МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛИШЕРА НАВОИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

А Л Г Е Б Р А   М Н О Г О Ч Л Е Н О В

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

САМАРКАНД - 2014

АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

Ключевые слова и выражения: *многочлен от одной переменной; коэффициенты многочлена; степень многочлена; старший коэффициент многочлена; свободный член многочлена; нулевой многочлен; сумма и произведение многочленов; кольцо многочленов от одной переменной старший член многочлена; деление с остатком; частное; остаток; делитель многочлена; кратное многочлена; общий делитель многочленов; наибольший общий делитель (НОК) многочленов; алгоритм Евклида; линейное представление НОД многочленов; общее кратное многочленов; наибольшее общее кратное (НОК) многочленов; последовательность Евклида; значение многочлена; теорема Безу; корень многочлена; кратный корень; простой корень; формулы Виета; интерполяционная формула Лагранжа; интерполяционная формула Ньютона; формула Тейлора; неприводимый многочлен; унитарный многочлен; каноническое разложение многочлена над заданным полем; $k-$кратный неприводимый множитель многочлена; основная теорема алгебры; теорема Гаусса; алгебраически замкнутое поле; признак Эйзенштейна; первая теорема о рациональных корнях многочлена; вторая теорема о рациональных корнях многочлена; рациональная дробь или дробно-рациональная функция; поле рациональных дробей или поле дробно – рациональных функций над полем; несократимая, правильная, простейшая рациональные дроби; формула Лагранжа; степень члена; степень многочлена по совокупности переменных; однородный многочлен или форма; степень многочлена, относительно одного из переменных; лексикографическое или словарное упорядочение; высший член многочлена; симметрический, элементарный (или основной) симметрический многочлен; моногенный многочлен; степенные суммы; формулы Ньютона.*

§ 1. Кольцо многочленов. НОД и НОК многочленов

Многочленом от переменной x над полем P называется формальное выражение вида
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$
где $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ – элементы поля P, называемые *коэффициентами многочлена* (1). Если $a_0 \neq 0$, то n называется *степенью, a_0 – старшим коэффициентом, a_n – свободным членом,* a_0x^n – старшим членом многочлена (1).

Многочлен, все коэффициенты которого равны нулю называется *нулевым* и обозначается через 0. Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена называются *равными,* если равны их коэффициент при одинаковых степенях переменной x.

Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i},$$

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + b_m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}.$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен

$$f(x)g(x) = c_0 x^{n+m} + c_1 x^{n+m-1} + \cdots + c_{n+m-1} x + c_{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^{n+m-j},$$

где $c_j = \sum_{i+k=j} a_i b_k = = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + a_2 b_{j-2} + \cdots + a_{j-1} b_1 + a_j b_o, \quad j = 0,1,\ldots,n+m.$

Если $n \geq m$, то *суммой многочленов* $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен
$f(x) + g(x) = (a_n + b_m) + (a_{n-1} + b_{m-1})x + \cdots + (a_{n-m} + b_m)x^m + a_{n-m-1} x^{m+1} + \cdots + a_0 x^n.$

Относительно введенных операций сложения и умножения множество всех многочленов от переменной x над полем P является коммутативным кольцом с единицей, которое принято обозначать $P[x]$ и называть *кольцом многочленов от одной переменной над полем* P. Нулем этого кольца является нулевой многочлен Ox^0, единицей – многочлен ex^0, противоположным многочлену $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$ – многочлен
$(-f(x)) = (-a_0)\, x^0 + (-a_1)\, x^1 + \cdots + (-a_n)\, x^n.$

Если $f(x) \in P[x], \quad 0 \neq g(x) \in P[x],$ то *делением с остатком* $f(x)$ на $g(x)$ называется представление

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

где $f(x)$ и $r(x)$ – многочлены над $P,$ причем степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$ или $r(x) = 0$ и это представление единственно. Многочлен $q(x)$ называется *частным,* а $r(x)$ – *остатком* от деления $f(x)$ на $g(x)$.

При $r(x) = 0$ говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, и пишут $g(x) \mid f(x)$ (или $f(x) \vdots g(x)$), при этом многочлен $g(x)$ называется *делителем многочлена* $f(x)$, а $f(x)$ -- *кратным многочлена* $g(x)$.

Если каждый из многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ из $P[x], \quad k > 1,$ делится на многочлен $\varphi(x),$ то $\varphi(x)$ называется *общим делителем многочленов* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x).$

Наибольшим общим делителем (НОД) многочленов
$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ из $P[x], \quad k > 1,$ среди которых хотя бы один отличен от нулевого, называется такой их общий делитель, который делится на любой общий делитель данных многочленов. Для любых многочленов, не равных одновременно нулю, НОД существует и определен однозначно с точностью

до постоянных отличных от нуля множителей. Из всех наибольших общих делителей многочленов обычно выбирают тот, у которого старший коэффициент равен 1. НОД многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ обозначим $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$.

Если $g(x)$ делит , то $(f(x), g(x)) = b_0^{-1}\, g(x)$, где b_0 – старший коэффициент многочлена $g(x)$ не делит $f(x)$, то НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равен последнему отличному от нуля остатку *алгоритма Евклида* для многочленов $f(x)$ и $g(x)$, деленному на старший коэффициент: многочлен $f(x)$ делится с остатком на $g(x)$; получается остаток $r_1(x)$; затем $g(x)$ делится с остатком на $r_1(x)$; получается остаток $r_2(x)$; если $r_2(x) \neq 0$, то $r_1(x)$ делится с остатком на $r_2(x)$, и т.д. до получения остатка, равного нулю. Последний не равный нулю остаток $r_k(x)$ является НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Отыскание НОД трех и более многочленов сводится к отысканию НОД двух многочленов в силу равенства:

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)) = ((f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x)), \quad f_k(x)), \quad k \geq 3.$$

Если $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)) = d(x)$, то в кольце $P[x]$ существуют многочлены $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, такие, что

$$d(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(x) = f_1(x) g_1(x) + \ldots + f_k(x) g_k(x). \qquad (2)$$

Равенство (2) называет *линейным представлением НОД многочленов.*

Многочлены называются *взаимно простыми,* если их НОД равен единице. Многочлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ из $P[x]$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют в $P[x]$ многочлены $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, такие, что

$$f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x) + \ldots + f_k(x) g_k(x) = 1.$$

Если многочлен $h(x) \in P[x]$ делится на каждый из ненулевых многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ из $P[x]$, то $h(x)$ называется *общим кратным многочленов* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$. *Наименьшим общим кратным (НОК)* ненулевых многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, $k > 1$, из $P[x]$ называется такое их общее кратное, которое делит любое общее кратное данных многочленов. Из всех НОК многочленов обычно выбирают тот, у которого старший коэффициент равен 1. НОК многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ будем обозначать $[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)]$. НОК двух многочленов находится по формуле:

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)\, g(x)}{a_0\, b_0\; (f(x), g(x))},$$

где a_0, b_0 – старшие коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Отыскание НОК трех и более многочленов сводится к отысканию НОК двух многочленов в силу равенства:

$$[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)] = [[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x)], \quad f_k(x)], \quad k \geq 3.$$

П р и м е р 1. В кольце $\boldsymbol{Q}(x)$ найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3$ на $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Решение. Схема деления с остатком имеет вид:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3 & \underline{x^3 + 2x^2 - 1} \\
\underline{2x^4 + 4x^3 - 2x} & 2x - 3 \\
\quad -3x^3 + x^2 + x - 3 & \\
\quad \underline{-3x^3 - 6x^2 + 3} & \\
\qquad 7x^2 + x - 6 &
\end{array}$$

и $f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$, где $q(x) = 2x - 3; \quad r(x) = 7x^2 + x - 6.$ ■

П р и м е р 2. В кольце $\boldsymbol{Z}_7\,[x]$ найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 4$ на $g(x) = x^3 + 2x^2 + 6$.

Решение. Схема деления с остатком имеет вид:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 4 & \underline{x^3 + 2x^2 + 6} \\
\underline{2x^4 + 4x^3 + 5x} & 2x + 4 \\
\quad 4x^3 + x^2 + x + 4 & \\
\quad \underline{4x^3 + x^2 + 3} & \\
\qquad\quad x + 1 &
\end{array}$$

и $f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$, где $q(x) = 2x + 4; \quad r(x) = x + 1.$ •

П р и м е р 3. Найти в кольце $\boldsymbol{Q}\,[x]$ НОД многочленов $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3$ и $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Решение. Схема алгоритма Евклида имеет вид:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3 & \underline{x^3 + 2x^2 - 1} \\
\underline{2x^4 + 4x^3 - 2x} & 2x - 3 \\
\quad -3x^3 + x^2 + x - 3 & \\
\quad \underline{-3x^3 - 6x^2 + 3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 - 1 & \underline{7x^2 + x - 6} \\
\underline{x^3 + \frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x} & \frac{1}{7}x + \frac{13}{49} \\
\quad \frac{13}{7}x^2 + \frac{6}{7}x - 1 & \\
\quad \underline{\frac{13}{7}x^2 + \frac{13}{49}x - \frac{78}{49}} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
7x^2+x-6 & \frac{29}{49}x+\frac{29}{49} \\
\underline{7x^2+7x} & \hline \frac{343}{29}x-\frac{294}{29} \\
\quad -6x-6 & \\
\quad \underline{-6x-6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Значит, *последовательность Евклида* для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ *имеет вид:*

$$f(x)=g(x)(2x-3)+r_1(x) \qquad (r_1(x)=7x^2+x-6),$$

$$g(x)=r_1(x)\left(\frac{1}{7}x+\frac{13}{49}\right)+r_2(x) \qquad \left(r_2(x)=\frac{29}{49}x+\frac{29}{49}\right),$$

$$r_1(x)=r_2(x)\left(\frac{343}{29}x-\frac{294}{29}\right).$$

Следовательно, НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равен $r_2(x)$. Окончательно, деля $r_2(x)$ на его старший коэффициент $\frac{29}{49}$, получим, что

$f(x)$, $(f(x), g(x))=x+1$. ■

П р и м е р 4. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти в кольце $\boldsymbol{Q}(x)$ для $f(x)$ и $g(x)$ такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы

$$(f(x),g(x))=f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x):$$

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,$$

$$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2.$$

Решение. Последовательность Евклида для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеет вид:

$$f(x)=g(x)\cdot 1+(x^3-2x)$$

$$g(x)=(x^3-2x)(x+1)+(x^2-2)$$

$$x^3-2x=(x^2-x)\cdot x.$$

Следовательно, $(f(x), g(x))=x^2-2$.

Из второго равенства последовательности Евклида имеем:

$$x^2-2=g(x)-(x^3-2x)(x+1).$$

Подставляя в это равенство вместо (x^3-2x) его выражение, получающееся из первого равенства последовательности Евклида, получим:

$$x^2-2=g(x)-(f(x)-g(x))(x+1)=g(x)-(x+1)f(x)+(x+1)g(x).$$

Окончательно, имеем:

$$(f(x),g(x))=x^2-2=-(x+1)f(x)+(x+2)g(x), \quad \text{т.е.}$$

$$\varphi(x)=-(x+1), \quad \psi(x)=x+2. \ ■$$

Если степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ больше нуля, то многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в равенстве

$$f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=(f(x),g(x)) \qquad (3)$$

можно подобрать так, что степень $\varphi(x)$ будет меньше степени $g(x)$, а степень $\psi(x)$ – меньше степени $f(x)$.

