

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУСАИНОВ Я.М.

**ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК
СТАТИСТИКА**

Маъруза матни

Самарқанд- 2016

1-мавзу.Эҳтимоллар назариясининг предмети ва унинг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти.Эҳтимоллик ва унинг таърифи

Режа:

1. Эҳтимоллар назарияси предмети.
2. Эҳтимоллар назарияси ривожланишининг қисқача тарихи.
3. Эҳтимоллар назариясининг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти.
4. Элементар ҳодисалар ва ҳодисалар.
5. Эҳтимоллик ва унинг таърифи.
6. Нисбий частота.

Узоқ даврлар мобайнида инсоният ўз фаолияти учун фақат детерминирланган деб аталмиш қонуниятларни ўрганар ва улар-дан фойдаланар эди. Бироқ тасодикий ҳодисалар бизнинг ҳаёти-мизга хоҳиш-иродамиздан қатъий назар кириб келгани ва бизни доимо ўраб тургани учун ҳамда, устига-устак, табиатнинг деярли барча ҳодисалари тасодикий хусусиятли бўлгани учун уларни тадқиқ қилишни ўрганиш ва шу мақсадда тадқиқот усуллари ишлаб чиқиш зарурдир.

Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг на-моён бўлиш шакли бўйича иккита синфга бўлинади: детерминирланган (олдиндан аниқ) ва статистик.

Масалан, осмон механикаси қонунларига асосан Қуёш сис-темасидаги сайёраларнинг ҳозир маълум бўлган вазияти бўйича уларнинг ихтиёрий пайтдаги вазияти амалда бир қийматли ол-диндан айтиб берилиши мумкин, шу жумладан, Қуёш ва Ой тути-лишлари жуда аниқ башорат қилиниши мумкин. Бу детерминир-ланган қонунларга мисол.

Шу билан бирга ҳамма ҳодисаларни ҳам аниқ башорат қилиб бўлмайди. Масалан, иқлимнинг узоқ муддат давомида ўзга-ришлари, об-ҳавонинг қисқа муддатли ўзгаришлари муваффақи-ятли башорат қилишнинг объектлари бўла олмайди, яъни кўпгина қонунлар ва қонуниятлар детерминирланган доирага анча кам даражада бўйсунди. Бундай турдаги қонунлар статистик қонунлар деб аталади. Бундай қонунларга асосан, бирор-бир тизимнинг ке-лажакдаги ҳолати бир қийматли эмас, балки фақат маълум бир эҳтимоллик билан аниқланади.

Эҳтимоллар назарияси бошқа математик фанлар каби амалиёт эҳтиёжларидан пайдо бўлди ва ривожланди. У оммавий тасодикий ҳодисаларга хос қонуниятларни ўрганиш билан шуғулланади.

Эҳтимоллар назарияси шарт-шароитларнинг аниқ бир мажмуасини амалга оширганда кўп мароталаб қайтарилишга қодир бўлган оммавий тасодикий ҳодисаларнинг хоссаларини ўрганади. Табиатидан қатъий назар, ихтиёрий тасодикий ҳодисанинг асосий хусусияти — уни амалга ошишининг ўлчови ёки эҳтимоллиги.

Биз кузатадиган ҳодисаларни учта турга бўлиш мумкин: муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодикий.

Муқаррар ҳодиса деб албатта рўй берадиган ҳодисага айтилади. *Мумкин бўлмаган ҳодиса* деб мутлақо рўй бермайдиган ҳо-дисага айтилади. *Тасодифий ҳодиса* деб рўй бериши ҳам, рўй бер-маслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Эҳтимоллар назарияси якка ҳодиса рўй бериш ёки бермас-лигини олдиндан айтиб бериш вазифасини ўз олдига қўймайди, чунки тасодифий ҳодисага ҳамма шарт-шароитларнинг таъсири-ни ҳисобга олиш мумкин эмас. Бошқа томондан қараганда, кон-крет табиатидан қатъий назар, етарлича кўп сондаги бир жинсли тасодифий ҳодисалар тайин қонуниятларга, аниқроғи эҳтимолий қонуниятларга бўйсунди.

Шундай қилиб, *эҳтимоллар назариясининг предмети омма-вий бир жинсли тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимолий қонуният-ларини ўрганишидир.*

XVII асрнинг бошларидаёқ оммавий тасодифий ҳодисаларга хос бўлган баъзи-бир масалаларни тегишли математик услублар-дан фойдаланган ҳолда ечишга уринишган. Б. Паскаль, П. Ферма ва Х. Гюйгенс XVII асрнинг ўрталарида турли кимор ўйинлари-нинг кечиши ва натижаларини ўргана бориб, классик эҳтимоллар назариясига асос солишди. Улар ўз ишларида эҳтимоллик ва та-содифий миқдорнинг математик қутилмаси тушунчаларидан ош-кор бўлмаган ҳолда фойдаланишган. Фақат XVIII асрнинг боши-да Я.Бернулли эҳтимоллик тушунчасини шакллантиради.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги муваффақиятлари Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон ва бошқаларнинг номлари билан боғлиқ.

Эҳтимоллар назариясининг ривожланишига П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А. Прохоров ва бошқалар каби рус ва совет матема-тиклари улкан ҳисса қўшишган.

Академиклар В.И. Романовский, С.Х. Сирожиддинов, Т.А. Саримсоқов, Т.А. Азларов, Ш.К. Фармонов, профессорлар И.С. Бадалбоев, М.У. Ғофуров, Ш.А. Хошимов каби ёрқин намоён-д-лари бўлган Ўзбекистон мактабининг эҳтимоллар назариясини ривожлантиришдаги алоҳида ўрни бор.

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, амалиёт эҳтиёжлари эҳти-моллар назариясининг пайдо бўлишига кўмаклашган ҳолда унинг фан сифатида ривожланишини таъминлади, янги тармоқлар ва бўлимларнинг пайдо бўлишига олиб келди. Вазифаси бош тўп-ламга хос бўлган тавсифларни танланма бўйича маълум бир ишончлилиқ даражасида тиклашдан иборат бўлган математик статистика эҳтимоллар назариясига таянади. Эҳтимоллар назари-яси-дан тасодифий- жараёнлар назарияси, оммавий хизмат кўр-сатиш назарияси, ахборот назарияси, ишончлилиқ назарияси, эко-нометрик моделлаштириш каби фан тармоқлари ажралиб чиқди.

Эҳтимоллар назариясини татбиқ қилишнинг энг муҳим йў-налишлари сифатида иқтисодиёт, техника фанларини кўрсатиш мумкин. Ҳозирги пайтда эҳтимоллар назариясига таянувчи мо-деллаштиришларсиз,

корреляциявий ва регрессиявий таҳлил, адекватлик ҳамда «сезгир» адаптив моделларисиз иқтисодий-тех-ник тасодифий жараёнларни тадқиқ этишни тасаввур қилиш қи-йин.

Автомобиль оқимларида рўй берадиган ҳодисалар, машина қисмларининг ишончлилик даражаси, йўллардаги автоҳалокат-лар, йўлларни лойиҳалаш жараёнидаги ҳар хил ҳолатлар детерми-нирланмаган бўлганлиги сабабли эҳтимоллар назарияси услублари орқали тадқиқ этилувчи муаммолар доирасига киради.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари — тажриба ёки эксперимент ва ҳодисалар. Муайян шартшароит ва ҳолатларда амалга ошириладиган хатти-ҳаракатларни *эксперимент* деб атаймиз. Экспериментнинг ҳар бир амалга ошиши *тажриба* деб аталади.

Экспериментнинг ҳар қандай мумкин бўлган натижаси *элементар ҳодиса* деб аталади ва ω орқали белгиланади. Тасодифий ҳодисалар бир қанча элементар ҳодисалардан ташкил топади ва $A, B, C, D, \dots$ орқали белгиланади.

- 1) эксперимент ўтказилиши натижасида ω элементар ҳодисаларнинг биттаси доимо содир бўлади;
- 2) битта тажрибада фақат битта ω элементар ҳодиса содир бўлади деган шартлар бажариладиган элементар ҳодисалар тўплами *элементар ҳодисалар фазоси* деб аталади ва Ω орқали белгиланади.

Шундай қилиб, ихтиёрий тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар фазосининг қисм тўплами бўлади. Элементар ҳодисалар фазосининг таърифига асосан муқаррар ҳодисани Ω орқали бел-гилаш мумкин. Мумкин бўлмаган ҳодиса $\emptyset$ орқали белгиланади.

1-мисол. Шашқолтош ташланмоқда. Ушбу экспериментга тўғри келувчи элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ кўринишда бўлади.

2-мисол. Қутида 2 та қизил, 3 та кўк ва 1 та оқ, ҳаммаси бўлиб 6 та шар бўлсин. Эксперимент қутидан таваккалига шарларни олишдан иборат. Ушбу экспериментга тўғри келувчи элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ кўринишда бўлади, бу ерда элементар ҳодисалар қуйидаги қийматларга эга бўлади: ω_1 — оқ шар чиқди; ω_2, ω_3 — қизил шар чиқди; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ — кўк шар чиқ-ди. Қуйидаги ҳодисаларни кўриб чиқамиз:

- A — оқ шарнинг чиқиши;
- B — қизил шарнинг чиқиши;
- C — кўк шарнинг чиқиши;
- D — рангли (оқ бўлмаган) шарнинг чиқиши.

Бу ерда кўриниб турибдики, бу ҳодисаларнинг ҳар бири у ёки бу имкон даражасига эга: баъзилари — кўпроқ, бошқалари — камроқ. Шубҳасиз, B ҳодисанинг имкон даражаси A ҳодисаники-дан кўпроқ; худди

шундай C ники B никидан, D ники эса C ники-дан кўпроқ. Ҳодисаларни имкон даражалари бўйича миқдорий томондан таққослаш учун, шубҳасиз, ҳар бир ҳодиса билан маъ-лум бир сонни боғлаш зарур. Бу сон ҳодиса қанчалик имконият-лироқ бўлса, шунчалик каттароқ бўлади.

Бу сонни $P(A)$ орқали белгилаймиз ва A ҳодисанинг эҳти-моллиги деб атаймиз. Энди эҳтимолликнинг таърифини берамиз.

Элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли тўплам бўлсин ва унинг элементлари $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ бўлсин. Уларни тенг имкониятли элементар ҳодисалар деб ҳисоблаймиз, яъни ҳар бир элемен-тар ҳодисанинг содир бўлиши бошқаларникидан кўпроқ имкони-ятга эга эмас. Маълумки, ҳар бир A тасодифий ҳодиса Ω нинг қисм тўплами сифатида элементар ҳодисалардан ташкил топган. Бу элементар ҳодисалар A нинг рўй беришига қулайлик туғдирув-чилари дейилади.

A ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

формула билан аниқланади, бу ерда m — A ҳодисанинг рўй бери-шига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони, n — Ω га кирувчи барча элементар ҳодисалар сони.

Агар 1-мисолда A орқали жуфт томон тушиши ҳодисаси белгиланса,

$$\text{у ҳолда } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2-мисолда ҳодисаларнинг эҳтимолликлари қуйидаги қий-матларга

$$\text{эга: } P(A) = \frac{1}{6}; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(D) = \frac{5}{6}.$$

Эҳтимолликнинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари ке-либ чиқади:

1. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги бирга тенг.*

Ҳақиқатан, агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда барча эле-ментар ҳодисалар унинг рўй беришига қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $m=n$, бинобарин

$$P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги нолга тенг.*

Ҳақиқатан, мумкин бўлмаган ҳодисанинг рўй бериши учун бирорта ҳам элементар ҳодиса қулайлик туғдирмайди. Бу ҳолда $m=0$, бинобарин

$$P(\emptyset) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги ноль билан бир орасидаги мусбат сондир.*

Ҳақиқатан, тасодифий ҳодисанинг рўй беришига элементар

ҳодисаларнинг фақат бир қисми қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $0 < m < n$,
демак $0 < \frac{m}{n} < 1$, бинобарин

$$0 < P(A) < 1.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.2)$$

тенгсизликларни қаноатлантиради

Ҳодисанинг нисбий частотаси деб ҳодиса рўй берган таж-рибалар сонининг аслида ўтказилган жами тажрибалар сонига нисбатига айтилади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{m}{n} \quad (1.3)$$

формула билан аниқланади, бу ерда m — ҳодисанинг рўй бериш-лари сони, n — жами тажрибалар сони.

Эҳтимоллик ва нисбий частотанинг таърифларини солишти-риб, қуйидаги хулосага келамиз: эҳтимолликнинг таърифида таж-рибалар ҳақиқатан ўтказилганлиги талаб қилинмайди; нисбий частотанинг таърифида эса тажрибалар аслида ўтказилганлиги фараз қилинади.

3-мисол. Тасодикий танланган 80 та бир хил деталдан 3 таси яроқсиз эканлиги аниқланди. Яроқсиз деталларнинг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{3}{80} \text{ га тенг.}$$

4-мисол. Бир йил давомида объектларнинг бирида 24 та тек-ширув ўтказилди, бунда 19 марта қонунчиликнинг бузилишлари қайд этилди.

Қонунчилик бузилишларининг нисбий частотаси $W(A) = \frac{19}{24}$ га тенг.

Узоқ кузатишлар шуни кўрсатадики, агар бир хил шарт-шароитларда тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида тажриба-лар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частота жуда оз (тажрибалар қанча кўп ўтказилган бўлса, шунча кам) ўзгариб, би-рор ўзгармас сон атрофида тебранади. Бу ўзгармас сон ҳодиса-нинг рўй бериш эҳтимоллиги экан.

Шундай қилиб, агар тажриба йўли билан нисбий частота аниқланган бўлса, у ҳолда уни эҳтимолликнинг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин. Бу эҳтимолликнинг статистик таърифидир.

Хотимада эҳтимолликнинг геометрик таърифини кўриб чи-қайлик.

Агар элементар ҳодисалар фазоси Ω ни текислик ёки фазо-даги қандайдир бир соҳа, A ни эса унинг қисм тўплами деб қарай-диган бўлсак, у ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоллиги A ва Ω нинг юзалари ёки ҳажмлари нисбатида қаралади ҳамда

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} \quad (1.4)$$

ва

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \quad (1.5)$$

формулалар бўйича топилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг намо-ён бўлиш шакли бўйича қандай синфларга бўлинади?
2. Ҳодисаларни қандай турларга бўлиш мумкин?
3. Эҳтимоллар назариясининг предмети нима?
4. Эҳтимоллар назарияси ривожланиши тарихи ҳақида нималар-ни биласиз?
5. Эҳтимоллар назариясининг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти қандай?
6. Эксперимент, тажриба, элементар ҳодиса ва ҳодиса нима, улар қандай белгиланади?
7. Элементар ҳодисалар фазоси деб нимага айтилади?
8. Ҳодисанинг эҳтимоллиги қандай аниқланади?
9. Эҳтимолликнинг қайси хоссаларини биласиз?
10. Ҳодисанинг нисбий частотаси ҳақида нима биласиз?
11. Эҳтимолликнинг статистик таърифининг моҳияти нимада?
12. Эҳтимолликнинг геометрик таърифи қанақа?

2-мавзу. Ҳодисалар устида амаллар. Шартли эҳтимоллик

Режа:

1. Ҳодисалар устида амаллар.

2. Шартли эҳтимоллик.

Иккита A и B тасодифий ҳодисалар бир-бири билан қанчалик боғланган, бу ҳодисалардан биттасининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятига қай даражада таъсир қилади деган савол тез-тез пайдо бўлади.

Иккита ҳодиса ўртасидаги боғланишнинг энг содда мисоли сифатида ҳодисалардан бирининг содир бўлиши иккинчисининг албатта содир бўлишига олиб келадиган ёки, аксинча, ҳодисалар-дан бирининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятини йўққа чиқарадиган ҳолатларни келтириш мумкин.

Агар эксперимент натижасида A ва B ҳодисалар бир вақт-нинг ўзида рўй бериши мумкин бўлмаса, улар *биргаликда бўлмаган* ҳодисалар деб аталади, акс ҳолда эса *биргаликда бўлган* ҳодисалар деб аталади.

1-мисол. Яшиқдан таваккалига битта деталь олинди. Унинг стандарт бўлиши ностандарт эканлигини истисно қилади. «Таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши» ва «Таваккалига олинган деталнинг ностандарт бўлиши» ҳодисалари биргаликда бўлмаган ҳодисалардир.

Агар ҳодисалар элементар ҳодисалар фазосининг қисм тўп-ламлари сифатида қаралса, у ҳолда ҳодисалар ўртасидаги муноса-батларни тўпламлар ўртасидаги муносабатлар сифатида талқин қилиш мумкин. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар — бу умумий элементар ҳодисаларга эга бўлмаган ҳодисалардир.

Агар эксперимент натижасида A ҳодисанинг рўй беришидан B ҳодисанинг рўй бериши албатта келиб чиқса, A ҳодиса B ҳодисани *эргаштиради* дейилади ва бу $A \subset B$ орқали белгиланади. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда $A = B$ бўлади.

2-мисол. Шашқолтош ташланмоқда. «4 рақамли томон чиқ-ди» ҳодисаси «жуфт очко чикди» ҳодисасини эргаштиради.

Иккита A ва B ҳодисаларнинг *йигиндис*и деб ё A ҳодисанинг, ё B ҳодисанинг, ё шу иккала ҳодисанинг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. У $A+B$ ёки $A \cup B$ орқали белгиланади. *Бир нечта ҳодисаларнинг йигиндис*и деб шу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

3-мисол. Замбаракдан икки марта ўқ узилмоқда. Агар A ҳо-диса биринчи ўқ узишда нишонга тегиш, B эса иккинчи ўқ узиш-да нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $A+B$ ҳодисаси ё би-ринчи ўқ узишда, ё иккинчи ўқ узишда, ё иккала ўқ узишда ни-шонга тегиш ҳодисаси бўлади.

Иккита A ва B ҳодисаларнинг *қўпайтмаси*и деб A ва B ҳо-дисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага ай-тилади. У AB ёки $A \cap B$ орқали белгиланади. *Бир нечта ҳодисаларнинг қўпайтмаси*и деб шу ҳодисалардан ҳаммасининг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган

ходисага айтилади.

4-мисол. Яшиқда биринчи ва иккинчи сонли заводларда иш-лаб чиқарилган деталлар бор. Агар A ходиса стандарт деталнинг чиқиши, B эса деталь биринчи сонли заводда тайёрланган ходиса-си бўлса, у ҳолда AB ходисаси биринчи сонли заводнинг стандарт детали чиқиши ходисаси бўлади.

A ходисага қарама-қарши ходиса $\bar{A}$ орқали белгиланади. У A ходиса рўй бермаганда ва фақат шу ҳолдагина рўй берган ҳи-собланади. Бошқача қилиб айтганда, A ва $\bar{A}$ ходисалар иккаласи жамланиб муқаррар ходисани ташкил этадиган биргаликда бўл-маган ходисалардир, яъни $A \cup \bar{A} = \Omega$.

5-мисол. Ўқ узишда нишонга тегиш ва хато кетиш — қара-ма-қарши ходисалар. Агар A нишонга тегиш бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ ха-то кетишдир.

A ходисанинг рўй бериши ва B ходисанинг рўй бермасли-гидан иборат бўлган ходиса A ва B ходисаларнинг айирмаси деб аталади ва $A \setminus B$ орқали белгиланади.

Агар иккита ходисадан бирининг эҳтимоллиги иккинчиси-нинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай ходисалар *боғлиқмас* деб аталади. Акс ҳолда бу ходисалар *боғлиқ* деб аталади.

6-мисол. Танга 2 марта ташланмоқда. Биринчи ташлашда гербнинг чиқиши (A ходиса)нинг эҳтимоллиги иккинчи ташлаш-да гербнинг чиқиши (B ходиса)га боғлиқ эмас. Ўз навбатида, ик-кинчи ташлашда гербнинг чиқиши биринчи ташлашнинг натижа-сига боғлиқ эмас. Шундай қилиб, A ва B ходисалар боғлиқ эмас.

Агар бир нечта ходисанинг ихтиёрий иккитаси ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай ходисалар *жуфт-жуфти билан боғлиқ эмас* деб аталади.

A ва B иккита тасодифий ходиса бўлиб, бунда $P(B) \neq 0$ бўл-син. Боғлиқ ходисаларнинг таърифидан иккита ходисадан бири-нинг эҳтимоллиги иккинчисининг рўй бериши ёки рўй бермасли-гига боғлиқ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун, агар бизни A ходисанинг эҳтимоллиги қизиқтирса, у ҳолда B ходисанинг рўй берганлигини билиш муҳимдир.

A ходисанинг B ходиса рўй берганлиги шартдаги эҳтимоллиги *шартли эҳтимоллик* деб аталади ва $P(A/B)$ орқали белги-ланади.

7-мисол. Қутида 3 та оқ ва 3 та қора шар бор. Қутидан та-ваккалига орқага қайтармасдан икки марта биттадан шар олина-ди. Агар биринчи синовда қора шар чиққан бўлса (B ходиса), ик-кинчи синовда оқ шарнинг чиқиши (A ходиса)нинг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Биринчи синовдан кейин қутида ҳаммаси бўлиб 5 та шар, улардан 3 таси оқ шар қолди. Қидирилаётган шартли эҳти-моллик

$$P(A/B) = \frac{3}{5} \text{ га тенг.}$$

Энди шартли эҳтимоллик формуласини чиқарамиз. A ва B

ҳодисаларнинг рўй беришига n та элементар ҳодисадан мос ра-вишда m ва k таси қулайлик туғдирсин; у ҳолда, (1.1) га асосан, уларнинг шартсиз эҳтимолликлари мос равишда $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{n}$ га тенг. A ҳодисанинг рўй беришига B ҳодиса рўй берганлиги шартида r та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин, у ҳолда, (1.1) га асосан, A ҳодисанинг шартли эҳтимоллиги

$$P(A/B) = \frac{r}{k}$$

га тенг. Сурат ва махражни n га бўлиб, шартли эҳтимолликнинг

$$P(A/B) = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

ёки

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2.1)$$

формуласини оламиз, чунки AB ҳодисага r та элементар ҳодиса мос келади, бинобарин, $\frac{r}{n}$ — унинг шартсиз эҳтимоллиги.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Қандай ҳодисалар биргаликда бўлмаган, қайсилари эса бирга-ликда бўлган ҳодисалар деб аталади?
2. « A ҳодиса ўзидан кейин B ҳодисани келтириб чиқаради (эр-гаштиради)» деган ибора нимани билдиради ва у қандай белги-ланади?
3. Ҳодисаларнинг йиғиндиси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
4. Ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
5. Қарама-қарши ҳодиса нима ва у қандай белгиланади?
6. Ҳодисаларнинг айирмаси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
7. Қандай ҳодисалар боғлиқмас, қайсилари эса боғлиқ ҳодисалар деб аталади?
8. Шартли эҳтимоллик нима ва унинг формуласи қандай?

3-мавзу. Эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари. Тўла эҳтимоллик ва Байес формулалари

Режа:

1. Эҳтимолликларни қўшиш теоремалари.
2. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремалари.
3. Тўла эҳтимоллик формуласи.
4. Байес формуласи.

A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмасин ҳамда уларнинг эҳтимолликлари берилган бўлсин. Ё A , ё B ҳодисанинг рўй бериши, яъни бу ҳодисаларнинг йиғиндиси $A+B$ нинг эҳтимоллигини қан-дай топиш мумкин? Бунга қуйидаги теорема жавоб беради.

3.1-теорема (биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш). *Иккита биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (3.1)$$

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

- n — элементар ҳодисаларнинг умумий сони;
 m_1 — A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони;
 m_2 — B ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони.

Ё A , ё B ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони $m_1 + m_2$ га тенг. Шунинг учун

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$$

бўлади.

$$\frac{m_1}{n} = P(A) \text{ ва } \frac{m_2}{n} = P(B) \text{ эканлигини эътиборга олиб,}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

ни оламиз.

3.1-натижа. *Бир нечта биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (3.2)$$

1-мисол. Қутида 30 та шар бор, улардан 10 таси қизил, 5 таси кўк ва 15 таси оқ. Рангли шар чиқишининг эҳтимоллиги то-пилсин.

Ечиш. Рангли шарнинг чиқиши ё қизил, ё кўк шарнинг чиқишини билдиради.

Қизил шар чиқиши (A ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ га тенг. Кўк шар чиқиши (B ҳодиса)нинг эҳтимоллиги эса $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ га тенг.

A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалардир (бирор рангдаги шарнинг чиқиши бошқа рангдаги шарнинг чиқишини истисно қилади), шунинг учун қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ бўлади.}$$

Қарама-қарши ҳодисалар биргаликда муқаррар ҳодисани ташкил этгани учун 3.1-теоремадан

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

эканлиги келиб чиқади, шу сабабли

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (3.3)$$

2-мисол. Кун давомида ёғингарчилик бўлишининг эҳтимол-лиги $p = 0,3$ га тенг. Кун очик бўлишининг эҳтимоллиги топил-син.

Ечиш. «Кун давомида ёғингарчилик бўлади» ва «Кун очик» ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун қидирила-ётган эҳтимоллик $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$ га тенг.

(2.1) формуладан қуйидаги теоремани оламиз.

3.2-теорема (боғлиқ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш). *Иккита боғлиқ ҳодисалар кўпайтмасининг эҳти-моллиги улардан бирининг эҳтимоллигининг шу ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган иккинчи ҳодиса шартли эҳтимоллиги-га кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B). \quad (3.4)$$

3-мисол. Йиғувчида 3 та конуссимон ва 7 та эллипссимон валик бор. Йиғувчи таваккалига аввал битта валикни, сўнгра эса иккинчи валикни олди. Биринчи валик конуссимон, иккинчиси эса эллипссимон эканлигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Биринчи валик конуссимон эканлиги (B ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(B) = \frac{3}{10}$ га тенг. Иккинчи валик эллипссимон эканлиги (A ҳодиса)нинг биринчи валик конуссимон деган фараз-да ҳисобланган шартли эҳтимоллиги $P(A/B) = \frac{7}{9}$ га тенг.

У ҳолда (3.4) формулага асосан қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30} \text{ бўлади.}$$

Энди A ва B ҳодисалар боғлиқмас бўлган ҳолга ўтамиз ва бу ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллигини топамиз.

A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмагани учун унинг $P(A/B)$ шартли эҳтимоллиги $P(A)$ шартсиз эҳтимоллигига тенгдир, яъни

$$P(A/B) = P(A).$$

Бу ердан қуйидаги теорема келиб чиқади.

3.3-теорема (боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш). *Иккита боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги шу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.5)$$

3.2-натижа. *Бир нечта боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмаси-нинг эҳтимоллиги шу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

4-мисол. 10 тадан детал бор 3 та яшик мавжуд. 1-яшикда 8 та, 2-яшикда 7 та ва 3-яшикда 9 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалга биттадан деталь олинмоқда. Уччала олинган деталь стандарт бўлишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. 1-яшикдан стандарт деталь олиниши (A ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$ га тенг. 2-яшикдан стандарт деталь

олиниши (B ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$ га тенг. 3-

яшикдан стандарт деталь олиниши (C ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$ га тенг.

A , B ва C ҳодисалар боғлиқмас бўлгани учун 3.2-натижага асосан қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504 \text{ га тенг.}$$

Энди A ва B ҳодисалар биргаликда бўлган ҳолга ўтамиз ва бу ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллигини топамиз.

3.4-теорема (биргаликда бўлган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш). *Иккита биргаликда бўлган ҳодисалар йи-гиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йи-гиндисидан уларнинг кўпайтмаси эҳтимоллигининг айирмасига тенг:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (3.6)$$

5-мисол. Биринчи ва иккинчи замбаракдан ўқ узишда ни-шонга

тегиш эҳтимолликлари мос равишда $p_1 = 0,7$ ва $p_2 = 0,8$ га тенг. Иккала замбаракдан бир вақтнинг ўзида ўқ узишда ҳеч бўлмаганда битта замбаракнинг ўқи нишонга тегиши эҳтимолли-ги топилсин.

Ечиш. Ҳар бир замбаракдан нишонга тегиш эҳтимоллиги бошқа замбаракдан ўқ узиш натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун A ҳодиса (биринчи замбаракдан нишонга тегиш) ва B ҳодиса (иккинчи замбаракдан нишонга тегиш) боғлиқмас.

Шу сабабли AB ҳодиса (иккала замбаракдан нишонга те-гиш)нинг эҳтимоллиги $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$ га тенг. У ҳолда қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94 \text{ га тенг.}$$

Агар б о ғ л и қ м а с $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар биргаликда муқаррар ҳодисани ташкил этса, у ҳолда шу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй бериш эҳтимоллигини қуйидаги формула бўйича топиш мумкин

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) \quad (3.7)$$

6-мисол. Босмахонада 4 та дастгоҳ бор. Ҳар бир дастгоҳ-нинг айни шу пайтда ишлашининг эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Айни шу пайтда ҳеч бўлмаганда битта дастгоҳ ишлаши (A ҳодиса)нинг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Айни шу пайтда дастгоҳ ишламаслигининг эҳтимол-лиги $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$ га тенг. У ҳолда қидирилаётган эҳти-моллик $P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 0,9999$ га тенг.

Агар $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаса ва ҳамма-си жамланиб муқаррар ҳодисани ташкил этса, яъни $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$; $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ бўлса, у ҳолда улар *ҳодисаларнинг тўла группасини* ташкил этади деб аталади.

Фараз қилайлик, A ҳодиса фақат тўла группани ташкил этув-чи $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисалардан бири рўй бергандагина содир бў-лиши мумкин, бу ҳодисаларни *гипотезалар* деб атаймиз. Бу ҳоди-саларнинг эҳтимолликлари ва $P(A/H_i)$ ($i = 1, n$) шартли эҳти-молликлар маълум бўлсин.

$A\Omega = A$ бўлгани учун $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$ бўлади.

$H_1, H_2, \dots, H_n$ ларнинг биргаликда эмаслигидан $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ ҳодисаларнинг биргаликда эмаслиги келиб чиқади.

(3.1) формулани қўллаб, қуйидагини оламиз

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

(3.4) формулага асосан ($H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисалар боғлиқ бўлиши ҳам мумкин) охирги ифоданинг ўнг томонидаги ҳар бир $P(AH_i)$ қўшилувчини $P(A/H_i)P(H_i)$ кўпайтма билан алмашти-риб,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (3.8)$$

тўла эҳтимоллик формуласини ола-миз.

7-мисол. Деталларнинг 2 та тўплами бор. 1-тўпламдан та-ваккалига олинган деталь стандарт бўлишининг эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисидан олинганники эса 0,9 га тенг. Таваккалига олин-ган тўпламдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. A орқали «олинган деталь стандарт» ҳодисасини бел-гилайлик. Деталь ё 1-тўпламдан олиниши мумкин (H_1 ҳодиса), ё 2-тўпламдан (H_2 ҳодиса).

Деталь 1-тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги $P(H_1) = \frac{1}{2}$ га, 2-

тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги эса $P(H_2) = \frac{1}{2}$ га тенг бўлади.

Мисол шартига асосан $P(A/H_1) = 0,8$ ва $P(A/H_2) = 0,9$ бўлади. У ҳолда қидири-лаётган эҳтимоллик тўла эҳтимоллик формуласига асосан топилади ва қуйидагига тенг

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

Тўла эҳтимоллик формуласини келтириб чиқаришдаги ҳодисалар учун A ҳодиса рўй берган бўлсин ва гипотезаларнинг $P(H_k/A)$ ($k = 1, n$) шартли эҳтимолликларини топиш масаласи қўйилган бўлсин.

$$(2.1) \text{ формуладан } P(H_k/A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} \text{ га эга бўламиз.}$$

Сўнгра, (3.4) формуладан қуйидагини ола-миз

$$P(AH_k) = P(H_k)P(A/H_k).$$

Тўла эҳтимоллик формуласини қўллаб, бу ердан ва бундан аввалги муносабатдан

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} \quad (3.9)$$

Байес формуласини келтириб чиқара-миз.

8-мисол. Завод цехида тайёрланаётган деталларнинг стан-дарт эканлигини иккита назоратчидан бири текширади. Деталнинг 1-назоратчига

тушиш эҳтимоллиги 0,6 га, 2-назоратчига тушиш эҳтимоллиги эса 0,4 га тенг. Яроқли деталнинг 1-назоратчи томо-нидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги 0,94 га, 2-назорат-чи томонидан эса 0,98 га тенг бўлсин. Яроқли деталь текширувда стандарт деб топилди. Бу деталь 1-назоратчи томонидан текши-рилганлигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. А орқали яроқли деталь стандарт деб топилиши ҳоди-сасини белгилаймиз. Иккита фараз қилиш мумкин

1) детални 1-назоратчи текширди (H_1 гипотезаси);

2) детални 2-назоратчи текширди (H_2 гипотезаси).

Мисол шартига асосан қуйидагиларга эгамиз:

$P(H_1) = 0,6$ (деталнинг 1-назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(H_2) = 0,4$ (деталнинг 2-назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(A/H_1) = 0,94$ (яроқли деталнинг 1-назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги);

$P(A/H_2) = 0,98$ (яроқли деталнинг 2-назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги).

Қидирилаётган эҳтимолликни Байес формуласи бўйича то-памиз:

$$\begin{aligned} P(H_1 / A) &= \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,58996. \end{aligned}$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш те-оремаси нима ҳақида ва унинг исботи қандай?
2. Қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоллиги нимага тенг?
3. Боғлиқ ва боғлиқмас ҳодисалар эҳтимолликларини кўпайти-риш теоремаларида нима ҳақида гап боради?
4. Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш тео-ремаси нима ҳақида?
5. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигини қандай топиш мумкин?
6. Қайси ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади?
7. Тўла эҳтимоллик формуласи нима ва у қандай келтириб чиқа-рилади?
8. Байес формуласи нима ва у қандай келтириб чиқарилади?

4-мавзу. Боғлиқмас тажрибалар кетма-кетлиги. Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

Режа:

1. Боғлиқмас тажрибалар кетма-кетлиги.
2. Бернулли формуласи.
3. Муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони.
4. Лапласнинг локал теоремаси.
5. Лапласнинг интеграл теоремаси.
6. Нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги.

Ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши (муваффақият) ҳам, рўй бермаслиги (муваффақиятсизлик) ҳам мумкин бўлган n та боғ-лиқмас тажрибалар амалга оширилсин. A ҳодисанинг ҳар бир тажрибадаги эҳтимоллигини бир хил, яъни p га тенг деб ҳисоб-лаймиз. Демак, A ҳодиса рўй бермаслигининг эҳтимоллиги ҳам ҳар бир тажрибада доимий ва $q=1-p$ га тенг. Тажрибаларнинг бундай кетма-кетлиги *Бернулли схемаси* деб аталади.

Бундай тажрибаларга мисол сифатида, масалан, технологик ва ташкилий шарт-шароитларнинг доимийлиги ҳолатида маълум бир ускуналарда маҳсулотларни ишлаб чиқаришни қараш мум-кин, бу ҳолда яроқли маҳсулотни тайёрлаш — муваффақият, яроқсизини тайёрлаш — муваффақиятсизлик. Агар бирор маҳсу-лотни тайёрлаш жараёни аввалги маҳсулотларнинг яроқли ёки яроқсиз эканлигига боғлиқ эмас деб ҳисобланса, бу вазият Бернулли схемасига мос келади.

Бошқа мисол сифатида нишонга қарата ўқ узишни олиш мумкин. Бу ерда ўқнинг нишонга тегиши — муваффақият, нишонга тегмаслиги — муваффақиятсизлик.

n та тажрибада A ҳодиса роппа-роса k марта рўй бериши ва демак, $n-k$ марта рўй бермаслиги, яъни k та муваффақият ва $n-k$ та муваффақиятсизлик бўлишининг эҳтимоллигини ҳисоблаш масаласи қўйилган бўлсин.

