилиб машҳур бўлган Бригг логарифмлар ихтиросини Непернинг асарини олиб, шундай ёзган эди: “Ўзининг янги ва ажабланарли логарифимлари билан Непер мени каллам билан ҳам, қўлим билан ҳам кучли ишлаган мажбур эди. Мен уни ёзда кўришга умид қиламан, чунки ҳеч қачон менга кўпроқ ёқадиган ва катта ҳайратга олиб келган китоб ўқимаганман”. Бригг ўз мақсадини амалга оширди ва логарифмлар ихтиросини босиб кўриш учун шотландияга отланди. Учрашувда Бригг шундай деди:

“Мен узоқ сайохатга сизни кўриш ва астрономлар учун аъло даражадаги қўлланма-логарифмлар ҳақидаги биринчи фикрга қандай заковат ва санъат қуроли ёрдамида келганингизни билиш мақсадида киришдим. Бироқ, энди мен уларни илгари хеч ким топмаганига кўпроқ ҳаёрон бўламан, - улар ҳақида билганибдан кейин улар шунчалик содда туюлади”.

1. Логарифмаларнинг рақиблари

Логарифмлар ихтиросидан илгарироқ ҳисоблашларни тезлаштириш талаби бошқа тоифага жадвалларни яратди ва улар ёрдамида кўпайтириш амали қўшиш ўрнига айиришга алмаштирилади. Бу жадвалларнинг тузилиши қуйидаги айниятга асосланган

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

бунинг тўғрилигига қавсларни очиб осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Тайёр квадратлар чоракларига эга бўлган ҳолда икки сон кўпайтмасини, кўпайтиришни бажармасдан, бу сонлар ёиғиндиси квадратнинг чорагига айириб топиш мумкин. Айни ўша жадваллар квадратга оширишни ва квадрат илдиз олишни осонлаштирадила, тескари сонлар жадваллари билан бирликда эса, бўлиш амали ҳам соддалаштирилади. Бу жадвалларнинг логарифимик жадвалларидан устунлиги шундаки, улар ёрдамида, тақрибий эмас, балки аниқ натижалар ҳосил бўлади. Лекин улар логарифимик жадвалларга қатор бошқа жихатлар, айниқса, муҳим амалий жихатларда ён берадилар. Квадратлар чораклари жадваллари фақат иккита сонни кўпайтиришга имкон берса, логарифимлар исталган сонда кўпайувчиларнинг кўпайтмаси дархол топиш, бундан ташқари исталган даражага кўтариш ва исталган кўрсатгичли илдизларни олиш (бутун ёки каср) имконини беради. Квадратлар чораклари жадвалари ёрдамида, масалан, мураккаб просентларни ҳисоблаш мумкин эмас.

Шундай бўлсада, квадратлар чоракларни жадвалларни турли ифодага логарифимик жадваллар пайдо бўлганидан кейин ҳам нашр этилаверади.

1856 йили Франсияда қуйидаги номдаги жадваллар нашрдан чиқди.

1 дан 1000 милонгача бўлган сонлар квадратлари жадваллари, улар ёрдамида логарифимлар ёрдамига кўра қулай жуда содда усул билан сонлар кўпайтмаси аниқ топилади. Александр Коссар тузди.

Бу анча илгари ошганиги билмаган кўпчиликда бу ғоя ҳосил бўлади. Менга икки марта бундай жадваллар ихтирочилари худди янгиликдай мурожаат қилишади ва уларни уч юз йил аввал ихтиро қилинганликларини билиб жуда ажабландилар.

Логарифмларнинг бошқа, ёшроқ рақиблари бу кўпчилик техник маълумотномаларда бор бўлган ҳисоблаш жадвалларидир. Бу йиғма жадваллар қуйидаги графларни ўз ичига олади. Сонлар квадратлар, кублари, квадрат илдизлари, куб илдизлари, тескари сонлар, айлана узунликлар ва 2 дан 1000 гача сонлар учун доиралар юзи. Кўпчилик техник ҳисоблашлар учун бу жадваллар жуда қулай, бироқ улар ҳам кенг қўлланиш соҳасига эга.

2. Логарифмик жадваллар эволюцияси

Бизнинг мактабимизда яқин яқинларгача 5-хонали логарифимик жадваллар ишлатилади. Энди 4-хонали ўтишди, чунки улар техник хисоблар учун тўла етарлидир. Бироқ кўпччилик амалий заруриятлар учун 3-хонали мантиссалар билан муваффақиятли ишлаш мумкин: ахир кундалик ўлчашлар жуда кам ҳолларда уч хонадан кўпи билан бажарилади.