При практическом отыскании многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удобнее вместо $f(x)$ и $g(x)$ взять многочлены $f_1(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$, $g_1(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ и сначала подобрать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$1=f_1(x)\varphi(x)+g_1(x)\psi(x). \qquad (4)$$

Это делается следующим образом. Если $f_1(x)$ или $g_1(x)$ – многочлен нулевой степени, то многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ просто подбираются: например, при $g_1(x)=a\neq 0$ можно положить $\varphi(x)=0, \psi(x)=\dfrac{1}{a}$. Если же степени $f_1(x)$ и $g_1(x)$ положительны, то нужно написать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с неопределенными коэффициентами (считая степень $\varphi(x)$ меньше степени $g_1(x)$, степень $\psi(x)$ меньше степени $f_1(x)$) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (4) (или же можно придавать переменному x различные числовые значения и приравнять единице получающиеся при этом значения многочлена $f_1(x)\varphi(x)+g_1(x)\psi(x)$); это даст систему линейных уравнений, решая которую найдем неизвестные коэффициенты многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Если теперь умножить обе части (4) на $(f(x), g(x))$, то получится равенство (3) (с теми же многочленами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, что и в (4)). При таком способе отыскания $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ степень $\varphi(x)$ получается меньше разности степеней $g(x)$ и $(f(x), g(x))$, степень $\psi(x)$ - меньше разности степеней $f(x)$ и $(f(x), g(x))$ (если только указанные разности не равны 0). При этом условии на степени многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в (3), определены уже однозначно.

П р и м е р 5. Способом неопределенных коэффициентов подобрать такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$, чтобы $f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=(f(x),g(x))$, где $f(x)=3x^5-4x^4-3x^3-3x^2+4x-1$, $g(x)=3x^5+5x^4+x^3-x^2-3x+1$.

Решение. Используя алгоритм Евклида, находим, что $(f(x),g(x))=3x^3+2x^2+2x-1$. Тогда $f_1(x)=x^2-2x+1$, $g_1(x)=x^2+x-1$.

Пишем для многочленов $f_1(x)$ и $g_1(x)$ равенство (4) с неопределенными коэффициентами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$1=(x^2-2x+1)(ax+b)+(x^2+x-1)(a_1x+b_1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + a_1 = 0 \\ b - 2a + b_1 + a_1 = 0 \\ -2b + a + b_1 - a_1 = 0 \\ b \quad - b_1 \quad = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = 3,\quad a_1 = -3,\quad b = 5,\quad b_1 = 4$, т.е.

$$(f(x), g(x)) = f(x)(3x+5) + g(x)(3x+4). \ \blacksquare$$

П р и м е р 6. Способом неопределенных коэффициентов подобрать такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$, чтобы $f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = (f(x), g(x))$, где $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2$, $g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1$.

Решение. Используя алгоритм Евклида, находим, что $(f(x), g(x)) = 2x^2 + 2x - 1$. Тогда $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$, $g_1(x) = 3x - 1$.

Пишем равенство (4):

$$1 = (x^2 - 3x + 2)\,a + (3x-1)(bx + c).$$

Придавая x последовательно значения 0, 1, 2, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b + 2c = 1 \\ 10b + 5c = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = 0{,}9;\quad a_1 = -0{,}3;\quad c = 0{,}8$, откуда

$$(f(x), g(x)) = f(x)\cdot 0{,}9 + g(x)(-0{,}3x + 0{,}8). \ \blacksquare$$

Чтобы многочлен $h(x)$, отличный от $(f(x), g(x))$ можно было представить в виде

$$h(x) = f(x)\varphi_1(x) + g(x)\psi_1(x), \qquad (5)$$

где $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ – некоторые многочлены, необходимо и достаточно, чтобы $h(x)$ делился на $(f(x), g(x))$. Если при этом степень $h(x)$ меньше суммы степеней $f(x)$ и $g(x)$, то многочлены $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ можно подобрать так, что степень $\varphi_1(x)$ будет меньше степени $g(x)$, а степень $\psi_1(x)$ – меньше степени $f(x)$. В этом случае $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ можно найти, записав их с неопределенными коэффициентами и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (5) (единственности $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ здесь может и не быть). Если же степень $h(x)$ больше или равна сумме степеней $f(x)$ и $g(x)$, причем $h(x) = (f(x), g(x))\, m(x)$, то нужно сначала представить $(f(x), g(x))$ в виде (3), а затем положить $\varphi_1(x) = \varphi(x)m(x)$, $\psi_1(x) = \psi(x)m(x)$.

П р и м е р 7. Подобрать многочлены наименьшей степени $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$, чтобы $(x^3 - x^2 - x + 1)\varphi(x) + (x^2 + x - 2)\psi(x) = x^4 - 1$.

Решение. Используя алгоритм Евклида, находим, что $(f(x), g(x)) = x - 1$. Тогда $x^4 - 1 = (f(x), g(x)) \cdot m(x)$, где $m(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Так как степень $h(x) = x^4 - 1$ меньше суммы степеней $f(x)$ и $g(x)$, то пишем равенство

$$x^4 - 1 = (x^3 - x^2 - x + 1)(ax + b) + (x^2 + x - 2)(a_1 x^2 + b_1 x + c_1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} a + a_1 = 1 \\ -a + b + a_1 + b_1 = 0 \\ -a - b - 2a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ a - b - 2b_1 + c_1 = 0 \\ b - 2c_1 = -1. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Любое из них дает коэффициенты таких многочленов $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$, что выполнено равенство (5). Например, можно взять

$$\varphi_1(x) = x + \frac{1}{3}, \quad \psi_1(x) = \frac{2}{3}(x + 1). \ \blacksquare$$

Представление НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в виде (3) используется при решении следующей задачи.

Имеем выражение вида $\dfrac{m(\alpha)}{g(\alpha)}$, где $m(x)$ и $g(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами, а α – корень многочлена $f(x)$ тоже с рациональными коэффициентами, взаимно простого с $g(x)$. Требуется найти такой многочлен $N(x)$ с рациональными коэффициентами, что

$$\frac{m(\alpha)}{g(\alpha)} = N(\alpha).$$

Для решения задачи представляем $(f(x), g(x)) = 1$ в виде (3) и затем в качестве $N(x)$ берем многочлен $m(x), v(x)$ (или, лучше, остаток от деления этого многочлена на $f(x)$).

П р и м е р 8. Уничтожить иррациональность в знаменателе выражения

$$\frac{10\sqrt[3]{2} - 10}{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2}.$$

Решение. Здесь $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $m(x) = 10x - 10$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$, $f(x) = x^3 - 2$.

Используя алгоритм Евклида, находим, что $(f(x), g(x)) = 1$. Затем находим линейное представление этого НОД:

$1 = f(x)(-0{,}1x - 0{,}1) + g(x)(0{,}1x^2 + 0{,}3x + 0{,}4)$, т.е. $\psi(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}3x + 0{,}4$. Отсюда

$$m(x)\psi(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4 = (x^3 - 2)\cdot 1 + 2x^2 + x - 2.$$

Полагаем $N(x) = 2x^2 + x - 2$ и получаем

$$\frac{10\sqrt[3]{2} - 10}{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2} = 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2. \ \blacksquare$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В кольце $\boldsymbol{R}[x]$ найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 1$ на $x^2 - 2x - 3$;

b) $5x^4 - x^2 + 6$ на $x^2 + 3x + 2$;

c) $2x^2 - 3x + 1$ на $x^3 + 4$;

d) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

2. При каких значениях a, p и q в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$ делятся на $x^2 + ax + 1$ многочлены:

a) $x^4 + q$; b) $x^4 - 21x + q$; c) $x^4 + px + q$; d) $x^4 - 7x^2 + q$.

3. В кольцах $\boldsymbol{Z}_3[x], \boldsymbol{Z}_5[x]$ и $\boldsymbol{Q}[x]$ найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении:

a) $x^5 + x^2 - x - 1$ на $x^3 - 2x + 1$;

b) $2x^4 + x^2 + 2x$ на $x^2 - 2$.

4. Доказать равенство $(f(x), g(x)) = (\alpha f(x), \beta g(x))$, $0 \neq \alpha, \beta \in P$.

5. Найти в кольце $\boldsymbol{R}[x]$ НОД и НОК многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если:

a) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

c) $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

e) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x + 2$.

6. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$ для $f(x)$ и $g(x)$ такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы

$$(f(x), g(x)) = f(x)\,\varphi(x) + g(x)\,\psi(x):$$

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;

c) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;

d) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;

e) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$;

f) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

7. Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно простые многочлены соответственно степени n и m, то можно подобрать такие многочлены $\varphi(x)$ степени не выше $m-1$ и $\psi(x)$ степени не выше $n-1$, чтобы

$$f(x)\,\varphi(x)+g(x)\,\psi(x)=1,$$

причем существует только одна пара таких многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

8. Пусть $d(x)$ – НОД степени k многочленов $f(x)$ степени n и $g(x)$ степени m. Показать, что можно (и притом единственным образом) подобрать такие многочлены $\varphi(x)$ степени не выше $m-k-1$ и $\psi(x)$ степени не выше $n-k-1$, чтобы

$$f(x)\,\varphi(x)+g(x)\,\psi(x)=d(x).$$

9. Способом неопределенных коэффициентов подобрать такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$ чтобы $f(x)\,\varphi(x)+g(x)\,\psi(x)=1$:

a) $f(x)=x^3$, $\quad g(x)=(1-x)^2$;

b) $f(x)=x^4$, $\quad g(x)=x^3-3x^2+4$;

c) $f(x)=x^3+3x+3$, $g(x)=x^2-x-2$;

d) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$.

10. Найти в $\boldsymbol{Q}[x]$ многочлен наименьшей степени, дающий в остатке:

a) единицу при делении на $(x-1)^2$ и пять при делении на $(x+1)^2$;

b) $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$;

c) $1-2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $1+2x$ при делении на $(x+1)^2$.

11. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; b) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}-1}$.

12. Подобрать многочлены наименьшей степени $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)\varphi(x)+(x^3-5x-3)\psi(x)=x^4$;

b) $(x^4+2x^3+x+1)\varphi(x)+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)\psi(x)=x^3-2x$.

13 *. Найти многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так

$$x^m\,\varphi(x)+(1-x)^n\,\psi(x)=1.$$

14. Найти в кольцах $\boldsymbol{Z_3}[x], \boldsymbol{Z_5}[x]$ и $\boldsymbol{Q}[x]$ НОД и НОК многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если:

a) $f(x)=x^3+x^2+2x+2$, $\quad g(x)=x^2+x+1$;

b) $f(x)=x^4+x^3-x^2+1$, $\quad g(x)=x^3-2x-1$;

c) $f(x)=x^4-2x^2+2x-2$, $\quad g(x)=x^3-x^2+1$.