Қидирилаётган эҳтимолликни $P_n(k)$ орқали белгилаймиз. Масалан, $P_5(3)$ ёзуви бешта тажрибада ҳодиса роппа-роса 3 мар-та рўй бериши ва демак, 2 марта рўй бермаслигининг эҳтимоллигини билдиради.

n та боғлиқмас тажрибалар кетма-кетлигини n та боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмасидан иборат бўлган мураккаб ҳодиса деб қараш мум-кин. Демак, n та тажрибада A ҳодиса k марта рўй бериши ва $n-k$ марта рўй бермаслигининг эҳтимоллиги боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳ-тимолликларини кўпайтириш ҳақидаги 3.3-теоремага асосан $p^k q^{n-k}$ га тенг. Бундай мураккаб ҳодисалар n та элементдан k та-дан нечта группалаш тузиш мумкин бўлса, шунча, яъни C_n^k та бў-лади.

Бу мураккаб ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун бирга-ликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш ҳақи-даги 3.1-теоремага асосан

изланаётган эҳтимоллик мумкин бўлган барча мураккаб ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг. Бу мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолликлари бир хил бўлган учун изланаётган эҳтимоллик (n та тажрибада A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоллиги) битта мураккаб ҳодисанинг эҳти-моллигини уларнинг сонига кўпайтирилганига тенг

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ёки

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (4.1)$$

Ҳосил қилинган формула *Бернулли формуласи* деб аталади.

1-мисол. Бир суткада электр қуввати сарфининг белгиланган меъёрдан ортиб кетмаслиги эҳтимоллиги $p = 0,75$ га тенг. Яқин 6 сутканинг 4 суткаси давомида электр қуввати сарфининг белгиланган меъёрдан ортиб кетмаслиги эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. 6 сутканинг ҳар бирида электр қувватининг меъёрда сарфланишининг эҳтимоллиги ўзгармас ва $p = 0,75$ га тенг. Де-мак, ҳар бир суткада электр қувватининг меъёрдан ортиқ сарфла-нишининг эҳтимоллиги ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$ га тенг.

Изланаётган эҳтимоллик Бернулли формуласига асосан

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0,297$$

га тенг бўлади.

Қатор масалаларда муваффақиятларнинг энг эҳтимолли со-нини, яъни эҳтимоллиги (4.1) эҳтимолликлар ичида энг каттаси бўлган муваффақиятларнинг сони $\hat{m}$ ни топиш талаб этилади. k ортганда (4.1) эҳтимолликлар аввал ўсиб, сўнггра, маълум бир пайтдан бошлаб, камайгани сабабли $\hat{m}$ учун

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} - 1) \quad (4.2)$$

ва

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} + 1) \quad (4.3)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак.

(4.1) формуладан ва $p + q = 1$ муносабатдан фойдаланиб, (4.2) ва (4.3) дан мос равишда

$$(n - \hat{m} + 1)p \geq \hat{m}q \quad (4.4)$$

ва

$$(\hat{m} + 1)q \geq (n - \hat{m})p \quad (4.5)$$

тенгсизликларни оламиз.

Пировард натижада $\hat{m}$ нинг узунлиги 1 га тенг бўлган ин-тервалда ётиши келиб чиқади:

$$np - q \leq \hat{m} \leq np + p. \quad (4.6)$$

Бирок, таъкидлаб ўтиш жоизки, Бернулли формуласини n нинг катта қийматларида қўллаш анча қийин, чунки формула жу-да катта сонлар устида амаллар бажаришни талаб қилади.

Масалан, $n = 50$, $k = 30$, $p = 0,1$ бўлса, у ҳолда $P_{50}(30)$ эҳтимолликни ҳисоблаш учун $P_{50}(30) = \frac{50!}{30! \cdot 20!} \cdot (0,1)^{30} \cdot (0,9)^{20}$ ифодани

ҳисоблашга тўғри келади, бу ерда $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$, $30! = 26525286 \cdot 10^{25}$, $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$.

Бундай савол туғилиши табиий: бизни қизиқтираётган эҳтимолликни Бернулли формуласини қўλλамасдан ҳисоблаш ҳам мумкинми? Мумкин экан. Лапласнинг локал теоремаси тажрибалар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг n та тажрибада роппароса k марта рўй бериши эҳтимоллигини тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик формула беради.

Лапласнинг локал теоремаси. *Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p ўзгармас бўлиб, ноль ва бир-дан фарқли бўлса, у ҳолда n та тажрибада A ҳодисанинг роппа-роса k марта рўй беришининг эҳтимоллиги $P_n(k)$ тақрибан (n қанча катта бўлса, шунчалик аниқ)*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x)$$

функциянинг $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ даги қийматига тенг.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{функциянинг қийматларидан тузилган жад-}$$

валлар мавжуд. Бунда $\phi(-x) = \phi(x)$ эканлигини ҳисобга олиш ке-рак, чунки $\phi(x)$ функция жуфт функциядир.

Шундай қилиб, n та боғлиқмас тажрибада A ҳодисанинг роппа-роса k марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x) \quad (4.7)$$

га тенг, бу ерда $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

2-мисол. Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги $0,2$ га тенг бўлса, 400 та тажрибада бу ҳодисанинг роппа-роса 80 марта рўй бериши эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. (4.7)
формуладан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8} \cdot \phi(x).$$

x нинг мисол шартлари орқали аниқланадиган қийматини ҳисоб-лаймиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

Жадвалдан $\phi(0) = 0,3989$ эканлигини топамиз.

$$\text{Изланаётган эҳтимоллик } P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986 \text{ га тенг.}$$

Бернулли формуласи ҳам тахминан шу натижага олиб кела-ди (ҳисоблашлар узундан-узоқ бўлгани учун келтирилмади):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

Энди n та тажрибада A ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта (қисқача « k_1 дан k_2 мартагача») рўй бериши эҳ-тимоллиги $P_n(k_1, k_2)$ ни ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. Бу му-аммо қуйидаги теорема ёрдамида ҳал қилинади.

Лапласнинг интеграл теоремаси. *Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоллиги p ўзгармас бўлиб, ноль ва бир-дан фарқли бўлса, у ҳолда n та тажрибада A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериши эҳтимоллиги $P_n(k_1, k_2)$ қуйидаги аниқ ин-тегралга тенг:*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (4.8)$$

$$\text{бу ерда } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ ва } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллашни талаб этувчи масалаларни ечишда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ интеграли учун махсус

жадвалдан фойдаланилади. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг қий-матлари $x \geq 0$ учун берилган, $x < 0$ учун эса $\Phi(x)$ функциянинг тоқ эканлигидан фойдаланамиз, яъни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. $\Phi(x)$ функ-ция кўпинча *Лаплас функцияси* дейилади.

Шундай қилиб, n та боғлиқмас тажрибада A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериши эҳтимоллиги

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (4.9)$$

га тенг, бу ерда $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ва $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

3-мисол. Ташкилотнинг солиқ инспекцияси текширувидан ўтмаслигининг эҳтимоллиги $p = 0,2$ га тенг. Тасодифан олинган 400 та ташкилотдан 70 тадан 100 тагача текширувдан ўтмасли-гининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. (4.9) формуладан фойдаланамиз:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Интеграллашнинг қуйи ва юқори чегараларини ҳисоблаймиз:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

$\Phi(x)$ функциянинг қийматлари жадвалидан $\Phi(2,5) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг

$$P_{400}(70, 100) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

1-мавзуда таъкидлаб ўтилганидек, эҳтимолликнинг статистик таърифига асосан эҳтимоллик сифатида нисбий частотани олиш мумкин, шунинг учун улар орасидаги фарқни баҳолаш қизиқиш уйғотиши мумкин.

$\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг ўзгармас p эҳ-тимолликдан четланиши абсолют

қиймати бўйича аввалдан бе-рилган $\varepsilon > 0$ сондан катта бўлмаслигининг эҳтимоллиги

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \quad (4.10)$$

га тенг.

4-мисол. Деталнинг ностандарт бўлиши эҳтимоллиги $p = 0,1$ га тенг. Тасодифан танланган 400 та деталь ичида ностан-дарт деталлар бўлиши нисбий частотасининг $p = 0,1$ эҳтимоллик-дан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмасли-гининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$.

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right) \text{ эҳтимолликни топиш талаб қилинади.}$$

(4.10) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right) \approx 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(2).$$

Жадвалдан $\Phi(2) = 0,4772$ ни топамиз. Демак, $2\Phi(2) = 0,9544$. Шундай қилиб, изланаётган эҳтимоллик тақрибан 0,9544 га тенг.

Ҳосил қилинган натижанинг маъноси қуйидагича: агар етарли даражада кўп марта текшириш ўтказилиб, ҳар бир текшириш-да 400 тадан деталь олинса, у ҳолда бу текширишларнинг тахми-нан 95,44 % ида нисбий частотанинг ўзгармас $p = 0,1$ эҳтимол-ликдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўл-майди.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Бернулли схемаси деб нима аталади?
2. Бернулли формуласи қандай келтириб чиқарилади?
3. Муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони қандай топилади?
4. Лапласнинг локал теоремасида нима ҳақида гап боради?
5. Лапласнинг интеграл теоремасида нима ҳақида гап боради?
6. Нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги қандай топилади?

Таянч иборалар:

Эркин тажрибалар кетма-кетлиги, Бернулли схемаси, Бернулли формуласи, муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони, Лаплас-нинг локал теоремаси, n та эркин тажрибада A ҳодисанинг роппа-ро-са k марта рўй бериш эҳтимоллиги, Лапласнинг интеграл теоремаси, n та эркин тажрибада A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериши эҳтимоллиги, Лаплас функцияси, нисбий частотанинг ўз-гармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги.

5-мавзу. Дискрет тасодифий миқдорлар. Тақсимот қонуни. Дискрет тақсимотларнинг турлари

Режа:

1. Тасодифий миқдор тушунчаси ва унинг турлари.
2. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни.
3. Айрим дискрет тақсимотлар.

Олдинги мавзуларда у ёки бу соннинг чиқишидан иборат бўлган ҳодисалар бир неча марта келтирилди. Масалан, шашқол-тош ташланганда 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари чиқиши мумкин эди. Чикқан очколар сонини олдиндан аниқлаб бўлмайди, чунки у тў-лалигича ҳисобга олишнинг имкони бўлмаган кўпгина тасодифий сабабларга боғлиқ. Шу маънода очколар сони тасодифий катта-ликдир; 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари шу катталиқнинг мумкин бўлган қийматларидир.

Тасодифий миқдор деб дастлаб маълум бўлмаган, олдиндан ҳисобга олиниши мумкин бўлмаган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган битта ва фақат битта мумкин бўлган қийматни тажриба на-тижасида қабул қиладиган катталиқка айтилади.

1-мисол. Юзта чақалоқ ичида ўғил болалар сони 0, 1, 2, ... , 100 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқ-дордир.

2-мисол. Замбаракдан отилган снаряднинг учиб ўтган масо-фаси тасодифий миқдордир. Бу миқдорнинг мумкин бўлган қий-матлари бирор (a , b) ораликқа тегишлидир.

Тажрибалар натижасида элементар ҳодисалар рўй бергани учун тасодифий миқдор ва элементар ҳодиса тушунчаларини боғлаб, тасодифий миқдорнинг бошқа таърифини бериш мумкин.

Тасодифий миқдор деб Ω элементар ҳодисалар фазосида аниқланган $X = X(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) функцияга айтилади.

3-мисол. Иккита танга ташланганда чикқан герблар сони X 0, 1 ва 2 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдордир. Элементар ҳодисалар фазоси куйидаги элементар ҳо-дисалардан иборат:

$$\omega_1 = \{ГГ\}, \omega_2 = \{РГ\}, \omega_3 = \{ГР\}, \omega_4 = \{РР\}.$$

У ҳолда X куйидаги қийматларни қабул қилади:

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= X(ГГ) = 2, & X(\omega_2) &= X(РГ) = 1, \\ X(\omega_3) &= X(ГР) = 1, & X(\omega_4) &= X(РР) = 0. \end{aligned}$$

Тасодифий миқдорлар $X, Y, Z, \dots$ бош лотин ҳарфлари, улар-нинг мумкин бўлган қийматлари эса мос $x, y, z, \dots$ кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, X тасодифий миқдор учта қийматга эга бўлиши мумкин бўлса, улар x_1, x_2, x_3 орқали белгиланади.

Дискрет (узлукли) тасодифий миқдор деб айрим, ажралган мумкин бўлган қийматларни маълум эҳтимолликлар билан қабул қилувчи тасодифий миқдорга айтилади. Дискрет тасодифий миқ-дорнинг мумкин

бўлган қийматларининг сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Бунга мисол сифатида 1-мисолдаги тасодифий миқдорни олиш мумкин.

Узлуксиз тасодифий миқдор деб бирор чекли ёки чексиз ораликдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган та-содифий миқдорга айтилади. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг сони чексиздир. Бундай тасоди-фий миқдорга мисол сифатида 2-мисолдаги тасодифий миқдорни олиш мумкин.

Дискрет тасодифий миқдорнинг берилиши учун унинг мум-кин бўлган қийматларини санаб чиқиш етарли эмас, яна уларнинг эҳтимолликларини ҳам кўрсатиш лозим. Иккинчи томондан, кўп масалаларда тасодифий миқдорларни элементар ҳодисаларнинг функциялари сифатида қарашнинг зарурати йўқ, фақат тасоди-фий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликла-рини, яъни тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билиш етарли.

Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолликларининг тақсимот қонуни ёки соддагина *тақсимот қонуни* деб мумкин бўлган қий-матлар билан уларнинг эҳтимолликлари орасидаги мосликка ай-тилади; уни жадвал, график ва формула кўринишда бериш мум-кин.

Эҳтимолликлар тақсимот қонунининг турли усулларда бери-лишини мисолларда кўриб чиқайлик.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонунининг жадвал орқали берилишида жадвалнинг биринчи сатри мумкин бўлган қийматлардан, иккинчи сатри эса уларнинг эҳтимолликларидан тузилади. Жадвалнинг иккинчи сатридаги эҳтимолликларнинг йиғиндиси 1 га тенг бўлиши керак. 5.1-жадвалда 3-мисолдаги дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган.

5.1 – ж а д в а л

x_i	0	1	2
p_i	1 / 4	1 / 2	1 / 4

4-мисол. Пул лотереясида 100 та билет чиқарилган. Битта 5000 сўмлик, бешта 1000 сўмлик ва ўн та 500 сўмлик ютуқ ўйналмоқда. Битта лотерея билети эгасининг мумкин бўлган юту-ғидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни топилсин.

Ечиш. X нинг мумкин бўлган қийматларини ёзамиз: $x_1 = 5000$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 500$, $x_4 = 0$. Бу мумкин бўлган қиймат-ларнинг эҳтимолликлари қуйидагича: $p_1 = 0,01$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,1$, $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0,84$.

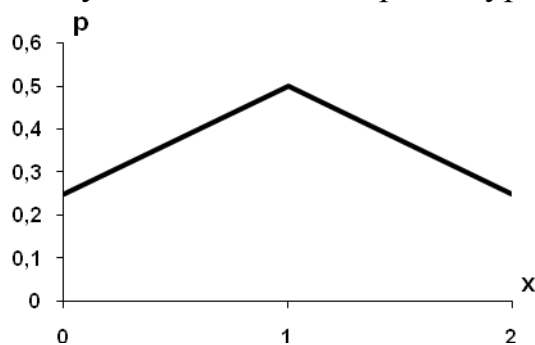
У ҳолда изланаётган тақсимот қонуни қуйидаги кўринишда

5.2 – ж а д в а л

x_i	0	500	1000	5000
p_i	0,84	0,1	0,05	0,01

Яққоллик учун дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот ко-нунини график кўринишда ҳам тасвирлаш мумкин, бунинг учун тўғри бурчакли координаталар системасида (x_i, p_i) нуқталар белгиланади, сўнгра улар кесмалар билан бирлаштирилади. Ҳо-сил бўлган шакл *тақсимот кўпбурчаги* деб аталади. 5.1-расмда 3-мисолдаги X тасодифий микдорнинг тақсимот кўпбурчаги келти-рилган.

Энди формулалар орқали берилган айрим дискрет тақсимотлар — биномиал, геометрик ва Пуассон тақсимотларини кўриб чиқайлик.



5.1 - расм.

n та боғлиқмас тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши (муваффақият)нинг эҳтимоллиги доимий ва p га тенг бўлсин (демак, рўй бермаслик (муваффақиятсизлик)-нинг эҳтимоллиги $q=1-p$ га тенг). X дискрет тасодифий микдор сифатида A ҳодисанинг шу тажрибаларда рўй беришларининг сони-ни кўриб чиқайлик. X нинг мумкин бўлган қийматлари бундай: $0, 1, 2, \dots, n$. Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолликлари (4.1) Бернулли формуласи бўйича топилади:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

бу ерда $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Эҳтимолликларнинг биномиал тақсимоти деб Бернулли формуласи билан аниқланадиган эҳтимолликлар тақсимотига ай-тилади. Бернулли формуласининг ўнг томонини Ньютон биноми ёйилмасининг умумий ҳади сифатида қараш мумкин бўлгани учун бу тақсимот қонуни «биномиал» деб аталади:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n.$$

$p + q = 1$ бўлгани учун тасодикий микдорнинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг.

Шундай қилиб, биномиал тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга

5.3 – ж а д в а л

x_i	n	$n-1$	$\dots$	k	$\dots$	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	q^n

Биномиал тақсимотга мисол сифатида 3-мисолдаги тасоди-фий миқдорнинг тақсимотини келтириш мумкин.

Фараз қилайлик, боғлиқмас тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериши (муваффақият)нинг эҳтимолли-ги p га ($0 < p < 1$), бинобарин, унинг рўй бермаслиги (муваффа-қиятсизлик)нинг эҳтимоллиги $q=1-p$ га тенг бўлсин. Тажрибалар биринчи муваффақиятгача давом этади. Шундай қилиб, агар A ҳодиса k -тажрибада рўй берса, у ҳолда аввалги $k-1$ та тажрибада у рўй бермайди.

Агар X орқали биринчи муваффақиятгача бўлган тажрибалар сонига тенг бўлган дискрет тасоди-фий миқдорни белгиласак, у ҳолда унинг мумкин бўлган қийматлари $1, 2, 3, \dots$ натурал сон-лардан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, биринчи $k-1$ та тажрибада A ҳодиса рўй бер-масдан, k -тажрибада рўй берди. Бу «мураккаб ҳодисанинг» эҳти-моллиги, боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш ҳақидаги 3.3-теоремага асосан

$$P(X = k) = q^{k-1} p \quad (5.1)$$

га тенг.

Эҳтимолликларнинг геометрик тақсимоти деб (5.1) форму-ла билан аниқланадиган эҳтимолликлар тақсимотига айтилади, чунки бу формулада $k = 1, 2, \dots$ деб фараз қилсак, биринчи ҳади p га ва махражи q га ($0 < q < 1$) тенг бўлган геометрик прогрессияга эга бўламиз:

$$p, qp, q^2 p, \dots, q^{k-1} p, \dots$$

Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топсак, тасоди-фий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари эҳти-молликларининг йиғиндиси 1 га тенг эканлигини осон кўриш мумкин:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Шундай қилиб, геометрик тақсимот қонуни қуйидаги кўри-нишга эга:

x_i	1	2	3	...	K	...
p_i	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

5-мисол. Замбаракдан нишонга биринчи марта теккунча ўк узилмокда. Нишонга тегишнинг эҳтимоллиги $p = 0,6$ га тенг. Учинчи ўк узишда нишонга тегишнинг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $p = 0,6$, $q = 0,4$, $k = 3$. Изланаётган эҳтимоллик (5.1) формулага асосан $P(X = 3) = 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$ га тенг.

Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас тажриба ўтказилсин. Бу тажрибаларда ҳодисанинг k марта рўй бериши эҳтимоллигини топиш учун Бернулли фор-муласидан фойдаланилади. Агар n катта бўлса, Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланилади. Бироқ бу теорема ҳодисанинг эҳтимоллиги кичик ($p \leq 0,1$) бўлганда катта хато беради.

Агар $n \rightarrow \infty$ да np кўпайтма доимий, аниқроғи $np = \lambda$ кий-матини сақлайди деган шарт қўйсак, у ҳолда ҳар бирида ҳодиса-нинг эҳтимоллиги жуда кичик бўладиган жуда кўп сондаги си-новларда ҳодисанинг роппа-роса k марта рўй бериши эҳтимол-лиги қуйидаги формула бўйича топилади:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (5.2)$$

Бу формула оммавий (n жуда катта) ва кам рўй берадиган (p кичик) ҳодисалар эҳтимолликларининг Пуассон тақсимот қонунини ифодалайди. Пуассон тақсимоти учун махсус жадваллар мавжуд.

6-мисол. Завод базага 5000 та сифатли маҳсулот жўнатди. Маҳсулотнинг йўлда шикастланиш эҳтимоллиги 0,0002 га тенг. Базага 3 та яроқсиз маҳсулот келишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$. λ ни то-памиз:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

Изланаётган эҳтимоллик (5.2) формула бўйича қуйидагига тенг:

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Тасодифий микдор умумий ҳолда ва функциялар тилида қандай таърифланади?
2. Дискрет тасодифий микдор нима?

3. Узлуксиз тасодифий миқдор нима?
4. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ҳақида ни-мани биласиз?
5. Биномиал тақсимот қонуни ҳақида нимани биласиз?
6. Геометрик тақсимот қонунининг алоҳида хусусиятлари нималардан иборат?
7. Қайси ҳолларда Пуассон тақсимотидан фойдаланилади?

Таянч иборалар:

Тасодифий миқдор, дискрет тасодифий миқдор, узлуксиз та-содифий миқдор, дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қону-ни, тақсимот кўпбурчаги, биномиал тақсимот, геометрик тақси-мот, Пуассон тақсимоти.

6-мавзу. Дискрет тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари ва уларнинг хоссалари

Режа:

1. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси.
2. Математик кутилманинг хоссалари.
3. Дискрет тасодифий миқдор тарқоқлигининг сонли тавсифлари.
4. Дисперсиянинг хоссалари.
5. Дискрет тасодифий миқдорларнинг бошқа сонли тавсифлари.

Юқорида кўрганимиздек, тақсимот қонуни дискрет тасоди-фий миқдорни тўлиқ тавсифлайди. Бироқ кўпинча тақсимот қону-ни номаълум бўлиб, тасодифий миқдорни йиғма ҳолда тасвир-лайдиган сонлар билан чекланишга тўғри келади; бундай сонлар *тасодифий миқдорнинг сонли тавсифлари* деб аталади.

Муҳим сонли тавсифлар қаторига математик кутилма кира-ди. Математик кутилма тақрибан тасодифий миқдорнинг ўртача қийматига тенг. Кўпгина масалаларни ечиш учун математик ку-тилмани билиш етарлидир. Масалан, агар биринчи мерган урган очколарнинг математик кутилмаси иккинчи мерганникидан катта эканлиги маълум бўлса, у ҳолда биринчи мерган ўрта ҳисобда ик-кинчи мерганга нисбатан кўпроқ очко уради, бинобарин, у иккин-чи мергандан яхшироқ отади.

X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси деб унинг барча мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳ-тимолликлари кўпайтмалари йиғиндисига айтилади ва $M(X)$ орқа-ли белгиланади.

X тасодифий миқдор $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \dots, p_n$ эҳтимолликлар билан қабул қилсин. У ҳолда *X* тасо-дифий миқдорнинг математик кутилмаси

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (6.1)$$

тенглик билан аниқланади.

Агар *X* дискрет тасодифий миқдор чексиз кўп мумкин бўл-ган қийматларни қабул қилса, у ҳолда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (6.2)$$

1-мисол. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни билган ҳолда унинг математик кутилмаси топилсин

6.1 – ж а д в а л

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Ечиш. Изланаётган математик кутилма (6.1) формулага асосан $M(X) = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9$ га тенг.

2-мисол. Агар A ҳодисанинг эҳтимоллиги p га тенг бўлса, битта тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. X тасодифий миқдор — A ҳодисанинг битта тажрибада рўй беришлар сони — фақат иккита — p эҳтимоллик билан $X_1 = 1$ (A ҳодиса рўй берди) ва $q = 1 - p$ эҳтимоллик билан $X_2 = 0$ (A ҳодиса рўй бермади) қийматни қабул қилиши мумкин. Изланаётган математик кутилма (6.1) формулага асосан $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ га тенг.

Шундай қилиб, ҳодисанинг битта тажрибада рўй беришлар сонининг математик кутилмаси шу ҳодиса эҳтимоллигига тенг.

Энди математик кутилманинг хоссаларини келтираемиз.

6.1-хосса. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилмаси шу ўзгармаснинг ўзига тенг:

$$M(C) = C.$$

Исбот. C ўзгармасни битта мумкин бўлган C қийматга эга бўлган ва уни $p = 1$ эҳтимоллик билан қабул қиладиган дискрет тасодифий миқдор сифатида қараймиз. Демак,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

6.2-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилма бел-гисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$M(CX) = CM(X).$$

Агар иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот қонуни иккинчисининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўл-маса, бу тасодифий миқдорлар *боғлиқмас* деб аталади.

Боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси *деб шундай* XY тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўл-ган қийматлари X

нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига қўпайтирилганига тенг; XY қў-пайтманинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари қў-пайтувчиларнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари қўпайтмасига тенг.

6.3-хосса. Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор қўпайтмаси-нинг математик кутилмаси уларнинг математик кутилмалари қўпайтмасига тенг:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

6.1-натижа. Бир нечта боғлиқмас тасодифий миқдорлар қў-пайтмасининг математик кутилмаси уларнинг математик кутилмалари қўпайтмасига тенг.

3-мисол. Боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақ-симот қонунлари орқали берилган:

6.2 – ж а д в а л

6.3 – ж а д в а л

X_i	5	2	4
p_i	0,6	0,1	0,3

ва

Y_i	7	9
p_i	0,8	0,2

XY тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. Берилган тасодифий миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилмасини топамиз:

$$M(X) = 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 = 4,4;$$

$$M(Y) = 7 \cdot 0,8 + 9 \cdot 0,2 = 7,4.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас, шунинг учун изланаёт-ган математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 4,4 \cdot 7,4 = 32,56.$$

X ва Y тасодифий миқдорларнинг йиғиндисини деб шундай $X+Y$ тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўлган қий-матлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати билан Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати йиғиндиларига тенг; $X+Y$ нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари боғлиқмас X ва Y та-содифий миқдорлар учун қўшилувчиларнинг эҳтимолликлари қў-пайтмасига тенг; боғлиқ тасодифий миқдорлар учун эса қўшилув-чилардан бирининг эҳтимоллиги билан иккинчисининг шартли эҳтимоллиги қўпайтмасига тенг.

6.4-хосса. Иккита тасодифий миқдор йиғиндисининг математик кутилмаси қўшилувчиларнинг математик кутилмалари йиғиндисига тенг:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

6.2-натижа. Бир нечта тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилмаси қўшилувчиларнинг математик кутилмалари йиғиндисига тенг.

4-мисол. Иккита шашқолтош ташланганда тушиши мумкин бўлган очколар йиғиндисининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. X орқали биринчи шашқолтошда ва Y орқали иккинчи шашқолтошда тушиши мумкин бўлган очколар сонини белгилай-миз. Бу

миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 га тенг, чунончи бу қийматларнинг ҳар бири-нинг эҳтимоллиги $1/6$ га тенг.

Биринчи шашқолтошда тушиши мумкин бўлган очколар со-нининг математик кутилмасини топамиз:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$$M(Y) = \frac{7}{2} \text{ эканлиги ҳам равшан.}$$

Изланаётган математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 7/2 + 7/2 = 7.$$

6.5-хосса. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p ўзгармас бўлган n та боғлиқмас тажрибада бу ҳодисанинг рўй беришлари сонининг математик кутилмаси тажрибалар сонини битта синовда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигига кўпайтирилганига тенг:

$$M(X) = np.$$

5-мисол. Битта корхона текширилганда ҳужжат юритишда-ги хатоларни аниқлаш эҳтимоллиги $p = 0,6$ га тенг. Агар 10 мар-та корхоналар текширилган бўлса, хатоларни аниқлашлар жами сонининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. Ҳар бир текширишда хатоларни аниқлаш бошқа текширишлар натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун қаралаётган ҳо-дисалар боғлиқмасдир, бинобарин, изланаётган математик кутилма қуйидагича:

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (марта хатоларни аниқлаш).}$$

Айрим тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилмаларга эга бўлсаларда, мумкин бўлган қийматлари ҳар хил бўлади. Масалан, қуйидаги тақсимот қонунлари билан берилган X ва Y дискрет тасодифий миқдорларни кўриб чиқайлик:

6.4 – ж а д в а л

X_i	-0,01	0,01
p_i	0,5	0,5

ва

6.5 – ж а д в а л

Y_i	-100	100
p_i	0,5	0,5

Бу миқдорларнинг математик кутилмаларини топайлик:

$$M(X) = -0,01 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5 = 0;$$

$$M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0.$$

Бу ерда иккала миқдорнинг математик кутилмалари бир хил, мумкин бўлган қийматлари эса ҳар хил, бунда X нинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилмасига яқин, Y нинг мумкин бўлган қийматлари эса ўзининг математик кутилмасидан анча узоқ. Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг фақат матема-тик кутилмасини билган ҳолда унинг қандай қийматлар қабул қи-лиши мумкинлиги ҳақида ҳам, бу қийматлар математик кутилма атрофида қандай сочилганлиги ҳақида ҳам бирор мулоҳаза юри-тиш мумкин эмас.

Бошқача қилиб айтганда, математик кутилма тасодифий миқдорни тўлиқ тавсифламайди. Шу сабабли математик кутилма билан бир қаторда бошқа сонли тавсифлар ҳам қаралади.

X — тасодифий миқдор ва $M(X)$ унинг математик кутилмаси бўлсин. *Тасодифий миқдорнинг четланиши* деб $X - M(X)$ айирмага айтилади.

Амалиётда кўпинча тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш талаб қилинади. Масалан, артиллерияда отилган снарядлар уриб туширилиши лозим бўлган нишон атрофига қанчалик яқин туши-шини билиш муҳимдир.

Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси (тарқоқлиги) деб тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилмасидан четланиши квадратининг математик кутилмасига айтилади:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6.3)$$

Дисперсияни ҳисоблаш учун кўпинча қуйидаги формуладан фойдаланиш қулай бўлади:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (6.4)$$

6-мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X тасодифий миқдорнинг дисперсияси топилсин:

6.6 – ж а д в а л

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Ечиш. $M(X)$ математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5.$$

X^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича:

6.7 – ж а д в а л

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

$M(X^2)$ математик кутилма қуйидагича:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$$

Изланаётган дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05 \text{ бўлади.}$$

Математик кутилма каби, дисперсия ҳам бир нечта хоссага эга.

6.6-хосса. Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:

$$D(C) = 0.$$

Исбот. Дисперсиянинг таърифига кўра

$$D(C) = M[C - M(C)]^2.$$

6.1-хоссадан фойдаланиб, $D(C) = M[C - C]^2 = M(0) = 0$ ни ҳосил қиламиз.
Шундай қилиб,

$$D(C) = 0.$$

Ўзгармас миқдор доимо айнан бир хил қийматни сақлаши ва демак, тарқоқликка эга эмаслиги инобатга олинса, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

6.7-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

6.8-хосса. Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор йигиндисининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йигиндисига тенг:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

6.3-натижа. Бир нечта боғлиқмас тасодифий миқдорлар йигиндисининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йигиндисига тенг.

6.4-натижа. Ўзгармас миқдор билан тасодифий миқдор йигиндисининг дисперсияси тасодифий миқдорнинг дисперсиясига тенг:

$$D(C + X) = D(X).$$

Исбот. C ва X миқдорлар ўзаро боғлиқмас, шунинг учун 6.8-хоссага асосан

$$D(C + X) = D(C) + D(X).$$

6.6-хоссага асосан $D(C) = 0$. Демак,

$$D(C + X) = D(X).$$

X ва $X + C$ миқдорлар фақат санок боши билан фарқ қилиши ва демак, ўзларининг математик кутилмалари атрофида бир хил тарқоқликка эга эканлиги инобатга олинса, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

6.9-хосса. Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор айирмасининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йигиндисига тенг:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Исбот. 6.8-хоссага асосан

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y).$$

6.7-хоссага асосан

$$D(X - Y) = D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y).$$

ёки

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

6.10-хосса. Ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги р ўзгармас бўлган n та боғлиқмас тажрибада бу ҳодисанинг рўй бериш-лари сонининг дисперсияси тажрибалар сонини битта тажрибада ҳоди-санинг рўй бериш ва рўй бермаслик эҳтимолликларига кўпайти-рилганига тенг:

$$D(X) = npq.$$

7-мисол. ДСИ томонидан ҳар бирида ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқлаш эҳтимоллиги $p = 0,6$ га тенг бўлган 10 марта корхоналарнинг текширувлари ўтказилмоқда. X тасодифий миқдор — бу текширувларда ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқ-лашлар сонининг дисперсияси ҳисоблансин.

Ечиш. Шартга кўра, $n = 10$, $p = 0,6$. Ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқламаслик эҳтимоллиги $q = 1 - 0,6 = 0,4$ га тенг.

Изланаётган дисперсия $D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4$ бўлади.

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш учун ўртача квад-ратик четланиш ҳам хизмат қилади.

X тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (6.5)$$

8-мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

6.8 – ж а д в а л

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

$\sigma(X)$ ўртача квадратик четланиш топилсин.

Ечиш. $M(X)$ математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4.$$

$M(X^2)$ математик кутилма қуйидагича:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,4 + 100 \cdot 0,5 = 54.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - (6,4)^2 = 13,04.$$

Изланаётган ўртача квадратик четланиш қуйидагига тенг:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,04} \approx 3,61.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Тасодикий микдорнинг сонли тавсифлари деб нимага айтилади ва уларнинг қандай турларини биласиз?
2. Математик кутилма нима ва у қандай аниқланади?
3. Ходисанинг битта тажрибада рўй беришлар сонининг математик кутилмаси нимага тенг ва у қандай топилади?
4. Математик кутилманинг 1- ва 2-хоссалари (6.1- ва 6.2-хосса-лар) ҳақида нима биласиз?
5. Қандай тасодикий микдорлар боғлиқмас дейилади ва боғлиқмас тасодикий микдорларнинг кўпайтмаси нима бўлади?
6. Тасодикий микдорларнинг йиғиндиси қандай аниқланади?
7. Математик кутилманинг 3- ва 4-хоссалари ҳамда уларнинг на-тижалари (6.3- ва 6.4-хоссалар, 6.1- ва 6.2-натижалар) ҳақида нима биласиз?
8. Тасодикий микдорнинг математик кутилмадан ташқари бош-қа сонли тавсифларини киритишнинг мақсадга мувофиқлиги нимада ва тасодикий микдорнинг четланиши нима?
9. Дисперсия нима ва у қандай топилади?
10. Дисперсиянинг 1- ва 2-хоссалари (6.6- ва 6.7-хоссалар) ҳақида нима биласиз?
11. Дисперсиянинг 3-хоссаси ҳамда унинг натижалари (6.8-хосса, 6.3- ва 6.4-натижалар) ҳақида нима биласиз?
12. Дисперсиянинг 4-хоссаси (6.9-хосса) ҳақида нима биласиз?
13. n та боғлиқмас тажрибада A ходисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилмаси ва дисперсияси нимага тенг (6.5- ва 6.10-хоссалар)?
14. Ўртача квадратик четланиш нима ва у қандай аниқланади?

Таянч иборалар:

Тасодикий микдорнинг сонли тавсифлари, математик кутилма, эрки тасодикий микдорлар, эрки тасодикий микдорларнинг кўпайтмаси, тасодикий микдорларнинг йиғиндиси, тасодикий микдорнинг четланиши, дисперсия, ўртача квадратик четланиш.