Яна ҳам қисқа мантиссалар йетарлилиги фикр нисбатан яқинда тушуниб етилди. Менинг эсимда, бизнинг мактабларда ҳали хизматда бўлган оғир 7-хонали логарифимлар томлари, улар ўз ўрниларини шиддатли курашлардан сўнг 5-хоналига бўшатиб керишган. Аммо 7-хонали логарифмлар ўзларининг пайдо бўлишларида (1794) йўл қўйиб бўлмайдиган янгилик бўлиб, туюлганлар. Лондонлик математик Генри Бригг (1624) томонидан яратилган биринчи ўнлик логарифмлар 14 хонали эди. Уларни бир неча йилдан сўнг голланд математиги Анддриан Влаккнинг 10 хонали жадвалларга алмаштирадилар.

Кўраяпмизки, ишга ярокли логарифмик жадваллар эвалутцияси кўп хонали мантиссадан қисқароғи томон борди ва бизнинг кунларимизда ҳам якунланмайди, чунки ҳозир кўпчилик томондан содда фикр-ҳисоблашлар аниқлиги ўлчаш аниқлигидан ортиқ бўлиши мумкинмаслиги англаб етилмаган.

Мантиссаларни қисқартириш иккита амалий натижагга олиб келади: 1) жадваллар ҳажми сезиларли камаяди ва 2) шу билан боғлиқ ҳолда ундан фойдаланиш осонлашди ва, демак, улар воситаси бажариладиган ҳисоблашлар тезлашади. Сонларнинг етти хонали логарифмлар катта формадаги 200 бетга яқин жойи, хоналилар-икки марта кичик форматдаги 30 бет жойи, 4 хоналилари ўн икки марта кичик ҳажмни эгаллаб, катта форматли икки бетга жойлашади, 3 хоналиги бир бетга жойлашиши мумкин.

Ҳисоблашлар тезлигига келсак, масалан, 5 хонали жадваллар воситасида ҳисоблашлар 7 хонали жадваллар ёрдамида ҳисоблашдан уч марта кам вақт талаб қилиши аниқланган.

5. Логарифмик қизиқ нарсалар

Агар амалий ҳаётнинг ва техник одатларнинг ҳисоблаш эҳтиёжлари 3 хонали ва 4 хонали билан тўлиқ қаноатлантирилса, бошқа томондан эса, назарий текширувчи хизматига 14 хонали Бригг логарифмларидан ҳам кўп хонали жадваллар бор. Умуман айтганда, кўп ҳолларда логарифм иррационал сон ва ҳеч қандай рақамлар сони билан аниқ ифодаланиб бўлмайди; кўпчилик сонларнинг логарифмлари қанча хона олинмасин, фақат тақрибан ифодаланади, - мантиссасида қанча рақам кўп бўлса, шунча аниқроқ бўлади. Илмий ишлар учун 14 хонали 14 хонали логарифмлар ҳам баъзан етарли бўлмайди.. лекин 500 та турли хил логарифмик жадваллар орасида улар ихтиро қилингандан буён дунё юзини кўрганлари орасида, текширувчи ҳамма вақт ўзини қаноатлантирувчиларни топади. масалан, Франсияда Калле томонидан (1795) нашр қилинган 2 дан 1200 гача бўлган сонларнинг 20 хонали логарфмалрини айтишимиз мумкин. Яна ҳам чегараланган сонлар гуруғи учун ўн хонали жуда катта бўлган логарифмлар жадваллари борки – ҳақиқий логарифмик қизиқ нарсалар, уларнинг мавжудлигини мен ишондимки, кўпчилик математиклар билмайдилар.

Ман ўша улкан логарифмлар: уларнинг барчаси – ўнлик эмас, натурал логарифмлар.

10000 гача бўлган сонлар учун Волфрамнинг 48-хонали жадваллари;

61-хонали Шарп жадваллари;

102-хонали Парк Херт жадваллари ва, ниҳоят, логарифмик ўта қизиқарли нарса;

260 хонали Адамс логарифмлари

Охирги ҳолда биз жадвалга эмас, балки фақат бешта сон: 2, 3, 5, 7, 10 нинг натурал логарифимларига ва уларни ўнли логарифмларга ўтказувчи (260 хонали) кўпайтувчига эгамиз. Бироқ тушуниш қийин эмас, бу бешта сон логарифимга эга бўлиб туриб, оддий қўшиш ёки кўпайтириш билан кўпчилик мураккаб сонларнинг логарифмларини ҳосил қилиш мумкин, масалан 12 нинг логарифми 2,2 ва 3 нинг логарифмлари йиғиндисига тенг ва ш.ў.