15. Найти в кольце $\boldsymbol{Z_2}[x]$ НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы $(f(x)g(x))=f(x)\,\varphi(x)+g(x)\,\psi(x)$, если:

a) $f(x)=x^5+x^4+1$, $\quad g(x)=x^4+x^2+1$;

b) $f(x)=x^5+x^3+x+1$, $\quad g(x)=x^4+1$;

c) $f(x)=x^5+x+1, \qquad g(x)=x^4+x^3+1;$

d) $f(x)=x^5+x^3+x, \qquad g(x)=x^4+x+1.$

§ 2. Корни многочленов

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in P[x], \alpha\in P.$ *Значением многочлена* $f(x)$ при $x=\alpha$ называется элемент $a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n$ поля P и обозначается $f(\alpha)$.

Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-\alpha$ равен $f(\alpha)$ (*теорема Безу*).

Если $f(x)=(x-\alpha)g(x)+f(\alpha), \quad g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, то коэффициенты многочлена $g(x)$ и $f(\alpha)$ проще всего найти с помощью схемы Горнера

	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-1}	a_n
α	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}	$f(\alpha)$

где $b_0=a_0$, $b_1=\alpha b_1+a_1,\dots,b_k=\alpha\, b_{k-1}+a_k,\dots,b_{n-1}=\alpha\, b_{n-2}+a_{n-1}$, $f(\alpha)=\alpha\, b_{n-1}+a_n$.

Элемент $\alpha\in P$ называется *корнем многочлена* $f(x)\in P[x]$, если $f(\alpha)$*=0.* Из теоремы Безу следует, что α является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $x-\alpha$ делит $f(x)$.

Если $(x-\alpha)^k$, $k\in \mathbf{N}$, делит $f(x)$, но $(x-\alpha)^{k+1}$ не делит $f(x)$, то α называется *k–кратным корнем* (или *корнем кратности k*) многочлена $f(x)$. Корни кратности $k=1$ называются *простыми корнями.*

Многочлен $f(x)$ вида $f(x)=a, a\in P$, называется *постоянным.* Для любого непостоянного многочлена $f(x)\in P[x]$ существует расширение поля P, содержащее все корни многочлена $f(x)$, т.е. расширение, в котором $f(x)$ разлагается на линейные множители:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

где a_0 − старший коэффициент многочлена $f(x)$.

Корни $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_0\neq 0$, связаны с его коэффициентами *формулами Виета:*

$$-\frac{a_1}{a_0}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\sum_{i_1<i_2}\alpha_{i_1}\,\alpha_{i_2},$$

…………………………………………………………………

$$\frac{a_k}{a_0}=(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\alpha_{i_1}\,\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k},$$

$$-\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\,\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Производной многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in P[x]$, $a_0\neq 0$, $n\geq 1$ называется многочлен $f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$.

Производная от первой производной называется второй производной многочлена $f(x)$ и обозначается $f''(x)$ и т.д. Производная постоянного многочлена, по определению, считается равной нулевому многочлену. Многочлен $f(x)\in P[x]$ не имеет кратных корней ни в поле P, ни в любом его расширении тогда и только тогда, когда он взаимно прост со своей производной.

Для многочленов над полем нулевой характеристики справедливо утверждение: k–кратный корень многочлена является $(k-1)$–кратным корнем его производной.

Пусть $f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}\in P[x]$, $char\, P=0$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, $k_i>0$. Тогда $(f(x),f'(x))=(x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s-1}$ и многочлен $f_1(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)$ имеет те же корни, что и $f(x)$, но все они являются простыми.

Если $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ -- различные элементы поля P, а $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ – произвольные элементы поля P, то существует в $P[x]$ один и только один многочлен $f(x)$ степени $\leq n$, такой что $f(\alpha_i)=\beta_i$, $i=\overline{0,n}$. Этот многочлен задается формулой

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i\frac{(x-\alpha_0)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}. \qquad (*)$$

Формула (*) называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Многочлен $f(x)$ (с нужными свойствами) можно получить и с помощью *интерполяционной формулы Ньютона*:

$$f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-\alpha_0)+\lambda_2(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)+\cdots$$
$$\cdots+\lambda_n(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}),$$

где коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ определяются последовательно путем подстановки вместо x значений $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

П р и м е р 1. Найти в кольце $\boldsymbol{C}[x]$ частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении $f(x)=x^4+(2+i)x^2+(1+2i)x-i$ на $x+i$.

Решение. Составляем схему Горнера:

	1	0	$2+i$	$1+2i$	$-i$
$-i$	1	$-i$	$1+i$	$2+i$	$1-3i$

Следовательно, $q(x)=x^3-ix^2+(1+i)x+2+i$, $r(x)=1-3i$. ■

П р и м е р 2. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(-3)$, если $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1.$

Решение. Составляем схему Горнера:

	1	-2	1	1	1
-3	1	-5	16	-47	42

Следовательно, $f(-3) = 42.$ ■

Для любого многочлена

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

и любого числа α можно написать *разложение* $f(x)$ *по степеням разности* $x - \alpha$:

$$f(x) = b_0(x-\alpha)^n + b_1(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(x-\alpha) + b_n.$$

Чтобы найти коэффициенты этого разложения, нужно сначала разделить с остатком $f(x)$ на $x - \alpha$. В остатке получится b_n, частное будет каким-то многочленом $q(x)$. Затем нужно $q(x)$ разделить на $x - \alpha$; в остатке получится b_{n-1}, частное - $q_1(x)$. Затем делим $q_1(x)$ на $x - \alpha$, в остатке получается b_{n-2} и т.д. Коэффициенты этого разложения удобно находить по схеме Горнера, причем все вычисления можно объединить в одну таблицу.

П р и м е р 3. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ по степеням $x + 2.$

Решение. Составляем схему Горнера, где в первой строке выписываем коэффициенты многочлена $f(x)$, во второй получаем коэффициенты частного $q(x)$ и остаток b_4 от деления $f(x)$ на $x + 2$, в третьей строке получаем коэффициенты частного $q_1(x)$ и остаток b_3 от деления $q(x)$ на $x + 2$ и т.д. :

	1	2	0	-1	-1
-2	1	0	0	-1	1
-2	1	-2	4	-9	
-2	1	-4	12		
-2	1	-6			
-2	1	.			

Следовательно, $f(x) = (x+2)^4 - 6(x+2)^3 + 12(x+2)^2 - 9(x+2) + 1.$ ■

П р и м е р 4. С помощью схемы Горнера разложить по степеням x многочлен $f(x+3)$, если $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 9.$

Решение. Для того чтобы разложить $f(x+3)$ по степеням x, сначала разложим $f(x)$ по степеням $x - 3$, а затем заменим x на $x + 3.$

Составляем схему Горнера:

	1	-5	-3	0	9
3	1	-2	-9	-27	-72
3	1	1	-6	-45	
3	1	4	6		
3	1	7			
3	1				

Следовательно, $f(x) = (x-3)^4 + 7(x-3)^3 + 6(x-3)^2 - 45(x-3) - 72.$

Отсюда $f(x-3) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 45x - 72.$ ■

П р и м е р 5. С помощью схемы Горнера найти показатель кратности корня 4 для многочлена $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x + 16.$

Решение. Чтобы проверить, будет ли числа α корнем многочлена $f(x)$ и какой кратности, можно воспользоваться схемой Горнера, где сначала $f(x)$ делится на $x-\alpha$, затем, если остаток равен нулю, полученное частное делится снова на $x-\alpha$ и т.д. до получения ненулевого остатка.

Составляем схему Горнера:

	1	-7	9	8	16
4	1	-3	-3	-4	0
4	1	1	1	0	
4	1	5	21	.	

Следовательно, $\alpha = 4 -$ корень кратности $2.$ ■

Разложение многочлена по степеням разности $x-\alpha$ может быть использовано при разложении дроби, знаменатель которой есть степень линейного двучлена, на простейшие.

П р и м е р 6. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби $\dfrac{x^3 + x - 1}{(x+2)^5}.$

Решение. Берем многочлен $f(x) = x^3 + x - 1$ и разлагаем его по степеням разности $x-(-2) = x+2$:

	1	0	1	-1
-2	1	-2	5	-11
-2	1	-4	13	
-2	1	-6		
-2	1	.		

Следовательно, $f(x) = (x+2)^3 - 6(x+2) + 13(x+2) - 11.$

Получаем $\dfrac{x^3 + x - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{6}{(x+2)^3} + \dfrac{13}{(x+2)^4} - \dfrac{11}{(x+2)^5}.$ ■

Знание разложения многочлена

$$f(x) = b_0(x-\alpha)^n + b_1(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(x-\alpha) + b_n$$

по степеням $x-\alpha$ позволяет вычислить значения в α производных любого порядка, а именно:

$f^{(k)}(\alpha)=k!\quad b_{n-k}$.   (* *)

Пример 7. Найти значения производных многочлена $f(x)=x^4+2x^3-x-1$ при $x=-2$.

Решение. Схема Горнера, выписанная в примере 3 позволяет найти значения производных многочлена $f(x)=x^4+2x^3-x-1$ при $x=-2$:

$f'(-2)=-9,\quad f''(-2)=12\cdot 2!=24,\quad f'''(-2)=-6\cdot 3!=-36,\quad f^{('''')}(-2)=1\cdot 4!=24$. ■

Из соотношения (* *) получается формула Тейлора для разложения многочлена $f(x)$ по степеням $x-\alpha$:

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Пример 8. При делении многочлена $f(x)$ на $x-2$ и $x-3$ остатки равны 5 и 7 соответственно. Найти остаток при делении $f(x)$ на $(x-2)(x-3)$.

Решение. Остаток $r(x)$ при делении $f(x)$ на $(x-2)$ и $(x-3)$ имеет вид $ax+b$, т.е. $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)+(ax+b)$.

Подставляя $x=2$ и $x=3$ (2 и 3 корни $(x-2)$ и $(x-3)$), получаем систему двух линейных уравнений для нахождения a и b:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2a+b=5 \\ g(3)=3a+b=7 \end{array}\right\}$$

Решая эту систему получим: $a=2,\quad b=1$. Следовательно, остаток при делении $f(x)$ на $(x-2)(x-3)$ равен $2x+1$. ■

Пример 9. Не применяя алгоритма деления с остатком, найти остаток от деления многочлена $f(x)=x^{128}+x^{64}+x^{32}+x^8+x^4+x^2+x+1$ на x^2-1.

Решение. Остаток $r(x)$ при делении $f(x)$ на x^2-1 имеет вид $ax+b$. Пологая $x=1$ и $x=-1$ (1 и –1 – корни x^2-1), получим систему двух линейных уравнений для нахождения a и b:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=8=a+b \\ f(-1)=6=-a+b \end{array}\right\}.$$

Решением этой системы являются: $a=2,\quad b=1$. Следовательно, остаток при делении $f(x)$ на x^2-1 равен $x+7$. ■

Пример 10. При каких p,q,r многочлен $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ делится на $(x-1)^3$ в кольце $\boldsymbol{R}[x]$.