7-мавзу. Узлуксиз тасодикий микдорларнинг тақсимот ва зичлик функциялари, уларнинг хоссалари

Режа:

1. Тасодикий микдорнинг тақсимот функцияси.
2. Тақсимот функциясининг хоссалари.
3. Узлуксиз тасодикий микдорнинг зичлик функцияси.
4. Зичлик функциясининг хоссалари.

Дискрет тасодикий микдор унинг барча мумкин бўлган қий-матлари ва уларнинг эҳтимолликлари рўйхати билан берилиши мумкин. Бироқ бу усулни узлуксиз тасодикий микдорлар учун қўллаб бўлмайди.

Масалан, мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервални тў-ла-тўқис тўлдирувчи X тасодикий микдори кўриб чиқайлик. X нинг мумкин бўлган барча қийматлари рўйхатини тузиш мумкин эмаслиги равшан. Шунинг

учун ихтиёрий типдаги тасодифий миқдорларни бериш мумкин бўладиган умумий усулни киритиш мақсадга мувофиқдир, бунинг учун тасодифий миқдор эҳтимол-лиқларининг тақсимот функциялари киритилади.

x ҳақиқий сон бўлсин. X нинг x дан кичик қиймат қабул қи-лишидан иборат $X < x$ ҳодисанинг эҳтимоллигини $F(x)$ орқали белгилаймиз. Агар x ўзгарса, $F(x)$ ҳам ўзгаради, яъни $F(x)$ x нинг функциясидир.

X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деб тажриба натижасида X тасодифий миқдор x дан кичик қийматни қабул қи-лишининг эҳтимоллигини аниқловчи $F(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(x) = P(X < x). \quad (7.1)$$

Бу тенгликни геометрик нуктаи назардан бундай талқин қи-лиш мумкин: $F(x)$ — сон ўқида x нуктадан чапда ётувчи нукта билан тасвирланадиган қийматни тасодифий миқдор қабул қили-шининг эҳтимоллиги.

Тақсимот функциясининг хоссаларини кўриб чиқайлик.

7.1-хосса. Тақсимот функциясининг қийматлари $[0, 1]$ кес-мага тегишли:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (7.2)$$

Исбот. Бу хосса тақсимот функциясининг эҳтимоллик сифа-тида таърифланишидан келиб чиқади: эҳтимоллик доимо 1 дан катта бўлмаган номанфий сондир.

7.2-хосса. $F(x)$ — камаймайдиган функция, яъни:

$$\text{агар } x_1 < x_2 \text{ бўлса, у ҳолда } F(x_1) \leq F(x_2). \quad (7.3)$$

7.1-натижа. Тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалда ётув-чи қийматни қабул қилиш эҳтимоллиги тақсимот функциясининг шу интервалдаги орттирмасига тенг:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (7.4)$$

1-мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот функция-си билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} x \leq -1 & \text{да} & 0 \\ -1 < x \leq 3 & \text{да} & x/4 + 1/4. \\ x > 3 & \text{да} & 1 \end{cases}$$

Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0, 2)$ интервалга тегиш-ли қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0).$$

Ечиш. Шартга кўра $(0, 2)$ интервалда $F(x) = x/4 + 1/4$ бўлгани учун $F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2$ бўлади. Демак, $P(0 < X < 2) = 1/2$.

7.2-натижа. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқ бир қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги нолга тенг.

7.3-хосса. Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қий-матлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда: 1) $x \leq a$ да $F(x) = 0$; 2) $x \geq b$ да $F(x) = 1$.

Исбот. 1) $x_1 \leq a$ бўлсин. У ҳолда $X < x_1$ ҳодиса мумкин бўл-маган ҳодисадир (чунки, шартга кўра, X миқдор x_1 дан кичик қий-матларни қабул қилмайди), демак, унинг эҳтимоллиги нолга тенг.

2) $x_2 \geq b$ бўлсин. У ҳолда $X < x_2$ ҳодиса муқаррар ҳодиса-дир (чунки X нинг барча мумкин бўлган қийматлари x_2 дан ки-чик), демак, унинг эҳтимоллиги бирга тенг.

7.3-натижа. Агар узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун x сонлар ўқида жойлашган бўлса, у ҳолда қуйидаги лимит муносабатлар ўринли:

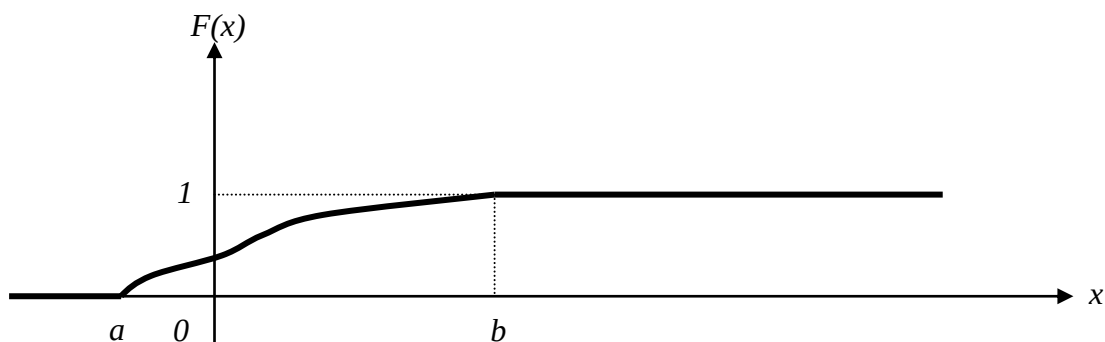
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1. \quad (7.5)$$

Узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот функциясининг гра-фиғи 7.1-хоссага асосан $y = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чега-раланган соҳа ичида жойлашган.

7.2-хоссадан шу нарса келиб чиқадики, тасодифий миқдор-нинг мумкин бўлган барча қийматлари жойлашган (a, b) интер-валда x ўзгарувчи ўсганда, график ё юқорига қия, ё горизонтал кўринишда бўлади.

7.3-хоссага асосан $x \leq a$ да графикнинг ординаталари нолга тенг; $x \geq b$ да эса графикнинг ординаталари бирга тенг.

Узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот функциясининг гра-фиғи 7.1-расмда жойлашган.



7.1 - расм.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги поғона кўринишда бўлади.

2-мисол. X дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қо-нуни билан берилган:

7.1 – ж а д в а л

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Тақсимот функцияси топилсин ва унинг графиги чизилсин.

Ечиш. Агар $x \leq 1$ бўлса, у ҳолда 7.3-хоссага асосан $F(x) = 0$.

Агар $1 < x \leq 4$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0,3$. Ҳақиқатан, X миқ-дор 1 қийматни 0,3 эҳтимоллик билан қабул қилиши мумкин.

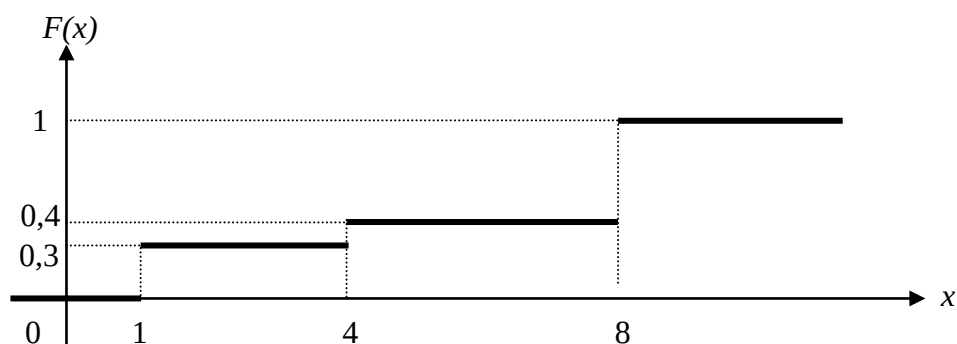
Агар $4 < x \leq 8$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0,4$. Ҳақиқатан, агар x_1 $4 < x_1 \leq 8$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $F(x_1)$ $X < x_1$ ҳо-дисанинг эҳтимоллигига тенг бўлиб, бу ҳодиса X миқдор 1 қиймат-ни 0,3 эҳтимоллик билан ёки 4 қийматни 0,4 эҳтимоллик билан қа-бул қилганда амалга ошиши мумкин. Бу иккита ҳодиса биргаликда бўлмагани учун 3.1-теоремага асосан $X < x_1$ ҳодисанинг эҳтимол-лиги эҳтимолликлар йиғиндисига тенг $0,3 + 0,1 = 0,4$.

Агар $x > 8$ бўлса, у ҳолда 7.3-хоссага асосан $F(x) = 1$.

Шундай қилиб, тақсимот функцияси аналитик кўринишда қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$F(x) = \begin{cases} x \leq 1 & \partial a & 0 \\ 1 < x \leq 4 & \partial a & 0,3 \\ 4 < x \leq 8 & \partial a & 0,4 \\ x > 8 & \partial a & 1 \end{cases}.$$

Бу функциянинг графиги 7.2-расмда келтирилган.



7.2 - расм.

Узлуксиз тасодифий миқдорни зичлик функцияси деб ата-лувчи бошқа функциядан фойдаланган ҳолда ҳам бериш мумкин.

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси деб $f(x)$ функцияга — $F(x)$ тақсимот функциясидан олинган би-ринчи тартибли ҳосилага айтилади:

$$f(x) = F'(x). \quad (7.6)$$

Бу ердан тақсимот функцияси зичлик функцияси учун бош-ланғич функция эканлиги келиб чиқади. Дискрет тасодифий миқ-дорнинг эҳтимолликлари тақсимотини тасвирлаш учун зичлик функциясидан фойдаланиб бўлмайди.

Зичлик функциясини билган ҳолда, узлуксиз тасодифий миқдор берилган интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини ҳисоблаш мумкин.

7.1-теорема. X узлуксиз тасодифий миқдор (a, b) интервал-га тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги зичлик функ-циясидан а дан b гача олинган аниқ интегралга тенг:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.7)$$

Исбот. (7.4) формулага асосан

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

бўлади. Ньютон–Лейбниц формуласига асосан эса

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб,

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \text{ бўлгани учун}$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

ни ҳосил қиламиз.

3-мисол. X тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси бе-рилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ 0 < x \leq 1 & \partial a & 2x. \\ x > 1 & \partial a & 0 \end{cases}$$

Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0,5; 1)$ интервалга тегишли қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. (7.7) формулага асосан изланаётган эҳтимоллик

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 2x \, dx = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ га тенг.}$$

$f(x)$ зичлик функциясини билган ҳолда $F(x)$ тақсимот функциясини

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) \, dz \quad (7.8)$$

формула бўйича топиш мумкин

4-мисол. Берилган зичлик функцияси бўйича тақсимот функцияси топилсин:

$$f(x) = \begin{cases} x \leq a & \partial a & 0 \\ a < x \leq b & \partial a & 1/(b-a). \\ x > b & \partial a & 0 \end{cases}$$

Топилган функциянинг графиги ясалсин.

Ечиш. (7.8) формуладан фойдаланамиз. Агар $x \leq a$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$, демак, $F(x) = 0$. Агар $a < x \leq b$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 1/(b-a)$, демак,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) \, dz = \int_{-\infty}^a 0 \, dz + \int_a^x \frac{1}{b-a} \, dz = \frac{x-a}{b-a}.$$

Агар $x > b$ бўлса, у ҳолда

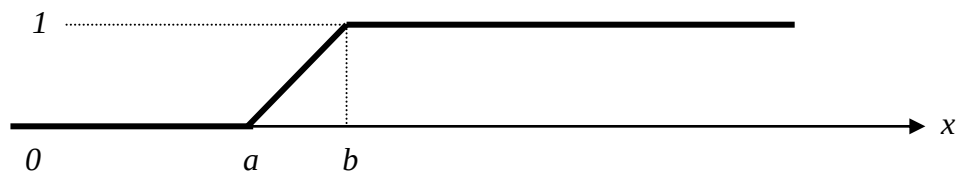
$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dz + \int_a^b \frac{1}{b-a} \, dz + \int_b^x 0 \, dz = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Демак, изланаётган тақсимот функцияси қуйидаги кўриниш-га эга

$$F(x) = \begin{cases} x \leq a & \partial a & 0 \\ a < x \leq b & \partial a & (x-a)/(b-a). \\ x > b & \partial a & 1 \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 7.3 расмда тасвирланган.

$F(x)$



7.3 - расм.

Зичлик функциясининг иккита хоссасини келтирамиз.

7.4-хосса. Зичлик функцияси — ноланфий функция:

$$f(x) \geq 0. \quad (7.9)$$

Исбот. Таксимот функцияси — камаймайдиган функция, де-мак, унинг ҳосиласи $F'(x) = f(x)$ — ноланфий функция.

7.5-хосса. Зичлик функциясидан $-\infty$ дан ∞ гача олинган хосмас интеграл бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (7.10)$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Нима учун ихтиёрий типдаги тасодифий миқдорларни бериш мумкин бўладиган умумий усулни киритиш мақсадга мувофиқ?
2. Тасодифий миқдорнинг таксимот функцияси деб нимага айтилади?
3. Таксимот функциясининг 1-хоссаси (7.1-хосса) ҳақида нима биласиз?
4. Таксимот функциясининг 2-хоссаси ҳамда унинг натижалари (7.2-хосса, 7.1- ва 7.2-натижалар) ҳақида нима биласиз?
5. Таксимот функциясининг 3-хоссаси ҳамда унинг натижаси (7.3-хосса ва 7.3-натижа) ҳақида нима биласиз?
6. Узлуксиз ва дискрет тасодифий миқдорлар таксимот функция-ларининг графиклари қандай хоссаларга эга?
7. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси деб нимага айтилади ва 7.1 теорема ҳақида нима биласиз?
8. Зичлик функциясини билган ҳолда таксимот функциясини қандай топиш мумкин ва зичлик функциясининг хоссалари ҳақида нима биласиз (7.4- ва 7.5-хоссалар)?

Таянч иборалар:

Тасодифий миқдорнинг таксимот функцияси, узлуксиз тасодифий миқдор таксимот функциясининг графиги, дискрет тасодифий миқдор таксимот функциясининг графиги, узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.

8-мавзу. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари.

Узлуксиз таксимотларнинг турлари

Режа:

1. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари.
2. Нормал тақсимот.
3. Текис ва кўрсаткичли тақсимотлар.

Дискрет тасодифий миқдорлар каби узлуксиз тасодифий миқдорлар ҳам сонли тавсифларга эга. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини кўриб чиқайлик.

X узлуксиз тасодифий миқдор $f(x)$ зичлик функцияси билан берилган бўлсин ва бу тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлсин.

Мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси деб қуйидаги аниқ интегралга айтилади:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx. \quad (8.1)$$

Агар мумкин бўлган қийматлар бутун Ox сонли ўққа тегишли бўлса, у ҳолда математик кутилма қуйидаги кўринишга эга

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (8.2)$$

Мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб қуйидаги аниқ интегралга айтилади:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (8.3)$$

Агар мумкин бўлган қийматлар бутун Ox сонли ўққа тегишли бўлса, у ҳолда дисперсия қуйидаги кўринишга эга

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (8.4)$$

Дисперсияни ҳисоблаш учун мос равишда

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (8.5)$$

ва

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (8.6)$$

формулалар қулайроқ.

Дискрет тасодифий миқдорлар математик кутилмаси ва дис-

персиясининг хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам сақланади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет тасодифий миқдор учун бўлгани каби қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (8.7)$$

1-мисол. Қуйидаги тақсимот функцияси билан берилган X тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, дисперсияси ва ўртача квадратик четланиши топилсин:

$$F(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ 0 < x \leq 1 & \partial a & x \\ x > 1 & \partial a & 1 \end{cases}$$

Ечиш. Зичлик функциясини топамиз:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ 0 < x \leq 1 & \partial a & 1 \\ x > 1 & \partial a & 0 \end{cases}$$

Математик кутилмани (8.1) формула бўйича топамиз:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2.$$

Дисперсияни (8.5) формула бўйича топамиз:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - [1/2]^2 = x^3/3 \Big|_0^1 - 1/4 = 1/12.$$

Ўртача квадратик четланишни (8.7) формула бўйича топамиз:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/12} \approx 0,29.$$

Амалиётдан келиб чиқадиган масалаларни ҳал қилишда уз-луксиз тасодифий миқдорларнинг турли тақсимотлари билан иш кўришга тўғри келади. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг зич-лик функциялари *тақсимот қонунлари* ҳам деб аталади. Нормал, текис ва кўрсаткичли тақсимот қонунлари энг кўп учрайди.

a ва σ ($\sigma > 0$) *параметрли нормал тақсимот* деб

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.8)$$

зичлик функцияси билан тасвирланадиган узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади.

Бу ердан кўриниб турибдики, нормал тақсимот иккита a ва σ параметрлар билан аниқланади. Нормал тақсимотни бериш учун бу параметрларни билиш kifoya.

Бу параметрларнинг эҳтимолий маъносини кўрайлик. Де-мак, $M(X) = a$, яъни нормал тақсимотнинг математик кутил-маси a параметрга тенг, ва $\sigma(X) = \sigma$, яъни нормал тақсимот-нинг ўртача квадратик четланиши σ параметрга тенг.

Нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz \quad (8.9)$$

кўринишда бўлади.

Умумий нормал тақсимот деб ихтиёрий a ва σ ($\sigma > 0$) параметрли нормал тақсимотга айтилади. Стандарт нормал тақсимот деб $a = 0$ ва $\sigma = 1$ параметрли нормал тақсимотга айтилади.

Стандарт нормал тақсимотнинг зичлик функцияси

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8.10)$$

кўринишда эканлигини кўриш осон. Бу функция бизга 4-мавзуда учраган. Унинг қийматлари адабиётлардаги махсус жадвалларда келтирилган.

Ихтиёрий a ва σ параметрли нормал тасодифий миқдор-нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳти-моллигини

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{Лаплас функциясидан фойдаланиб топиш}$$

мумкин. Ҳақиқатан, 7.1-теоремага асосан

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

эканлигини кўрамиз.

Янги $z = (x - a)/\sigma$ ўзгарувчи киритамиз. Бу ердан $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$ эканлиги келиб чиқади. Интеграллашнинг янги чегараларини топамиз. Агар $x = \alpha$ бўлса, у ҳолда $z = (\alpha - a)/\sigma$ бўлади; агар $x = \beta$ бўлса, у ҳолда $z = (\beta - a)/\sigma$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned}$$

бўлади.

$\Phi(x)$ функциядан фойдаланиб, пировардида

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (8.11)$$

ни оламир.

Хусусан, X стандарт нормал тасодифий миқдорнинг $(0, x)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги

$$P(0 < X < x) = \Phi(x) \quad (8.12)$$

га тенг, чунки бу ҳолда $a = 0$ ва $\sigma = 1$.

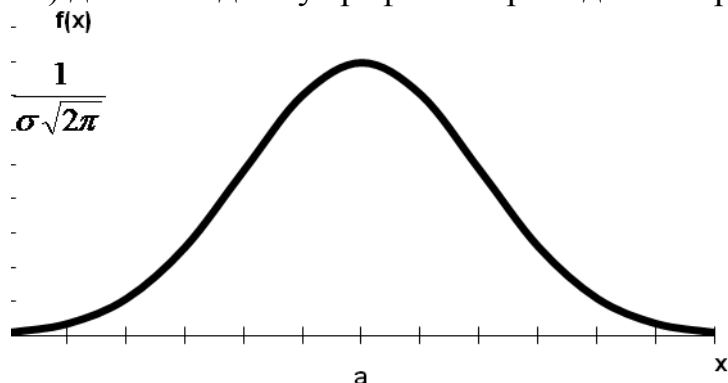
2-мисол. X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсим-ланган. Бу миқдорнинг математик кутилмаси ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 30 ва 10 га тенг. X нинг $(10, 50)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги топилисин.

Ечиш. (8.11) формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, демак,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Жадвалдан $\Phi(2) = 0,4772$ ни топамиз. Бу ердан изланаётган эҳтимоллик $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$ га тенг эканлиги келиб чиқади.

Нормал тақсимот зичлик функциясининг графиги *нормал эг-ри чизик* (*Гаусс эгри чизиги*) деб аталади. Бу график 8.1-расмда тасвирланган.



8.1 - расм.

$[a, b]$ кесмадаги текис тақсимот деб зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} x \leq a & \partial a & 0 \\ a < x \leq b & \partial a & 1/(b-a) \\ x > b & \partial a & 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

кўринишда бўлган, барча мумкин бўлган қийматлари ушбу кес-мага тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади.

$[a, b]$ да текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} x \leq a & \partial a & 0 \\ a < x \leq b & \partial a & (x-a)/(b-a) \\ x > b & \partial a & 1 \end{cases} \quad (8.14)$$

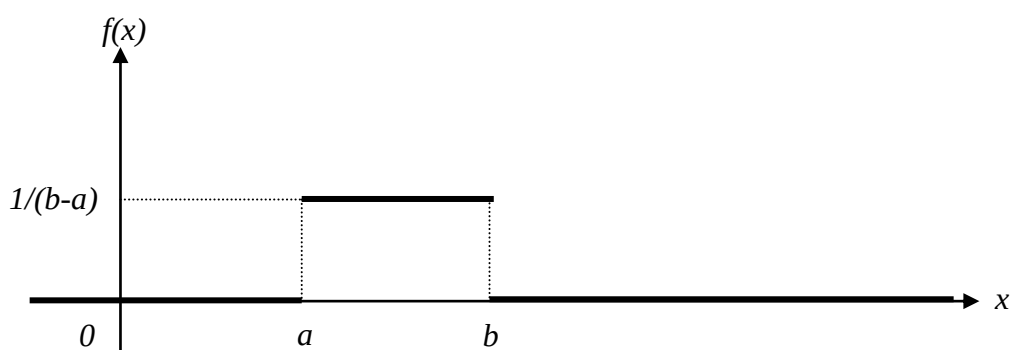
кўринишга эга.

Текис тақсимотнинг зичлик функцияси графиги 8.2-расмда, тақсимот функцияси графиги эса 7.3-расмда келтирилган.

Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз. (8.1) формулага асосан

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

ни оламиз.



8.2 - расм.

Сўнгра, (8.5) формулага асосан

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 = \\ &= \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

эканлиги келиб чиқади.

Энди $[a, b]$ да текис тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг $[a, b]$ нинг ичида ётган (c, d) интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини топамиз.

7.1-теорема ва (8.13) формуладан фойдаланиб,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_c^d 1 \cdot dx = \frac{d-c}{b-a}$$

ни ёки

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (8.15)$$

ни оламир.

Кўрсаткичли (экспоненциал) тақсимот деб

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \text{да} & 0 \\ x \geq 0 & \text{да} & \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \quad (8.16)$$

зичлик функцияси билан тасвирланадиган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади, бу ерда λ — ўзгармас мусбат катталиқ.

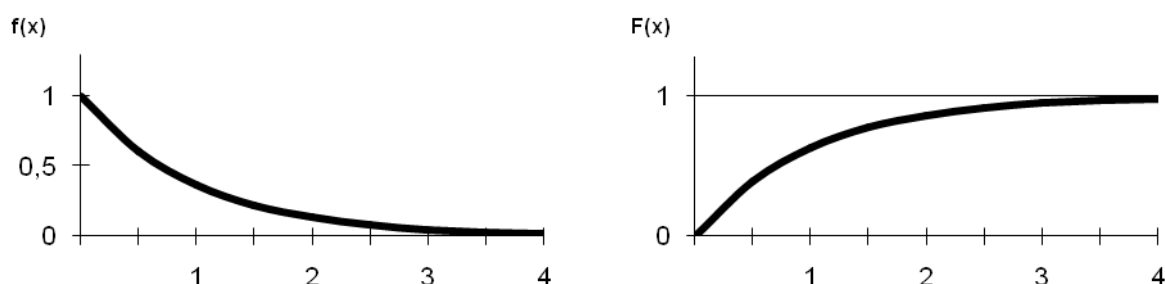
Таърифдан кўриниб турибдики, кўрсаткичли тақсимот битта λ параметр билан аниқланади. Кўрсаткичли қонуннинг тақсимот функциясини топамиз:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \int_{-\infty}^0 0 dz + \lambda \int_0^x e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Демак,

$$F(x) = \begin{cases} x < 0 & \text{да} & 0 \\ x \geq 0 & \text{да} & 1 - e^{-\lambda x} \end{cases} \quad (8.17)$$

Кўрсаткичли қонуннинг зичлик ва тақсимот функциялари-нинг графиклари 8.3-расмда тасвирланган.



8.3 - расм.

(8.17) формуладаги кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қий-мат қабул қилишининг эҳтимоллигини топамиз. (7.4) формуладан фойдаланиб,

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a})$$

ни ёки

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (8.18)$$

ни оламир.

3-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \partial a & 0 \\ x \geq 0 & \partial a & 2e^{-2x} \end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0,3; 1)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $\lambda = 2$. (8.18) формуладан фойдаланамиз:

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx 0,548 - 0,135 \approx 0,41$$

Кўрсаткичли тақсимот параметрининг эҳтимолий маъноси-ни кўрайлик. *Кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилма-си ва ўртача квадратик четланиши λ параметрининг тескари қиймати-га тенг, яъни $M(X) = 1/\lambda$ ва $\sigma(X) = 1/\lambda$.*

4-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \partial a & 0 \\ x \geq 0 & \partial a & 5e^{-5x} \end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. X тасодифий миқдор-нинг математик кутилмаси, ўртача квадратик четланиши ва дис-персияси топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $\lambda = 5$. Демак,

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0,2;$$

$$D(X) = [\sigma(X)]^2 = 1/\lambda^2 = 1/5^2 = 0,04.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси нима?
2. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси нима ва у қан-дай ҳисобланади?
3. Нормал тақсимот деб нимага айтилади?
4. Нормал тақсимот параметрларининг эҳтимолий маъноси қана-қа?
5. Умумий ва стандарт нормал тақсимотлар нима, уларнинг зич-лик ва

- таксимот функциялари қанақа?
6. Нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қий-матни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топилади?
 7. Текис таксимот деб нимага айтилади?
 8. Текис таксимланган тасодифий миқдорнинг математик кутил-маси ва дисперсияси қандай ҳисобланади?
 9. Текис таксимланган тасодифий миқдорнинг берилган интер-валдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топила-ди?
 10. Кўрсаткичли таксимот деб нимага айтилади?
 11. Кўрсаткичли тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топилади?
 12. Кўрсаткичли таксимот параметрининг эҳтимолий маъноси қа-нақа?

Таянч иборалар:

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, уз-луксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси, таксимот қонуни, нормал таксимот, умумий нормал таксимот, стандарт нормал тақ-симот, нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қий-матни қабул қилиши эҳтимоллиги, нормал эгри чизик (Гаусс эгри чизиги), текис таксимот, текис таксимланган тасодифий миқдор-нинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимолли-ги, кўрсаткичли таксимот, кўрсаткичли тасодифий миқдорнинг бе-рилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги.

9-мавзу. Катта сонлар қонуни ва унинг амалий аҳамияти.

Марказий лимит теорема ҳақида тушунча

Режа:

1. Катта сонлар қонуни.

2. Марказий лимит теорема.

Аввалги мавзуларда кўрганимиздек, тасодифий миқдор си-нов натижасида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қа-бул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки бу ҳисобга олиб бўлмайдиган кўпгина тасодифий сабабларга боғлиқ бўлади. Бироқ баъзи-бир нисбатан кенгрок шартлар остида етар-лича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасоди-фийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан.

Амалиёт учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликда-ги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келади-ган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини олдиндан кўра билишга имкон беради. Ана шу шартлар умумий ном билан *катта сонлар қонуни* деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Улар жумла-сига Чебышев и Бернулли теоремалари мансуб.

Катта сонлар қонунига мансуб теоремалар n та тасодифий миқдор ўрта арифметик қийматининг бу миқдорлар математик кутилмаларининг ўрта арифметик қийматига яқинлашишининг шартларини белгилайди.

Дастлаб юқорида тилга олинган теоремаларнинг исботлари

таянадиган Чебышев тенгсизлигини келтирамиз.

Агар тасодифий миқдор дисперсияси маълум бўлса, у ҳолда унинг ёрдамида бу миқдор ўзининг математик кутилмасидан бе-рилган катталиққа четланишининг эҳтимоллигини баҳолаш мум-кин, бу баҳолаш фақат дисперсияга боғлиқ бўлади. Эҳтимоллик-нинг баҳосини *П.Л.Чебышев тенгсизлиги* беради:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.1)$$

Бу тенгсизликдан натижа сифатида

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0 \quad (9.2)$$

тенгсизликни олиш мумкин.

1-мисол. X тасодифий миқдор ўзининг математик кутилма-сидан шу миқдор ўрта квадратик четланишининг уч барабаридан ошувчи катталиққа четланишининг эҳтимоллиги баҳолансин.

Ечиш. Шартга кўра $\varepsilon = 3\sigma(X)$. $D(X) = [\sigma(X)]^2$ эканлиги-ни ҳисобга олиб, (9.1) формуладан $P(|X - M(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{D(X)}{9[\sigma(X)]^2} = \frac{1}{9}$ ни оламиз.

9.1-теорема (Чебышевнинг катта сонлар қонуни). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ боғлиқмас тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, уларнинг дисперсиялари юқоридан бир хил c сони билан чегара-ланган бўлсин: $D(X_i) \leq c, i = 1, 2, \dots$. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.3)$$

муносабат ўринли.

Бу теоремадан бир хил эҳтимолликлар тақсимо-тига эга эрк-ли тасодифий миқдорларнинг ўрта арифмети-ги учун катта сонлар қонунининг ўринли эканлиги келиб чиқади.

9.1-натижа. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ бир хил a математик кутил-мага эга боғлиқмас тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, улар-нинг дисперсиялари юқоридан бир хил c сони билан чегараланган бўлсин: $D(X_i) \leq c, i = 1, 2, \dots$. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.4)$$

муносабат ўринли.

Бир хил математик кутилмага эга боғлиқмас тасодифий миқдор-лар учун катта сонлар қонуни боғлиқмас тажрибалар кетма-кетлигида

тасодифий микдорлар ўрта арифметик қийматининг бу тасоди-фий микдорларнинг умумий математик кутилмасига яқинлаши-шини акс эттиради.

Шундай қилиб, *етарлича катта сондаги* (дисперсиялари бир текисда чегараланган) *боғлиқмас тасодифий микдорларнинг ўрта ариф-метик қиймати тасодифийлик хусусиятини йўқотади*. Бу шундай изоҳланади: ҳар бир микдорнинг ўзининг математик кутилмасидан четланиши ҳам мусбат, ҳам манфий бўлиши мумкин, бироқ ўрта арифметик қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Катта сонлар қонуни кўпгина амалий татбиқларга эга. Ҳақиқий қиймати a га тенг бўлган қандайдир катталик n марта боғлиқмас равишда ўлчансин. Ҳар бир ўлчашнинг натижаси X_i тасодифий микдор бўлади.

Агар ўлчашлар тизимли хатоларсиз амалга оширилса, у ҳолда X_i тасодифий микдорларнинг математик кутилма-сини ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматига тенг деб ҳисоблаш мумкин, $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \dots$. Ўлчашлар натижалари-нинг дисперсиясини кўпинча қандайдир c сони билан чегаралан-ган деб ҳисоблаш мумкин.

У ҳолда ўлчашларнинг тасодифий натижалари 9.1-теорема-нинг шартларини қаноатлантиради ва демак, катта сондаги ўл-чашларда n та ўлчашнинг ўрта арифметик қиймати ўлчанаётган a катталикнинг ҳақиқий қийматидан амалда кўп фарқ қила олмайди. Бу ҳолат ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати сифатида ўл-чашларнинг ўрта арифметик қиймати олинишини асослайди.

Боғлиқмас тажрибалардаги мувафаққиятларнинг нисбий частотаси учун қуйидаги теорема ўринли.

9.2-теорема (Бернуллининг катта сонлар қонуни). *Агар n та боғлиқмас тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй беришининг эҳтимоллиги p ўзгармас бўлса, у ҳолда бу тажрибалардаги муваффақи-ятлар сони m учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ да*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.5)$$

муносабат ўринли.

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ боғлиқмас, бир хил тақсимланган тасодифий микдорлар кетма-кетлигини кўриб чиқайлик. $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots$ бўлсин. Тасодифий микдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган Y_n , $n = 1, 2, \dots$, йиғиндилари кетма-кетлиги-ни тузамиз:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}. \quad (9.6)$$

Марказий лимит теоремасига асосан, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларига қўйилган анча уму-мий шартлар остида тасодифий миқдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган Y_n йиғиндилари тақсимот функцияларининг кетма-кетлиги $n \rightarrow \infty$ да ихтиёрий x учун стандарт нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига яқинлашади.

9.3-теорема (марказий лимит теорема). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ боғлиқмас, бир хил тақсимланган, чекли $D(X_i) = \sigma^2$ дисперсияга эга бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \dots$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий x ($-\infty < x < \infty$) учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (9.7)$$

муносабат ўринли.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда нима ҳақида сўз юритилади?
2. Чебышев тенгсизлиги ҳақида нима биласиз?
3. Чебышевнинг катта сонлар қонуни нимани таъкидлайди?
4. Катта сонлар қонунининг моҳияти нимада ва унинг амалий аҳамияти қандай?
5. Бернуллининг катта сонлар қонуни нимани таъкидлайди?
6. Марказий лимит теоремада нима ҳақида сўз юритилади?

Таянч иборалар:

Катта сонлар қонуни, Чебышев тенгсизлиги, эркин тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги, тасодифий миқдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган йиғиндиси, марказий лимит теорема.

10-мавзу. Математик статистиканинг предмети ва асосий масалалари. Танланма

Режа:

1. Математик статистиканинг вазифалари (масалалари).
2. Бош ва танланма тўпламлар.
3. Танланмаларнинг типлари, танлаш усуллари.

Математик статистикани қўллашдан асосий мақсад оммавий ҳодисалар ва жараёнлар ҳақида уларни кузатиш ёки экспериментлар натижасида олинган маълумотлар асосида хулосалар ҳосил қилишдан иборат. Бу статистик хулосалар алоҳида тажрибаларга тегишли бўлмасдан, балки тадқиқ қилинаётган ҳодисани келтириб чиқарувчи шарт-шароитларнинг

доимий эканлиги фаразидаги шу ҳоди-санинг умумий тавсифлари (эҳтимолликлари, тақсимот қонунлари ва уларнинг параметрлари, математик кутилмалари ва ҳ.к.) ҳақида-ги даъволардан иборат.

Оммавий тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятлар-ни аниқлаш статистик маълумотларни — кузатиш натижаларини эҳтимоллар назарияси услублари билан ўрганишга асосланади.

Математик статистиканинг биринчи вазифаси (масаласи) — кузатишлар ёки махсус ўтказилган экспериментлар натижасида олинган статистик маълумотларни тўплаш ва гуруҳлаш усуллари-ни кўрсатиш.

Математик статистиканинг иккинчи вазифаси (масаласи):

а) ҳодисанинг номаълум эҳтимоллигини баҳолаш; номаълум тақсимот функциясини баҳолаш; кўриниши маълум бўлган тақси-мотнинг параметрларини баҳолаш; тасодифий миқдорнинг бошқа битта ёки бир нечта тасодифий миқдорларга боғлиқлигини баҳо-лаш ва ҳ.к.;

б) номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақидаги ёки кўрини-ши маълум бўлган тақсимот параметрларининг катталиги ҳақида-ги статистик гипотезаларни текшириш каби тадқиқот мақсадла-рига боғлиқ равишда статистик маълумотларни таҳлил қилиш усуллари-ни ишлаб чиқишдан иборат.