Логарифмик ғалати нарсалар қаторига тўла асос билан ҳисоб ленейкаси – “йоғоч логарифмлари” бу ақлли асбоб ўзининг қулайлиги туфайли техниклар учун ўнта соққали идора чўтлари каби одатий бўлиб қолмаганида ҳам қўшса бўлар эди. Логарифм принсипи бўйича ишловчи ва шунга қарамай ифолаловчидан логарифм нима эканлигини билишни талаб этмайдиган бу асбобга одатланиб қолиш ундан ҳайратланиш ҳиссини сўндиради.

4. Логарифмлар эстрадада

Омма олида профеммионал ҳисобчилар бажарадиган энг ҳайратланарли номерлардан бири, шубҳасиз қуйидагидир. Кўп хонали сонларда юқори даражали илдизларни фикран оладиган моҳир ҳисобчи ҳақида афишалар аввалдан хабардор қилинган сиз уйда сабирсизлик билан бирон бир соннинг 31-жаражасини ҳисоблашлар билан хисобловчини 35 хонали сонли линкор билан йенгмоқчимисиз. Зарур лаҳзада сиз ҳисобчига бундай сўзлар билан мурожаат қиласиз.

Қуйидаги 35 хонали сондан 31 даражали илдизни олишга уриниб кўринчи. Ёзиб олинг, мен айтиб тураман.

Моҳир ҳисобчи бўрни олади, сиз оғзингизни биринчи рақамни айтиш учун очиб улгурмасингиздан, унда натижа ёзиб бўлинган.

Сонни билмасдан туриб у илдиз чиқариб бўлди, яна 31-даражали илдизни яна фикран, яна яшин тезлигида. Сиз ажаблангансиз, ерга урилгансиз, ҳолбуки бунда хеч қандай мўжизавийлик йўқ. Сир шундаки, 31-даражада 35 хонали сонни берадиган сон фақат битта сон, айни 13 сони, мавжуд. 13 дан кичик сонлар 35 та рақамдан кичик, ундан катта сонлар – катта рақамли сонни беради.

Қайердан, бироқ уни ҳисобчи билди? У қандай қилиб 13 сонини топади? Унга логарифмлар, у биринчи 15-20 та сонлар учун ёддан биладиган икки хонали логарифмлар ёрдам беради. Бу қандай туюулушидан қатьий назар буни тасдиқлаш кўп хам қийин эмас, айниқса агар мураккаб соннинг логарифими унинг туп кўпайтувчилари логарифмлари йиғиндисига тенглигидан фойдаланилса 2, 3 ва 7 нинг логарифмларини пухта билишиз холда сиз энди биринчи ўнлик сонлар логарифмларини биласиз; иккинчи ўнлик учун яна тўртта соннинг логарифмини билиш талаб этади.

Қандай бўлганда ҳам, эстрада ҳисобчиси фикран қуйидаги икки хонали логарифмлар жадвалини билади:

Сон	**Лог.**	**Сон**	**Лог.**
			1,04
2	0,30	11	1,08
3	0,48	12	1,11
4	0,60	13	1,15
5	0,70	14	1,18
6	0,78	15	1,20
7	0,85	16	1,23
8	0,90	17	1,26
9	0,95	18	1,28

Сизни ажаблантирадиган математик найранг қуйидагидан иборат:

$$\lg \sqrt[31]{(35\,ta\ raqam)} = \frac{34,...}{31},$$

Қидирилаётган логарифм

$$\frac{34}{31} \quad \text{ва} \quad \frac{34,99}{31} \quad \text{ва } 1,13$$

орасида бўлиш мумкин.

Бу оралиқда фақат бир бутун соннинг логарифм и бор, у ҳам бўлса, 1,11 яъни 13 нинг логарифми. Шундай йўл билан сизни лол қолдирилган натижа учун профессионал топқирлик ва эпчилликка эга бўлиш керак, лекин иш моҳияти бўйича, фокисларни фикран бўлмаса ҳам қоғозда амалга оширишингиз мумкин.

Келинг сизга қуйидаги масала таклиф этилган бўлсин: 20 хонали сонда 64- даражали илдиз олинсин.

Бу қандай сон эканлигини билмасдан туриб, сиз чиқарилган илдиз натижасини эълон қилишингиз мумкин:

Илдиз 2 га тенг.

Ҳақиқатан,

$$\lg \sqrt[64]{\left(20\,ta\ raqam\right)} = \frac{19,...}{64},$$

у, демак, $\frac{34}{31}$ ва $\frac{19,99}{64}$ орасида, яъни 0,29 ва 0,32 орасида бўлиши керак. Бундай логарифм бутун сон учун битта:

0,30... яъни 2 сонинг логарифми.

Сиз масала берувчини яна тамоман ҳайратда қолдиришингиз мумкин. Унга у сизга қандай сонни айтмоқчилигини айтиб берсангиз: машҳур шахмат сони

$$2^{64}\ \ 18446744073709551616.$$

ни айтиб лол қолишингиз мумкин .