Решение. Делимость $f(x)$ на $(x-1)^3$ равносильна тому, что $x=1$ является трехкратным корнем $f(x)$. Это означает, что $x=1$ является корнем $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$. Найдем $f'(x)$ и $f''(x)$: $f'(x)=3x^2+2px+q$, $f''(x)=6x+2p$. Подставляя $x=1$ в $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ получим систему трех линейный уравнений для нахождения p,q и r:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + p + q + 2 = 0 \\ f'(1) = 3 + 2p + q = 0 \\ f''(1) = 6 + 2p = 0 \end{array}\right\}.$$

Решая эту систему получим: $p = -3, \quad q = 3, \quad r = -1$. ■

П р и м е р 11. Доказать, что число 1 является трех кратным корнем многочлена $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.

Решение. Трехкратность корня $x = 1$ многочлена $f(x)$ равносильна тому, что $x = 1$ является корнем многочленов $f(x), \quad f'(x)$ и $f''(x)$.

Найдем $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + n(n-1)x^{n-2},$$

$$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-1} - n^2(n+1)x^{n-1} + n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Тогда

$$f(1) = 1 - n + n - 1 = 0,$$

$$f'(1) = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0,$$

$$f''(1) = 2n(2n-1) - n^2(n+1) + n(n-1)(n-2) = 4n^2 - 2n - -n^3 - n^2 + n^3 - n^2 - 2n^2 + 2n = 0.$$

Таким образом, число 1 действительно является трехкратным корнем многочлена $x^{2n} - nx^{n-1} + nx^{n-1} - 1$. ■

П р и м е р 12. Найти многочлен $\varphi(x)$, который имеет те же корни, что и $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$, но не имеет кратных корней (отделить кратные корни многочлена $f(x)$), и написать разложение $f(x)$ на линейные множители над $\boldsymbol{C}$.

Решение. Найдем производную $f'(x): f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$.

Используя алгоритм Евклида вычислим НОД $f(x)$ и $f'(x)$:

$(f(x), f'(x)) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$. Тогда

$\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ имеет те же корни, что и $f(x)$, т.е. $x_1 = -1, \quad x_2 = 2$.

Используя схему Горнера выясним, что кратность корня $x_1 = -1$ в $f(x)$ равна 4, а кратность корне $x_2 = 2$ в $f(x)$ равна 2. Следовательно, разложение $f(x)$ на линейные множители имеет вид: $f(x) = (x+1)^4(x-2)$. ■

П р и м е р 13. Определить a так, чтобы один из корней многочлена $x^3 - 21x + a$ был равен удвоенному другому.

Решение. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена $x^3 - 21x + a$.

Пусть $\alpha_1 = 2\alpha_2$. Тогда, согласно формулам Виета:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -21 \\ \alpha_1 \leftarrow \alpha_2 \leftarrow \alpha_3 = -a \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} 2\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2^2 + 3\alpha_2\alpha_3 = -21 \\ 2\alpha_2^2 \leftarrow \alpha_3 = -a \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} &3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ &2\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_3 = -21 \\ &2\alpha_2^2 \leftarrow \alpha_3 = -a \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} &\alpha_3 = -3\alpha_2 \\ &2\alpha_2^2 - 9\alpha_2^2 = -21 \\ &-6\alpha_2^3 = -a \end{aligned}\right\}, \quad \alpha_2^2 = 3, \quad \alpha_2 = \pm\sqrt{3}.$$

Отсюда $a = 6 \cdot (\pm 3\sqrt{3}) = \pm 18\sqrt{3}$.

Таким образом, при $a = \pm 18\sqrt{3}$ один из корней многочлена $x^3 - 21x + a$ равен удвоенному другому. ■

П р и м е р 14. Построить многочлен третьей степени со старшим коэффициентом единица, имеющий корни 1, -1, 3.

Решение. Пусть искомый многочлен имеет вид:
$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

Тогда по формулам Виета, имеем:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -(1 - 1 + 3) = -3$$

$$a_2 = -\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = -1$$

$$a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -1 \cdot (-1) \cdot 3 = 3.$$

Следовательно, искомый многочлен имеет вид: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. ■

П р и м е р 15. Найти сумму чисел, обратных комплексных корням многочлена $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

Решение. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – корни $f(x)$. Нам нужно найти $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4}$. Имеем $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} =$
$= \frac{\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 + \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_4 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_4 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}$. По формулам Виета, числитель равен $\left(-\frac{a_3}{a_0}\right) = -\frac{2}{5}$ а знаменатель равен $\frac{a_4}{a_0} = -\frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} = \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right) = 2.$$ ■

П р и м е р 16. Построить многочлен по заданной таблице значений пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа:

x	1	3	4
$f(x)$	2	-2	-1

Решение. Искомый многочлен имеет вид:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} - 2\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} - \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = x^2 = 6x + 7.$$ ■

П р и м е р 17. Найти многочлен наименьшей степени по заданной таблице значений, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона:

x	1	-2	3

$f(x)$	4	7	12

Решение. По формуле Ньютона имеем:
$f(x)=4+\lambda_1(x-1)+\lambda_2(x-1)(x+2)$.

Пологая $x=-2$, получаем $7=4+\lambda_1(-3)$, $\lambda_1=-1$. Берем $x=3$, тогда $12=4-(3-1)+\lambda_2(3-1)(3+2)$, $\lambda_2=1$. Искомый многочлен имеет вид: $f(x)=4-(x-1)+(x-1)(x+2)=x^2+3$. ■

У П Р А Ж Н Е Н И Я

16. Найти сумму коэффициентов многочлена $f(x)\in \boldsymbol{Q}[x]$, если:

a) $f(x)=(2-5x+x^3)^{211}(3-7x+9x^2-5x^3)^{135}$;

b) $f(x)=(7-3x-3x^5)^{100}(5-x^2-5x^7)^{1000}$.

17. Найти в кольце $\boldsymbol{C}[x]$ частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении:

a) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$;

b) $2x^5-5x^3-8x$ на $x+3$;

c) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$;

d) x^3-x^2-x на $x-1+2i$.

18. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(\alpha)$, если:

a) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $\alpha=4$;

b) $f(x)=5x^4-7x^3+8x^2-3x+7$, $\alpha=3$;

c) $f(x)=2x^5+2x^4-3x^3+4x^2-6x+5$, $\alpha=-\dfrac{1}{2}$;

d) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $\alpha=-2-i$;

e) $f(x)=x^5+(1-2i)x^4-(3+i)x^2+7$, $\alpha=-1+2i$;

19. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-\alpha$, если:

a) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $\alpha=-1$;

b) $f(x)=x^5$, $\alpha=1$;

c) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $\alpha=2$;

d) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $\alpha=-i$;

e) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-(33-20i)x+7+18i$, $\alpha=-1+2i$.

20. С помощью схемы Горнера, разложить по степеням *x:*

a) $f(x+3)$, $f(x)=x^4-x^3+1$;

b) $f(x+2)$, $f(x)=2x^4-3x^3+5x^2+6x-1$;

c) $f(x)=(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$;

d) $f(x)=(x+3)^5-2(x+3)^3+3(x+3)^2+7(x+3)-8$.

21. С помощью схемы Горнера найти показатель кратности корня:

a) 2 для многочлена $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

b) –2 для многочлена $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$;

c) 3 для многочлена $x^4-6x^3+10x^2-6x+9$.

22. При делении многочлена $f(x)$ на $x-1$ и $x-2$ остатки равны соответственно один и два. Найти остаток при делении $f(x)$ на $(x-1)(x-2)$.

23. При делении многочлена $f(x)$ на $x+1$, $x-1$ и $x+3$ остатки равны 5, -4 и 6 соответственно. Найти остаток при делении $f(x)$ на $(x^2-1)(x+3)$.

24. При делении многочлена $f(x)$ на $x-1$, $x-2$, $x-3$ и $x-4$ остатки равны 1, 3, 5, и 6 соответственно. Найти остаток при делении $f(x)$ на $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

25. Не применяя алгоритма деления с остатком, найти остаток от деления многочлена $f(x)=x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на:

a) x^2-1; b) x^4+1; c) x^4-1.

26. Доказать, что корень α многочлена $f(x)\in P[x]$, $char\ P=0$, тогда и только тогда имеет кратность, равную k, когда $f'(\alpha)=...=f''(\alpha)=...=f^{(k-1)}(\alpha)=0$, но $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

27. Доказать, что число 1 является трехкратным корнем многочленов:

a) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$;

b) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$.

28. Найти условие, при котором многочлен $x^5+10ax^3+5bx+c$ имеет трехкратный корень, отличный от нуля.

29. Определить коэффициент a так, чтобы многочлен x^5-ax^2-ax+1 имел число (-1) корнем не ниже второй кратности.

30. Определить a и b так, чтобы многочлен ax^4+bx^3+1 делился на $(x-1)^2$ в кольце $\boldsymbol{R}[x]$.

31. При каких p,q,r каждый из следующих многочленов делится на $(x-1)^3$ в кольце $\boldsymbol{R}[x]$:

a) $f(x)=x^4+px^3+qx^2+r$;

b) $f(x)=px^4+qx^2+rx+1$?

32. При каких значениях a многочлен $f(x)$ имеет кратный корень 1 и какова кратность этого корня:

a) $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$;

b) $f(x)=2x^3-x^2+ax+3$;

c) $f(x)=3x^4-6x^3+ax^2-2x+1$?

33. Доказать, что многочлен

$$f(x)=x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-$$
$$-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}-1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

34*. Доказать, что для того чтобы многочлен

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

делится на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0,$$
$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=0,$$
$$a_1+4a_2+\cdots+n^2a_n=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n=0.$$

35*. Доказать, что трехчленный многочлен $x^n+ax^{n-m}+b$ не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

36*. Найти условие, при котором трехчленный многочлен $x^n+ax^{n-m}+b$ имеет двойной корень, отличный от нуля.

37*. Доказать, что $k-$членный многочлен

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\cdots+a_kx^{p_k}$$

не имеет корней выше $(k-1)-$й кратности, отличных от нуля.

38*. Доказать, что каждый отличный от нуля корень $(k-1)-$й кратности многочлена

$$a_1x^{m_1}+a_2x^{m_2}+\cdots+a_kx^{m_k}$$

удовлетворяет уравнениям

$$a_1x^{m_1}\varphi'(m_1)=a_2x^{m_2}\varphi'(m_2)=\cdots=a_kx^{m_k}\varphi'(m_k),$$

где $\varphi(t)=(t-m_1)(t-m_2)\cdots(t-m_k)$.

39*. Доказать, что многочлен делится на свою произвдную в том и только в том сулучае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

40*. Доказать, что полином

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

41*. Доказать, что для того чтобы x_0 было корнем кратности k числителя дроблю – рациональной функции $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\omega(x)}$, знаменатель которой $\omega(x)$ не обращается в ноль при $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^k(x_0)\neq 0.$$

42*. Доказать, что дробно – рациональная функция $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\omega(x)}$ может быть представлена в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{\omega(x)}(x-x_0)^{n+1},$$ где $F(x)$ - многочлен. Предполагается, что $\omega(x_0)\neq 0$ (формула Тейлора для дроблю – рациональной функции).