Демак, *математик статистиканинг предмети илмий ва амалий хулосалар ҳосил қилиш мақсадида статистик маълумот-ларни тўплаш ва қайта ишлаш усуллари-ни яратишдан иборат.*

Математик статистика эҳтимоллар назариясига таянади ва унинг мақсади — бош тўплам тавсифларини танланма маълумот-лари асосида баҳолаш.

Агар бир жинсли объектлар тўпламини бу объектларни тав-сифловчи бирор белгига нисбатан ўрганиш талаб этилса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш, яъни тўпламнинг ҳар бир объектини уш-бу белгига нисбатан текшириш табиий бўлади. Бироқ, амалда, ял-пи текширишни ўтказиш у ёки бу сабабларга кўра кўпинча мум-кин бўлмайди. Бундай ҳолларда бутун тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда танланади ва улар ўрганилади.

Танланма тўплам, ёки оддий қилиб, *танланма* деб тасоди-фий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади. *Бош тўплам* деб танланма ажратиладиган объектлар тўпламига айти-лади. Масалан, агар Солиқ академиясининг барча талабалари бош тўплам бўлса, у ҳолда бирор гуруҳ талабалари танланма тўплам бўлади.

Тўплам (танланма ёки бош тўплам)нинг *ҳажми* деб бу тўп-ламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, агар 1000 та детал-дан текширув учун 100 та деталь танлаб олинган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми $N = 1000$, танланма ҳажми эса $n = 100$ бўлади.

Танланмани тузишда икки хил йўл тутиш мумкин: объект танланиб, унинг устида кузатиш ўтказилганидан сўнг, у бош тўп-ламга қайтарилиш ёки қайтарилмаслиги мумкин. Шунга боғлиқ ра-вишда танламалар такрор ва нотақрор танламаларга ажратилади.

Такрор танланма деб шундай танланмага айтиладики, бунда танлаб олинган объект (кейингисини олишдан олдин) бош тўплам-га қайтарилади. *Нотакрор* танланма деб танлаб олинган объект яна бош тўпламга қайтарилмайдиган танланмага айтилади.

Танланмадаги маълумотлар бўйича бош тўпламнинг бизни қизиқтираётган белгиси ҳақида етарлича ишонч билан фикр юри-тиш учун танланманинг объектлари уни тўғри тавсифлаши зарур. Бошқача айтганда, танланма бош тўпламнинг мутаносибликлари-ни тўғри тавсифлаши керак, яъни танланма *репрезентатив (тў-лақонли тавсифловчи)* бўлиши лозим.

Агар бош тўплам барча объектларининг танланмага тушиш эҳтимолликлари бир хил деган фаразда танланманинг ҳар бир объекти бош тўпламдан тасодикий равишда танланган бўлса, у ҳолда катта сонлар қонунига асосан танланма репрезентатив бўлади деб таъкидлаш мумкин.

Агар бош тўпламнинг ҳажми етарлича катта бўлиб, танлан-ма эса бу тўпламнинг унча катта бўлмаган қисмини ташкил қил-са, у ҳолда такрор ва нотакрор танланмалар орасидаги фарқ йўқо-либ боради; чексиз бош тўплам қаралиб, танланма чекли ҳажмга эга бўлган лимит ҳолда бу фарқ йўқолади.

Амалиётда танлашнинг турли усуллари қўлланилади. Бош тўпламни қисмларга ажратишни талаб қилмайдиган танлаш мав-жуд, масалан, оддий қайтарилмайдиган тасодикий танлаш ва од-дий қайтариладиган тасодикий танлаш, шунингдек, бош тўплам қисмларга ажратилгандан кейин амалга ошириладиган танлаш (ти-пик танлаш, механик танлаш, серияли танлаш) ҳам қўлланилади.

Бутун бош тўпламдан объектлар битталаб олинадиган тан-лаш *оддий тасодикий* танлаш деб аталади. Агар танланган обь-ектлар кейинги танловда қатнашиши учун бош тўпламга қайта-рилса, бундай танлаш оддий қайтариладиган тасодикий танлаш, акс ҳолда эса оддий қайтарилмайдиган тасодикий танлаш бўла-ди. Масалан, агар бирор ҳудуд бўйича ўртача ойлик иш ҳақини аниқлаш талаб этилган бўлса, оддий қайтарилмайдиган тасоди-кий танлаш қўлланилади, чунки айни бир одамнинг иш ҳақи фа-кат бир марта ҳисобга олинади. Агар бирор тумандаги турли ко-миссияларнинг жинси, ёши, ижтимоий ҳолати, маълумоти бўйича таркибини аниқлаш талаб этилган бўлса, танлаш оддий қайтари-ладиган тасодикий танлаш бўлади, чунки айни бир одам ҳар хил комиссияларда иштирок этиши мумкин, бинобарин, танланмага бир неча марта тушиши мумкин.

Объектлар бутун бош тўпламдан эмас, балки унинг ҳар бир типга тегишли қисмларидан олинса, бундай танлаш *типик тан-лаш* деб аталади. Масалан, агар деталлар бир нечта станокда та-йёрланаётган бўлса, у ҳолда танлаш ҳамма станокларда тайёрлан-ган барча деталлар тўпламидан эмас, балки ҳар бир станок маҳсу-лотидан алоҳида амалга оширилади. Типик танлашдан текшири-лаётган белги бош тўпламнинг турли типларга тегишли қисмла-рида сезиларли даражада ўзгариб турганда

фойдаланилади.

Бош тўплам танланмага нечта объект кириши лозим бўлса, катталиги тахминан бир хил бўлган шунча группага механик ра-вишда ажратилиб, ҳар бир группадан эса айти битта номерли объект танланса, бундай танлаш *механик танлаш* деб аталади. Ма-салан, агар станокда тайёрланган деталларнинг 20% ини танлаб олиш лозим бўлса, у ҳолда ҳар бешинчи деталь танланади; агар деталларнинг 5% ини танлаб олиш талаб этилган бўлса, у ҳолда ҳар йигирманчи деталь танланади ва ҳ.к. Механик танлаш баъзан танланманинг репрезентативлигини таъминламаслиги мумкин.

Серияли танлаш деб шундай танлашга айтиладики, бунда объектлар бош тўпламдан битталаб эмас, балки «серия»лаб оли-нади ва улар ялписига текширилади. Масалан, агар маҳсулотлар катта гуруҳдаги автомат дастгоҳлар ёрдамида тайёрланаётган бўл-са, у ҳолда фақат бир нечта дастгоҳнинг маҳсулоти ялписига тек-ширилади. Серияли танлашдан текшириладиган белги турли сери-яларда унча ўзгармаган ҳолда фойдаланилади.

Амалиётда кўпинча комбинацияли (аралаш) танлаш қўлла-нилади, бунда юқорида кўрсатилиб ўтилган усуллардан бирга-ликда фойдаланилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Математик статистиканинг олдида қандай вазифа (масала)лар туради?
2. Математик статистикани қўллашдан мақсад нима ва унинг предмети нимадан иборат?
3. Танланма тўплам (танланма), бош тўплам, тўплам ҳажми нима?
4. Такрор танланма, нотақрор танланма ва репрезентатив танланма деб нимага айтилади?
5. Оддий тасодифий танлаш ва типик танлаш нимадан иборат?
6. Механик танлаш ва серияли танлаш нимадан иборат?

Таянч иборалар:

Математик статистика, баҳо, статистик гипотезаларни текшириш, статистик маълумотларни тўплаш ва қайта ишлаш, танланма тўплам, танланма, бош тўплам, тўплам ҳажми, такрор танланма, нотақрор танланма, репрезентатив танланма, оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш, оддий қайтариладиган тасодифий танлаш, типик танлаш, механик танлаш, серияли танлаш, комбинацияли танлаш.

11-мавзу. Танланманинг статистик тақсимо-ти. Эмпирик тақсимот функцияси. Полигон ва гистограмма

Режа:

1. Танланманинг статистик тақсимо-ти.
2. Эмпирик тақсимот функцияси.
3. Полигон ва гистограмма.

Бош тўпландан танланма олинган бўлсин. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта, ... , x_k қиймат эса n_k марта куза-тилган бўлсин ва ҳ.к.; $\sum n_i = n$ танланманинг ҳажми бўлсин.

Кузатилган x_i қийматлар *варианталар*, вариантларнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма-кетлиги *вариациявий қатор* деб аталади. n_i кузатишлар сонлари *частоталар*, уларнинг танланма ҳажмига $n_i/n = W_i$ нисбатлари *нисбий частоталар* дейилади.

Танланманинг статистик тақсимооти деб вариантлар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади. Статистик тақсимоотни ораликлар ва уларга мос частоталарнинг кет-ма-кетлиги кўринишида ҳам бериш мумкин. Бу ҳолда ораликқа мос частота сифатида шу ораликқа тушган частоталар йиғиндиси қабул қилинади. Бунда частоталар йиғиндиси танланма ҳажмига, нисбий частоталар йиғиндиси эса бирга тенг бўлиши керак.

Тақсимоот дейилганда эҳтимоллар назариясида тасодикий миқ-дорнинг мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимолликлари орасидаги мослик, математик статистикада эса кузатилаётган вари-анталар ва уларнинг частоталари (нисбий частоталари) орасидаги мослик тушунилади.

1-мисол. Ҳажми $n = 20$ бўлган танланманинг частоталари тақсимооти берилган:

11.1 – ж а д в а л

x_i	3	5	10
n_i	7	8	5

Нисбий частоталар тақсимооти ёзилсин.

Ечиш. Частоталарни танланма ҳажмига бўлиб, нисбий час-тоталарни топамиз:

$$W_1 = 7/20 = 0,35, \quad W_2 = 8/20 = 0,4, \quad W_3 = 5/20 = 0,25.$$

Нисбий частоталар тақсимоотини ёзамиз:

11.2 – ж а д в а л

x_i	3	5	10
W_i	0,35	0,4	0,25

Н а з о р а т: $0,35 + 0,4 + 0,25 = 1.$

X миқдорий белги частоталарининг статистик тақсимооти маълум бўлсин. n_x орқали белгининг x дан кичик қийматлари кузатил-ган кузатишлар сонини, n орқали эса кузатишларнинг умумий со-ни (танланма

ҳажми)ни белгилаймиз. $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси n_x/n га тенг. x ўзгарганда нисбий частота ҳам ўзгаради, яъни n_x/n нисбий частота x нинг функциясидир.

Эмпирик тақсимот функцияси (танланманинг тақсимот функ-цияси) деб x нинг ҳар бир қиймати учун $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайдиган $\bar{F}_n(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$\bar{F}_n(x) = n_x/n, \quad (11.1)$$

бу ерда n_x — x дан кичик вариантлар сони; n — танланма ҳажми.

$\bar{F}_n(x)$ функция эмпирик (тажриба) йўли билан топилгани учун эмпирик функция деб аталади.

Танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан фарқли ра-вишда бош тўпламнинг $F(x)$ тақсимот функцияси *назарий тақ-симот функцияси* деб аталади. Эмпирик ва назарий функциялар орасидаги фарқ шундан иборатки, $F(x)$ назарий функция $X < x$ ҳодисанинг эҳтимоллигини аниқлайди, $\bar{F}_n(x)$ эмпирик функция эса айнан шу ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайди.

Бернуллининг катта сонлар қонуни (9.2- теорема)дан келиб чиқадики, катта n ларда $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси, яъни $\bar{F}_n(x)$ ва айнан шу ҳодисанинг $F(x)$ эҳтимоллиги бир-би-ридан қуйидаги маънода кам фарқ қилади:

$$\text{ихтиёрий } \varepsilon > 0 \text{ да } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - \bar{F}_n(x)| < \varepsilon) = 1 \text{ бўлади.}$$

(11.2)

Иккинчи томондан, $\bar{F}_n(x)$ функциянинг таърифидан у $F(x)$ нинг барча хоссаларига эга эканлиги келиб чиқади:

- 1) эмпирик функциянинг қийматлари $[0, 1]$ кесмага тегишли;
- 2) $\bar{F}_n(x)$ — камаймайдиган функция;
- 3) агар x_1 энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x \leq x_1$ да $\bar{F}_n(x) = 0$ бўлади; агар x_k энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x > x_k$ да $\bar{F}_n(x) = 1$ бўлади.

Бу ердан танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини тақрибан тасвирлаш учун фойдаланишнинг мақсадга мувофиқ эканлиги келиб чиқади. Бошқача қилиб айтганда, танланманинг эмпирик тақсимот функци-яси бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини баҳолаш учун хизмат қилади.

2-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимо-ти бўйича эмпирик тақсимот функцияси тузилсин:

11.3 – ж а д в а л

x_i	1	4	8
n_i	9	3	18

Ечиш. Танланманинг ҳажмини топамиз: $9 + 3 + 18 = 30$. Энг кичик варианта 1 га тенг, демак

$x \leq 1$ да $\bar{F}_n(x) = 0$ бўлади.

$X < 4$ қиймат, яъни $x_1 = 1$ қиймат 9 марта кузатилди, демак

$1 < x \leq 4$ да $\bar{F}_n(x) = 9/30 = 0,3$ бўлади.

$X < 8$ қиймат, яъни $x_1 = 1$ ва $x_2 = 4$ қийматлар $9 + 3 = 12$ марта кузатилди, демак

$4 < x \leq 8$ да $\bar{F}_n(x) = 12/30 = 0,4$ бўлади.

Энг катта варианта 8 га тенг бўлгани учун

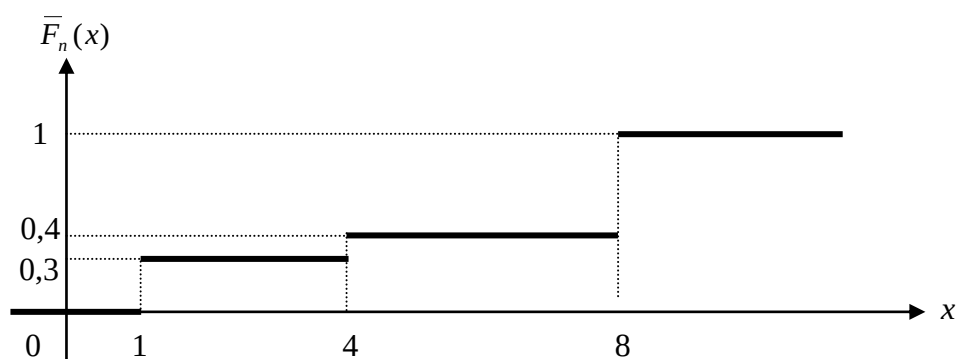
$x > 8$ да $\bar{F}_n(x) = 1$ бўлади.

Изланаётган эмпирик функция

$$\bar{F}_n(x) = \begin{cases} x \leq 1 & \partial a & 0 \\ 1 < x \leq 4 & \partial a & 0,3 \\ 4 < x \leq 8 & \partial a & 0,4 \\ x > 8 & \partial a & 1 \end{cases}$$

бўлади.

Бу функциянинг графиги 11.1-расмда тасвирланган.

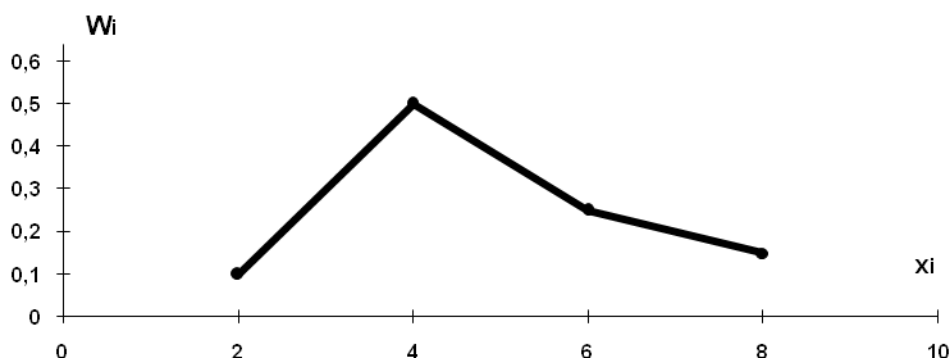


11.1 - расм.

Статистик тақсимотни график усулда турли йўллар билан, хусусан полигон ва гистограмма кўринишида тасвирлаш мумкин.

Частоталар полигони деб кесмалари $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ... , $(x_k; n_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизикқа айтилади. Полигонни

ясаш учун абсциссалар ўқида x_i вариантлар, ординаталар ўқида эса уларга мос n_i частоталар қўйиб чиқилади. Сўнгра $(x_i; n_i)$ нукталар тўғри чизик кесмалари билан туташтирилиб, частоталар полигони ҳосил қилинади.



11.2 - расм.

Нисбий частоталар полигони деб кесмалари $(x_1; W_1)$, $(x_2; W_2)$, ..., $(x_k; W_k)$ нукталарни туташтирувчи синик чизикқа айтилади. Нисбий частоталар полигони частоталар полигонига ўхшаш усулда ясалади. 11.2-расмда қуйидаги тақсимотнинг нис-бий частоталар полигони тасвирланган:

11.4 – ж а д в а л

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

Узлуксиз белги бўлган ҳолда гистограмма ясаш мақсадга мувофиқдир, бунинг учун белгининг барча кузатилаётган қий-матларини ўз ичига олган оралиқ узунлиги h га тенг бўлган бир нечта қисм оралиқларга бўлинади ва ҳар бир қисм оралиқ учун i нчи оралиққа тушган вариантлар частоталарининг йиғиндиси n_i топилади.

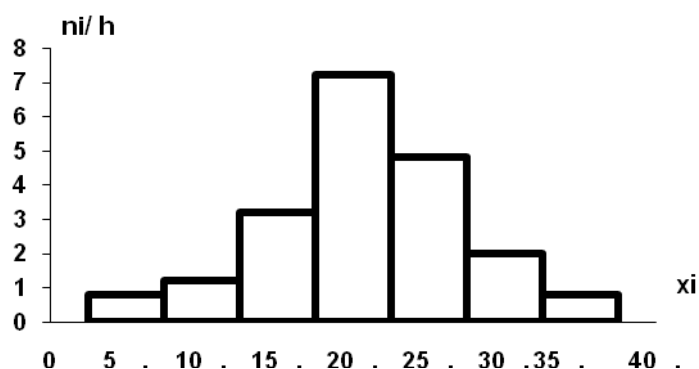
Частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги қисм оралиқлардан иборат бўлган, баландликлари эса n_i/h нис-батга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонасимон шаклга айтилади. Частоталар гистограммасини ясаш учун абс-циссалар ўқида қисм оралиқлар ажратилади, уларнинг устида эса абсциссалар ўқида параллел ҳолда n_i/h масофада кесмалар ўтка-зилади.

i нчи қисм тўртбурчакнинг юзи i нчи оралиқ вариантлари частоталарининг йиғиндиси $h n_i / h = n_i$ га тенг; бинобарин, частоталар гистограммасининг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажмига тенг.

11.5 – ж а д в а л

$h = 5$ узунликдаги қисм оралиқ	Қисм оралиқ варианталари частоталарининг йиғиндиси n_i	Частота зичлиги n_i/h
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

11.3-расмда 11.5-жадвалда берилган тақсимотнинг частота-лар гистограммаси тасвирланган.



11.3 - расм.

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узун-ликдаги қисм оралиқлардан иборат бўлган, баландликлари эса W_i/h нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғо-насимон шаклга айтилади. Нисбий частоталар гистограммаси частоталар гистограммасига ўхшаш усулда ясалади.

i нчи қисм тўртбурчакнинг юзи i нчи оралиқ вариантлари нисбий частоталарининг йиғиндиси $hW_i/h = W_i$ га тенг; биноба-рин, *нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг.*

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Варианталар, вариациявий қатор, частоталар ва нисбий частоталар деб нимага айтилади?
2. Танланманинг статистик тақсимоти нима ва у қандай берилади,

эҳтимоллар назариясидаги тақсимот билан математик статистикадаги тақсимот орасидаги фарқ нимада?

3. Эмпирик тақсимот функцияси ва назарий тақсимот функцияси нима?
4. Эмпирик тақсимот функцияси қандай хоссаларга эга?
5. Танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан бош тўплам-нинг назарий тақсимот функциясини баҳолаш учун фойдаланишнинг мақсадга мувофиқ эканлиги нимада?
6. Частоталар полигони ва нисбий частоталар полигони деб нимага айтилади ҳамда улар қандай ясалади?
7. Частоталар гистограммаси нима, у қандай ясалади ва частоталар гистограммасининг юзи нимага тенг?
8. Нисбий частоталар гистограммаси нима, у қандай ясалади ва нисбий частоталар гистограммасининг юзи нимага тенг?

Таянч иборалар:

Варианта, вариациявий қатор, частота, нисбий частота, танланманинг статистик тақсимоли, эмпирик тақсимот функцияси, назарий тақсимот функцияси, частоталар полигони, нисбий частоталар полигони, частоталар гистограммаси, частоталар гистограммасининг юзи, нисбий частоталар гистограммаси, нисбий частоталар гистограммасининг юзи.

12-мавзу. Статистик баҳо. Статистик баҳога қўйиладиган талаблар. Танланма ўртача ва танланма дисперсия

Режа:

1. Тақсимот параметрларининг статистик баҳолари.
2. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар.
3. Бош ўртача қиймат ва ўртача танланма қиймат.
4. Бош дисперсия ва танланма дисперсиялар.

Статистик баҳолаш назарияси масаланинг қўйилиши нуқтаи назаридан параметрик ва нопараметрик ҳолларга бўлинади.

Агар бош тўпламнинг миқдорий белгисини ўрганиш талаб этилган бўлса, бу белгининг тақсимолини аниқлайдиган параметр-ларни баҳолаш масаласи юзага келади. Масалан, ўрганилаётган белги бош тўпламда нормал тақсимланганлиги олдиндан маълум бўлса, у ҳолда математик кутилмани ва ўртача квадратик четла-нишни баҳолаш (тақрибий ҳисоблаш) зарур, чунки бу икки параметр нормал тақсимолини тўлиқ аниқлайди.

Одатда танламадаги маълумотларгина, масалан, миқдорий белгининг ўзаро боғлиқмас деб фараз қилинувчи n та кузатув натижасида олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматлари ихтиёрда бўлади. Баҳо-ланаётган белги худди шу маълумотлар орқали фойдаланади. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ларни боғлиқмас $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодикий миқдорлар деб қараб, назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик ба-ҳосини топиш кузатилаётган тасодикий

микдорларнинг баҳола-наётган параметр тақрибий қийматини берувчи функциясини то-пишга тенг кучлидир дейиш мумкин. Масалан, нормал тақсимот-нинг математик кутилмасини баҳолаш учун белгининг кузатиладиган қийматларининг ўрта арифметик қиймати бўладиган $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ функция хизмат қилади.

Шундай қилиб, назарий тақсимот номаълум θ параметри-нинг статистик баҳоси деб кузатиладиган тасодифий микдор-ларнинг маълум статистик маънода шу параметр ҳақиқий қийма-тига яқин $\bar{\theta} = \bar{\theta}(n) = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ функциясига айтилади.

Статистик баҳонинг баҳоланаётган параметр ҳақиқий қий-матига яқинлигини аниқлайдиган энг муҳим хоссалари силжима-ганлик, асослилиқ ва эффективлик хоссаларидир.

$\bar{\theta}$ назарий тақсимотнинг номаълум θ параметрининг ста-тистик баҳоси бўлсин. Бош тўпладан кўп мароталаб n ҳажмли танланмалар олиб, умуман олганда, бир-биридан фарқ қилувчи $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_k$ баҳо-ларни олиш мумкин. Шундай қилиб, $\bar{\theta}$ баҳони тасодифий микдор сифатида, $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_k$ сонларни эса унинг мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

Агар $\bar{\theta}$ баҳо θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан бер-са, у ҳолда танланмадаги маълумотлар бўйича топилган ҳар бир $\bar{\theta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) сон θ нинг ҳақиқий қийматидан катта бўлади. Бу ҳолда $\bar{\theta}$ тасодифий микдорнинг математик кутилмаси (ўртача қиймати) ҳам θ дан катта, яъни $M(\bar{\theta}) > \theta$ бўлиши равшан. Агар $\bar{\theta}$ баҳони ками билан берса, у ҳолда $M(\bar{\theta}) < \theta$ бўлиши муқаррар.

Бу ердан математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган статистик баҳодан фойдаланиш ўлчашлар натижа-ларини тайинли битта томонга бузиб кўрсатувчи тасодифий бўл-маган хатолар бўлмиш тизимли хатоларга олиб келиши кўриниб турибди. Шу сабабга кўра, $\bar{\theta}$ баҳо математик кутилмасининг ба-ҳоланаётган параметрга тенглиги $\bar{\theta}$ нинг баъзи қийматлари θ дан катта, бошқалари эса кичик эканлиги туфайли хатоларни йў-қотмаса ҳам, лекин тизимли хатоларга йўл қўйилмаслигини кафо-латлайди, чунки ҳар хил ишорали хатолар деярли тенг микдорда учрайди.

Агар $\bar{\theta}$ статистик баҳонинг математик кутилмаси баҳолана-ётган θ параметрга ихтиёрий ҳажмдаги танланмада тенг, яъни

$$M(\bar{\theta}) = \theta \quad (12.1)$$

бўлса, бундай баҳо *силжисмаган баҳо* деб аталади.

Силжиган баҳо деб математик кутилмаси баҳоланаётган па-раметр

тенг бўлмаган баҳога айтилади.

Бироқ силжимаган баҳо баҳоланаётган параметрга яхши яқинлашишни ҳар доим ҳам беравермайди. Ҳақиқатан, $\bar{\theta}$ нинг мумкин бўлган қийматлари унинг ўрта қиймати атрофида анча тарқоқ бўлиши, яъни $D(\bar{\theta})$ дисперсия анчагина катта бўлиши мумкин. Бундай ҳолда битта танланма маълумотлари бўйича то-пилган баҳо $\bar{\theta}$ нинг ўрта қийматидан ва демак, баҳоланаётган θ параметрнинг ўзидан ҳам анча узоқлашган бўлиши мумкин. Агар $D(\bar{\theta})$ дисперсиянинг кичик бўлиши талаб этилса, у ҳолда катта хатога йўл қўйишнинг имконияти йўқ бўлади.

Агар статистик баҳо танланманинг берилган n ҳажмида энг кичик мумкин бўлган дисперсияга эга бўлса, у ҳолда бундай баҳо *эффектив баҳо* деб аталади.

Агар $\bar{\theta}$ статистик баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳти-моллик бўйича яқинлашса, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$$n \rightarrow \infty \text{ да } P(|\bar{\theta}(n) - \theta| \leq \varepsilon) \rightarrow 1 \quad (12.2)$$

бўлса, у ҳолда бундай баҳо *асосли баҳо* деб аталади. Масалан, агар силжимаган баҳонинг дисперсияси $n \rightarrow \infty$ да нолга интилса, у ҳолда бундай баҳо асосли баҳо ҳам бўлади.

Бош тўплам X миқдорий белгига нисбатан ўрганилаётган бўлсин.

$\bar{X}_B$ бош ўртача қиймат деб бош тўплам белгиси қийматла-рининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_N$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда бош ўртача қиймат

$$\bar{X}_B = (x_1 + x_2 + \dots + x_N) / N \quad (12.3)$$

га тенг бўлади.

Белгининг $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $N_1, N_2, \dots, N_k$ частоталарга эга ва бунда $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ бўлган тақдирда эса бош ўртача қиймат

$$\bar{X}_B = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k) / N \quad (12.4)$$

га тенг бўлади.

Агар бош тўпламнинг текширилаётган X белгиси тасодифий миқдор деб қаралса ҳамда (12.3) ва (12.4) формулалар (6.1) ва (6.2) формулалар билан солиштирилса, у ҳолда белгининг мате-матик кутилмаси шу белгининг бош ўртача қийматига тенг деган хулосага келиш мумкин:

$$\bar{X}_B = M(X). \quad (12.5)$$

Энди бош тўпламни X миқдорий белгига нисбатан ўрганиш учун n ҳажмли танланма олинган бўлсин.

$\bar{X}_T$ ўртача танланма қиймат деб танланма тўплам белгиси-нинг

кузатилаётган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_T = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \quad (12.6)$$

га тенг бўлади.

Белгининг $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталарга эга ва бунда $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ бўлган тақдир-да эса ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_T = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k)/n \quad (12.7)$$

га ёки

$$\bar{x}_T = \left(\sum_{i=1}^k x_i n_i \right) / n \quad (12.8)$$

тенг бўлади.

Ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматнинг силжима-ган баҳоси экан деган фикрга ишонч ҳосил қилайлик, яъни $\bar{x}_T$ нинг математик кутилмаси $\bar{x}_B$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. $\bar{x}_T$ ни тасодифий миқдор ва $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни боғлиқмас, бир хил тақ-симланган тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасоди-фий миқдорлар бир хил тақсимланган бўлгани учун улар бир хил сонли тавсифларга, хусусан, бош тўплам X белгисининг матема-тик кутилмасига тенг бўлган бир хил математик кутилмага эга.

Шунга асосан, 6.2-хоссадан, 6.2-натижадан ҳамда (12.5) ва (12.6) формулалардан фойдаланиб,

$$M(\bar{x}_T) = \bar{x}_B \quad (12.9)$$

ни оламиз.

9.1-натижадан фойдаланиб, ўртача танланма қиймат бош ўр-тача қийматнинг асосли баҳоси ҳам эканлигини осонгина кўрса-тиш мумкин.

Бош ва танланма тўпламлар миқдорий белгилари қийматла-рининг ўзларининг ўртача қийматлари атрофидаги тарқоқлигини тавсифлаш учун жамланма тавсифлар — мос равишда бош ва танланма дисперсиялар ҳамда ўртача квадратик четланишлар ки-ритилади.

D_B бош дисперсия деб бош тўплам белгиси қийматларининг уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_B$ дан четланишлари квадратларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_N$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда бош дисперсия

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / N \quad (12.10)$$

га тенг бўлади.

Белгининг $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $N_1, N_2, \dots, N_k$ частоталарга эга ва бунда $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ бўлган тақдирда эса бош дисперсия

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 N_i \right) / N \quad (12.11)$$

га тенг бўлади.

Бош ўртача квадратик четланиш деб бош дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (12.12)$$

1-мисол. Бош тўплам

12.1 – ж а д в а л

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

тақсимот жадвали билан берилган. Бош дисперсия ва бош ўртача квадратик четланиш топилсин.

Ечиш. Бош ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{x}_B = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4.$$

Бош дисперсияни топамиз:

$$D_B = \frac{(2-4)^2 \cdot 8 + (4-4)^2 \cdot 9 + (5-4)^2 \cdot 10 + (6-4)^2 \cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1,8.$$

Бош ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1,8} \approx 1,34.$$

D_T танланма дисперсия деб танланма тўплам белгисининг кузатиладиган қийматларининг уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_T$ дан четланишлари квадратларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда танланма дисперсия

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2 \right) / n \quad (12.13)$$

га тенг бўлади.

Белгининг $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталарга эга ва бунда $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ бўлган тақдир-да эса танланма дисперсия

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right) / n \quad (12.14)$$

тенг бўлади.

Танланма ўртача квадратик четланиши деб танланма дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T}. \quad (12.15)$$

2-мисол. Танланма тўплам

12.2 – ж а д в а л

x_i	1	2	3	4
N_i	20	15	10	5

тақсимот жадвали билан берилган. Танланма дисперсия ва танланма ўртача квадратик четланиши топилсин.

Ечиш. Ўртача танланма қийматни топамиз:

$$\bar{x}_T = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_T = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Танланма ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{1} = 1.$$

Дисперсияларни

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) / N - (\bar{x}_B)^2, \quad (12.16)$$

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 N_i \right) / N - (\bar{x}_B)^2, \quad (12.17)$$

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) / n - (\bar{x}_T)^2 \quad (12.18)$$

ва

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) / n - (\bar{x}_T)^2 \quad (12.19)$$

формулалардан фойдаланиб ҳисоблаш қулайроқ бўлади.

Энди танланмадаги маълумотлар бўйича номаълум D_B бош дисперсияни баҳолаш талаб этилган бўлсин. D_T танланма дисперсия D_B нинг силжиган баҳоси бўлади, чунки

$$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_B. \quad (12.20)$$

Бош дисперсиянинг баҳоси сифатида D_T ни $n/(n-1)$ касрга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинган s^2 *тузатилган дисперсия* олинган тақдирда эса у бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси бўлади. Ҳақиқатан, (12.20) ни ҳисобга олган ҳолда

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right)}{n} = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right) / (n-1) \quad (12.21)$$

ва

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_T \right) = \frac{n}{n-1} M(D_T) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_B = D_B \quad (12.22)$$

ларни ҳосил қиламиз.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Номаълум параметрнинг статистик баҳоси деб нимага айтилади ва у қандай муҳим хоссаларга эга бўлиши мумкин?
2. Силжимаган баҳо нима ва унинг киритилиши нима билан асосланади?
3. Эффе́ктив баҳо нима ва унинг киритилишининг зарурияти нимада?
4. Силжиган баҳо ва асосли баҳо деб нимага айтилади?
5. Бош ўртача қиймат нима ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
6. Ўртача танланма қиймат деб нимага айтилади ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
7. Ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматнинг қандай баҳоси бўлади?
8. Бош дисперсия нима ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
9. Танланма дисперсия деб нимага айтилади ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
10. Бош ўртача квадратик четланиш ва танланма ўртача квадратик четланиш нима, улар ҳамда бош ва танланма дисперсиялар нима учун киритилади?

11. Дисперсияларни қайси формулалар бўйича ҳисоблаш қулай-роқ?
12. Нима бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси бўлади?

Таянч иборалар:

Номаълум параметрнинг статистик баҳоси, силжимаган баҳо, силжиган баҳо, эффектив баҳо, асосли баҳо, бош ўртача қиймат, ўртача танланма қиймат, бош дисперсия, бош ўртача квадратик четланиш, танланма дисперсия, танланма ўртача квадратик четланиш, тузатилган дисперсия.

13-мавзу.Интервалли баҳолар. Ишончлилик интервали. Нормал тақсимотнинг номаълум параметрлари учун ишончлилик интерваллари

Режа:

1. Баҳонинг аниқлиги, ишончлилик, ишончлилик интервали.
2. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали.
3. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали.
4. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончлилик интервали.

Параметрларни баҳолашнинг иккита усули мавжуд: нуқта-вий ва интервалли. Нуқтавий усуллар фақат атрофида баҳолана-ётган номаълум параметр жойлашган нуқтани кўрсатади. Интер-валли усуллар ёрдамида параметрнинг номаълум қиймати маълум бир эҳтимоллик билан ётадиган интервални топиш мумкин.

Нуқтавий баҳо деб битта сон билан аниқланадиган баҳога айтилади. Танланманинг ҳажми кичик бўлган ҳолда нуқтавий баҳо баҳоланаётган параметрдан анча фарқ қилиши, яъни қўпол хато-ларга олиб келиши мумкин. Шу сабабга кўра танланма ҳажми ун-ча катта бўлмаганда интервалли баҳолардан фойдаланиш лозим.

Интервалли баҳо деб иккита сон — интервалнинг учлари билан аниқланадиган баҳога айтилади. Интервалли баҳолар баҳо-ларнинг аниқлиги ва ишончлилигини баҳолашга имкон беради.

Танланма маълумотлари бўйича топилган $\bar{\theta}$ статистик тав-сиф номаълум θ параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. Агар $\delta > 0$ ва $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ бўлса, у ҳолда δ қанчалик кичик бўлса, $\bar{\theta}$ баҳо θ параметрни шунчалик аниқ тавсифлайди. *Баҳонинг аниқлиги* δ мусбат сон билан тавсифланади.

Бироқ $\bar{\theta}$ баҳо $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантиради деб қатъий даъво қилиш мумкин эмас. Статистик усуллар фақат бу тенгсизлик

амалга ошадиган эҳтимоллик ҳақидагина гапиришга имкон беради.

θ нинг $\bar{\theta}$ бўйича баҳоланишининг *ишончилиги* (*ишончи-лик эҳтимоллиги*) деб $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ тенгсизлик амалга ошадиган γ эҳтимолликка айтилади, яъни

$$P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = \gamma \quad (13.1)$$

бўлади. γ сифатида бир сонига яқин бўлган сон олинади.

$|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ тенгсизликдан

$$\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta \quad (13.2)$$

кўш тенгсизликни осонгина олиш мумкин. У ҳолда (13.1) муноса-бат

$$P(\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta) = \gamma \quad (13.3)$$

кўринишни олади. Бу муносабат қуйидагини билдиради: $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ интервал номаълум θ параметрни ўз ичига олиши (қопла-ши)нинг эҳтимоллиги γ га тенг.

$(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ интервал номаълум θ параметрни берилган γ ишончилилик билан қопловчи *ишончилилик интервали* деб аталади.

Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган бўлиб, бу тақсимотнинг σ ўртача квадратик четланиши маълум бўлсин. Номаълум a математик кутилмани $\bar{X}$ ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинади. Ўз олдимишга a параметрни γ ишончилилик билан қопловчи ишончилилик интервалларини топиш вазифасини қўямиз.

$\bar{X}$ ўртача танланма қийматни $\bar{X}$ тасодикий миқдор сифатида ($\bar{X}$ танланмадан танланмага ўтганда ўзгаради), белгининг $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма қийматларини эса бир хил тақсимланган $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодикий миқдорлар сифатида (бу сонлар ҳам танланма-дан танланмага ўтганда ўзгаради) қараймиз. Бу миқдорлардан ҳар бирининг математик кутилмаси a га ва ўртача квадратик четланиши σ га тенг.

У ҳолда, 6.2-хоссадан, 6.2-натижадан ҳамда (12.6) формула-дан фойдаланиб, $\bar{X}$ тақсимотининг параметрлари

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n} \quad (13.4)$$

эканлигини кўрамиз.

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma \quad (13.5)$$

муносабат бажарилишини талаб қиламиз, бу ерда γ — берилган ишончилилик.

X ни $\bar{X}$ билан ва σ ни $\sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ билан алмаштирган ҳолда (8.11) формуладан фойдаланиб,

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma) = 2\Phi(t) \quad (13.6)$$

муносабатни олиш қийин эмас, бу ерда $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$.

Охирги тенгликдан $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ ни топиб,

$$P(|\bar{X} - a| < t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) \quad (13.7)$$

ни ёзиш мумкин.

Умумийлик учун ўртача танланма қийматни яна $\bar{X}$ орқали белгилаб, (13.5) – (13.7) муносабатлардан

$$\Phi(t) = \gamma/2 \quad (13.8)$$

ва

$$P(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}) = \gamma \quad (13.9)$$

муносабатларни оламиз.

Демак, $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ ишончлилик интервали номаълум a параметрни қоплашини γ ишончлилик билан даъво қилиш мумкин, бунда баҳонинг аниқлиги $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ га тенг, t сони эса (13.8) тенгликдан Лаплас функциясининг жадвали бўйи-ча аниқланади.

1-мисол. X тасодифий миқдор $\sigma = 3$ ўртача квадратик четла-ниши маълум бўлган нормал тақсимотга эга. Агар танланма ҳажми $n = 36$ бўлиб, баҳонинг $\gamma = 0,95$ ишончлилиги берилган бўлса, номаълум a математик кутилмани $\bar{X}$ ўртача танланма қиймат бўй-йича баҳолаш учун ишончлилик интервали топилсин.

Ечиш. t ни топамиз. (13.8) муносабатдан $\Phi(t) = 0,475$ ни оламиз ва Лаплас функциясининг жадвалидан $t = 1,96$ ни топамиз.

Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n} = (1,96 \cdot 3)/\sqrt{36} = 0,98.$$

Ишончлилик интервали $(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$ бўлади. Масалан, агар $\bar{x} = 4,1$ бўлса, у ҳолда ишончлилик интервали қуйидаги ишончли-лик чегараларига эга бўлади:

$$\bar{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12; \quad \bar{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Бу ёғига бизга «хи квадрат» ва Стьюдент тақсимотлари ке-рак бўлади.

X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) лар нормал боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, улардан ҳар бирининг математик кутилмаси нолга, ўртача квадратик четланиши эса бирга тенг бўлсин. У ҳолда бу миқдорлар

квадратларининг $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ йиғиндиси эркинлик да-ражалари $k = n$ та

бўлган χ^2 («хи квадрат») қонуни бўйича тақсимланган.

Бу тақсимотнинг зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ x > 0 & \partial a & \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} e^{-x/2} x^{(k/2)-1} \end{cases} \quad (13.10)$$

кўринишга эга, бу ерда $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция.

Бу ердан «хи квадрат» тақсимои битта параметр — эркин-лик даражалари сони k билан аниқланиши кўриниб туради.

Сўнгра, Z нормал тасодикий миқдор бўлиб, $M(Z) = 0$ ва $\sigma(Z) = 1$ бўлсин, V эса Z га боғлиқ бўлмаган, эркинлик даража-лари k та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган тасодикий миқдор бўлсин. У ҳолда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \quad (13.11)$$

тасодикий миқдор t -тақсимот ёки эркинлик даражалари k та бўлган *Стьюдент тақсимои* деб аталувчи тақсимотга эга бўлади.

Энди бош тўпламнинг нормал тақсимланган X миқдорий белгисининг номаълум a математик кутилмасини бу тақсимотнинг σ ўртача квадратик четланиши н о м а ъ л у м бўлганда $\bar{X}$ ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Ўз олдимишга a параметрни γ ишончилилик билан қопловчи ишончилилик интервал-ларини топиш вазифасини кўямиз.

Эркинлик даражалари $k = n - 1$ та бўлган Стьюдент тақсимоига эга бўлган

$$T = \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}} \quad (13.12)$$

тасодикий миқдорни кўриб чиқайлик. Бу ерда $\bar{X}$ — танланма ўртача қиймат, s — «тузатилган» ўртача квадратик четланиш, n — танланма ҳажми.

Бу тасодикий миқдор тақсимотининг зичлик функцияси

$$S(t, n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1} \right]^{-n/2} \quad (13.13)$$

га тенг, бунда $B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}$. Бу ердан (13.12) тасодикий

миқдорнинг тақсимои n параметр — танланма ҳажми билан аниқланиши

ва номаълум a ва σ параметрларга боғлиқ эмаслиги кўриниб турибди.

$S(t, n)$ функция t бўйича жуфт бўлгани учун

$$\left| \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}} \right| < t_\gamma \quad (13.14)$$

тенгсизлик рўй беришининг эҳтимоллиги 7.1-теоремага асосан

$$P\left(\left| \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}} \right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt = \gamma \quad (13.15)$$

формуладан аниқланади. (13.14) тенгсизликни унга тенг кучли бўлган қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P(\bar{x} - t_\gamma s/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n}) = \gamma \quad (13.16)$$

муносабатни оламиз.

Шундай қилиб, Стъудент тақсимотидан фойдаланиб, но-маълум a параметрни γ ишончлилик билан қопловчи $(\bar{x} - t_\gamma s/\sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n})$ ишончлилик интервалини топдик. Махсус жадвалдан берилган n ва γ бўйича t_γ ни топиш мумкин.

2-мисол. Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган. $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 20,2$ ўртача тан-ланма қиймат ва $s = 0,8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. Номаълум a математик кутилма $\gamma = 0,95$ ишончлилик билан ишончлилик интервали ёрдамида баҳолансин.

Ечиш. t_γ ни топамиз. Жадвалдан фойдаланиб, $\gamma = 0,95$ ва $n = 16$ бўйича $t_\gamma = 2,13$ ни топамиз.

Ишончлилик чегараларини топамиз:

$$\bar{x} - t_\gamma s/\sqrt{n} = 20,2 - 2,13 \cdot 0,8/\sqrt{16} = 19,774,$$

$$\bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n} = 20,2 + 2,13 \cdot 0,8/\sqrt{16} = 20,626.$$

Демак, $0,95$ ишончлилик билан номаълум a параметр $19,774 < a < 20,626$ ишончлилик интервалининг ичида жойлаш-ган.

Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган бўлсин. Номаълум σ бош ўртача квадратик четланишни S «туза-тилган» ўртача квадратик четланиш бўйича баҳолаш талаб қилина-ди. Ўз олдимизга σ параметрни γ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервалларини топиш вазифасини қўямиз.

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma \quad (13.17)$$

муносабат ёки унга тенг кучли бўлган

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma \quad (13.18)$$

муносабат бажарилишини талаб қиламиз, бу ерда γ — берилган ишончлилик.

$$\delta/s = q \text{ деб олиб,}$$

$$s - \delta < \sigma < s + \delta \quad (13.19)$$

кўш тенгсизликдан

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \quad (13.20)$$

тенгсизликни оламиз.

σ параметрни қопловчи ишончлилик интервалини топиш учун фақат q ни топиш қолди. Шу мақсадда

$$\chi = (s/\sigma)\sqrt{n-1} \quad (13.21)$$

тасодикий миқдорни қараймиз, бу ерда n — танланма ҳажми (бу тасодикий миқдор $s^2(n-1)/\sigma^2$ тасодикий миқдор эркинлик даражалари $n-1$ та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган бўлгани учун χ орқали белгиланган).

χ тасодикий миқдор тақсимотининг зичлик функцияси

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (13.22)$$

кўринишга эга. Бу тақсимот баҳоланаётган σ параметрга боғлиқ бўлмасдан, фақат танланма ҳажми n га боғлиқ бўлади.

(13.20) тенгсизликдан

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)} \quad (13.23)$$

тенгсизликни олиш мумкин. Бу тенгсизликнинг ҳамма ҳадларини $s\sqrt{n-1}$ га кўпайтириб,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

ни ёки

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \quad (13.24)$$

ни оламиз.

7.1-теоремадан фойдаланиб, шу тенгсизлик, бинобарин, унга тенг кучли бўлган (13.20) тенгсизлик рўй беришининг эҳтимоллиги

$$\int_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi, n) d\chi = \gamma \quad (13.25)$$

га тенг эканлигини кўрамиз. Шу тенгламадан берилган n ва γ бўйича q ни топиш мумкин. Бироқ амалиётда q махсус жадвал-дан топилади.

s ни танланма бўйича ҳисоблаб ва q ни жадвал бўйича то-пиб, номаълум σ параметрни берилган γ ишончлилик билан қопловчи изланаётган $(s(1-q), s(1+q))$ ишончлилик интерва-лини оламиз.

3-мисол. Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган. $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича $s = 0,8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. σ бош ўртача квадратик четланишни $\gamma = 0,95$ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервали топилсин.

Ечиш. Махсус жадвалдан берилган $\gamma = 0,95$ ва $n = 25$ бўйи-ча $q = 0,32$ ни топамиз.

Изланаётган ишончлилик интервалини топамиз:

$$0,8(1 - 0,32) < \sigma < 0,8(1 + 0,32)$$

ёки

$$0,544 < \sigma < 1,056.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Параметрларни баҳолашнинг қандай усуллари ва улар билан боғлиқ қайси баҳоларни биласиз?
2. **Баҳонинг аниқлиги ва ишончлилик (ишончлилик эҳтимоллиги) нима?**
3. Ишончлилик интервали деб нимага айтилади?
4. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?
5. «хи квадрат» ва Стьюдент тақсимотлари ҳақида нима биласиз?
6. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?
7. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?

Таянч иборалар:

Нуқтавий баҳо, интервалли баҳо, баҳонинг аниқлиги, ишонч-лилик (ишончлилик эҳтимоллиги), ишончлилик интервали, нор-мал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали, «хи квадрат» тақсимоти, Стьюдент тақсимоти, нормал тақсимот-нинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали, нормал тақси-

мoтнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончли-лик интервали.

Корреляциявий ва регрессиявий таҳлил элементлари

Режа:

1. Тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқлик турлари.
2. Шартли ўртача қийматлар ва регрессия танланма тенгламалари.
3. Регрессия танланма тенгламасини гуруҳланмаган маълумотлар бўйича топиш.
4. Корреляциявий жадвал.
5. Регрессия танланма тенгламасини гуруҳланган маълумотлар бўйича топиш.

Корреляциявий таҳлил ва регрессиявий таҳлил математик статистиканинг ёндош бўлимлари бўлиб, танланма маълумотлари бўйича тасодифий миқдорларнинг статистик боғлиқлигини ўрга-ниш учун мўлжалланган. Иккита тасодифий миқдор ё функцио-нал, ё статистик боғлиқлик билан боғланган ёхуд боғлиқмас бўлиши мумкин.

Агар X тасодифий миқдорнинг ҳар бир мумкин бўлган қий-матига Y тасодифий миқдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Y X тасодифий аргументнинг функцияси деб аталади:

$$Y = \varphi(X),$$

X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқлик эса *функцио-нал боғлиқлик* деб аталади.

Қатъий функционал боғлиқлик жуда кам ҳолларда мавжуд бўлади, чунки иккала тасодифий миқдор ҳам ёки уларнинг битта-си тасодифий омилларнинг таъсирига ҳам учрайди ва уларнинг ичида иккала миқдор учун умумий бўлганлари, яъни ҳам X га, ҳам Y га таъсир ўтказувчи омиллар ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳол-да статистик боғлиқлик вужудга келади. Битта тасодифий миқ-дорнинг ўзгариши бошқасининг тақсимо-ти ўзгаришига олиб ке-ладиган боғлиқлик *статистик боғлиқлик* деб аталади. Статистик боғлиқликнинг хусусий ҳоли корреляциявий боғлиқликдир.

Агар статистик боғлиқлик қаралаётган тасодифий миқдор-лардан бирининг ўзгаришидан иккинчи тасодифий миқдор ўрта қиймати ўзгаришининг келиб чиқишида намоён бўлса, у ҳолда бундай статистик боғлиқлик *корреляциявий боғлиқлик* деб аталади.

X тасодифий миқдор билан функционал равишда эмас, бал-ки корреляциявий ҳолда боғланган Y тасодифий миқдорга мисол келтирамиз. Y дон ҳосили, X эса ўғитлар миқдори бўлсин. Май-дони бир хил бўлган ер участкаларидан тенг миқдорларда ўғит солинганда ҳар хил миқдорда ҳосил олинади, яъни Y миқдор X миқдорнинг функцияси бўлмайди. Бу ҳолат ёғингарчилик, ҳаво ҳарорати ва бошқа тасодифий омилларнинг

таъсири билан ту-шунтирилади. Иккинчи томондан, ўртача ҳосил ўғитлар миқдор-рининг функцияси бўлади, яъни Y миқдор X миқдор билан корреляциявий боғлиқлик орқали боғланган.

$\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат деб Y нинг $X = x$ қийматга мос кузатилган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади. Масалан, агар $x_1 = 2$ да Y миқдор $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ қиймат-ларни қабул қилса, у ҳолда шартли ўртача қиймат $\bar{y}_{x_1} = (5 + 6 + 10)/3 = 7$ га тенг бўлади.

$\bar{x}_y$ шартли ўртача қиймат деб X нинг $Y = y$ қийматга мос кузатилган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Таърифдан кўриниб турибдики, $\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат X нинг функцияси бўлади; бу функцияни $\bar{f}(x)$ орқали белгилаб,

$$\bar{y}_x = \bar{f}(x) \quad (14.1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама Y нинг X га регрессия танланма тенгламаси деб аталади; $\bar{f}(x)$ функция Y нинг X га танланма регрессияси, унинг графиги эса Y нинг X га регрессия танланма чизиги деб аталади.

Шунга ўхшаш

$$\bar{x}_y = \bar{\varphi}(y) \quad (14.2)$$

тенглама X нинг Y га регрессия танланма тенгламаси деб аталади; $\bar{\varphi}(y)$ функция X нинг Y га танланма регрессияси, унинг графиги эса X нинг Y га регрессия танланма чизиги деб аталади.

Юқорида зикр этилганлар билан боғлиқ равишда корреляция назариясининг иккита масаласи вужудга келади. Биринчиси — $\bar{f}(x)$ ва $\bar{\varphi}(y)$ функцияларнинг кўриниши маълум бўлган шартда параметрларини кузатиш маълумотлари бўйича топиш. Иккинчиси — X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқликнинг кучи (зичлиги)ни баҳолаш ҳамда бу миқдорлар орасидаги корреляция-вий боғлиқликнинг мавжудлигини аниқлаш.

(X, Y) миқдорий белгилар тизими ўрганилаётган бўлсин. n та боғлиқмас тажриба натижасида n та (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) сонлар жуфтлиги олинди.

Кузатиш маълумотлари бўйича регрессия тўғри чизигининг танланма тенгламасини топайлик. Аниқлик учун Y нинг X га регрессиясининг

$$\bar{y}_x = kx + b \quad (14.3)$$

тенгламасини излаймиз.

X белгининг ҳар хил x қийматлари ва Y белгининг уларга мос y

қийматлари бир мартадан кузатилгани учун маълумотлар-ни гуруҳлашга зарурат йўқ. Шунингдек, шартли ўртача қиймат тушунчасидан фойдаланишга ҳам ҳожат йўқ, шунинг учун (14.3) тенгламани

$$y = kx + b \quad (14.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг бурчак коэффициенти танланма регрессия коэффициенти деб аталади ва ρ_{yx} орқали белгиланади. Бинобарин, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг қидирилаётган (14.4) тенгламасини

$$y = \rho_{yx} x + b \quad (14.5)$$

кўринишда излаш лозим.

Шундай ρ_{yx} ва b параметрларни топиш керакки, уларда кузатиш маълумотлари бўйича ясалган $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ нукталар xOy текисликда (14.5) тўғри чизиққа иложи борица яқин-роқ ётсин.

Буни амалга ошириш учун энг кичик квадратлар усулидан фойдаланамиз. Бу усулдан фойдаланганда $Y_i - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) четланишлар квадратларининг йиғиндиси минимал бўлиши керак, бу ерда Y_i — кузатилаётган X_i қийматга мос ҳамда (14.5) тенглама бўйича ҳисобланган ордината, y_i эса — X_i га мос кузатилаётган ордината. Ҳар бир четланиш изланаётган параметрларга боғлиқ бўлгани учун четланишлар квадратларининг йиғиндиси ҳам шу параметрларнинг

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 \quad (14.6)$$

ёки

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2 \quad (14.7)$$

функцияси бўлади.

Минимумни топиш учун мос хусусий ҳосилаларни нолга тенглаймиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \quad (14.8)$$

Бу иккита чизиқли тенгламалар системасини ρ ва b га нисбатан ечиб, изланаётган параметрларни топамиз:

$$\rho_{yx} = \left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \right) / \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right); \quad (14.9)$$

$$b = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) / \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right). \quad (14.10)$$

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га регрессия тўғри чизиғининг

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + c \quad (14.11)$$

танланма тенгламасини топиш мумкин, бу ерда ρ_{xy} — X нинг Y га танланма регрессия коэффиценти.

14.1 – ж а д в а л

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

1-мисол. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танлан-ма тенгламаси $n = 5$ та кузатиш маълумотлари (14.1-жадвал) бўйича топилсин.

Ечиш. Қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

14.2 – ж а д в а л

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^n x_i = 15$	$\sum_{i=1}^n y_i = 8,15$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 57,50$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 26,975$

Изланаётган параметрларни (14.9) ва (14.10) муносабатлар-дан топамиз:

$$\rho_{yx} = (5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15) / (5 \cdot 57,5 - 15^2) = 0,202;$$

$$b = (57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975) / (5 \cdot 57,5 - 15^2) = 1,024.$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг қидирилаётган

тенгламасини топамиз:

$$y = 0,202x + 1,024.$$

Кузатишлар сони катта бўлганда X нинг айти бир қиймати n_x марта, Y нинг айти бир қиймати n_y марта учраши, айти бир (X, Y) сонлар жуфтлиги n_{xy} марта кузатилиши мумкин. Шу са-бабли кузатиш маълумотларини гуруҳлаш лозим, бунинг учун n_x , n_y , n_{xy} частоталар ҳисобланади. Ҳамма гуруҳланган маълумотлар *корреляциявий жадвал* деб аталувчи жадвал (масалан, 14.3-жадвал) кўринишда ёзилади.

14.3 – ж а д в а л

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

14.3-корреляциявий жадвалнинг биринчи сатрида X белги-нинг кузатилаётган (10; 20; 30; 40) қийматлари, биринчи устуни-да эса Y белгининг кузатилаётган (0,4; 0,6; 0,8) қийматлари кўр-сатилган. Сатрлар ва устунларнинг кесишмаларида белгиларнинг кузатилаётган қийматлар жуфтликларининг n_{xy} частоталари жой-лашган.

Сўнгги устунда сатрлардаги частоталарнинг йиғиндилари, сўнгги сатрда эса устунлардаги частоталарнинг йиғиндилари ёзил-ган. Жадвалнинг пастки ўнг бурчагида жойлашган катакда барча частоталарнинг йиғиндиси, яъни жами кузатишлар сони n жой-лаштирилган. $\sum n_x = \sum n_y = n$ эканлиги равшан.

Энди Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси параметрларини олинган маълумотларнинг сони катта (амалда изланаётган параметрларни қоникарли даражада баҳолаш учун камида 50 та кузатиш ўтказилиши керак), улар орасида так-рорланадиганлари бор ҳамда бу маълумотлар корреляциявий жад-вал кўринишда гуруҳланган бўлган ҳолда аниқлаймиз.

(14.8) системадан

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (14.12)$$

системани олиш мумкин.

Соддалик учун $\sum x = \sum_{i=1}^n x_i$, $\sum y = \sum_{i=1}^n y_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,
 $\sum xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ белгилашларни киритиб ҳамда $\bar{x} = \sum x / n$, $\bar{y} = \sum y / n$, $\overline{x^2} = \sum x^2 / n$ ва (x, y) сонлар жуптлиги n_{xy} марта кузатилган деган фарозда $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ муносабатлардан фойдаланиб, (14.12) дан

$$\begin{cases} n\overline{x^2} \rho_{yx} + n\bar{x}b = \sum n_{xy} xy \\ \bar{x} \rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases} \quad (14.13)$$

ни оламир.

(14.13) системанинг иккинчи тенгламасини $b = \bar{y} - \bar{x} \rho_{yx}$ кўринишга келтириб ва шу тенгликнинг ўнг томонини $\bar{y}_x = \rho_{yx} \bar{x} + b$ тенгламага қўйиб,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} (\bar{x} - \bar{x}) \quad (14.14)$$

муносабатни оламир.

(12.15) ва (12.19) муносабатларни ҳисобга олган ҳолда, (14.13) системадан ρ_{yx} танланма регрессия коэффициентини топамиз:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала тарафини $\tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y$ касрга кўпайтирамиз:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \quad (14.15)$$

(14.15) тенгликнинг ўнг тарафини r_T орқали белгилаймиз:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \quad (14.16)$$

У ҳолда (14.15) дан

$$\rho_{yx} = r_T \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad (14.17)$$

ни оламиз. Ушбу тенгликнинг ўнг тарафини (14.14) га қўйиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини пировардида

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad (14.18)$$

кўринишда оламиз.

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га регрессия тўғри чизиғининг

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) \quad (14.19)$$

танланма тенгламасини топиш мумкин.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Корреляциявий ва регрессиявий таҳлил нимани ўрганади, тасодифий миқдорлар қандай боғланган бўлиши мумкин, тасодифий аргументнинг функцияси ва функционал боғлиқлик ни-мани англатади?
2. Статистик боғлиқлик ва корреляциявий боғлиқлик ҳақида нима биласиз?
3. Шартли ўртача қиймат, регрессия танланма тенгламаси, танланма регрессия, регрессия танланма чизиғи нима ва корреляция назариясининг қайси иккита масаласини биласиз?
4. Регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси гуруҳланмаган маълумотлар бўйича қандай кўринишда изланади ва танланма регрессия коэффиценти нима?
5. Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти нимада ва унинг ёрдамида регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси қандай топилади?
6. Корреляциявий жадвал ҳақида нима биласиз?
7. Регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасининг параметрлари гуруҳланган маълумотлар бўйича қандай топилади?

Таянч иборалар:

Корреляциявий таҳлил, регрессиявий таҳлил, тасодифий аргументнинг функцияси, функционал боғлиқлик, статистик боғлиқлик, корреляциявий боғлиқлик, шартли ўртача қиймат, регрессия танланма тенгламаси, танланма регрессия, регрессия танланма чизиғи, корреляция назариясининг иккита масаласи, гуруҳланмаган маълумотлар бўйича регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси, танланма регрессия коэффиценти, энг кичик квадратлар усули, корреляциявий жадвал, гуруҳланган маълумотлар бўйича регрессия тўғри чизиғининг танланма

тенгламаси.

15-мавзу. Танланма корреляция коэффиценти ва унинг хоссалари

Режа:

1. Корреляциявий момент ва корреляция коэффиценти.
2. Танланма корреляция коэффиценти.
3. Танланма корреляциявий нисбат.
4. Танланма корреляциявий нисбатнинг хоссалари.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг μ_{xy} корреляциявий мо-менти деб шу тасодифий миқдорлар четланишлари кўпайтмаси-нинг математик кутилмасига айтилади:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}. \quad (15.1)$$

Бу ердан осонгина

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) \quad (15.2)$$

муносабатни олиш мумкин.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг r_{xy} корреляция коэффи-циенти деб корреляциявий моментнинг шу тасодифий миқдорлар ўртача квадратик четланишларининг кўпайтмасига нисбатига ай-тилади:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y). \quad (15.3)$$

(15.2) муносабатдан боғлиқмас тасодифий миқдорларнинг корреляциявий моменти ва демак, корреляция коэффиценти нолга тенг эканлиги келиб чиқади.

Агар иккита X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффиценти нолдан фаркли бўлса, улар *корреляцияланган* деб аталади; агар иккита X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффиценти нолга тенг бўлса, улар *корреляцияланмаган* деб аталади.

Юқорида айтилганлардан боғлиқмас тасодифий миқдорлар дои-мо корреляцияланмаганлиги, иккита корреляцияланган тасоди-фий миқдорлар эса боғлиқ ҳам эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқа-тан, агар корреляцияланган тасодифий миқдорлар боғлиқмас деб фа-раз қилсак, у ҳолда улар учун $\mu_{xy} = 0$ муносабат бажарилиши ке-рак, бу эса корреляцияланган тасодифий миқдорлар учун доимо $\mu_{xy} \neq 0$ муносабат бажарилишига зиддир.

Иккинчи томондан, иккита боғлиқ тасодифий миқдорлар корреляцияланган ҳам, корреляцияланмаган ҳам бўлиши мумкин; корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар боғлиқ ҳам, боғлиқмас ҳам бўлиши мумкин.

Агар X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда корреляция коэффиценти $r_{xy} = 0$ бўлади; агар $r_{xy} = \pm 1$ бўлса, у ҳолда X ва Y тасодифий миқдорлар чизиқли функционал боғлиқлик би-лан боғланган бўлади. Бу ердан корреляция коэффиценти X ва Y орасидаги чизиқли

боғлиқликнинг кучи (зичлиги)ни ўлчаши келиб чиқади.

$$r_T = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y} \quad (15.4)$$

тенглик билан аниқланувчи r_T катталиқ *танланма корреляция коэффиценти* деб аталади. Бу ерда x ва y — X ва Y белгилар-нинг вариантлари (кузатилган қийматлари); n_{xy} — (x, y) вариантлар жуфтлигининг частотаси; n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси); $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ — танланма ўртача квадратик четланишлар; $\bar{x}, \bar{y}$ — ўртача танланма қийматлар.

r_T танланма корреляция коэффиценти бош тўпламнинг r_{xy} корреляция коэффицентининг баҳоси бўлади. Шунинг учун ун-дан X ва Y катталиқлар — миқдорий белгилар орасидаги чизик-ли боғлиқликни ўлчаш учун ҳам фойдаланиш мумкин.

15.1 – ж а д в а л

Y	X						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

1-мисол. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танлан-ма тенгламаси 15.1-корреляциявий жадвал маълумотлари бўйича топилсин.

Ечиш. Аввал танланма корреляция коэффицентини (15.4) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\bar{x} = (10 \cdot 5 + 20 \cdot 27 + 30 \cdot 63 + 40 \cdot 67 + 50 \cdot 29 + 60 \cdot 9) / 200 = 35,75;$$

$$\bar{y} = (15 \cdot 12 + 25 \cdot 43 + 35 \cdot 79 + 45 \cdot 47 + 55 \cdot 19) / 200 = 35,9;$$

$$\overline{x^2} = (100 \cdot 5 + 400 \cdot 27 + 900 \cdot 63 + 1600 \cdot 67 + 2500 \cdot 29 + 3600 \cdot 9) / 200 = 1400,5;$$

$$\overline{y^2} = (225 \cdot 12 + 625 \cdot 43 + 1225 \cdot 79 + 2025 \cdot 47 + 3025 \cdot 19) / 200 = 1395;$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{1400,5 - 1278,0625} \approx 11,07;$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_y &= \sqrt{y^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{1395 - 1288,81} \approx 10,30; \\ \sum n_{xy} xy &= 5 \cdot 10 \cdot 15 + 7 \cdot 20 \cdot 15 + 20 \cdot 20 \cdot 25 + 23 \cdot 30 \cdot 25 + 30 \cdot 30 \cdot 35 + \\ &+ 47 \cdot 40 \cdot 35 + 2 \cdot 50 \cdot 35 + 10 \cdot 30 \cdot 45 + 11 \cdot 40 \cdot 45 + 20 \cdot 50 \cdot 45 + \\ &+ 6 \cdot 60 \cdot 45 + 9 \cdot 40 \cdot 55 + 7 \cdot 50 \cdot 55 + 3 \cdot 60 \cdot 55 = 274350; \\ r_T &= \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{274350 - 200 \cdot 35,75 \cdot 35,9}{200 \cdot 11,07 \cdot 10,3} \approx 0,775.\end{aligned}$$

Энди топилган қийматларни (14.18) формулага қўямиз ва Y нинг X га регрессия тўғри чизигининг

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,775 \cdot \frac{10,30}{11,07} (x - 35,75)$$

ёки пировардида

$$\bar{y}_x = 0,721x + 10,12$$

танланма тенгламасини оламиз.

Агар танланма етарлича катта ҳажмга эга ва бош тўп-ламни яхши тасвирласа (репрезентатив бўлса), у ҳолда белгилар ораси-даги чизиқли боғлиқликнинг зичлиги ҳақида танланма маълумот-лари бўйича олинган хулоса маълум даражада бош тўп-ламга ҳам қўлланилиши мумкин. Масалан, нормал тақсимланган бош тўп-ламнинг r_B корреляция коэффицентини ($n \geq 50$ да) баҳолаш учун

$$r_T - 3 \frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3 \frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланиш мумкин.

Шундай қилиб, танланма корреляция коэффицентини танлан-мадаги белгилар орасидаги чизиқли корреляциявий боғлиқлик-нинг зичлигини баҳолаш учун хизмат қилади. Чизиқли бўлмаган корреляциявий боғлиқликнинг зичлигини баҳолаш учун танлан-ма корреляциявий нисбат тушунчаси киритилади.

Y нинг X га танланма корреляциявий нисбати деб

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \quad (15.5)$$

нисбатга айтилади. Бу ерда

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{y}_x} &= \sqrt{(\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2) / n}; \\ \tilde{\sigma}_y &= \sqrt{(\sum n_y (y - \bar{y})^2) / n},\end{aligned}$$

бўлиб, бунда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғинди-си); n_x — X белгининг x қиймати частотаси; n_y — Y белги-нинг y қиймати частотаси; $\bar{y}$ — Y белгининг умумий ўртача қиймати; $\bar{y}_x$ — Y

белгининг шартли ўртача қиймати.

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{xy}} / \tilde{\sigma}_x \quad (15.6)$$

танланма корреляциявий нисбати аниқланади.

2-мисол. Қуйидаги корреляциявий жадвал маълумотлари бўйича η_{yx} топилсин:

15.2 – ж а д в а л

Y	X			n_y
	10	20	30	
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Ечиш. Аввал $\bar{y}$, $\tilde{\sigma}_y$ ва $\sigma_{\bar{y}_x}$ ни топамиз:

$$\bar{y} = (38 \cdot 15 + 12 \cdot 25) / 50 = 17,4;$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{[38 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (25 - 17,4)^2] / 50} \approx 4,27;$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{[10 \cdot (21 - 17,4)^2 + 28 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (20 - 17,4)^2] / 50} \approx 2,73.$$

Энди шу қийматларнинг барчасини (15.5) формулага қўямиз ва η_{yx} ни топамиз:

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \approx 2,73 / 4,27 \approx 0,64.$$

Танланма корреляциявий нисбатнинг хоссаларини санаб ўтамиз.

15.1-хосса. Танланма корреляциявий нисбат

$$0 \leq \eta_{yx} \leq 1$$

қўш тенгсизликни қаноатлантиради.

15.2-хосса. Агар $\eta_{yx} = 0$ бўлса, у ҳолда Y белги X белги би-лан корреляциявий боғлиқлик орқали боғланмаган.

15.3-хосса. Агар $\eta_{yx} = 1$ бўлса, у ҳолда Y белги X белги би-лан функционал боғлиқлик орқали боғланган.

15.4-хосса. Танланма корреляциявий нисбат танланма корреляция коэффициентининг абсолют қийматидан кичик эмас: $\eta_{yx} \geq |r_T|$.

15.5-хосса. Агар танланма корреляциявий нисбат танланма корреляция коэффициентининг абсолют қийматига тенг бўлса, у ҳолда аниқ чизиқли корреляциявий боғлиқлик ўринли бўлади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Корреляциявий момент деб нима аталади ва корреляция коэф-фициенти деб нима аталади?
2. Корреляцияланган ва корреляцияланмаган тасодифий миқдор-лар нима ҳамда тасодифий миқдорларнинг боғлиқлиги ва корреляцияланганлиги тушунчалари орасидаги боғланиш қандай?
3. Танланма корреляция коэффиценти ҳақида нима биласиз?
4. Танланма корреляциявий нисбат нима ва у нимага хизмат қила-ди?
5. Танланма корреляциявий нисбатнинг қайси хоссаларини била-сиз?

Таянч иборалар:

Корреляциявий момент, корреляция коэффиценти, корреляцияланган тасодифий миқдорлар, корреляцияланмаган тасоди-фий миқдорлар, танланма корреляция коэффиценти, танланма корреляциявий нисбат.

16-мавзу.Статистик гипотезалар ва уларнинг таснифи.Статистик мезон

Режа:

1. Статистик гипотезалар ва уларнинг таснифи. Биринчи ва иккинчи тур хатолар.
2. Статистик мезон. Критик соҳа ва критик нуқталар.
3. Критик соҳаларни топиш. Мезон қуввати.
4. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсияларини таққослаш.
5. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматларини таққослаш.

Бош тўпламнинг тақсимот қонунини аниқлаш талаб этилган бўлсин ва уни A деб атаймиз. Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга эга деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган деган гипотеза таклиф этилади. Шундай қилиб, ушбу гипотезада тахмин қилина-ётган тақсимотнинг кўриниши ҳақида гап боради.

Тақсимот қонуни маълум, унинг параметрлари эса номаъ-лум бўлган ҳол бўлиши мумкин. Агар номаълум Θ параметр та-йин Θ_0 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳол-да $\Theta = \Theta_0$ эканлиги ҳақидаги гипотеза таклиф этилади. Шундай қилиб, ушбу гипотезада маълум тақсимот параметрининг тахмин қилинаётган катталиги ҳақида гап боради.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўрини-ши ҳақидаги гипотезага ёки маълум тақсимотларнинг параметр-лари ҳақидаги гипотезага айтилади. Масалан, қуйидаги гипотеза-лар статистик гипотезалар бўлади:

- 1) бош тўплам Пуассон қонуни бўйича тақсимланган;
- 2) иккита нормал тўпламнинг дисперсиялари ўзаро тенг.