43*. Доказать, что если x_0 есть корень кратности k для многочлена $f_1(x)=f_2'(x)-f_2(x)\,f_1'(x)$, то x_0 будет корнем кратности $k+1$ для многочлена $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)\,f_1(x_0)$, если этот последний не равен нулю тождественно, и обратно.

44*. Доказать, что если $f(x)$ не имеет кратных корней, то $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ не имеет корней кратности выше $n-1$, где $n-$степень $f(x)$.

45*. Построить многочлен $f(x)$ степени n, для которого $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ имеет корень x_0 кратности $n-1$, не являющийся корнем $f(x)$.

46*. Пусть $f(z)-$ многочлен с комплексными коэффициентами и $f(x+yi)=u(x,y)+i\vartheta(x,y)$, где $u(x,y)$ и $\vartheta(x,y)-$многочлены с действительными коэффициентами. Выразить все решения (действительные и комплексные) системы уравнений $u(x,y)=0$, $\vartheta(x,y)=0$ через корни $f(z)$.

47. Найти в кольце $\boldsymbol{C}[x]$ НОД $(f(x)f'(x))$, если $f(x)$ равно:

a) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$; b) $(x^2-4)^3(x^2+4)^2(x^4-16)$;

c) $(x^2+1)^2(x^4+1)^4(x^6+1)^6(x^8+1)^8$; d) $x^{k+1}-x^k-x^l+1$.

48. Найти комплексные корни многочленов $f(x)=3x^4+x^3+2x^2-x+1$, $g(x)=3x^4-5x^3+6x^2-3x+1$ путем нахождения их НОД и решения квадратных уравнений.

49. Найти многочлен $\varphi(x)$, который имеет те же корни, что и $f(x)$, но не имеет кратных корней (отделить кратные корни многочлена $f(x)$), и напишите разложение $f(x)$ на линейные множители над $\boldsymbol{C}$, если $f(x)$ равно:

a) $x^6-2x^5-9x^4+4x^3+31x^2+30x+9$;

b) $x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1$;

c) $x^6-4x^5-7x^4-8x^3+7x^2-4x+1$;

d) $x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8$.

50. Построить многочлен четвертой степени со старшим коэффициентам равным единице, имеющий:

a) корни, 1, 2, -3, -4;

b) трехкратный корень (-1) и простой корень i;

c) корни 2, -1, $1+i$ и $1-i$;

d) двухкратный корень 3 и простые корни –2 и –4.

51. Найти сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочлена:

a) $3x^5 - x^3 + x + 2$; b) $x^n - a^{n-1} + b \quad (n \geq 3)$.

52. Найти сумму и произведение всех комплексных корней степени n из единицы.

53. Определить a так, чтобы:

a) сумма двух корней многочлена $x^3 + 12x^2 + a$ была равна третьему корню;

b) произведение двух корней многочлена $x^3 - 20x + a$ было равно третьему корню.

54. Сумма двух корней многочлена $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ равна сумме двух его других корней. Найти, какому условию должны удовлетворять при этом коэффициенты многочлена.

55. Произведение двух корней многочлена $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ равно произведению двух его других корней. Найти, какому условию должны удовлетворять при этом коэффициенты многочлена.

56. Показать, что корни многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$ образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^3 = a^3c$.

57. Найти все корни многочлена $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$, зная, что они образуют арифметическую прогрессию.

58. Найти сумму квадратов и сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots + a_n$.

59. Найти многочлен третьей степени, если его корни равны $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена $3x^3 - 4x^2 + 6x + 10$.

60. Многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ имеет корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Какие корни имеют многочлены:

a) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$;

c) $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \dfrac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n + a_1bx^{n-1} + a_2b^2x^{n-2} + \cdots + a_nb^n$?

61. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ.

62. Определить соотношение между коэффициентами уравнения $x^3 + px + q = 0$, при выполнении которого $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_3}$.

63*. Составить уравнение четвертой степени, корнями которого являются α, $\dfrac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\dfrac{1}{\alpha}$.

64*. Составить уравнение шестой степени, имеющее корни: α, $\frac{1}{\alpha}$, $1-\alpha$, $\frac{1}{1-\alpha}$, $1-\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$.

65. Пусть α_1, α_2 – корни многочлена $g(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами. Доказать, что $f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$ – целое число.

66. Построить многочлен по заданной таблице значений, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа:

a)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3

b)

x	1	i	-1	-i
$f(x)$	1	2	3	4

c)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	-3	1

d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	13	1	1	1	13

67. Найти многочлен наименьшей степени по заданной таблице значений, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона:

a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

c)

x	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

, найти $f(2)$;

d)

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

68*. Найти $f(x)$ по таблице значений:

x	1	ε_1	ε_2	…	ε_{n-1}
$f(x)$	1	2	3	…	n

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$.

69*. Многочлен $f(x)$, степень которого не превосходит n-1, принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в корнях n-й степени из единицы. Найти $f(0)$.

70*. Доказать, что если корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена $\varphi(x)$ все различны, то $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0$ при $0 \le s \le n-2$.

71*. Найти сумму $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (обозначаения такие чсле как и в задаче 70).

72*. Построить многочлен наименьшей степени по таблице значений:

a)

x	0	1	2	…	n
y	1	2	4	…	2^n

b)

x	0	1	2	…	n
y	1	a	a^2	…	a^n

73*. Найти многочлен степени $2n$, дающий при делении на $x(x-2)\cdots(x-2n)$ в остатке 1, а при делении на $(x-1)(x-3)\cdots[x-(2n-1)]$ в остатке (-1).

74*. Построить многочлен наименьшей степени по таблице значений

x	1	2	3	…	n
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…	$\frac{1}{n}$

75*. Найти многочлен не выше $(n-1)-$й степени, удовлетворяющий условию $f(x) = \frac{1}{x-a}$ в точках $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_i \ne a_i$, $i = \overline{1,n}$.

76*. Доказать, что многочлен степени $k \le n$, принимающий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

77*. Доказать, что многочлен степени n, принимающий целые значения при $x = 0, 1, 4, 9, ..., n^2$, принимает целые значения при всех целых квадратах натуральных чисел.

§ 3. Разложение на не при водимые множители. Многочлены над *CR* и *Q*

Непостоянный многочлен $f(x)$ степени $n \ge 1$ с коэффициентами из поля P называется *неприводимым* над полем P, если он не может быть разложен в произведение многочленов степеней меньших чем n с коэффициентами из поля P. В противном случае многочлен $f(x)$ называется *приводимым* над полем P. Постоянные многочлены, по определению, не причисляются ни к приводимым, ни к неприводимым. Все многочлены первой степени неприводимы над любым полем.

Всякий непостоянный многочлен с коэффициентами из поля P разлагается в произведение неприводимых над полем P многочленов. Такое разложение однозначно с точностью до постоянных множителей и порядка записи сомножителей.

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in P[x]$, $n\ge 1$. Представление многочлена $f(x)$ в виде

$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$, где $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)-$различные неприводимые над полем P многочлены со старшими коэффициентами, равными единице (*унитарные многочлены*), называется *каноническим разложением многочлена* $f(x)$ *над полем* P. Каноническое разложение многочлена $f(x)$ определено однозначно с точностью до порядка записи сомножителей.

Пусть $p(x)-$неприводимый над полем P многочлен, $f(x)\in P[x]$. Если $p^k(x)$ делит $f(x)$, $k\in \boldsymbol{N}$, но $p^{k+1}(x)$ не делит $f(x)$, то многочлен $p(x)$ называется $k-$*кратным неприводимым множителем многочлена* $f(x)$. Если $char\,P=0$, то $k-$кратный неприводимый множитель многочлена $f(x)$ является $(k-1)-$кратным множителем производной $f'(x)$. В частности, при $k=1$ многочлен $f'(x)$ не делится на $p(x)$.

Пусть $f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)-$каноническое разложение многочлена $f(x)$ над полем P, $char\,P=0$.

Тогда $(f(x),f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_s^{k_s-1}(x)$ и многочлен

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=a_0p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

имеет те же неприводимые множители, что и $f(x)$, но не имеет $k-$кратных неприводимых множителей $(k\ge 2)$.

Многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ степени $n\ge 1$ с комплексными коэффициентами имеет корень в поле $\boldsymbol{C}$ (*основная теорема алгебры, теорема Гаусса*).

Поле P называется *алгебраически замкнутым,* если каждый многочлен $f(x)$ из $P[x]$ степени $n\ge 1$ имеет в этом поле корень.

Таким образом, основная теорема алгебры означает, что поле $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто. Неприводимыми над алгебраически замкнутым полем являются многочлены первой степени, и только они.

Каноническое разложение многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \quad (n\ge 1)$$

над алгебраически замкнутым полем P (тем самым и над полем $\boldsymbol{C}$) имеет вид:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s},$$

где $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s-$различные корни многочлена $f(x)$; $k_1+k_2+\cdots+k_s=n.$

Над полем $\boldsymbol{R}$ действительных чисел неприводимыми являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательными дискриминантами, и только они.

Каноническое разложение многочлена $n-$й степени $f(x)$ над полем действительных чисел имеет вид:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

где $\alpha_1,...,\alpha_s$ – различные действительные числа; $x^2+p_1x+q_1,...,x^2+p_tx+q_t$ - различные многочлены второй степени над полем $\boldsymbol{R}$ с отрицательным дискриминантом.

Многочлен $f(x)\in \boldsymbol{Q}[x]$ неприводим над полем $\boldsymbol{Q}$ тогда и только тогда, когда над этим полем неприводим многочлен с целыми коэффициентами, полученный умножением $f(x)$ на НОК знаменателей всех его коэффициентов. Многочлен с целыми коэффициентами неприводим над полем рациональных чисел тогда и только тогда, когда он не разлагается в произведение двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами. Неприводимость многочлена с целыми коэффициентами над $\boldsymbol{Q}$ можно установить, пользуясь следующим *признаком Эйзенштейна:*

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами. Если существует такое простое число *p*, что a_0 не делится *p*, все остальные коэффициенты многочлена $f(x)$ делятся на *p*, но a_n, делясь на *p*, не делится на p^2, то многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел.

П р и м е р 1. Разложить на неприводимые множители многочлен $f(x)=x^4+x^3+x+2$ над полем $\boldsymbol{Z}_3$.

Решение. Запишем $f(x)$ в виде:

$$f(x)=x^4+x^3+x-1=(x^4-1)+x(x^2+1)=(x^2+1)(x^2-1)+x(x^2+1)=$$
$$=(x^2+1)(x^2+x-1)=(x^2+1)(x^2+x+2). \ \blacksquare$$

П р и м е р 2. Разложить многочлен $f(x)=x^6-27$ на неприводимые множители над полями ***C, R*** и ***Q***.