Биринчи гипотезада номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида, иккинчисида иккита маълум тақсимотнинг параметрлари ҳақида тахмин қилинган.

Нолинчи (асосий) гипотеза деб таклиф этилган H_0 гипотезага айтилади.

Конкурент (муқобил) гипотеза деб нолинчи гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади.

Масалан, агар нолинчи гипотеза нормал тақсимотнинг математик кутилмаси $a = 10$ га тенг деган тахминдан иборат бўлса, у ҳолда конкурент гипотеза $a \neq 10$ деган тахминдан иборат бўлиши мумкин; яъни $H_0: a = 10; H_1: a \neq 10$.

Оддий гипотеза деб фақат битта тахминни ўз ичига олган гипотезага айтилади. Масалан, нормал тақсимотнинг (σ маълум) математик кутилмаси 3 га тенглигидан иборат H_0 гипотеза оддий гипотезадир.

Мураккаб гипотеза деб чекли ёки чексиз сондаги оддий гипотезалардан иборат гипотезага айтилади. Масалан, $\lambda > 5$ экан-лигидан иборат бўлган мураккаб H гипотеза $H_i: \lambda = b_i$ кўриниш-даги оддий гипотезаларнинг чексиз тўпламидан иборат, бу ерда b_i — 5 дан катта ихтиёрий сон.

Таклиф этилган гипотеза тўғри ёки нотўғри бўлиши мумкин, шунинг учун бу гипотезани (статистик усуллар билан амалга ошириладиган) *статистик текшириш* зарурати туғилади. Гипотезани статистик текшириш натижасида хатоларга йўл қўйилиши мумкин.

Биринчи тур хато тўғри гипотеза рад этилишидан иборат.

Иккинчи тур хато нотўғри гипотеза қабул қилинишидан иборат.

Нолинчи гипотезани текшириш учун аниқ ёки тақрибий тақсимо-ти маълум бўлган махсус танланган тасодикий миқдор иш-латилади. Бу тасодикий миқдор K орқали белгиланади ва *статистик мезон* (ёки оддийгина *мезон*) деб аталади.

Статистик мезонга мисол келтирамиз. Агар иккита нормал бош тўпламлар дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги гипотеза текшири-лаётган бўлса, у ҳолда K мезон сифатида тузатилган тан-ланма дисперсияларнинг

$$F = s_1^2 / s_2^2$$

нисбати қабул қилинади.

$K_{\text{кузат}}$ *кузатиладиган қиймат* деб мезоннинг танланмалар бўйича ҳисобланган қийматига айтилади. Масалан, агар иккита тан-ланма бўйича $s_1^2 = 20$ ва $s_2^2 = 5$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлса, у ҳолда F мезоннинг кузатиладиган қиймати

$$F_{\text{кузат}} = s_1^2 / s_2^2 = 20/5 = 4$$

га тенг.

Тайинли мезон танланганидан сўнг унинг мумкин бўлган барча қийматлари тўплами иккита кесишмайдиган қисм тўплам-ларга ажратилади: улардан бири мезоннинг нолинчи гипотеза рад этиладиган қийматларини, иккинчиси эса бу гипотеза қабул қи-линадиган қийматларини ўз ичига олади.

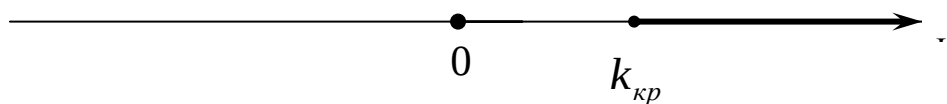
Критик соҳа деб мезоннинг нолинчи гипотеза рад этилади-ган қийматлари тўпламига айтилади.

Гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳа-си) деб мезоннинг нолинчи гипотеза қабул қилинадиган қиймат-лари тўпламига айтилади.

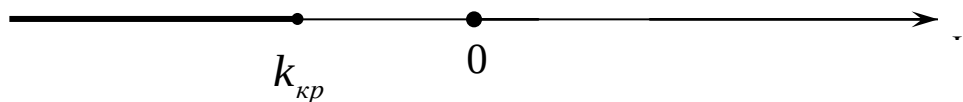
K мезон бир ўлчовли тасодифий миқдор бўлгани учун унинг мумкин бўлган барча қийматлари бирор интервалга тегишли бўла-ди. Шунинг учун критик соҳа ҳам, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси ҳам интерваллардан иборат бўлади ва демак, уларни ажра-тиб турадиган нуқталар мавжуд.

$k_{кр}$ *критик нуқталар* (чегаралар) деб критик соҳани гипоте-занинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқталарга айтилади.

Ўнг томонлама критик соҳа деб $K > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — мусбат сон (16.1-расм).



Чап томонлама критик соҳа деб $K < k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — манфий сон (16.2-расм).

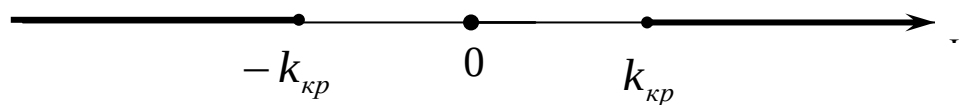


Бир томонлама критик соҳа деб ўнг томонлама ёки чап то-монлама критик соҳага айтилади.

Икки томонлама критик соҳа деб $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсиз-ликлар билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_2 > k_1$.

Хусусан, агар критик нуқталар нолга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда икки томонлама критик соҳа ($k_{кр} > 0$ деган фараз-да) $K < -k_{кр}$,

$K > k_{кр}$ тенгсизликлар билан ёки уларга тенг кучли $|K| > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланади (16.3-расм).



16.3 - расм.

Критик соҳани топиш учун критик нуқта (нуқталар)ни топиш етарли. Бундай нуқтани топиш учун эса етарлича кичик эҳтимоллик — қийматдорлик даражаси α берилади. Сўнгра но-линчи гипотеза ўринли эканлиги шартида K мезон критик соҳадан қийматлар қабул қилишининг эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлади деган талабдан келиб чиқиб $k_{кр}$ критик нуқта изланади.

Масалан, ўнг томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \alpha \quad (16.1)$$

муносабат, чап томонлама критик соҳа учун

$$P(K < k_{кр}) = \alpha \quad (16.2)$$

муносабат, икки томонлама критик соҳа учун эса

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha \quad (16.3)$$

муносабат бажарилиши керак.

Ҳар бир мезон учун тегишли жадваллар мавжуд бўлиб, улар бўйича (16.1) – (16.3) кўринишдаги талабларни қаноатлантирувчи критик нуқта топилади.

Агар мезон тақсимооти нолга нисбатан симметрик бўлса ҳам-да нолга нисбатан симметрик $-k_{кр}$ ва $k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$) нуқталарни танлаш учун асос бўлса, у ҳолда $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$ бўлади. Шу муносабатни ҳисобга олиб, (16.3) дан икки томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2 \quad (16.4)$$

муносабатни оламиз.

Мезон қуввати деб конкурент гипотеза ўринли эканлиги шартида мезоннинг критик соҳага тушиши эҳтимоллигига айтилади. Бошқача айтганда, мезон қуввати конкурент гипотеза ўринли бўлганда нолинчи гипотеза рад этилишининг эҳтимоллигидир.

Гипотезани текшириш учун тайинли қийматдорлик даражаси қабул қилинган ва танланма тайин ҳажмга эга бўлсин. Агар β иккинчи тур хатонинг, яъни «нолинчи гипотеза қабул қилинган, аслида эса конкурент гипотеза ўринли эди» ҳодисасининг эҳтимоллиги бўлса, у ҳолда мезон қуввати $1 - \beta$ га тенг.

$1 - \beta$ қувват ортиб борсин; демак, иккинчи тур хатога йўл қў-

йишининг эҳтимоллиги β камайиб боради. Бинобарин, қувват қан-чалик катта бўлса, иккинчи тур хатонинг эҳтимоллиги шунчалик кичик бўлади.

Шундай қилиб, агар қийматдорлик даражаси танлаб олинган бўлса, у ҳолда критик соҳани мезон қуввати максимал бўладиган қилиб қуриш лозим. Бу иккинчи тур хатосини минималлашти-ришга имкон беради.

Бу ёғига бизга Фишер – Снедекор тақсимооти керак бўлади.

Агар U ва V лар эркинлик даражалари k_1 ва k_2 та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган боғлиқмас тасодикий микдорлар бўлса, у ҳолда

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \quad (16.5)$$

катталиқ эркинлик даражалари k_1 ва k_2 та бўлган *Фишер – Снедекор-нинг F тақсимооти* деб аталувчи тақсимотга эга бўлади.

Бу тақсимотнинг зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ x > 0 & \partial a & C_0 \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1+k_2)/2}} \end{cases},$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2) \Gamma(k_2/2)}.$$

F тақсимот иккита параметр — эркинлик даражалари сон-лари k_1 ва k_2 билан аниқланади.

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан олинган, ҳажмлари мос равишда n_1 ва n_2 га тенг бўлган боғлиқмас танланмалар бўйича S_X^2 ва S_Y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган. Берилган α қийматдорлик даражасида тузатилган дисперсиялар бўйича кўрилатган тўпламларнинг бош дисперсиялари ўзаро тенг эканлигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0: D(X) = D(Y). \quad (16.6)$$

Тузатилган дисперсиялар бош дисперсияларнинг силжима-ган баҳолари, яъни

$$M(s_X^2) = D(X), \quad M(s_Y^2) = D(Y)$$

эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани

$$H_0: M(s_X^2) = M(s_Y^2) \quad (16.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Амалиётда дисперсияларни таққослаш масаласи асбоблар-нинг, ускуналарнинг, ўлчаш усуллари-нинг ўзининг ва ҳоказолар-нинг аниқлигини таққослаш талаб этилганда юзага келади. Рав-шанки, ўлчаш натижалари-нинг энг кам тарқоқлигини, яъни энг ки-чик дисперсияни таъминлайдиган асбоб, ускуна ва усул маъқул-роқдир.

Бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикроғига нисбати, яъни

$$F = s_{кат}^2 / s_{кич}^2 \quad (16.8)$$

тасодифий миқдор қабул қилинади.

F катталик нолинчи гипотеза ўринли деган шартда эркинлик даражалари $k_1 = n_1 - 1$ ва $k_2 = n_2 - 1$ та бўлган Фишер – Снедекор тақсимоти-га эга, бу ерда n_1 ҳажмли танланма бўйича каттароқ ту-затилган дисперсия ҳисобланган, n_2 ҳажмли танланма бўйича ки-чикроқ тузатилган дисперсия ҳисобланган.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ ра-вишда курилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конку-рент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

Бу ҳолда ўнг томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўрин-ли деган тахминда F мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосла-ниб қурилади:

$$P(F > F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)) = \alpha. \quad (16.9)$$

$F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ критик нукта Фишер – Снедекор тақсимоти-нинг критик нуқталари жадвали бўйича топилади.

1-қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўплам-лар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$ бўлган-да текшириш учун тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг ки-чикроғига нисбати, яъни

$$F_{кузат} = s_{кат}^2 / s_{кич}^2 \quad (16.10)$$

ни ҳисоблаш керак ва Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилган α қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари k_1 ва k_2 бўйича $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ кри-тик нуқтани топиш керак (k_1 — каттароқ тузатилган дисперсия-нинг эркинлик даражалари сони).

Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1-мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган иккита $n_1 = 12$ ва $n_2 = 15$ ҳажмли боғлиқмас танланмалар бўйича $s_X^2 = 11,41$ ва $s_Y^2 = 6,52$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақи-даги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$ бўлганда текширилсин.

Ечиш. Тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикро-ғига нисбатини топамиз:

$$F_{кузат} = 11,41/6,52 = 1,75.$$

Конкурент гипотеза $D(X) > D(Y)$ кўринишда, шунинг учун кри-тик соҳа ўнг томонлама бўлади.

Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадва-ли, $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари $k_1 = 12 - 1 = 11$ ва $k_2 = 15 - 1 = 14$ бўйича $F_{кр}(0,05; 11; 14) = 2,56$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} < F_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конку-рент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда F мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлиши тала-бига асосланиб қурилади.

Мезоннинг энг катта қуввати (конкурент гипотеза ўринли бўлганда мезоннинг критик соҳага тушиш эҳтимоллиги)га мезон-нинг критик соҳанинг ҳар бир интервалига тушиш эҳтимоллиги $\alpha/2$ га тенг бўлганда эришилади.

Агар F_1 орқали критик соҳанинг чап чегараси ва F_2 орқали ўнг чегараси белгиланса, у ҳолда

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2 \quad (16.11)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак.

Конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлганда F мезон-нинг икки томонлама критик соҳага қабул қилинган α қиймат-дорлик даражасига тенг бўлган эҳтимоллик билан тушишини таъ-минлаш учун $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ критик нуқтани топиш етарли.

2-қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўплам-лар бош

дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлган-да текшириш учун тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг ки-чикроғига нисбати, яъни (16.10) ни ҳисоблаш керак ва Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилган $\alpha/2$ (берилгандан икки маротаба кичик) қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари k_1 ва k_2 бўйича $F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ критик нуқтани топиш керак (k_1 — каттарок тузатилган дисперсия-нинг эркинлик даражалари сони).

Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган иккита $n_1 = 10$ ва $n_2 = 18$ ҳажмли боғлиқмас танланмалар бўйича $s_X^2 = 1,23$ ва $s_Y^2 = 0,41$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,1 қий-матдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлганда текширилсин.

Ечиш. Тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикро-ғига нисбатини топамиз:

$$F_{кузат} = 1,23/0,41 = 3.$$

Конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўринишда, шунинг учун кри-тик соҳа икки томонлама бўлади.

Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадва-ли, берилгандан икки маротаба кичик қийматдорлик даражаси, яъ-ни $\alpha/2 = 0,05$ ҳамда эркинлик даражалари сонлари $k_1 = 10 - 1 = 9$ ва $k_2 = 18 - 1 = 17$ бўйича $F_{кр}(0,05; 9; 17) = 2,50$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} > F_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳа-қидаги нолинчи гипотеза рад этилади.

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, уларнинг дис-персиялари маълум бўлсин. Бу тўпламлардан олинган, ҳажмлари мос равишда n ва m га тенг бўлган боғлиқмас танланмалар бўйича $\bar{X}$ ва $\bar{Y}$ ўртача танланма қийматлар топилган. Берилган α қиймат-дорлик даражасида ўртача танланма қийматлар бўйича кўрилаёт-ган тўпламларнинг бош ўртача қийматлари (математик кутилма-лари) ўзаро тенг эканлигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0: M(X) = M(Y). \quad (16.12)$$

Ўртача танланма қийматлар бош ўртача қийматларнинг сил-жимаган баҳолари, яъни

$$M(\bar{x}) = M(X), \quad M(\bar{y}) = M(Y)$$

эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани

$$H_0: M(\bar{x}) = M(\bar{y}) \quad (16.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бош ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида нормаланган

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} \quad (16.14)$$

нормал тасодифий миқдор қабул қилинади.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда курилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда Z мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб курилади.

Z нинг тақсимооти нолга нисбатан симметрик бўлгани учун критик нуқталар нолга нисбатан симметрикдир, яъни агар $Z_{кр}$ орақали ўнг критик нуқта белгиланса, у ҳолда $-Z_{кр}$ чап критик нуқта бўлади.

Мезоннинг энг катта қуввати (конкурент гипотеза ўринли бўлганда мезоннинг критик соҳага тушиш эҳтимоллиги)га мезоннинг критик соҳанинг ҳар бир интервалига тушиш эҳтимоллиги $\alpha/2$ га тенг бўлганда эришилади:

$$P(Z < -z_{кр}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{кр}) = \alpha/2. \quad (16.15)$$

Икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегараси $Z_{кр}$ ни топиш учун Лаплас функциясининг $(1-\alpha)/2$ га тенг қийматига мос келувчи аргументининг қийматини топиш кифоя:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2. \quad (16.16)$$

Мезоннинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $Z_{кузат}$ орақали белгилаймиз.

Агар $|Z_{кузат}| < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент

гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

Бу ҳолда ўнг томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўрин-ли деган тахминда Z мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосла-ниб қурилади:

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha. \quad (16.17)$$

Ўнг томонлама критик соҳанинг чегараси $z_{кр}$ ни топиш учун Лаплас функциясининг $(1 - 2\alpha)/2$ га тенг қийматига мос келувчи аргументининг қийматини топиш кифоя:

$$\Phi(z_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2. \quad (16.18)$$

Мезоннинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийма-тини $Z_{кузат}$ орқали белгилаймиз.

Агар $Z_{кузат} < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{кузат} > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Статистик гипотеза деганда нимани тушунасиш? Мисоллар келтиринг.
2. Нолинчи (асосий), конкурент (муқобил), оддий, мураккаб гипотезалар нима?
3. Биринчи ва иккинчи тур хатолар нимадан иборат, статистик мезон деб нимага айтилади?
4. Мезоннинг кузатиладиган қиймати, критик соҳа, гипотеза-нинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳаси) деб нимага айтилади?
5. Критик нуқталар (чегаралар), ўнг томонлама, чап томонлама, бир томонлама, икки томонлама критик соҳалар нима?
6. Қийматдорлик даражаси деб нимага айтилади ва критик соҳа қандай топилади?
7. Мезон қуввати нима ва у иккинчи тур хато билан қандай боғ-ланган?
8. Фишер – Снедекор тақсимо-ти ҳақида нима биласиз?
9. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсиялари биринчи ҳол-да қандай таққосланади?
10. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсиялари иккинчи ҳол-да қандай таққосланади?
11. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматлари биринчи ҳолда қандай таққосланади?
12. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматлари иккинчи ҳолда қандай таққосланади?

Таянч иборалар:

Статистик гипотеза, нолинчи (асосий) гипотеза, конкурент (муқобил) гипотеза, оддий гипотеза, мураккаб гипотеза, биринчи тур хато, иккинчи

тур хато, статистик мезон, мезоннинг кузатиладиган қиймати, критик соҳа, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳаси), критик нуқталар (чегаралар), ўнг томонлама критик соҳа, чап томонлама критик соҳа, бир томонлама критик соҳа, икки томонлама критик соҳа, қийматдорлик даражаси, мезон қуввати, Фишер – Снедекор тақсимооти, эркинлик даражалари.

17-мавзу.Мувофиқлик мезонлари

Режа:

1. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш.
2. Пирсоннинг мувофиқлик мезони.
3. Нормал тақсимоотнинг назарий частоталарини ҳисоблаш услубиёти.

Агар бош тўплам тақсимоот қонуни номаълум бўлиб, лекин у тайин кўринишга эга (уни A деб атаймиз) деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган деган нолинчи гипотеза текширилади.

Номаълум тақсимоотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш тақсимоот параметрлари ҳақидаги ги-потезани текшириш каби, яъни махсус танланган тасодифий миқ-дор — мувофиқлик мезони ёрдамида бажарилади.

Мувофиқлик мезони деб номаълум тақсимоотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш мезонига айтилади.

Мувофиқлик мезонларидан бири бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун К.Пирсоннинг χ^2 («хи квадрат») мезонидир (бу мезонни бошқа тақсимоотлар учун ҳам қўллаш мумкин). Бу мезонни қўллаш учун эмпирик (кузатиладиган) ва назарий (нормал тақсимланган деган тахминда ҳисобланган) частоталарни таққослаймиз.

Одатда эмпирик ва назарий частоталар фарқ қилади. Маса-лан:

эмп. частоталар . .	6	13	38	74	106	85	30	10	4
наз. частоталар . . .	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Эмпирик ва назарий частоталарнинг фарқи тасодифий (муҳим эмас) бўлиши ҳамда ё кузатишларнинг сони камлиги, ё уларни гу-руҳлаш усули, ё бошқа сабаблар билан тушунтирилиши мумкин. Иккинчи томондан, частоталарнинг фарқи тасодифий эмас (муҳим) бўлиши ҳамда назарий частоталар бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нотўғри гипотезадан келиб чиқиб ҳисобланганлиги билан тушунтирилиши мумкин.

Пирсон мезони эмпирик ва назарий частоталарнинг фарқи тасодифийми деган саволга жавоб беради. Тўғри, ҳар қандай бош-қа мезон каби у гипотезанинг ўринли эканлигини исботламайди, балки фақат қабул қилинган қийматдорлик даражасида гипотеза-нинг кузатиш маълумотлари

билан мувофиқ келиши ёки келмас-лигини аниқлайди.

n ҳажмли танланма бўйича

варианталар	x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_s
эмп. частоталар . .	n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_s

эмпирик тақсимот ҳосил қилинган бўлсин.

Айтайлик, бош тўплам нормал тақсимланган деган тахмин-да n'_i назарий частоталар ҳисобланган бўлсин. α қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинсин.

Нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида

$$\chi^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i \quad (17.1)$$

тасодифий миқдор олинади. Бу миқдор турли тажрибаларда ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. Рав-шанки, эмпирик ва назарий частоталар қанчалик кам фарқ қилса, (17.1) мезоннинг катталиги шунчалик кичик бўлади ва демак, у маълум даражада эмпирик ва назарий тақсимотларнинг яқинли-гини тавсифлайди.

$n \rightarrow \infty$ да (17.1) тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бош тўплам қайси тақсимот қонунига бўйсунушидан қатъий на-зар эркинлик даражалари k та бўлган χ^2 тақсимот қонунига ин-тилади.

Эркинлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ тенгликдан топила-ди, бу ерда s — танланмадаги гуруҳлар (қисм ораликлар) сони; r — тахмин қилинаётган тақсимотнинг танланма маълумотлари бўй-йича баҳоланган параметрлари сони.

Хусусан, агар тахмин қилинаётган тақсимот нормал бўлса, у ҳолда иккита параметр (математик кутилма ва ўртача квадратик четланиш) баҳоланади, шунинг учун $r = 2$ ва эркинлик даражалари сони $k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3$ га тенг.

Агар бош тўплам Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб тахмин қилинса, у ҳолда битта λ параметр баҳоланади, шунинг учун $r = 1$ ва $k = s - 2$ бўлади.

Ўнг томонлама критик соҳани нолинчи гипотеза ўринли де-ган тахминда мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилин-ган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қура-миз:

$$P(\chi > \chi_{кр}^2(\alpha; k)) = \alpha. \quad (17.2)$$

Шундай қилиб, ўнг томонлама критик соҳа $\chi > \chi_{кр}^2(\alpha; k)$ тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса $\chi < \chi_{кр}^2(\alpha; k)$ тенгсизлик билан аниқланади.

Қоида. Берилган қийматдорлик даражасида бош тўплам нор-мал

тақсимланганлиги ҳақидаги H_0 нолинчи гипотезани текши-риш учун аввал назарий частоталарни, сўнгра мезоннинг

$$\chi_{кузат}^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i \quad (17.3)$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш керак ва χ^2 тақсимо-тининг критик нуқталари жадвали, берилган α қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сони $k = s - 3$ бўйича $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$ кри-тик нуқтани топиш керак.

Агар $\chi_{кузат}^2 < \chi_{кр}^2$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi_{кузат}^2 > \chi_{кр}^2$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Пирсоннинг мувофиқлик мезонининг моҳияти эмпирик ва назарий частоталарни таққослашдан иборат. Эмпирик частоталар тажрибадан топилиши равшан. Бош тўп-лам нормал тақсимланган деб тахмин қилинганда назарий частоталарни қандай топиш мум-кин? Бу масалани қуйидаги усул билан ечиш мумкин.

1. X нинг кузатилаётган қийматлари оралиғининг ҳаммаси (n ҳажмли танланма) бир хил узунликдаги s та (x_i, x_{i+1}) қисм оралиқларга бўлинади. Сўнгра қисм оралиқларнинг $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ ўрталари топилади; x_i^* вариантанинг n_i частотаси сифа-тида i нчи оралиққа тушган варианталар сони қабул қилинади. Натижада бир-биридан тенг узокликда турган варианталар ва уларга мос частоталар кетма-кетлиги ҳосил қилинади:

$$\begin{array}{cccccc} x_i^* & x_1^* & x_2^* & \cdots & x_s^* \\ n_i & n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array}$$

Бунда $\sum n_i = n$.

2. $\bar{x}^*$ ўртача танланма қиймат ва σ^* танланма ўртача квад-ратик четланиш ҳисобланади.

3. X тасодифий миқдор нормаланади, яъни $Z = (X - \bar{x}^*) / \sigma^*$ миқдорга ўтилади ва (z_i, z_{i+1}) интервалларнинг учлари ҳи-собланади:

$$z_i = (x_i - \bar{x}^*) / \sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*) / \sigma^*,$$

бунда Z нинг энг кичик қиймати, яъни $z_1 - \infty$ га тенг, энг катта қиймати, яъни z_s эса ∞ га тенг деб олинади.

4. X нинг (x_i, x_{i+1}) интервалларга тушишининг p_i назарий

эҳтимолликлари

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

тенглик бўйича ҳисобланади ($\Phi(z)$ — Лаплас функцияси) ва, ниҳоят, қидирилаётган $n'_i = np_i$ назарий частоталар топилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Мувофиқлик мезони деб нимага айтилади ва Пирсон мезони қандай қўлланилади?
2. Эмпирик ва назарий частоталар қайси сабабларга кўра фарқланади?
3. Бош тўпلام нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи ги-потезани текшириш мезони сифатида қандай тасодифий миқдор қабул қилинади ва унинг қайси хоссаларини биласиз?
4. Бош тўпلام нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи ги-потезани текшириш қондасининг моҳияти нимада?
5. Назарий частоталар қайси усул билан топилади?

Таянч иборалар:

Мувофиқлик мезони, Пирсон мезони, эмпирик частота, назарий частота, бош тўпلام нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш қондаси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Тасодифий ҳодисалар ва эҳтимол тушунчаси. Ҳодисаларнинг комбинацияси

Режа:

1. Тасодифий ҳодиса тушунчаси. Частота тушунчаси.
2. Эҳтимолнинг статистик таърифи.
3. Эҳтимоллик тушунчаси.
4. Эҳтимоллар назарияси предмети.
5. Ҳодисанинг йиғиндиси ва кўпайтмаси.
6. Ҳодисаларни кўшиш қоидаси.

Таянч иборалар: Тасодифий ҳодиса, тажрибага нисбатан тасодифий ҳодиса, албатта юз берадиган ҳодиса (муқаррар ҳодиса), юз бермайдиган ҳодиса, «Оммавий» ёки статистик ҳодиса, кўпроқ эҳтимолли ҳодиса, нисбий частота, ҳодисанинг эҳтимоли, биргаликда бўлмаган ҳодисалар, қарама-қарши ҳодисалар.

Тасодифий ҳодиса тушунчаси

1-таъриф. Тайин бирор тажрибани ўтказиш натижасида юз бериши ҳам, юз бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса шу тажрибага нисбатан тасодифий ҳодиса дейилади.

Танга ташлаганда гербли томоннинг тушиши, ўқ узилганда нишонга тегиш, лотерея билетига ютуқ чиқиши, соққа ташлаганда 6 очкoning тушиши ва ҳоказолар тасодифий ҳодисаларга мисол бўлади. Тасодифий ҳодисаларни А, В, С ва ҳоказолар билан белгиланади.

Тажриба натижасида албатта юз берадиган ҳодисалар муқаррар ҳодисалар дейилади. Масалан, ўйин соққаси ташланганда бутун сондаги очкoning тушиши, таваккалига танланган сўзда 50 дан ортиқ бўлмаган ҳарфнинг бўлиши, кун кетидан тун келиши ва ҳоказолар муқаррар ҳодисалардир.

Тасодифий ҳодисанинг нисбий частотаси тушунчаси

А – бирор тажрибага нисбатан тасодифий ҳодиса бўлсин. Тажриба N марта ўтказилган бўлиб, улардан N_A тасида А ҳодиса юз берди деб фарз қиламиз. Ушбу

$$\mu = \frac{N_A}{N}$$

нисбатни тузамиз. Бу нисбат қаралаётган тажрибалар сериясидаги А ҳодиса юз беришининг частотаси деб аталади. Деярли барча тасодифий ҳодисалар учун частота турғунлик хоссасига эга. Бу деган сўз тажрибалар сони оширилганда А ҳодисанинг рўй бериш нисбий частоталари одатда бир-биридан кам фарқ қилади ва бу фарқ сериялардаги тажрибалар сони

қанча кўп бўлса шунча кам бўлади, яъни турғунлашади ва бирор $P(A)$ сонга яқинлашади.

Шу ўзгармас $P(A)$ сон A ҳодисанинг эҳтимоли дейилади.

Таъриф. Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли – берилган ҳодисага боғлиқ ўзгармас сон бўлиб, тажрибаларнинг кўп сериясида бу ҳодисанинг юз бериш нисбий частотаси шу сон атрофида тебранади.

Буни эҳтимолнинг статистик таърифи дейилади. μ нисбий частота доимо $0 \leq \mu \leq 1$ шартларни қаноатлантирганлиги учун ҳар қандай ҳодисанинг эҳтимоли ҳам шу ораликда жойлашади:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Агар A ҳодиса муқаррар бўлса, $N_A = N$ ва демак, $\mu = 1$ бўлади; шу билан муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли 1 га тенг. Агар A мумкин бўлмаган ҳодиса бўлса, $N_A = 0$ бўлиб $\mu = 0$ бўлади; шунга кўра мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.

1-мисол. Танга ташлаш тажрибасини қараймиз. A ҳодиса гербли томоннинг тушиши бўлсин. $P(A)$ ни аниқланг.

Ечиш. Танга бир жинсли ва деформацияланмаган бўлса танга ташлашнинг кўп сериясида гербли ва рақамли томонларнинг тушиши ўртача бир хил такрорланади. Бундан кўринадики, A ҳодиса юз беришининг нисбий частотаси μ нинг қийматлари $\frac{1}{2}$ сон атрофида тебранади. Демак, $P(A) = \frac{1}{2}$ бўлади.

2-мисол. Яшиқда 20 та шар ётибди: 8 та оқ, 12 та қора. Яшиқдан таваккалига битта шар олинди. Унинг қора шар бўлиши эҳтимоли нимага тенг?

Ечиш. Тажриба жуда кўп марта такрорланса шарларнинг тенг имкониятли эканлигини назарга олсак қора шарнинг чиқиш нисбий частотаси тақрибан яшиқдаги шарлар ичида қора шарлар ташкил қиладиган улушга тенг деб ҳисобласа бўлади, яъни $\mu = \frac{12}{20}$. Демак, $P(A) =$

$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3-мисол. Куб формасидаги ўйин соққаси ёқлари 1 дан 6 гача номерланган. Ўйин соққаси ташланганда 5 рақами тушиши (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечиш. Агар соққа бир жинсли материалдан тайёрланган бўлса, унинг ёқларининг тушиши тенг имкониятли бўлади ва $P(A) = \frac{1}{6}$ деб ҳисоблаш мумкин.

4-мисол. 36 дастали картадан битта карта тортиб олинди. Чиллик турдаги картанинг келиб чиқиш эҳтимоли қандай?

Ечиш. Бунда ҳаммаси бўлиб 36 мавжуд ҳол бўлиб, улардан 9 тасида А ҳодиса (чиллик чиқиши) рўй беради. Демак, нисбий частота $\mu=9/36$, яъни $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

5-мисол. Берилган объектга қараб тўпдан бир хил шароитда 5 та ўқ узилди ва 2 таси мўлжалга тегди. А ҳодиса ўқнинг нишонга тегиши. Ўқнинг нишонга тегишининг нисбий частотаси қандай бўлади?

Ечиш. $\mu=\frac{2}{5}$ бўлади. Чунки бунда 5 та ҳол мавжуд ҳол бўлиб, улардан 2 тасида А ҳодиса рўй берган. Демак, $P(A)=\frac{2}{5}$ бўлиши равшан.

Ҳодисаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси.

Эҳтимолларни қўшиш қондаси

Таъриф. Иккита А ва В ҳодисаларнинг йиғиндиси деб бу ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат бўлган С ҳодисага айтилади:

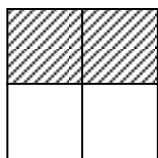
$$C = A + B$$

Мисол. А ҳодиса шарчанинг квадрат соҳасининг юқори ярим қисмига тушиши, В ҳодиса эса унинг ўнг ярмига тушиши бўлсин. А+В шарча кўрсатилган яримларнинг бирлашмаси бўлган соҳага тушишини англатади.

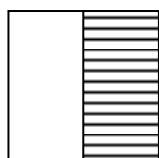
Таъриф. Икки А ва В ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб, А ва В биргаликда юз беришидан иборат бўлган С ҳодисага айтилади:

$$C = A \cdot B$$

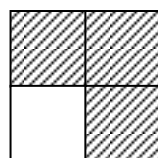
Мисол. Юқоридаги айтилган мисолдаги квадрат ичидаги шарчани (нуқтани) танлаш А ва В ҳодисалар бўлса, АВ ҳодиса квадратнинг юқори ўнг чорагига тушишини билдиради.



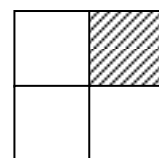
Қо. А



В



А+В



А·В

бўлса,

уларнинг йиғиндисининг эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Эслатма. Агар битта тажрибада А ва В тасодикий ҳодисалар биргаликда юз бера олмаса, улар биргаликда бўлмаган ҳодисалар дейилади.

Қоида. Агар $A_1, A_2, \dots, A_n$ жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, улар учун

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

тенглик ўринли бўлади.

Натижа. Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси бирга тенг:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Эслатма. А ҳодисага қарама-қарши ҳодиса $\bar{A}$ кўринишда белгиланади. У А ҳодисанинг юз бермаслигидан иборат. Мисол учун А ҳодиса ўқнинг нишонга тегиши бўлса $\bar{A}$ ўқнинг нишонга тегмаслик ҳодисасидир.

Мисол. Ўйин соққаси ташланди. Жуфт сондаги очко тушиш эҳтимоли нимага тенг.

Ечиш. A_i билан i очкoning тушишини белгилаймиз. ($i=1, 2, \dots, 6$) А ҳодиса A_2, A_4, A_6 ларнинг ҳеч бўлмаганда бирининг юз беришидан иборат, яъни, $A = A_2 + A_4 + A_6$
 A_2, A_4, A_6 жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалардир. Қўшиш қоидасига кўра

$$P(A)=P(A_2 + A_4 + A_6)= P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Текшириш учун саволлар ва машқлар

1. Тасодифий ҳодиса деганда нимани тушунасиш?
2. Муқаррар ва мумкин бўлмаган ҳодисаларга мисоллар келтиринг.
3. Оммавий ёки статистик ҳодиса деб нимага айтилади?
4. Эҳтимоллар назарияси нимани ўрганади?
5. А ҳодиса юз беришининг частотаси деб нимага айтилади?
6. Тасодифий ҳодисанинг эҳтимолига таъриф беринг.
7. Нисбий частота $0 \leq \mu \leq 1$ шартни қаноатлантирганда $P(A)$ эҳтимол қандай шартни қаноатлантиради?
8. Иккита А ва В ҳодисаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасига таъриф беринг.
9. А ҳодисага қарама-қарши ҳодиса деб қандай ҳодисага айтилади?
10. $A + B, AB, \bar{A}$ ҳодисаларни назарий тўплам маъносида тасвирланг.
11. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади?
12. Эҳтимолларни қўшиш қоидасини айтинг ва формуласини исботланг.
13. Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси нимага тенг?
14. Яшикда 1 дан 20 гача номерланган шарлар бор. Таваккалига битта шар олинди. Унинг номери 20 дан ошмаслик эҳтимоли нимага тенг?
15. Яшикда 10 та оқ ва 15 та қора шарлар бор. Яшикдан кўк шар олинди эҳтимоли нимага тенг?
16. Яшикда 3 та оқ, 4 та қора ва 5 та қизил шарлар бор. Яшикдан таваккалига олинган шар қора рангли бўлиш эҳтимолини топинг.
17. Танга икки марта ташланди. Ҳар иккала ҳолда ҳам герб тушиш эҳтимоли нимага тенг?
18. Яшикда 20 та оқ, 18 та қора, 12 та кўк ва 18 та қизил шарлар бор. Таваккалига олинган шар оқ, қора, кўк, оқ ёки қора, кўк ёки қизил, оқ, қора ёки кўк бўлиб чиқиш эҳтимолларини топинг.

19. Танга 2 марта ташланган. Ҳеч бўлмаганда бир марта гербли томон тушиш эҳтимолини топинг.

2-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Эҳтимоллар назариясининг аксиомалари. Эҳтимолларни ҳисоблашнинг классик усули

Режа:

1. Аксиоматик методнинг моҳияти.
2. Элементар ҳодисалар фазоси.
3. А.Н.Колмогоров аксиомалари ва улардан келиб чиқадиган теоремалар.
4. Эҳтимолларни ҳисоблашнинг классик усули.

Таянч иборалар: Аксиоматик метод, элементар ҳодисалар, элементар ҳодисалар фазоси, барча қисм тўпламлар, айнан тенглаштириш, қисм тўпламларининг бирлашмаси, кесишмаси, тўлдирувчи тўплам, биргаликда бўлмаган ҳодисалар, қарама-қарши ҳодисалар, мумкин бўлмаган ҳодисалар, оддий қўшиш аксиомаси, кенгайтирилган қўшиш аксиомаси, эҳтимолий модел, тасодифий миқдор.

Аксиоматик методнинг моҳияти

Юқорида тасодифий ҳодисанинг эҳтимолини тажрибалар сони ошганда шу ҳодисанинг юз бериш частотаси яқинлашадиган миқдор каби тасаввур қилинган эди. Бу эса қатъий математик назарияга асос бўлмайди. Эҳтимоллар назариясига қатъий математик тус бериш А.Н.Колмогоров томонидан киритилган аксиомалар ёрдамида амалга оширилади. Аксиоматик методнинг моҳияти шундаки, энг аввал муайян назариянинг таърифланмайдиган тушунчалари белгилаб қўйилади ва сўнггра назариянинг барча жумлалари бошқа тушунчаларга асосланмасдан шулардан келтириб чиқарилади.

Элементар ҳодисалар фазоси

Элементар ҳодисалар деб, биринчидан, тажрибанинг ҳар бир ўтказилишида улардан фақат ва фақат биттасининг юз бериши; иккинчидан, айнан шу тажриба билан боғлиқ бўлган ихтиёрий A ҳодиса элементар ҳодисаларга «ажралиши» зарурлиги билан характерланувчи ҳодисаларга айтилади.

Масалан,

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \quad (1)$$

(бу ерда, A_i i очконинг тушиши) элементар ҳодисалардир. Яна бир мисол, айтайлик тажрибамиз текисликдаги Ω соҳага кичкина шарча ташлашдан иборат бўлсин. Шарчанинг Ω соҳанинг бирорта аниқ нуқтасига тушиши элементар ҳодисадир. Лекин бу мисолда элементар ҳодисалар тўплами чексиз. Умуман олганда қаралаётган тажриба учун элементар ҳодисалар тўпламини Ω деб белгилаб шу тажриба билан боғлиқ бўлган ҳар бир ҳодисани Ω тўпламининг қисм тўплами деб қараймиз. А.Н.Колмогоров

аксиомаларида A ҳодиса унга мос келтирилган қисм тўпламга айнан тенглаштирилади. Масалан, «ўйин соққасида жуфт сондаги очко тушди» (A ҳодиса) ҳодисаси (1) тўпламнинг $\{A_2, A_4, A_6\}$ қисм тўпламидан иборат, “Шарча Ω соҳанинг чап ярим қисмига тушди” (A ҳодиса) ҳодисаси эса, тўпламнинг шу айtilган қисм соҳасидаги нуқталар тўпламидир.

Ҳодиса тушунчасига бундай ёндошиш ҳодисалар йиғиндиси ва кўпайтмасини тўплам назариясидаги маъноларига айнан тенглаштиради. Яъни A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси уларга мос қисм тўпламларнинг бирлашмасига, A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси эса шу қисм тўпламларнинг кесишмасига, A ҳодисага қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса эса A ни Ω тўпламга қадар тўлдирувчи тўпламга айланади.

Бирор Ω тўплам берилган бўлиб, унинг элементлари элементар ҳодисалардан иборат бўлсин. Ҳодисалар нимани ифодалашининг аҳамияти йўқ. Ω тўпламнинг қисм тўпламлари тайин қилинган ва улар ҳодисалардан иборат бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин.

I. Ω тўпламнинг ўзи ҳодиса бўлсин.

II. Агар A – ҳодиса бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ ҳам ҳодиса.

III. Агар $A_1, A_2, \dots$ лар ҳодиса бўлса, у ҳолда $A_1 + A_2 + \dots$ ҳам, $A_1 A_2 \dots$ ҳам ҳодиса.

Эслатма. III шартда қатнашган $A_1, A_2, \dots$ қисм тўпламлар сони чекли ҳам, чексиз ҳам бўлиши мумкин.

Ω - тўплам элементар ҳодисалар фазоси деб аталади.

1-теорема. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ бўлади.

Исбот. Маълумки, $A + \bar{A} = \Omega$. Бундан $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.

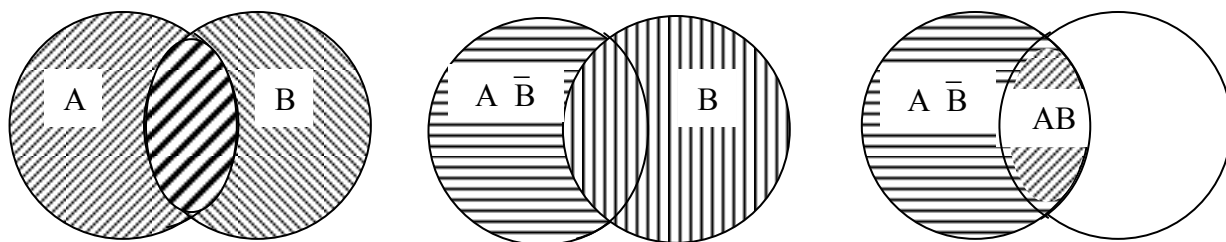
2-теорема. $P(A) \leq 1$.

Исбот. $P(\bar{A}) \geq 0$ бўлгани учун $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ дан $P(A) \leq 1$ келиб чиқади.

3-теорема. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ тенглик ўринли.

Исбот. A ва B лар Ω нинг қисм тўпламлари бўлганлигидан

$A = AB + A\bar{B}$, $A+B = B + A\bar{B}$ тенгликлар ўринли эканлиги Эйлер доиралари ёрдамида тушунтирилиши равшан



Ҳар иккала тенгликка қўшиш аксиомасини тадбиқ этамиз:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}), \quad P(A+B) = P(B) + P(A\bar{B})$$

Иккинчи тенгликдан биринчи тенгликни айирсак исбот талаб этилган тенглик келиб чиқади.

1. Элементар ҳодисалар фазоси деб аталувчи Ω тўплам.
2. Ω тўпламнинг ҳодисалар деб аталувчи ва I, II, III шартни қаноатлантирувчи қисм тўпламлари системаси.
3. Ҳодисалар тўпламида аниқланган ва 1, 2, 3 аксиомаларни қаноатлантирувчи $P(A)$ функция.

Элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг элементлари (элементар ҳодисалар) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ бўлсин.

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

А ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли унинг юз беришига қулайлик тўғдирувчи элементар натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг.

Мисол. Ўйин соққаси икки марта ташланди. Иккала ташланганда ҳам тушган очколар йиғиндиси 10 га тенг бўлиш эҳтимоли нимага тенг?

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{16} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{26} \\ & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{61} & \mathbf{A}_{62} & \dots & \mathbf{A}_{66} \end{array}$$

Тажрибанинг ҳар бир ўтказилишида бу ҳодисаларнинг (A_{ij}) бири ва фақат бири юз беради ва улар тенг ҳуқуқли. А ҳодисанинг юз беришига A_{46} , A_{55} , A_{64} натижалар қулайлик туғдиради, демак $k=3$. Бундан эса

Бунга кўра, агар ўйин соққасини икки марта ташлаш тажрибаси кўп марта такрорланса A ҳодисанинг юз бериш частотаси $\frac{1}{12}$ сонга яқин бўлади, яъни 12 та тажрибадан биттасида A ҳодиса юз беради.

2-мисол. Ўйин соққаси икки марта ташланган. Иккала ташланганда ҳам тушган очколар йиғиндиси жуфт сон, шу билан бирга иккинчи ташланган соққада ҳар доим 6 очко тушиши эҳтимолини топинг.

107

ёқда 6 очко чиқади, тушган очколар йиғиндиси жуфт сон) қулайлик тўғдирувчи натижалар қуйидаги бешта натижа бўлади (биринчи ўринда биринчи ташлашдаги очко, иккинчи ўринда иккинчи ташлашдаги очко, сўнгра улар йиғиндиси ёзилган)

- 1) 2, 6; 6+2=8, 2) 4, 6; 4+6=10,
3) 6, 6; 6+6=12, 4) 6, 2; 2+6=8, 5) 6, 4; 6+4=10

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик тўғдирувчи натижалар сонининг барча мумкин бўлган элементар натижалар сонига нисбатига тенг

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Текшириш учун саволлар ва машқлар

1. Аксиоматик методнинг аҳамияти нима?
2. Элементар ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади?
3. А ва В ҳодисанинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва қарама-қарши ҳодиса тушунчаларининг назарий тўплам маънолари қандай тавсифланади?
4. Элементар ҳодисалар фазоси деб нимага айтилади ва бунда қандай (I, II, III) шартлар бажарилади?
5. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади?
6. А.Н.Колмогоров аксиомаларини таърифланг.
7. $P(A)+P(\bar{A})=1$, $P(A)\leq 1$, $P(A+B)=P(A)+P(B)=P(AB)$ муносабатларни исботланг.
8. Эҳтимоллий модел нима?
9. Эҳтимолни ҳисоблашнинг классик усули қандай формула билан тавсифланади?
10. 20 та китоб жавонга таваккалига тахланди. 20 та китобдан аниқ 4 тасининг ёнма-ён туриши (А ҳодиса) эҳтимоли нимага тенг?
11. Лотереяда 50 та билет ўйналди. 5 та билетга ютуқ чиқади. Кимдир учта билет сотиб олади; бу билетлардан ҳеч бўлмаганда биттасига ютуқ чиқиш эҳтимоли нимага тенг?

3-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Шартли эҳтимол. Эркин ҳодисалар ва кўпайтириш қондаси

Режа:

1. Шартли эҳтимол тушунчаси.
2. Эркин ҳодисалар. Эҳтимолларни кўпайтириш қондаси.
Таянч иборалар: Сабабли боғланиш, қандайдир боғланиш, ҳодисаларнинг бирининг юз бериши иккинчисининг имкониятларини ошириши, шартли эҳтимол, бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳодисалар (эркин ҳодисалар), эҳтимолларни кўпайтириш қондаси, тўла эҳтимол.

Шартли эҳтимол тушунчаси

Агар иккита А ва В ҳодисалар биргаликда қаралаётган бўлса, улардан бирининг юз бериши иккинчисининг юз беришига қандай таъсир қилишини билиш катта аҳамиятга эга. Ҳодисалар орасидаги бундай

боғланишларнинг энг соддаси сабабли боғланишлардир. Бунда А ҳодисанинг юз бериши В ҳодисанинг юз беришига ва аксинча А ҳодисанинг юз бермаслиги В ҳодисанинг ҳам юз бермаслигига олиб келади.

Мисол. А ҳодиса бирор корхона маҳсулотларидан тасодифан олингани яроқсиз эмаслигидан иборат, В ҳодиса эса шу маҳсулотнинг биринчи сортли бўлишидан иборат бўлсин. Бунда В ҳодисанинг юз бериши А ҳодисанинг юз беришига олиб келади ва аксинча $\bar{A}$ ҳодиса В ҳодисанинг юз беришини инкор қилади. Лекин амалда ҳодисалар орасида сабабли боғланишлар бўлмасдан балки қандайдир боғланиш бор бўлиши мумкин.

Мисол. Ўйин соққаси ташланганда жуфт очконинг тушиши А ҳодиса, 3 дан кўп очконинг тушиш В ҳодиса бўлсин. Бу ерда сабабли боғланиш йўқ. Лекин қандайдир боғланиш бор. Ҳақиқатдан ҳам, В ҳодисанинг келтирилган учта ҳоллардан (4, 5, 6 очколарнинг тушиши) иккитаси (4 ва 6 тушиши) А ҳодисанинг юз беришига имконият яратади. Шунинг учун, агар В ҳодисани юз берди деб ҳисобласак А ҳодисанинг юз бериш имконияти $\frac{2}{3}$ бўлади. Аммо соққани ташлашнинг натижаси ҳақида қўшимча ахборот бўлмаган ҳолда А ҳодисанинг юз бериш имконияти $\frac{3}{6}$ нисбат билан баҳоланади. $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$ бўлганлиги учун В ҳодисанинг юз бериши А ҳодисанинг имкониятини ошириши кўриниб турибди.

Таъриф. А ва В лар қандайдир σ тажрибага нисбатан тасодифий ҳодисалар бўлиб, $P(B) > 0$ бўлсин.

$$\frac{P(AB)}{P(B)}$$

сон В ҳодиса юз бериш шарти остида А ҳодисанинг эҳтимоли ёки А ҳодисанинг шартли эҳтимоли дейилади.

В ҳодиса шарти билан А ҳодисанинг эҳтимоли $P(A/B)$ кўринишда белгиланади. Таърифга кўра

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликдан

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (2)$$

келиб чиқади. Бу тенглик иккита ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоли улардан бирининг иккинчиси шарти остидаги эҳтимоли билан ана шу шарт эҳтимоли кўпайтмасига тенглигини билдиради.

Агар $P(A) \neq 0$ бўлса, у ҳолда (2) тенглик билан бирга

$$P(BA) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (3)$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. (2) ва (3) лардан:

$$P(A/B)P(B)=P(B/A)P(A) \quad (4)$$

Мисоллар.

1. Ўйин соққасининг ҳамма томонларига ялтироқ бўлмаган қоғоз ёпиштирилган. 1, 2, 3 ёқларга қизил рангли, 4, 5, 6 ёқларига эса қора рангли қоғозлар ёпиштирилган. Соққани ташлаганда қора рангли ёқ тушди. Шу соққада жуфт сон бўлиш эҳтимоли қандай?

Ечиш. Биз $P(A/B)$ шартли эҳтимолни топишимиз керак. Бунда А жуфт сондаги очконинг тушишидан, В ҳодиса эса 3 дан катта сондаги очконинг тушишидан иборат. Бу ерда $P(AB)=\frac{2}{6}$ $P(B)=\frac{3}{6}$. Демак,

$$P(A/B)=\frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3} \quad (P(A)=\frac{1}{2} \text{ бўлишини кўриш мумкин}).$$

Эркин ҳодисалар ва кўпайтириш қондаси

Юқорида $P(A)$ ва $P(A/B)$ сонлар умумий ҳолда ҳар хил бўлишини билдик. Агар $P(A/B)=P(A)$ тенглик ўринли бўлса, А ҳодиса В ҳодисага боғлиқ эмас дейилади. Шундай қилиб, В ҳодисанинг юз бериши А ҳодисанинг юз беришига ҳеч қандай таъсир қилмаса, А ҳодиса В ҳодисага нисбатан эркли дейилади.

Агар А ҳодиса В ҳодисага боғлиқ бўлмаса (А ҳодиса В ҳодисага нисбатан эркин бўлса), у ҳолда

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad (5)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни кўпайтманинг эҳтимоли эҳтимоллар кўпайтмасига тенг. Бу эҳтимолларни кўпайтириш қондаси дейилади. Охирги (5) тенгликда

$$P(BA)=P(B)P(A) \quad (5')$$

тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Чунки ВА ҳодиса АВ ҳодиса билан бир хил. Демак, А ҳодиса В ҳодисага боғлиқ бўлмаса, В ҳодиса ҳам А ҳодисага боғлиқ бўлмайди. Улар эркин ҳодисалар бўлади.

Мисол. Иккита ўйин соққаси ташланди. биринчи соққада жуфт очконинг тушиши А ҳодиса, иккинчисида тоқ очконинг тушиши В

ҳодиса бўлсин. Улар эркили ҳодисалар эканлиги равшан. Буни ҳисоблаш ёрдамида текшираимиз.

Ўйин соққасини икки марта ташлашдан иборат тажриба 36 та тенг эҳтимолли натижаларга эга ($A_{11}, A_{12}, \dots, A_{66}$) бўлиб, улардан A, B ва AB ҳодисаларнинг юз беришига мос равишда 18, 18 ва 9 таси имкон яратади. Бундан:

$$P(AB) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(A) = \frac{18}{36}, \quad P(B) = \frac{18}{36}$$
$$P(A) \cdot P(B) = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Демак, (5) тенглик бажарилади, яъни A ва B ҳодисалар эркили. Умуман олганда эркили ҳодисалар учун:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

формула ўринли.

Текшириш учун саволлар ва машқлар:

1. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади? Мисоллар келтиринг.
2. Биргаликда бўлган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади? Мисоллар келтиринг.
3. Шартли эҳтимол тушунчасини беринг.
4. Иккита эркили ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли нимага тенг (қўпайтириш аксиомаси)?
5. Иккита мерган нишонга қарата ўқ узмоқда. Битта ўқ узишда нишонга текизиш эҳтимоли биринчи мерган учун 0,7, иккинчи мерган учун 0,8 га тенг. Бир йўла ўқ узишда мерганларнинг фақат биттасининг нишонга текизиш эҳтимолини топинг.
6. Иккита биргаликда бўлмаган A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли мос равишда P_1 ва P_2 га тенг, рўй бермаслик эҳтимоллари q_1 ва q_2 га тенг. Бу ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топинг.
7. Ўйин соққаси 4 марта ташланди. Ҳар бир сафар 1 рақами тушиш эҳтимолини топинг.
8. Яшиқда 10 та деталл бўлиб, улар орасида 6 та бўялгани бор. Йиғувчи таваккалига 4 та деталл олади. Олинган деталларнинг ҳаммаси бўялган бўлиш эҳтимолини топинг.

4-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Гипотезалар. Тўла эҳтимол формуласи. Гипотезалар эҳтимоли. Байес формуласи

Режа:

1. Гипотезалар тушунчаси.
2. Тўла эҳтимол формуласи.
3. Гипотезалар эҳтимоли. Байес формуласи.

Таянч иборалар: Гипотеза (фараз, тахмин), эҳтимол, тўла эҳтимол, биргаликда бўлмаган ҳодисалар, қўшиш қоидаси, гипотезанинг эҳтимоли.

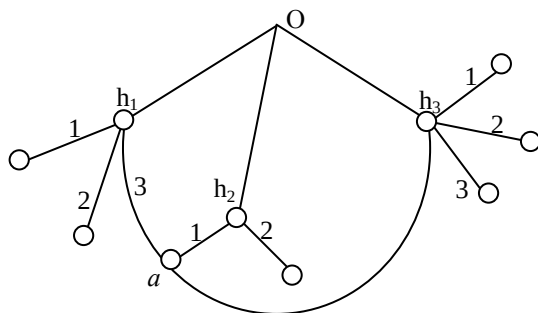
Дарснинг жиҳози: Доска, бўр, кўргазмали қуроллар.

Дарснинг бориши: Эҳтимоллар назариясида муҳим бўлган тўла эҳтимол ва Байес формулалари кенг қўламда масалаларни ҳал қилишда катта роль ўйнайди. Бунда гипотезадан фойдаланиш эҳтимолларни топишга ёрдам беради.

Фан учун гипотезанинг аҳамияти катта, у объект қонунларини топишга қаратилган фикрга маълум йўналиш беради.

Бирор А тасодифий ҳодисанинг эҳтимолини топишда баъзи ҳодисаларни изоҳлаб бергани учун гипотеза тўғри деб ҳисобланади.

Мисол. Бирор О пунктдан чиққан турист йўлнинг ажраладиган жойига келгач, таваккалига мумкин бўлган йўллардан бирини танлайди. Йўлларнинг схемаси расмда тасвирланган. Туристнинг a пунктга тушиш эҳтимоли қандай?



Ечилиши. Расмдан кўришиб турганидек, туристнинг йўл оралиқлари h_1 , h_2 , h_3 пунктларнинг биридан албатта ўтади. Айтайлик, H_i турист ўз ҳаракати давомида h_i пунктга тушишдан иборат ҳодиса бўлсин. Шартга кўра H_1 , H_2 , H_3 ҳодисалар биргаликда эмас ҳамда улар тенг эҳтимолли ҳодисалар, чунки йўл О нуқтадан таваккалига танланади. Шунинг учун,

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

Агар туристнинг a пунктга келишидан иборат ҳодисани А орқали белгиласак, у ҳолда $P(A/H_1)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$, $P(A/H_3)=\frac{1}{4}$ га эга бўламиз.

Демак,

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$

Тўла эҳтимолга оид масалаларни икки этапда ўтаяпти деб қараш мумкин. H_1 , H_2 , ... H_n гипотезалар биринчи этапга оид ҳодисалар, А ҳодиса эса иккинчи этапнинг бажарилиши мумкин бўлган натижалардан бири бўлади.

Тўла эҳтимол формуласи

Фараз қилайлик A тасодифий ҳодиса бир нечта жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисаларнинг бири билангина юз берсин.

Бу ҳодисаларни A ҳодисага нисбатан гипотезалар деб аталади.

Ушбу

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \quad (1)$$

формула ўринли. Бу формула тўла эҳтимол формуласи дейилади ва у эҳтимолларни ҳисоблашда муҳим аҳамиятга эга.

У формула қуйидагича ўқилади: A ҳодисанинг эҳтимоли шу ҳодиса гипотезаларидан ҳар бирига нисбатан шартли эҳтимоли билан гипотезалар эҳтимоллари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

Исбот. Шартга кўра A ҳодиса $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисаларнинг бири билангина юз беради, демак, $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$ бўлади. Бироқ, $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмагани учун $AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$ ҳам биргаликда эмас. Шунинг учун, қўшиш қондасини тадбиқ қилиб:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n)$$

ни топамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир $P(H_i)$ қўшилувчини $P(A/H_i)P(H_i)$ кўпайтма билан алмаштириб талаб этилган (1) формула ҳосил қиламиз.

Байес формуласи

Фараз қилайлик, бирор тажриба ўтказилган бўлиб, унинг натижасида A ҳодиса юз берган бўлсин. Бу факт жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисаларнинг бири билан биргаликда содир бўлган деб ҳисобланади. Лекин ўтказилган тажрибада $H_1, H_2, \dots, H_n$ ҳодисалардан қайси бири юз берганлигини билиб бўлмайди. Бироқ, қуйидаги масалани қўйиш мумкин: A ҳодиса юз берди деб фараз қилиб, гипотезалардан ҳар бирининг

$$P(H_i/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$$

эҳтимолларини топинг.

Байес формуласи ана шу масалани ҳал қилади.

Бизга маълумки:

$$P(AH_i) = P(A/H_i)P(H_i)$$

$$P(H_iA) = P(H_i/A)P(A)$$

тенглик ўринли. Бу тенгламаларнинг ўнг томонларини тенглаштириб

$$P(A/H_i)P(H_i) = P(H_i/A)P(A)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A)}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан эса $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + \dots + P(A/H_n)P(H_n)$

Бу Байес формуласидир.

Мисол. Учта бир хил кўринишда бўлган яшик бор. Биринчи яшикда 20 та оқ шарлар, иккинчисиди 10 оқ ва 10 қора шарлар, учинчисиди эса 20 та қора шарлар жойлаштирилган. Таваккалига яшикдан бири танланди ва ундан олинган шар оқ рангли бўлиб чиқди. Олинган шарнинг биринчи яшикдан чиққанлиги эҳтимолини топинг.

Ечиш. Биринчи яшикнинг танланиши H_1 гипотеза, иккинчи яшикнинг танланиши H_2 гипотеза, учинчи яшикнинг танланиши H_3 гипотеза. А эса оқ шарнинг чиқиши.

Ихтиёрий яшикнинг танланиши тенг ҳуқуқли. Шунинг учун

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Биринчи яшикдан оқ шарнинг олиниши эҳтимоли $P(A/H_1)=1$, иккинчи яшикдан оқ шарнинг олиниш эҳтимоли $P(A/H_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, учинчи яшикдан оқ шарнинг олиниш эҳтимоли $P(A/H_3)=0$.

Биринчи яшикдан оқ шар олиниш эҳтимоли Байес формуласига кўра топилади:

$$P(H_1/A)=\frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Текшириш учун саволлар ва машқлар:

1. Гипотеза деганда нимани тушунасиш?
2. Гипотезалардан бири рўй берганда рўй бериши мумкин бўлган А ҳодисанинг эҳтимоли деганда нимани тушунасиш?
3. Тўла эҳтимол формуласининг кўриниши қандай бўлади?
4. Агар А ҳодиса рўй берган бўлса, у ҳолда гипотезаларнинг эҳтимоли қандай топилади?
5. Байес формулаларининг кўриниши қандай бўлади?
6. Пирамидада бешта милтиқ бўлиб, уларнинг учтаси оптик нишон билан таъминланган. Мерганнинг оптик нишонли милтиқдан ўқ узганда нишонга текизиш эҳтимоли 0,95 га тенг; оптик нишон ўрнатилмаган милтиқ учун бу эҳтимол 0,7 га тенг. Агар мерган таваккалига олинган милтиқдан ўқ узса, ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.
7. Заводда маҳсулотнинг 25% ини биринчи машина, 35% ини иккинчи машина, қолган қисмини учинчи машина ишлаб чиқаради. Биринчи машина ишлаб чиқарган ҳамма маҳсулотларидан 3%и, иккинчи машина учун 2%и, учинчи машина учун эса 1% яроқсиз бўлади. Таваккалига танланган маҳсулот бирлиги яроқсиз бўлиб чиқди. Унинг иккинчи машинада ишлаб чиқарилган бўлиш эҳтимолини топинг.
8. Иккита завод бир маҳсулотлар ишлаб чиқаради, бу маҳсулотлар кейин умумий конвейерга ўтади. Биринчи заводнинг унумдорлиги иккинчи заводдан 2 марта кўп. Биринчи завод ўрта ҳисобда маҳсулотнинг 65%

ини, иккинчи завод эса 80% ини аъло сифат билан ишлаб чиқди. Бу маҳсулотни биринчи завод ишлаб чиқарганлиги эҳтимолини топинг.

5-МАШҒУЛОТ Мавзу: Тасодифий миқдорлар ва уларнинг сонли характеристикалари

Режа:

1. Тасодифий миқдор тушунчаси.
2. Дискрет тасодифий миқдорлар ва дискрет тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни.
3. Биномиал тақсимот.
4. Дискрет тасодифий миқдорнинг ўртача қиймати (математик кутилма).
5. Дисперсия, ўртача квадратик четланиш.

Таянч иборалар: Тасодифий миқдор, дискрет тасодифий миқдор, тақсимот қонуни, Бернулли формуласи, биномиал эҳтимоллар, биномиал тақсимот қонуни, математик кутилиш (ўртача қиймат), дисперсия, ўртача квадратик четланиш.

Тасодифий миқдор тушунчаси

Бизга маълумки эҳтимоллар назариясида қаралган тасодифий ҳодисалар қандайдир сон билан характерланади, яъни тажрибанинг натижаси бирор X сон орқали характерланади. Шу билан бирга тажриба натижасининг тасодифийлиги X соннинг ҳам тасодифийлигини таъминлайди.

1-таъриф. Синов натижасида айнан қайси бирини қабул қилиши олдиндан номаълум у ёки бу қийматни қабул қилувчи миқдор тасодифий миқдор дейилади.

Ҳар бир X тасодифий миқдорга сонларнинг бирор тўплами мос келади.

Масалан, ўйин соққаси ташланди. Тушган очколар сони X тасодифий миқдор бўлиб у қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўплами 1, 2, 3, 4, 5, 6 сонлардан иборат. Яна бир мисолни қараймиз: Бирор давр ишлатилгандан кейин цилиндрнинг емирилиш миқдори ўлчанган. Бу миқдор цилиндр диаметрининг катталашини қиймати билан аниқланади. Уни X билан белгилаймиз. Бу ерда X нинг қабул қиладиган қийматлари тўплами бирор (a, b) интервални ташкил этади. Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари билан шу қийматларнинг эҳтимоллари орасидаги боғланишни кўрсатувчи ҳар қандай қоида унинг тақсимот қонуни дейилади.

Дискрет тасодифий миқдорлар

Дискрет тасодифий миқдорлар деб аталувчи миқдорлар ўрганиш учун энг қулай бўлади.

2-таъриф. Агар $x_1, x_2, \dots$ сонларнинг чекли ёки санокли тўплами берилган бўлиб, ҳар бир x_i га бирор мусбат P_i сон мос келтирилган ва шу билан бирга барча P_i ларнинг йиғиндиси 1 га тенг бўлса, X дискрет тасодифий миқдор берилган дейилади. $x_1, x_2, \dots$ сонлар X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари, $P_1, P_2, \dots$ сонлар эса шу қийматларнинг эҳтимоллари деб аталади.

X дискрет тасодифий миқдор учун тақсимот қонуни ушбу

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$

жадвал орқали берилади.

1-мисол. Ўзгарувчи X миқдор соққани бир марта ташлаганда унинг юқори ёғида пайдо бўладиган очколар сони. X тасодифий миқдор 1, 2, 3, 4, 5, 6 қийматлардан биттасини қабул қилиши мумкин ва уларнинг ҳар бирининг пайдо бўлиш эҳтимоли $1/6$ га тенг. Демак, бу тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги жадвалдан иборат:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-мисол. Нишонга биринчи теккунча отиш бажарилди. Ҳар бир отишда ўқнинг тегиш эҳтимоли p га тенг. Тасодифий миқдор X – ўқ биринчи теккунча отиш номери. Бу тасодифий миқдорнинг тақсимотининг жадвали тузилсин.

Ечиш. Равшанки X фақат иккитагина 1 ва 0 қийматларни қабул қилиши мумкин. Бу қийматларнинг эҳтимоллари мос равишда p ва $1-p=q$ бўлади. $p+q=1$. Жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

X	1	0
p	p	$p-1$

Биномиал тақсимот

Ҳар бирида бирор A ҳодиса бир хил p эҳтимол билан юз берадиган n та эркин тажриба ўтказилган бўлсин. Берилган k сон учун n та тажрибада A ҳодисанинг роса k марта юз беришидан иборат бўлган A_{nk} ҳодисанинг эҳтимолини топиш талаб қилинади. A ҳодисанинг ҳар бир юз беришини муваффақият, A нинг юз бермаслигини муваффақиятсизлик деб қараймиз. Бизнинг мақсадимиз n та тажрибанинг роса k таси муваффақиятли бўлиш эҳтимолини топишдир.

$A_{n,k}$ ҳодиса бир қанча элементар ҳодисаларнинг - $A_{n,k}$ ҳодиса вариантларининг йиғиндисидан иборат. Маълум бир вариантни тайинлаш учун муваффақиятли бўлиб тугайдиган тажрибаларнинг номерларини кўрсатиш керак. Масалан, мумкин бўлган вариантлардан бири

$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ та}}, \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k \text{ та}}$$

бўлади.

Умуман ҳар бир вариант узунлиги n га тенг бўлган кортеж кўринишида ёзилади. Бу кортежнинг k та компонентаси A қолган $n-k$ та компонентаси эса $\bar{A}$ дан иборат. Ҳамма вариантларнинг сони C_n^k га тенг бўлиб, тажрибалар эркин бўлгани учун вариантлардан ҳар бирининг эҳтимоли $p^k q^{n-k}$ га тенг. $A_{n,k}$ ҳодисанинг эҳтимолини $P_{n,k}$ билан белгиласак

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

га эга бўламиз ($1-p=q$).

Бу формула Бернулли формуласи, $P_{n,k}$ эса биномиал эҳтимоллар дейилади.

А ҳодисанинг юз бериш сонидан иборат X тасодифий миқдорга мос жадвал

X	0	1	2		$n-1$	n
$P_{n,k}$	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$		$P_{n,n-1}$	$P_{n,n}$

кўринишда бўлади. Бу жадвал билан ҳаракатланадиган тақсимот қонуни биномиал тақсимот қонуни дейилади.

1-мисол. Танга 5 марта ташланди. герб томонининг тушиши сони X тасодифий миқдор. X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари 0, 1, 2, 3, 4, 5 сонлардан иборат бўлади. Бу қийматларнинг эҳтимоллари Бернулли формуласи ёрдамида ҳисобланади. Масалан, $n=5$ марта ташланди $k=3$ марта герб тушиш эҳтимолларини топайлик

$$P(X=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32}$$

$x=0, x=1, x=2, x=3, x=4, x=5$ ҳоллар учун шундай ҳисоблашларни бажарсак, тақсимот жадвали қуйидагича бўлади:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Дискрет тасодифий миқдорларнинг ўрта қиймати (математик кутилма)

Дискрет тасодифий миқдор X ўзининг мос тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

X	x_1	x_2		x_k	...	x_n
$P(X=x_k)$	p_1	p_2		p_k		p_n

Таъриф. Дискрет тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати (математик кутилма) деб шундай $M[x]$ сонга айтамызки, у тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари билан бу қийматлар эҳтимоллари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$$M[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (1)$$

бунда, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ бўлади.

Агар тасодифий миқдорнинг қийматлари чексиз кетма-кетликни ташкил қилса,

$$M[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \dots \quad (2)$$

бўлади.

1-мисол. Ўйин соққаси ташланганда тушадиган очколар сонининг математик кутилмасини топинг.

Ечиш. X – тасодифий миқдор ўйин соққасининг юқори томонида тушадиган очколар сони бўлиб, унинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{Демак, } M[x] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

2-мисол. Объектга қарата ўқ узилди. Ўқнинг тегиш эҳтимоли p га тенг. Ўқнинг тегиш сони тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматини топинг.

$$\text{Ечиш. } M[x] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

x	0	1
p	$1-p$	p

Математик кутилиш қуйидаги хоссаларга эга.

1⁰. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилмасини унинг ўзига тенг.

$$2^0. M[cX] = cM[x]$$

$$3^0. M[x+y] = M[x] + M[y]$$

$$4^0. M[x \cdot y] = M[x] \cdot M[y]$$

Тасодифий миқдорлар дисперсияси

Тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикаларидан яна бири дисперсия бўлади.

Уни $D[x]$ билан белгиланади ва у тарқоқликни билдиради. Дисперсия тасодифий миқдорнинг ўрта қийматига нисбатан унинг қийматлари тарқоқлигининг, сочилганлигининг сонли характеристикасидир.

1-таъриф. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб, тасодифий миқдор билан унинг ўрта қиймати орасидаги айирма квадратининг ўрта қийматига айтилади:

$$D[x] = M[(x - m_x)^2] \quad (m_x = M[x])$$

$$\text{ёки } D[x] = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 P_k \quad (1)$$

2-таъриф. Тасодифий миқдорнинг ўрта квадратик четланиши деб унинг дисперсиясидан олинган квадрат илдизига айтилади:

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]}$$

ёки

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - m_k)^2 P_k} \quad (2)$$

Эслатма: Ҳисоблашда (1) ва (2) формулаларда куйидагича ўзгартириш қулай бўлади.

$$D[x] = M[x^2] - m_x^2$$

1-мисол. Объектга қарата ўқ узилган. Ўқнинг объектга тегиш эҳтимоли p . Дисперсияни, ўртача квадратик четланишни топинг.