Решение. Каноническое разложение $f(x)$ над полем $\boldsymbol{C}$:

$$f(x)=x^6-27=$$
$$(x^2)^3-3^3=(x^2-3)(x^4+3x^3+9)=(x^2-3)((x^2+3)^2-(\sqrt{3}x)^2)=$$
$$=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)(x^2-\sqrt{3}x+3)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\left(x-\frac{\sqrt{3}+3i}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x-\frac{\sqrt{3}-2i}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}+3i}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right).$$

Каноническое разложение $f(x)$ над полем $\boldsymbol{R}$:

$$f(x)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)(x^2-\sqrt{3}x+3).$$

Каноническое разложение $f(x)$ над полем $\boldsymbol{Q}$:

$$f(x)=(x^2-3)(x^4+3x^2+9). \ \blacksquare$$

П р и м е р 3. Построить многочлен наименьшей степени и действительными коэффициентами по данным корням: двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$.

Решение. Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень, то и сопряженное комплексное число будет корнем этого многочлена. Поэтому к данному множеству корней следует добавить корень $1-i$. Тогда исконный многочлен имеет вид:

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=$$
$$=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12. \ \blacksquare$$

Если известны разложения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на линейные множители, причем

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_p)^{k_p}(x-\beta_1)^{u_1}\cdots(x-\beta_t)^{u_t},$$
$$g(x)=b_0(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_p)^{l_p}(x-\gamma_1)^{v_1}\cdots(x-\gamma_s)^{v_s}$$

(числа $\alpha_i,\beta_q,\gamma_r$ все размыты между собой), то $(f(x),g(x))=(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_p)^{m_p}$ где для каждого j $(j=\overline{1,p})$ m_j-наименьшее из чисел k_j,l_j.

П р и м е р 4. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x)=(x-1)^3(x+2)^2(x-5), \quad g(x)=(x-1)(x+2)^4(x+7)(x+1)^2.$$

Решение. $(f(x),g(x))=(x-1)(x+2)^2$. $\blacksquare$

П р и м е р 5. Доказать, что $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится не x^2+x+1 в кольце $\boldsymbol{R}[x]$.

Решение. Если $\alpha-$корень многочлена x^2+x+1, то $\alpha^3=1$. Следовательно, $\alpha^{3m}+\alpha^{3n+1}+\alpha^{3p+2}=1+\alpha+\alpha^2=0$. $\blacksquare$

П р и м е р 6. При каком условии $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2-x+1?

Решение. Корень α многочлена x^2-x+1 удовлетворяет уравнению $\alpha^3=-1$. Следовательно,

$$\alpha^{3m}-\alpha^{3n+1}+\alpha^{3p+2}=(-1)^m-(-1)^n\alpha+(-1)^p\alpha^2=(-1)^m-(-1)^p+\alpha[(-1)^p-(-1)^n].$$

Последнее выражение может равняться нулю только в случае $(-1)^m=(-1)^p=(-1)^n$, т.е. если $m,n,p-$одновременно четные или одновременно нечетные числа. $\blacksquare$

Далее, рассмотрим следующую задачу: найти рациональные корни многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами. Ясно, что если $f(x)$-- многочлен с рациональными коэффициентами, то существует такое целое число λ, что $\lambda f(x)$ будет многочленом с целыми коэффициентами. Корни многочленов $f(x)$ и $\lambda f(x)$ совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть многочлены

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами.

Если несократимая дробь $\dfrac{k}{l}$ является корнем многочлена $f(x)$, то

$$a_0k^n + a_1k^{n-1}l + \dots + a_{n-1}kl^{n-1} + a_nl^n = 0.$$

Отсюда следует *первая теорема о рациональных корнях многочлена:* если несократимая дробь $\frac{k}{l}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $k-$делитель свободного члена, а $l-$делитель старшего коэффициента.

Таким образом, нахождение рациональных корней многочлена $f(x)$ сводится к вычислению конечного множества значений $f\left(\frac{k}{l}\right)$ для всех $k-$делителей a_n и для всех $l-$делителей числа a_0.

П р и м е р 7. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Решение. Возможные значения для $k: 1, -1$. Для $l: 1, 2$ (знак считаем присоединенным к числителю). Возможные значения для $\frac{k}{l}: 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

$f(1) = 1$, $f(-1) = -9$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$, т.е. $\frac{1}{2}-$корень многочлена $f(x)$.

Таким образом $\frac{1}{2}-$простой корень многочлена $f(x)$. ■

Процесс вычисления корней можно значительно сократить, воспользовавшись *второй теоремой о рациональных корнях многочлена:* если несократимая дробь $\frac{k}{l}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то при любом целом m, не равном $\frac{k}{l}$, число $f(m)$ делится на $k - ml$.

П р и м е р 8. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^4 + 32x^3 + 23x^2 + 15x + 18.$$

Решение. Если $\frac{k}{l}$ – корень многочлена $f(x)$, то k и l могут принимать лишь следующие значения: $k: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$; $k: 1, 2, 3, 4, 6, 12$. $f(1) = 100$ делится на $(k - l)$, $f(-1) = 6$ делится на $(k + l)$. Этому условию удовлетворяют лишь следующие числа $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 2, -\frac{2}{3}, -3, -\frac{3}{2}$. Корни многочлена $f(x)$ следует искать среди них.

Используя схему Горнера, проверяем, какие из чисел $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 2, -\frac{2}{3}, -3, -\frac{3}{2}$, являются корнями многочлена $f(x)$ (учитывая, что в этом частном случае корни могут быть только отрицательными):

	12	32	23	15	18
$-\frac{1}{3}$	12	28	$\frac{41}{3}$	$\frac{94}{9}$	$\frac{392}{27}$
$-\frac{1}{4}$	12	29	$\frac{63}{4}$	$\frac{177}{16}$	$\frac{211}{6}$
$-\frac{2}{3}$	12	24	7	$\frac{31}{3}$	$\frac{100}{9}$
-3	12	-4	35	-90	288
$-\frac{3}{2}$	12	14	2	12	0
$-\frac{3}{2}$	12	-4	8	0	
$-\frac{3}{2}$	12	-22	41		

Следовательно, $-\frac{3}{2}$--двукратный корень многочлена $f(x)$: других рациональных корней этот многочлен не имеет. ■

П р и м е р 9. Пользуясь признаком Эйзенштейна доказать неприводимость над $\boldsymbol{Q}$ многочленов:

a) $f(x) = 3x^7 - 4x^6 + 2x^5 - 6x^3 - 8x - 2$;

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Решение. a) Используя признак Эйзенштейна при $p = 2$ получаем, что $f(x)$ неприводим над полем $\boldsymbol{Q}$.

b) К этому многочлену критерий Эйзенштейна непосредственно применить нельзя, но можно сделать замену $x = y + 1$, в результате которой получится многочлен $h(y) = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$, неприводимый в силу признака Эйзенштейна для $p = 5$. Следовательно, и многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\boldsymbol{Q}$. ■

Укажем еще один способ установления приводимости или неприводимости многочлена над полем $\boldsymbol{Q}$: переменному x придают m целых значений $x_1,...,x_m$, где $m = \frac{n}{2} + 1$ при четном n и $m = \frac{n+1}{2}$ при нечетном n.

Затем составляются всевозможные наборы целых чисел вида $c_1, c_2, ..., c_m$, где $c_i (i = \overline{1,m})$ есть делитель числа $f(x_i)$ (всего получается $S = 2^m s_1,...,s_m$ наборов, где s_i −число всех положительных делителей $f(x_i)$). Для каждого такого набора строится многочлен $h_j(x)$ $c_i(j = \overline{1;S})$ степени меньшей или равной $m-1$ со свойствами $h_j(x_i)=c_i$, где $i=\overline{1,m}$, а числа c_i взяты из $j-$го набора. После этого для тех из многочленов $h_j(x)$, все коэффициенты которых получились целыми и степень которых положительна, непосредственным делением проверяют, делится ли $g(x)$ на $h_j(x)$. Если $g(x)$ не делится ни на один из этих многочленов, он неприводим над полем $\boldsymbol{Q}$. В противном случае получается разложение многочлена $f(x)$ на множители более низкой степени с рациональными коэффициентами, из которого легко получить разложение на множители с целыми коэффициентами, с которыми дальше можно действовать так же, как раньше с многочленом $f(x)$.

При применении к многочлену $f(x)$ указанного выше процесса возможны следующие упрощения:

Если два набора чисел $c_1,c_2,...,c_m$ и $c'_1,c'_2,...,c'_m$ отличаются друг от друга лишь знаком, то многочлен $h_j(x)$ строится только для одного из этих наборов;

Можно взять еще несколько целых значений переменного $x_{m+1},x_{m+2},...,x_{m+l}$; если хотя бы для одного из них $f(x_{m+k})$ не делится на $h_j(x_{m+k})$, то делится ли $f(x)$ на $h_j(x)$, проверять не нужно.

П р и м е р 10. Методом разложения на множители значений многочлена при целых значениях переменной разложить на множители многочлены или доказать их неприводимость над полем $\boldsymbol{Q}$:

a) $f(x)=x^5-2x^4-3x^3+6x^2+x-1$;

b) $f(x)=x^4+x^3-6x^2-3x+9$.

Решение. а) Здесь $f(0)=-1$, $f(1)=2$, $f(-1)=4$, $f(2)=1$. Выбираем значения $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, как имеющие меньше делителей, и составляем наборы делителей выбранных чисел:

$c_1=1$	1	1	-1	1	1	1	-1
$c_2=1$	1	-1	1	2	2	-2	2
$c_3=1$	-1	1	1	1	-1	1	1

(наборы, отличающиеся от выписанных здесь только знаком, не берем).

По интерполяционной формуле Ньютона строим для этих наборов многочлены $h_j(x)$ $(j=\overline{1,8})$:

$$h_1(x)=1,\quad h_2(x)=-x^2+x+1,\quad h_3(x)=2x^2-4x+1,$$

$$h_4(x)=-x^2+3x-1,\quad h_5(x)=-x^2+2x+1,\quad h_6(x)=-2x^2+3x+1,$$

$$h_7(x)=3x^2-6x+1,\quad h_8(x)=-2x^2+5x-1,$$

где $h_j(x)-$многочлен, принимающий при $x=0,\ 1,\ 2$ значения, стоящие в $j-$м столбце выписанной выше таблицы. .

Числа $h_3(-1)=7$, $h_4(-1)=-5$, $h_7(-1)=10$ и $h_8(-1)=-8$ не являются делителями числа $f(-1)=4$, поэтому многочлены $h_3(x)$, $h_4(x)$, $h_7(x)$ и $h_8(x)$ не рассматриваем. Возьмем еще значение $f(-2)=-19$. Оно не делится на $h_2(-2)=-5$, $h_5(-2)=-7$ и $h_6(-2)=-13$. Таким образом, многочлен $f(x)$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

b) $f(-2)=-1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$.

Составляем наборы делителей этих чисел:

$c_1=1$	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1
$c_2=1$	1	-1	1	2	2	-2	2	1	1	-1	-1	1	2	2	-2	2
$c_3=1$	1	1	-1	1	1	1	-1	3	3	3	3	-3	3	3	3	-3

(наборы, отличающиеся от выписанных здесь только знаком, не берем).