Ечиш. Ўқнинг тегиш сонларининг қийматлари жадвалини тузамиз:

x	1	0
p	p	q=1-p

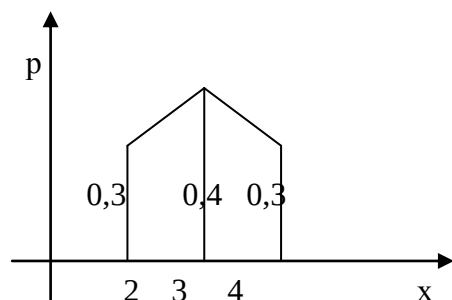
Демак, $M[x] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$

$$D[x] = \sum_{k=0}^1 (x_k - m_x)^2 p_k = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 q + q^2 p + p^2 q = pq$$

$$\sigma[x] = \sqrt{pq}$$

2-мисол. X тасодифий миқдор куйидаги тақсимот қонуни ёки тақсимот кўпбурчаги билан берилган 1) ўрта қийматни, 2) дисперсияни, 3) ўрта квадратик четланишни аниқланг.

x	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3



Ечиш. 1. $M[x] = 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 3$

2. $D[x] = (2-3)^2 \cdot 0,3 + (3-3)^2 \cdot 0,4 + (4-3)^2 \cdot 0,3 = 0,63$

3. $\sigma[x] = \sqrt{0,63} = 0,77$

Текшириш учун саволлар ва машқлар

1. Тасодифий миқдор деб нимага айтилади?
2. Тақсимот қонуни нима?
3. Дискрет тасодифий миқдорга таъриф беринг.

4. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қандай берилади?
5. Биномиал эҳтимол қандай формула билан топилади?
6. Биномиал тақсимот қонуни қандай бўлади?
7. Дискрет тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати (математик кутилиши) деб нимага айтилади? Унинг қандай хоссалари бор?
8. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб нимага айтилади?
9. Тасодифий миқдорнинг ўрта квадратик четланиши деб нимага айтилади?
10. Х дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни (жадвали) билан берилган

x	1	2	4	8
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Тақсимот кўп бурчагини ясанг.

11. Қурилма бир-биридан эркин ишлайдиган учта элементдан иборат. Ҳар бир элементнинг битта тажрибада ишдан чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Битта тажрибада ишдан чиққан элементлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.
12. Иккита ўйин соққаси бир вақтда икки марта ташланди. х дискрет тасодифий миқдор – иккита ўйин соққасида жуфт очколар тушиш сонининг биномиал тақсимот қонунини ёзинг.
13. Қуйида тақсимот қонуни билан берилган х дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

x	0,21	0,45	0,69
p	0,2	0,5	0,3

14. Агар х ва у нинг математик кутилиши маълум бўлса, $z=3x+4y$, ($M[x]=2$, $M[y]=6$) тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

15. Ушбу

x	-4	1	3	4
p	0,3	0,4	0,1	0,2

тақсимот қонуни билан берилган х дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

16. х ва у тасодифий миқдорлар эркин. Агар $D[x]=5$, $D[y]=6$ эканлиги маълум бўлса, $z=3x+2y$ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

6-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Тажрибавий маълумотларни қайта ишлаш. Тақсимот қонунлари. Гистограмма

Режа:

1. Математик статистика масалалари.
2. Статистик материаллар.
3. Статистик қатор (ёки эмприк қатор).
4. Тақсимотнинг эмприк қонуни.

5. Тақсимотнинг эмприк функцияси.

6. Гистограмма.

Таянч иборалар: Статистик метод, белги, ваклни танлаш, танланма, бош тўплам, статистик материал, ўлчаш хатолари, математик ишлов бериш, эмприк қатор, варианта, эмприк қонун, вариацион қатор, частоталар жадвали, танланманинг статистик тақсимоти, тақсимотнинг эмприк функцияси, гистограмма.

Математик статистика масалалари

Иқтисодиётда, қишлоқ хўжалигида, биологияда, тиббиётда тасодифий воқеаларни ўрганишда статистик методлар муҳим аҳамиятга эга. Одатда статистик методга бирор белгига кўра предметларнинг (воқеаларнинг, индивидларнинг) жуда катта тўпламларининг тақсимотларини ўрганиш талаб қилинганда мурожаат қилинади. Масалан, одамлар тўпламининг ёшлари бўйича тақсимоти, бирор туркумдаги ҳайвонларнинг оғирликлари бўйича тақсимоти ва ҳоказолар.

Ҳар қандай белги амалиётда миқдорий баҳога эга бўлганлиги учун нарсаларнинг белгига кўра тақсимоти ҳақида гапириш ўрнига қандайдир X тасодифий миқдор ҳақида гапириш мумкин.

X миқдор боғланган тажриба муайян тўпламдан таваккалига битта ваклни танлашдан иборат бўлиб, X нинг қабул қиладиган қиймати белгининг шу вакл учун қабул қиладиган қиймати бўлади.

Бундай тақсимотнинг тўла тавсифини муайян тўпламнинг истисносиз барча вакили учун белгининг қийматини аниқлаш билан олиш мумкинлиги тушунарли. Лекин тўпламнинг ҳажми жуда катта бўлса, бунини қилиб бўлмайди. Бу ҳолатдан чиқиш йўли бутун тўпламни текшириш ўрнига ундан таваккалига танланган қисми текширилади. Бундай қисм одатда танланма дейилади. Бутун тўплам эса бош тўплам дейилади. Масалан, Самарқанд шаҳрида яшовчиларнинг киядиган кийимларини размери бўйича тақсимоти ҳақида гапирилганда битта, битта уйда яшовчи кишиларга оид маълумотларни олиш мумкин.

Статистик материал

Оммавий тасодифий ҳодисаларни рўйхатга олиш ва кузатиш натижасида статистик материал ҳосил бўлади. Хусусан, турли ўлчашдаги хатолар статистик материал бўлиб хизмат қилади.

Тажриба натижасида кузатилган қийматларга асосланиб қаралаётган миқдорларнинг тақсимот қонунларини аниқлаш ҳамда тақсимот параметрларининг қийматларини баҳолаш – математик статистиканинг вазифаси ҳисобланади.

Математик статистиканинг яна бир вазифаси қаралаётган миқдорлар қатнашадиган жараёни оптимал ташкил қилиш учун керак бўлган аниқ хулосаларни ҳосил қилиш мақсадида тажрибавий (статистик) материални қайта ишлаб чиқиш ҳамда анализ қилиш усуллари яратишдан иборат.

Мисол. Ўлчов асбоби ёрдами билан бирор объектни кўп марта ўлчанганда, хусусан бирор объектгача бўлган узокликни аниқлаш пайтида, кузатилаётган миқдорнинг турли қийматлари ҳосил бўлади.

Шу йўл билан тажрибада олинган қийматларга асосланиб бирор натижага келишдан аввал улар системалаштиришни яъни қайта ишлашни талаб қилади.

Кузатилган X қиймат билан кузатилаётган α миқдорнинг ҳақиқий қиймати орасидаги δ айирма, яъни $X - \alpha = \delta$ ўлчаш хатоси деб айтилади. Ўлчаш хатоси аниқ хулосалар олиш мақсадида математик ишлов беришни талаб қилади. Масалан, маҳсулотни кўплаб (оммавий) ишлаб чиқаришда ҳосил қилинган маҳсулотнинг бирор ўлчамини олинган маҳсулотлар учун олдиндан берилган ўлчамдан четланиш миқдорини қараш керак бўлади.

Худди шунга ўхшаш отиш пайтида ўқнинг тегиш нуқтаси координата билан мўлжалга олиш нуқтаси координатаси орасидаги айирма отиш хатосидир.

Шундай қилиб математик статистикада асосан танланмани текшириш натижасига асосланган ҳолда тўплам бўйича аломатнинг тақсимоти ҳақида хулоса чиқариш амалга оширилади. Бунда тажрибавий маълумотлар қайта ишланиб мақсадга эришилади.

Статистик қатор (эмприк қатор)

Бирор X тасодифий миқдор ўрганилаётган бўлсин. Ана шу мақсадда ҳар бирида X миқдор у ёки бу қийматни қабул қиладиган бир қанча эркин тажрибалар ўтказилади. X тасодифий миқдорнинг ҳосил қилган

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

қийматлари биз ўтказаетган танланма бўлади. Бу тўпламни кўп ҳолларда эмприк қатор деб аталади. Эмприк қатор кейинроқ қайта ишланадиган ва анализ қилинадиган дастлабки статистик материал бўлади. Статистик (эмприк) қатор икки сатрли (ёки икки устунли) жадвал кўринишида тасвирланади. Биринчи сатрда тажрибаларнинг рақамлари, иккинчи сатрда эса тасодифий миқдорнинг ҳосил қилган қийматлари кўрсатилади.

Тажрибалар рақами	1	2	3	
X нинг қийматлари	x_1	x_2	x_3	

Тақсимотнинг эмприк қонуни

Эмприк қаторга асосланган ҳолда тақсимотнинг эмприк қонуни тузилади. Бу қонуннинг ёзилиш формаси ўрганилаётган X тасодифий миқдорнинг характериға боғлиқ бўлади. Агар X тасодифий миқдор дискрет бўлса, бу қонун жадвал кўринишида ёзилади. Бу жадвал у ёки бу қийматнинг қандай частота билан кузатилаётганлигини кўрсатади. Бундай жадвални тузиш учун $x_1, x_2, \dots$ сонлар орасидан ҳар хилларининг барчасини танлаш зарур. Бу йўл билан

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (1)$$

лар ҳосил қилинади. Одатда бу сонларни ўсиб бориш тартибида ($\alpha_1 < \alpha_2 \dots$) ёзилади ва уни вариацион қатор деб айтилади. (1) қатор тузилгандан сўнг α_i сонларнинг ҳар бири учун унинг тажрибаларнинг муайян сериясидаги такрорланиш частотасини тузиш мумкин

$$p_i^* = \frac{k_i}{n} \quad (2)$$

бу ерда n – барча тажрибалар сони, k_i эса $x = \alpha_i$ ҳодиса юз берган тажрибалар сони. Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

α_i	α_1	α_2	$\dots$	α_n
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_n^*

Бу жадвални частоталар жадвали (ёки танланманинг статистик тақсимо) деб аталади.

Кузатишлар сони n ўсиши билан частоталар жадвали X тасодифий миқдорининг ҳақиқий тақсимот қонунига тобора яқинлашиб боришини кутиш мумкин.

Мисол. 10 та тажриба натижаларида X тасодифий миқдор учун қуйидаги қийматлар олинган бўлсин:

Тажриба номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X нинг қийматлари	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,1	0,2

Бунга кўра вариацион қатор тузамиз:

0,1; 0,2; 0,3; 0,4

Буларга мос частоталарни (частоталар зичлиги) топамиз:

$\frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}$

Натижада қуйидаги частоталар жадвалига эга бўламиз:

X нинг қийматлари (α_i)	0,1	0,2	0,3	0,4
Частоталар (p_i^*)	0,4	0,2	0,2	0,2

Тақсимотнинг эмприк функцияси

Тақсимотнинг эмприк функцияси (танланманинг тақсимот функцияси) деб ҳар бир x қиймат учун $X \leq x$ ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайдиган $F^*(x)$ функцияга айтилади:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Бу ерда n_x – x дан кичик вариантлар сони, n – танланма ҳажми.

Эмприк функция қуйидаги хоссаларга эга:

1⁰. Эмприк функциянинг қийматлари $[0, 1]$ кесмага тегишли.

2⁰. $F^*(x)$ камаймайдиган функция.

3⁰. Агар x_1 энг кичик варианта, x_2 энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x_1 \leq x_2$ бўлганда $F^*(x) = 0$, $x_1 > x_2$ бўлганда $F^*(x) = 1$.

Гистограмма

Ўлчашлар сони жуда катта бўлганда юқоридаги частоталар жадвалини тузиш қийин, чунки жадвалга жойлаштирилган статистик материалларни кўздан кечириш мураккаб бўлиб қолади. Шунинг учун оддий статистик қаторда гуруҳлаш (группаларга ажратиш) бажарилади. Бунинг учун $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_n$ қаторни (X – нинг қийматларини) $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ интервалларга ажратамиз ва X миқдорнинг (α_{k-1}, α_k) интервалга тўғри келадиган қийматлари сонини m_k билан белгилаймиз. Интервалнинг учларига тўғри келадиган сонларни ё чап ёки ўнг интервалга киритилади.

Ушбу

$$\frac{m_k}{n} = \tilde{p}_k$$

сон (α_{k-1}, α_k) интервалга мос бўлган нисбий частота бўлади. Бунда $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_n = 1$

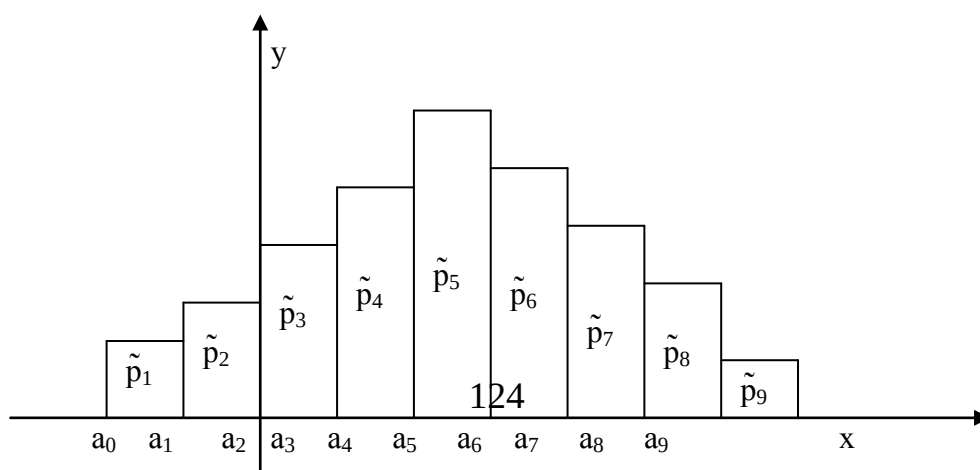
Бу ҳолда эмпирик қонун қуйидагича жадвал кўринишида бўлади:

интервалла	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)		(a_{k-1}, a_k)		(a_{n-1}, a_n)
p						
m_k	m_1	m_2		m_k		m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$		$\tilde{p}_k$		$\tilde{p}_n$

Ана шунинг ўзи гуруҳлашдир (группаларга ажратишдир). Кесмалари (x_i, p_i^*) нуқталарни туташтирадиган синик чизик частоталар полигони дейилади.

Кесмалар $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$ нуқталарни туташтирадиган синик чизик нийбий частоталар полигони дейилади.

Юқорида айtilган группаларга ажратишни геометрик тасвирлаш ҳам мумкин. Бу қуйидагича бажарилади. Ох ўқида $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ нуқталарни белгилаймиз. $[a_{k-1}, a_k]$ кесмани асос қилиб юзи $\tilde{p}_k$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз. Ҳосил қилинган шакл гистограмма деб аталади.



Статистик материалнинг бундан кейинги қайта ишланиши қуйидагича амалга оширилади. (a_{k-1}, a_k) интерваллар ўрталарини $\tilde{x}_i$ билан белгиланади ҳамда бу қийматни ўлчаш натижасининг қиймати деб ҳисобланади ва у m_k марта такрорланади. У ҳолда эмприк қонунни ифодаловчи жадвал қуйидагича бўлади:

$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$		$\tilde{x}_k$		$\tilde{x}_n$
m_k	m_1	m_2		m_k		m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$		$\tilde{p}_k$		$\tilde{p}_n$

Такрорлаш учун саволлар ва машқлар

1. Статистик метод нима?
2. Нарсаларнинг белгисига кўра тақсимотини қандай миқдорнинг тақсимоти деб қараш мумкин?
3. Вакл танлаш нима?
4. Танланма деб нимага айтилади? Бош тўплам нима?
5. Статистик материал қандай ҳосил қилинади?
6. Математик статистиканинг вазифаси нимадан иборат?
7. Системалаштириш ёки қайта ишлаш нима дегани? Математик ишлов бериш-чи?
8. Статистик ёки эмприк қатор ва вариантлар нима?
9. Эмприк қонун нима?
10. Тажрибанинг муайян сериясида такрорланиш частотаси қандай топилади? Частоталар жадвали қандай тузилади?
11. Тақсимотнинг эмприк функцияси нима? Гистограмма деб нимага айтилади?
12. Частоталар полигони деб нимага айтилади?
13. Нисбий частота қандай топилади ва бу ҳолда эмприк қонун қандай кўринишда бўлади?
14. Танланма

x_i	4	7	8	12
m_i	5	2	3	10

частоталар тақсимоти кўринишида берилган нисбий частоталар тақсимотини топинг.

15. Танланманинг қуйидаги берилган тақсимоти бўйича унинг эмприк функциясини топинг.

x_i	1	5	7
-------	---	---	---

m_i 10 25 35

16. Танланманинг қуйидаги берилган тақсимои бўйича частоталар полигонини топинг.

x_i 2 5 7 8
 m_i 10 20 6 14

17. Танланманинг қуйидаги берилган тақсимои бўйича частоталар гистограммасини ясанг.

Интервал номери	Қисмий интервал	Интервалдаги вариантлар частоталарининг йиғиндиси	Частота зичлиги
i	$x_i - x_{i+1}$	m_i	$k_i/h = p_i^*$
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

18. Танланманинг қуйидаги берилган тақсимои бўйича нисбий частоталар гистограммасини ясанг.

Интервал номери	Қиймий интервал	Интервалдаги вариантлар частоталарининг йиғиндиси
i	$x_i - x_{i+1}$	k_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n = \sum m_i = 20$

7-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Ўлчаш хатоликлари. Миқдорлар ва тажрибалар орқали ўлчанадиган миқдорнинг тўғри келадиган қийматини аниқлаш

Режа:

1. Ўлчаш хатоликлари.
2. Тасодифий миқдорнинг тақсимои ҳақида.
3. Ўлчанадиган миқдорнинг тўғри келадиган қийматини аниқлаш.

Ўлчаш хатоликлари ҳақида

Фараз қилайлик ўлчов асбоби ёрдами билан бирор объектни кўп марта ўлчаш тажрибаси қаралаётган бўлсин. Бу тажриба хусусан бирор

объектгача узоқликни аниқлашдан иборат бўлсин. Бу тажрибада кузатилаётган миқдорнинг турли қийматлари ҳосил бўлади. Бундай қийматларни кузатилаётган қийматлар деб атаيمиз.

Шу йўл билан олинган қийматларга асосланиб бирор натижага келишдан аввал улар системалаштиришни ҳамда ишлаб чиқишни талаб қилади.

Таъриф. Кузатилган x қиймат билан кузатилаётган a миқдорнинг ҳақиқий қиймати орасидаги δ айирма, яъни:

$$x-a=\delta$$

ўлчаш хатоси деб аталади.

Агар бизни ўлчаш асбоби қиладиган хатоликнинг тақсимооти қизиқтирса, у ҳолда ўрганилаётган тўплам муайян асбоб билан ўтказила олинadиган барча фикрлаш мумкин бўлган ўлчашлар тўпламидан иборат бўлади. Бундай ҳолда тўпламнинг барча элементларини текшириб чиқиш мумкин эмас. Бундай ҳолда танланма ва унинг эмпирик тақсимот қонунига мурожаат қилинади.

Отиш пайтида ўқнинг тегиш нуқтаси координатаси билан мўлжалга олиш нуқтаси координата орасидаги айирма отиш хатосидир.

Бу мисоллардан кўринадик қаралаётган миқдорлар тасодифий миқдорлар бўлиб, ҳар бир кузатилган қийматни эса тасодифий миқдорнинг хусусий қиймати деб қараш керак.

Масалан, отишда узунлик бўйича қилинадиган хато (тарқоқлик) заряднинг тармоқланишдаги хато билан, снарядни тайёрлашда оғирликдаги хато билан, нишонга олишда хато билан, метеорологик шароитнинг ўзгариши билан ва ҳоказолар билан аниқланади. Буларнинг барчаси эса тасодифий миқдорлардир.

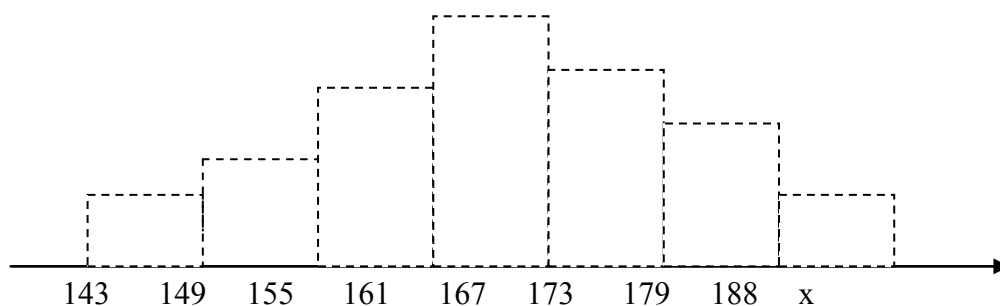
Тасодифий миқдорнинг тақсимооти

Частоталар жадвали ёки гистограммага қараб X тасодифий миқдор тақсимоотининг ҳақиқий характери ҳақида гипотезалар тузиш мумкин. Бунга мисоллар қараймиз.

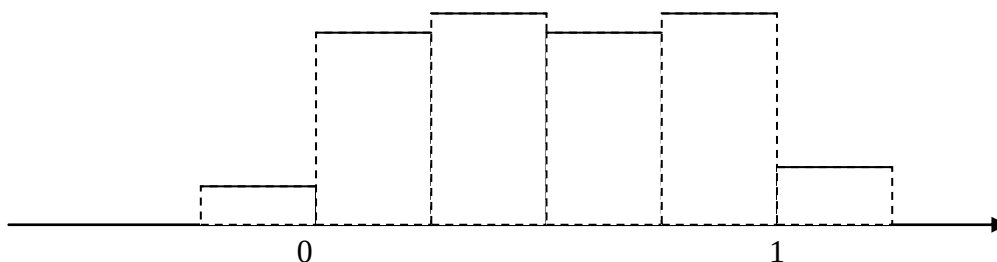
1-мисол. 100 та талабанинг бўйларини ўлчаш натижаларини ифодаловчи жадвал тузилган бўлсин:

Интерваллар (бўй разрядлари)	143- 149	149- 155	155-161	161-167	167-173	173-179	179-188
$\tilde{x}_k$	146	152	158	164	170	176	174
m_k	5	7	18	30	20	16	4
$\tilde{p}_k$	0,02	0,07	0,18	0,30	0,20	0,16	0,04

Бу ҳолда гистограмма қуйидагича бўлади:



Бу гистограммага кўра x миқдорнинг тақсимоти нормал тақсимот дейиш мумкин. Қуйидаги гистограммага қараб x миқдорнинг $[0, 1]$ кесмадаги тақсимотини нормал тақсимот деса бўлади.



Ўлчанадиган миқдорнинг тўғри келадиган қийматини аниқлаш

Бирор миқдорни ўлчаш пайтида $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўлчаш натижалари ҳосил қилинган бўлсин. Бу қийматларни тасодифий миқдор X нинг хусусий қийматлари деб қараш мумкин. Аниқланадиган миқдорнинг мос келадиган қиймати учун ҳосил қилинган қийматларнинг ўрта арифметиғи қабул қилинади:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

m_x^* - эмприк ўрта ёки статик ўрта деб аталади.

Агар ўлчашлар сони n катта бўлса, у ҳолда олдинги пунктдан қаралган эмприк қонун жадвал материалларидан фойдаланилади ва m_x^* учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{m}_2 + \dots + \tilde{x}_n \tilde{m}_n}{n} = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k P_k^* \quad (2)$$

Бу қиймат вазнлари ҳисобга олинган қиймат деб аталади.

Кузатилаётган миқдор қийматларининг тарқоклигини характерловчи

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n} \quad (3)$$

миқдор эмприк дисперсия ёки статистик дисперсия деб аталади.

Агар эмприк тақсимот жадвалидан фойдаланилса бу формула қуйидагича ёзилади.

$$D^* = \sum_{k=1}^n (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^*$$

Мисол. Юқорида кўрилган 100 та талабанинг бўйларини ўлчашда ҳосил қилинган жадвалга асосланиб эмприк ўрта ва эмприк дисперсияни аниқланг.

Ечиш.

$$\begin{aligned} m_x^* &= \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i p_i^* = 146 \cdot 0,02 + 152 \cdot 0,07 + 158 \cdot 0,18 + \\ &+ 164 \cdot 0,30 + 170 \cdot 0,20 + 176 \cdot 0,16 + 174 \cdot 0,04 = 160,32 \\ D^* &= \sum_{k=1}^n (\tilde{x}_k - m_i^*)^2 p_k^* = 146^2 \cdot 0,02 + 152^2 \cdot 0,07 + 158^2 \cdot 0,18 + \\ &+ 164^2 \cdot 0,30 + 170^2 \cdot 0,20 + 176^2 \cdot 0,16 + 174^2 \cdot 0,04 = 41449,12 \end{aligned}$$

Текшириш учун саволлар ва машқлар

1. Кузатилаётган қийматлар деб нимага айтилади?
2. Қандай хатолар тасодифий миқдорлар бўлади?
3. Тасодифий миқдорларнинг ҳақиқий характерини нималарга асосланиб аниқланади?
4. Ўлчанадиган миқдорнинг тўғри келадиган қиймати қандай аниқланади? Эмприк ёки статистик ўрта деб нимага айтилади?
5. Ўлчанадиган миқдорнинг вазнлари ҳисобга олинган қиймати қандай топилади?
6. Эмприк ёки статистик дисперсия деб нимага айтилади?
7. 1000 та талабанинг оғирликларини ўлчаш натижаларини ифодаловчи жадвал берилган:

Интерваллар	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-80	80-90
$\tilde{x}_k$							
m_k	50	100	200	300	260	50	40
$\tilde{p}_k$							

Жадвалнинг бўш жойларини тўлдириш. Статистик ўрта ва статистик дисперсияни аниқланг.

8-МАШҒУЛОТ

Мавзу: Бевосита ўлчаш натижасида ҳосил бўладиган миқдорлар хатоликларини баҳолаш. Тақсимот параметрларининг статистик баҳолари

Режа:

1. Бевосита ўлчаш натижасида ҳосил бўладиган миқдорлар хатоликларини баҳолаш.
2. Тақсимот қонуни параметрларини аниқлаш ва уларни баҳолаш.
3. Параметрларни аниқлашга қўйиладиган талаблар.
4. Математик кутилиш ва дисперсия учун баҳолаш.

Таянч иборалар: Ўлчанаётган миқдор, ўлчаш натижаси, систематик хато, нормал тақсимот қонуни, четланиш, тақсимот параметрлари, нуқтавий баҳо, силжимаган баҳо, силжиган баҳо, асосли баҳо ёки ўртача қийматнинг силжимаган баҳоси, дисперсиянинг силжимаган ва силжиган баҳоси.

Бевосита ўлчаш натижасида ҳосил бўладиган миқдорлар хатоларини баҳолаш

Фараз қилайлик a ўлчанаётган миқдор, x ўлчаш натижаси – тасодикий миқдор, δ эса ўлчаш хатоси бўлсин. У ҳолда бу миқдорлар

$$\delta = x - a \quad x = a + \delta$$

муносабатлар билан боғланган бўлади.

Кўп сондаги тажриба ва кузатишларнинг кўрсатишича, ўлчаш хатолари, систематик хатони, яъни ҳамма ўлчашларда ўзгармайдиган хатоларни (масалан, асбоб хатоси) ёки ўлчашдан ўлчашгача маълум қонун бўйича ўзгарадиган хатоларни чиқариб юборгандан кейин ҳамда кўпол хатоларни чиқариб ташлагандан кейин, тақсимот маркази координаталар бошида бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунди. Бу назарий асослар билан ҳам тасдиқланади.

Агар тасодикий миқдор катта сондаги тасодикий миқдорлар йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда баъзи бир шароитларда бу йиғинди нормал тақсимот қонунига бўйсунди, яъни А.М.Ляпунов (1857-1918) теоремаси ўринли бўлади.

Теорема. Агар боғлиқ бўлмаган тасодикий $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ миқдорлар ўрта қиймати a (умумийликни бузмасдан $a=0$ деб фараз қилиш мумкин) ва дисперсия σ^2 бўлган бир хил тақсимот қонунига эга бўлса, у ҳолда n чегарасиз ўсиб борганда

йиғиндининг тақсимот қонуни нормал тақсимотдан ҳар қанча кичик фарқ қилади.

$$\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{\sigma \sqrt{n}}$$

Бунда $M[\bar{y}_n]=0$ $D[\bar{y}_n]=1$ бўлади. Бу теореманинг аҳамияти қуйидагидан иборат: X тасодикий миқдор сифатида бирор миқдорнинг берилган миқдордан четланиши бўлсин. Бу четланиш кўп факторларнинг таъсири натижасида келиб чиққан бўлиб, уларнинг ҳар бири бирор ташкил қилувчи четланишни беради. Масалан, отиш хатоси (четланиши) кўп факторларга боғлиқ бўлишини биламиз. Ляпунов теоремасидан X тасодикий миқдорнинг умумий четланишининг – нормал қонунга бўйсунити келиб чиқади.

Ляпунов теоремасидан агар $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ лар бирор миқдорни ўлчаш натижалари бўлса (ҳар бир x_i тасодикий миқдор) ва тасодикий x_i миқдорлар бир хил тақсимот қонунига бўйсунса, у ҳолда тасодикий миқдор ўрта арифметик қиймати

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$$

нинг n етарли катта бўлганда нормал қонунга ҳар қанча яқин бўлган тақсимот қонунига бўйсунити келиб чиқади.

Тажрибанинг кўрсатишича қўшилувчилар сони 10 тартибда бўлгандаёқ уларнинг йиғиндиси нормал тақсимотга бўйсунди деб ҳисобланади.

Тақсимот параметрларини аниқлаш ва уларни баҳолаш

Агар тасодифий миқдор тақсимотининг қонуни нормал қонун эканлиги олдиндан маълум бўлса, у ҳолда масала иккита a ва σ параметрларнинг қийматларини топишга келтирилади. Ҳатто баъзи масалаларда тақсимот қонунининг кўриниши ҳам аҳамиятга эга бўлмасдан, фақат унинг сонли характеристикаларинигина топиш талаб қилинади.

Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунида қандайдир θ параметр бор бўлсин. Унинг қиймати кўрсатилмаган. Қуйидаги масала қаралади: n та эркин тажриба натижасида X миқдор учун олинган

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

қийматлар тўпламидан келиб чиқиб θ параметрнинг қийматини баҳоланг. θ учун баҳони $\tilde{\theta}$ деб белгилаймиз ва у ҳам тасодифий миқдор бўлади. Унинг тақсимот қонуни X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунига ва тажрибалар сони n га боғлиқ бўлади ва унга қатор талаблар қўйилади.

1. θ номаълум параметрни биттагина $\tilde{\theta}$ сон билан баҳоланса у нуқтавий баҳо дейилади.
2. θ нинг ўрнига $\tilde{\theta}$ миқдордан фойдаланганда бизнинг камайитириш томонига ҳам орттириш томонига ҳам хато қилмаслигимиз мақсадга мувофиқдир, яъни

$$M[\tilde{\theta}] = \theta$$

тенглик ўринли бўлсин.

Танланманинг ҳажми исталганча бўлганда ҳам математик кутилиш баҳоланаётган параметрга тенг бўлган бундай нуқтавий баҳога силжимаган баҳо дейилади.

3. Математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган нуқтавий баҳони силжиган баҳо дейилади.
4. Тажрибалар сони n нинг ўсиши билан $\tilde{\theta}$ тасодифий миқдорнинг қийматлари θ нинг атрофида тобора жипслаша боргани мақсадга мувофиқдир, яъни

$$D[\tilde{\theta}] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ да})$$

муносабат бажарилсин. Бундай хоссага эга бўлган баҳо асосли баҳо дейилади.

Математик кутилма ва дисперсия учун баҳолар

Математик кутилма m учун баҳо танлаш масаласини қараймиз. Бундай баҳо сифатида эмприк ўртача

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

ни оламыз. m_x^* нинг тасодифийлик характери́ни таъкидлаш учун бу тенгликни

кўринишда ёзиб оламыз, бу ерда x_i орқали X тасодифий миқдорнинг i -тажрибада ҳосил қилинган қиймат белгиланган. $x_1, x_2, \dots, x_n$ тасодифий миқдорларнинг барчаси бир хил тақсимот қонунига эга бўлади (Y X миқдорнинг тақсимот қонуни билан бир хил бўлади).

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{ёки} \quad m_x^* = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i p_i^*$$

Шунинг учун бўлиб m_x^* силжимаган баҳо бўлади. Бу баҳонинг дисперсияси эса:

$$M[m_x^*] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n} \cdot nM[x] = m$$

бўлади.

$$D[m_x^*] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[x_i] = \frac{1}{n^2} nD[x] = \frac{D}{n}$$

Энди дисперсия D учун баҳо танлаймиз. Бундай баҳо сифатида эмприк дисперсия

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i^*)^2$$

хизмат қилади.

D^* нинг асосли баҳо эканлигини кўрсатамиз. Бироқ D^* баҳо D га нисбатан силжиган баҳо бўлади. Кўрсатиш мумкинки D^* миқдорнинг математик кутилмаси D сон билан бир хил бўлмайди, балки охиргисидан бир оз кичик бўлади.

Бу ердан кўринадики, дисперсиянинг силжимаган баҳоси ушбу кўринишда бўлади.

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n} D$$

$$D^{**} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2$$

$$M[D^{**}] = \frac{n}{n-1} M[D^*] = D$$

Ҳақиқатдан ҳам, тенглик ўринлидир.

D^{**} баҳони силжимаган эмприк дисперсия деб аталади.

Текшириш учун саволлар ва машқлар

1. Ўлчаш хатоси деб нимага айтилади?
2. Систематик хато деб нимага айтилади?
3. А.М.Ляпунов теоремаси ва унинг маъносини айтинг.

4. Тақсимот параметрлари деб нимага айтилади ва улар қандай аниқланади?
5. Нуқтавий баҳо деб нимага айтилади?
6. Силжимаган ва силжиган баҳоларни таърифланг.
7. Асосли баҳо деганда нимани тушунаси?
8. Математик кутилиш учун баҳо қандай танланади?
9. Дисперсия учун баҳо қандай танланади?
10. Бош тўпланда $n=60$ ҳажмли танланма олинган

Варианта	x_i	1	3	5	7	9	10
Частота	P_i^*	13	15	12	10	2	8

Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳосини топинг.

11. $n=20$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма қийматини топинг.

$$\begin{array}{c} x_i \quad 1260 \quad 1270 \quad 1280 \\ p_i^* \quad 7 \quad 10 \quad 3 \end{array}$$

12. $n=50$ ҳажмли танланма бўйича бош дисперсиянинг $D^*=5$ силжиган баҳоси топилган. Бош тўпланда дисперсиясининг силжимаган баҳосини топинг.

13. $n=15$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг.

$$\begin{array}{c} x_i \quad 216 \quad 220 \quad 224 \\ p_i^* \quad 5 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

14. $n=20$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг.

$$\begin{array}{c} x_i \quad 0,02 \quad 0,04 \quad 0,09 \\ p_i^* \quad 10 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

15. $n=50$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг.

$$\begin{array}{c} x_i \quad 0,1 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,8 \\ p_i^* \quad 5 \quad 15 \quad 20 \quad 10 \end{array}$$

16. $n=10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича кузатилган танланма дисперсияни топинг (силжимаган эмприк дисперсия).

$$\begin{array}{c} x_i \quad 202 \quad 204 \quad 208 \\ p_i^* \quad 2 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

Адабиётлар:

1. А.С.Солодовников. Эҳтимолар назарияси. – Тошкент: 1983.
2. Н.С.Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. – Тошкент: 1974.
3. В.Е.Гумурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. – Тошкент: 1980.
4. Ю.Г.Грост. Задачник практикум по теории вероятностей. - Москва: 1969.

5. Р.С.Гутер, Б.В.Овчинский. Основы теории вероятностей. – Москва: 1967.