Строим соответствующие этим наборам многочлены по интерполяционной формуле Ньютона:
$h_1(x)=1$; $h_2(x)$, $h_3(x)$, $h_4(x)$, $h_5(x)$, $h_6(x)-$многочлены с дробными коэффициентами; $h_7(x)=x^2-3-$ делитель $f(x)$, $f(x)=(x^2-3)(x^2+x-3)$, причем многочлены x^2-3 и x^2+x-3 над полем $\boldsymbol{Q}$ неприводимы (так как не имеют корней в $\boldsymbol{Q}$). ■

УПРАЖНЕНИЯ

78. Разложить на неприводимые множители многочлен:

a) x^3+x+1 над полем $\boldsymbol{Z_2}$;

b) $x^5+x^3+x^2+1$ над полем $\boldsymbol{Z_2}$;

c) x^3+2x^2+4x+1 над полем $\boldsymbol{Z_5}$;

d) $x^4+3x^3+2x^2+x+4$ над полем $\boldsymbol{Z_5}$.

79. Найти все многочлены второй степени со старшим коэффициентом единица, неприводимые над полем $\boldsymbol{Z_3}$.

80. Найти все многочлены третьей степени со старшим коэффициентом единица, неприводимые над полем $\boldsymbol{Z_3}$.

81. Разложить многочлены на неприводимые множители над полями $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{R}$:

a) x^3-8; b) x^3+8; c) x^4-16; d) x^4+16; e) x^6+27; f) x^8-6x^4+9;

g) $x^{2n}-2x^n+2$; h) $x^{2n}+x^n+1$; i) $x^{2n}-1$; j) $x^{2n+1}-1$.

82. Найти многочлен наименьшей степени, корнями которого являются все корни из единицы, степени которых не превосходят n.

83. По данным корням построить многочлен наименьшей степени над полями $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{R}$:

a) двукратный корень 1, простые корни i и -1;

b) трехкратный корень 1-2i;

c) двукратный корень i и простой корень -1-i;

d) двукратные корень $-1-i$ и -2+i;

e) простые корни 1, -1, i.

84. Найти НОД многочленов:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ и $(x^2-1)^2$.

85*. Найти НОД многочленов: x^m-1 и x^n-1.

86. Найти НОД многочленов: x^m+a^m и x^n+a^n.

87. При каких значениях m делятся в кольце $\boldsymbol{R}[x]$ на x^2+x+1 многочлены:

a) $x^{2m}+x^m+1$; b) $(x+1)^m-x^m-1$; c) $(x+1)^m+x^m+1$.

88. При каких значениях m делятся в кольце $\mathbf{R}[x]$ на $(x^2+x+1)^2$ многочлены:

a) $(x+1)^m-x^m-1$; b) $(x+1)^m+x^m+1$.

89. Могут ли многочлены $(x+1)^m+x^m+1$ и $(x+1)^m-x^m-1$ делится на $(x^2+x+1)^3$?

90. Доказать, что если число α является корнем многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

a) $\alpha-$ делитель a_n;

b) $\alpha-m$ - делитель $f(m)$ при любом целом m. В частности $\alpha-1$ - делитель $f(1)$, $\alpha+1-$ делитель $f(-1)$.

91. Найти целые корни многоченов:

a) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;

b) $3x^4+5x^3+x^2+x-2$;

c) $2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12$;

d) $3x^6-5x^4-10x^3-8x^2+x-2$;

e) $6x^4+x^3+2x^2-4x+1$.

92*. Доказать, что если $\frac{k}{l}-$несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

a) $l-$делитель a_0;

b) $k-$делитель a_n;

c) $k-ml-$ делитель $f(m)$ при любом целом m. В частности $k-l-$ делитель $f(1)$, $k+1-$ делитель $f(-1)$.

93. Найти рациональные корни многоченов:

a) $x^3-6x^2+15x-14$; b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;

c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$; d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;

e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$; f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;

g) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$; h) $3x^4-2x^3+4x^2-x+2$;

$4x^4-7x^2-5x-1$.

94. Разложить на неприводимые над полем $\boldsymbol{Q}$ множители многочлены:

a) $x^3+6x^2-8x+12$; b) $3x^3+5x^2+5x+2$; c) $30x^3+19x^2-1$;

d) $3x^3+4x^2+4x+4$.

95*. Пользуясь признаком Эйзенштейна, доказать неприводимость над $\boldsymbol{Q}$ многочленов:

a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$; b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+2;

d) x^n+p, где $p-$простое число; e) $\dfrac{x^p-1}{x-1}$, где $p-$простое число;

96*. Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)-$нечетные числа.

97*. Доказать, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1 и x_2 независимой переменной, то он не имеет рациональных корней, если $|x_1 - x_2| > 2$. Если же $|x_1 - x_2| \le 2$, то рациональным корнем может быть только $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

98. Доказать неприводимость многочлена $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ над полем $\boldsymbol{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулю 2.

99*. Доказать неприводимость многочлена $x^5-6x^3+2x^2-4x+5$ над полем $\boldsymbol{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулями 2 и 3.

100*. Пусть $f(x)$-- неприводимый многочлен над полем $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$. Доказать, что многочлены $f(x)$, $f(x+1),\ldots,f(x+p-1)$ либо попарно различны, либо все совпадают.

101*. Доказать, что многочлен $f(x)=x^p-x-a$ при a не делящемся на p неприводим над полем $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$.

102. Методом разложения на множители значений многочлена при целых значениях переменной разложить на множители многочлены или доказать их неприводимость над $\boldsymbol{Q}$:

a) x^4-3x^2+1; b) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;

c) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1$; d) $x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

103*. Доказать, что многочлен четвертой степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ с целыми коэффициентами неприводим над $\boldsymbol{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из многочленов вида

$$x^2+\frac{cm-am^2}{d-m^2}\cdot x+m,$$

где $m-$делитель числа d. Многочлены с дробными коэффициентами можно не принимать во внимание. Исключение могут представить многочлены, коэффициенты которых удовлетворяют условиям: $d=k^2$, $c=ak$.

104*. Доказать, что многочлен пятой степени $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ с целыми коэффициентам неприводим над $\boldsymbol{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из многочленов с целыми коэффициентами вида

$$x^2+\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm}\cdot x+m,$$

где $m-$делитель e, $n=\dfrac{e}{m}$.

105. Разложить на множители многочлены или доказать их неприводимость над полем $\boldsymbol{Q}$, пользуясь задачами 103, 104:

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$; b) $x^4-3x^3+2x^2+2x-6$;

c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$; d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

106. Найти все приводимые над полем $\boldsymbol{Q}$ многочлены вида x^5+ax^3+bx+1 с целыми a и b.

107. Найти необходимые и достаточные условия приводимости над полем $\boldsymbol{Q}$ многочлена x^4+px^2+q с рациональными коэффициентами.

108*. Доказать, неприводимость над полем $\boldsymbol{Q}$ многочлена
$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1$; $a_1,a_2,...,a_n-$различные между собой целые числа.

109*. Доказать, что если многочлен $n-$ой степени с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной $(n=2m$ или $2m+1)$, то он неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

110*. Доказать неприводимость над полем $\boldsymbol{Q}$ многочлена
$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1$, если $a_1,a_2,...,a_n-$различные между собой целые числа.

111*. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами ax^2+bx+1 неприводим над $\boldsymbol{Q}$, то неприводим и многочлен

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1,$$

где $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ при $n\geq 7$. Здесь $a_1,a_2,...,a_n-$целые, различные между собой числа.

§ 4. Рациональные дроби

Рациональной дробью или *дробно-рациональной функцией* над полем P называется выражение вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x), g(x)-$многочлен с коэффициентами из поле P, причем $g(x)\neq 0$. Рациональные дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ над полем P называется *равными,* если $f(x)\psi(x)=g(x)\psi(x)$ в кольце $P[x]$.

На множестве всех рациональных дробей над полем P можно задать *алгебраические операции (сложение и умножение)* равенствами

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}.$$

Относительно этих операций множество рациональных дробей над P является полем, которое называется *полем рациональных дробей* или *полем дробно – рациональных функций над полем* P и обозначается $P(x)$.

Рациональная дробь $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ называется *несократимой,* если многочлены $f_1(x)$ и $g_1(x)$ взаимно просты. Всякая рациональная дробь равна несократимой дроби, получающейся из нее путем деления ее числителя $f(x)$ и знаменателя $g(x)$ на их НОД.

Рациональная дробь называется *правильной*, если в ней степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример 1. $\dfrac{x^2-x}{x^3+2x^2-x}=\dfrac{x-1}{x^2+2x-1}$. ■

Всякая рациональная дробь, отличная от многочлена (т.е. такая, что в ее несократимой записи знаменатель имеет ненулевую степень), может выть единственным образом представлена в виде суммы некоторого многочлена и некоторой правильной дроби. Чтобы получить такое представление дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, нужно разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$. Если при этом получится частное $q(x)$ и остаток $r(x)$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

где $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Пример 2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^4+2x^2-4x+6}{x^2-2x+3}$.

Так как $3x^4+2x^2-4x+6=(x^2-2x+3)(3x^2+6x+5)-12x-9$, то
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=3x^2+6x+5+\dfrac{-12x-9}{x^2-2x+3}$. ■

Правильная рациональная дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется *простейшей,* если $g(x)$ является степенью некоторого многочлена $p(x)$, неприводимого над заданным полем P, а степень многочлена $f(x)$ меньше степени $p(x)$.

Основной теоремой о рациональных дробях является следующая: всякая правильная рациональная дробь из поля $P(x)$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей, и такое представление единственно.

Чтобы получить разложение дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на простейшие над данным P, нужно разложить многочлен $g(x)$ на неприводимые над полем P множители и, если получится $g(x)=p_1^{s_1}(x)...p_t^{s_t}(x)\,(p_1(x),...,p_t(x)-$ неприводимые многочлены), то написать:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{U_1^{(1)}(x)}{p_1^{s_1}(x)}+\frac{U_2^{(1)}(x)}{p_1^{s_1-1}(x)}+\cdots+\frac{U_{s_1}^{(1)}(x)}{p_1(x)}+\cdots+\frac{U_1^{(t)}(x)}{p_t^{s_t}(x)}+\frac{U_2^{(t)}(x)}{p_t^{s_t-1}(x)}+\cdots+\frac{U_{s_t}^{(t)}(x)}{p_t(x)},$$

где $U_j^{(i)}(x)$ $(i=\overline{1,t};$ $j=\overline{1,s_i}$ при фиксированном $i)-$многочлен степени меньшей, чем степень $p_i(x),$ взятый с неопределенными коэффициентами. Затем нужно все дроби правой части привести к общему знаменателю $g(x)$ и приравнять сумму получившихся при этом числителей многочлену $f(x)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получившегося равенства (или придавая переменной x в левой и правой части равенства числовые значения), получим систему линейных уравнений, решая которую найдем коэффициенты многочленов $U_j^{(i)}(x)$.

Если $P=\boldsymbol{C}$ – поле комплексных чисел, то простейшие дроби – это дроби вида $\dfrac{\alpha}{(x-\beta)^k}$, где α и $\beta-$ комплексных числа и $k\geq 1$.

Если $K=\boldsymbol{R}$ – поле действительных чисел, то простейшими являются рациональные дроби вида $\dfrac{\alpha}{(x-\beta)^m}$ (α и $\beta-$действительные числа $m\geq 1$) и $\dfrac{\alpha_1x+\alpha_2}{(x^2+\beta_1x+\beta_2)^n}$, где $x^2+\beta_1x+\beta_2-$ многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней, α_1,α_2- действительные числа, $m\geq 1$.

П р и м е р 3. Разложить на простейшие дроби над полями $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{C}$ рациональную дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x^4-2x^3-6x^2+2x+7}{x^5+2x^4+2x^3+4x^2+x+2}$.

Решение. Рассмотрим сначала разложение над полем $\boldsymbol{R}$.

В этом случае $g(x)=(x+2)(x^2+1)^2$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{x+2}+\frac{a_1x+a_2}{(x^2+1)^2}+\frac{c_1x+c_2}{x^2+1}.$$

Приводим все дроби к общему знаменателю $g(x)$ и получаем равенство:

$f(x)=a(x^2+1)^2+(a_1x+a_2)(x+2)+(c_1x+c_2)(x+2)(x^2+1)$, или

$2x^4-2x^3+6x^2+2x+7=(a+c_1)x^4+(2c_1+c_2)x^3+(2a+a_1+c_1+2c_2)x^2+$
$+(2a_1+a_2+2c_1+c_2)x+(a+2a_2+2c_2)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c_1 = 2 \\ 2c_1 + c_2 = -2 \\ 2a + a_1 + c_1 + 2c_2 = 6 \\ 2a_1 + a_2 + 2c_1 + c_2 = 2 \\ a + 2a_2 + 2c_2 = 7. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$. Таким образом,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{x+2}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} -$$ разложение над полем $\boldsymbol{R}$.

В случае поле комплексных чисел имеем: $g(x) = (x+2)(x+i)^2(x-i)^2$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x-i)^2} + \frac{e}{x-i}.$$

Приводим все дроби к общему знаменателю $g(x)$ и получаем равенство:

$$2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 7 = a(x+i)^2(x-i)^2 + b(x+2)(x-i)^2 +$$
$$+ c(x+2)(x+i)(x-i)^2 + d(x+2)(x+i)^2 + e(x+2)(x+i)^2(x-i).$$

Беря значение $x = -2$, получаем: $75 = a \cdot 25$, т.е. $a = 3$. Берем $x = -i$. Это дает: $3 - 4i = b(2-i)(-4)$, откуда $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$. При $x = i$ получаем: $3 + 4i = d(2+i)(-4)$, д.е. $b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$. Полагаем теперь последовательно $x = 0$ и $x = -1$ и, используя уже найденные значения коэффициентов a, b, d, получаем

$$\begin{cases} 7 = 3 + \left(1 - \frac{1}{2}i\right) - 2ci + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + 2ei, \\ 15 = 12 + \left(-\frac{1}{2} - i\right) + c(-2-2i) + \left(-\frac{1}{2} + i\right) + e(-2+2i) \end{cases}$$

или $\begin{cases} -2ci + 2ei = 2 \\ c(-2-2i) + e(-2+2i) = 4, \end{cases}$ откуда $c = \frac{-1+i}{2}$, $e = \frac{-1-i}{2}$. Таким образом,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2-i}{4(x+i)^2} - \frac{1-i}{2(x+i)} - \frac{2+i}{4(x-i)^2} - \frac{1+i}{2(x-i)} -$$ разложение над полем $\boldsymbol{C}$. ■

Рассмотрим разложение на простейшие правильной рациональной дроби, знаменатель которой разложен на попарно простые линейные множители.

Пусть дана правильная дробь

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}, \quad x_i \neq x_j.$$

Ее разложение имеет вид:

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n}.$$

Для определения коэффициентов умножим равенство на знаменатель:

$$f(x)=a_1(x-x_2)\cdots(x-x_n)+a_2(x-x_1)\cdots(x-x_3)\cdots(x-x_n)+\cdots+a_n(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Положим теперь по очереди $x=x_1, x=x_2,\ldots,x=x_n$. Получим:

$$f(x_1)=a_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n),$$
$$f(x_2)=a_2(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x_n)=a_n(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

Множители при коэффициентах в правых частях все отличны от нуля и легко выражаются при помощи производной многочлена $F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Действительно,

$$F'(x)=(x-x_2)\ldots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Полагая по очереди $x=x_1, x=x_2,\ldots,x=x_n$, получим:

$$F'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n),$$
$$F'(x_2)=(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F'(x_n)=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

Тогда $a_1=\dfrac{f(x_1)}{F'(x_1)},\quad a_2=\dfrac{f(x_2)}{F'(x_2)},\ldots,a_n=\dfrac{f(x_n)}{F'(x_n)}$, и для разложения на простейшие получаем формулу

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{F'(x_k)(x-x_k)}$$ *(формула Лагранжа).*

П р и м е р 4. Разложить на простейшие $\dfrac{x^3+5x+7}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}$.

Решение. Здесь $F(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$,

$$F'(-2)=(-2+1)(-2)(-2-1)(-2-2)=24,$$
$$F'(-1)=(-1+2)(-1)(-1-1)(-1-2)=-6,$$
$$F'(0)=(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)=4,$$
$$F'(1)=-6,\quad F'(2)=24.$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+5x+7}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}=-\frac{11}{24(x+2)}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{7}{4x}-\frac{13}{6(x-1)}+\frac{25}{24(x-2)}.\ \blacksquare$$

П р и м е р 5. Разложить над полем $\boldsymbol{R}$ дробь $\dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

Решение. Сначала напишем разложение над $\boldsymbol{C}$. Напомним, что корни многочлена $F(x)=x^{2n}+1$ лежат на единичной окружности и попарно сопряжены. Именно, с корнями

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k=\overline{1,n},$$

сопряжены корни $\bar{x}_k=x_{2n+1-k}$. Корни попарно различны, так что формула Лагранжа применима. Имеем: $F'(x)=2nx^{2n-1}$, откуда $F'(x_k)=2nx_k^{2n-1}=2nx_k^{-1}x_k^{2n}=-2nx_k^{-1}$. По формуле Лагранжа

$$\frac{1}{x^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x-x_k}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{x}_k}{x-\bar{x}_k}.$$

Объеденив теперь комплексно сопряженные слагаемые, получим

$$\frac{1}{x^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{x-x_k}+\frac{\bar{x}_k}{x-\bar{x}_k}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+\bar{x}_k)x-2}{x^2-(x_k+\bar{x}_k)x+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}. \ \blacksquare$$

П р и м е р 6. Разложить дробь $\dfrac{1}{x^p-x}$ на простейшие над полем $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$ вычетов по модулю p.

Решение. Так как элементы $0,1,\dots,p-1$ поле $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$ являются корнями многочлена $F(x)=x^p-x$, то $x^p-x=x(x-1)\cdots(x-p-1)$. Тогда $F'(x)=px^{p-1}-1=-1$. Следовательно, $\dfrac{1}{x^p-x}=-\sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{1}{x-k}$. $\blacksquare$

УПРАЖНЕНИЯ

112*. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

a) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+2)}$; b) $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$; c) $\dfrac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$.

113*. Разложить на простейшие дроби над полем $\boldsymbol{C}$.

a) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; c) $\dfrac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$;

d) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$; e) $\dfrac{1}{x^3-1}$; f) $\dfrac{1}{x^4+4}$; g) $\dfrac{1}{x^n-1}$; h) $\dfrac{1}{x^n+1}$;

i) $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$; j) $\dfrac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\cdots(x^2-n^2)}$.

114*. Разложить на простейшие дроби над полем $\boldsymbol{C}$.

a) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

d) $\dfrac{1}{(x^n-1)^2}$;   e) $\dfrac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\dfrac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a\neq 0$; g) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$.

115*. Разложить на простейшие дроби над полем ***R***.

a) $\dfrac{1}{x^3-1}$; b) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; c) $\dfrac{1}{x^4+4}$; d) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$; e) $\dfrac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m<2n+1$;

f) $\dfrac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m<2n+1$; g) $\dfrac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\dfrac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\dfrac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\cdots(x^2+n^2)}$.

116. Разложить на простейшие дроби над полем ***R***.

a) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$; c) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\dfrac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

117. Пусть $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

a) $\sum\dfrac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\dfrac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\dfrac{1}{(x-x_i)^2}$.

118*. Вычислить следующие суммы, зная, что x_1,x_2,x_3 – корни многочлена $\varphi(x)$:

a) $\dfrac{1}{2-x_1}+\dfrac{1}{2-x_2}+\dfrac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\dfrac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\dfrac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\dfrac{1}{x_3^2-3x_3+2}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\dfrac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\dfrac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\dfrac{1}{x_3^2-2x_3+1}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

§ 5. Многочлены от нескольких переменных

Многочлены $f(x_1,x_2,...,x_n)$ от n переменных $x_1,x_2,...,x_n$ над полем P называется сумма конечного числа членов вида

$$a\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}, \qquad (*)$$

где $k_i\geq 0$ $(i=\overline{1,n})$, a – элемент поля P называемый коэффициентом члена (*). Предполагается, что многочлен $f(x_1,x_2,...,x_n)$ не содержит подобных членов и члены с коэффициентами равными нулю не записываются.

Два многочлена $f(x_1,...,x_n)$ и $g(x_1,...,x_n)$ называются *равными,* если равны их коэффициенты при одинаковых членах.

Сумма $k_1+k_2+...+k_n$ называются *степенью члена* $a\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$.

Степенью многочлена $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *по совокупности переменных* называется наибольшая из степеней его членов. Многочлены нулевой степени – это отличные от нуля числа из P. Многочлен от n переменных, все коэффициенты которого равны равны нулю, называется *нулевым*. Степень нулевого многочлена считается неопределенной. Если все члены многочлена $f(x_1,...,x_n)$ имеют по совокупности переменных одну и ту же степень m, то такой многочлен называется *однородным многочленом* или *формой* $m-$й степени от n переменных.

Степенью многочлена $f(x_1,...,x_n)$ относительно одного из переменных x_i $(i=\overline{1,n})$ называется наивысший показатель, с которым x_i входит в члены этого многочлена (эта степень может быть и нулевой).

Суммой многочленов $f(x_1,...,x_n)$ и $g(x_1,...,x_n)$ называются многочлен, коэффициенты которого получаются сложением соответствующих коэффициентов многочленов f и g; если при этом некоторый член входит в запись лишь одного из данных многочленов, то коэффициент при нем в другом многочлене считается равным нулю.

Произведением многочленом $f(x_1,...,x_n)$ и $g(x_1,...,x_n)$ называются многочлен, полученный почленным умножением f на g с последующим приведением подобных членов. Относительно введенных операций сложения и умножения множество всех многочленов от переменных $x_1,x_2,...,x_n$ над полем P является коммутативным кольцом, которое принято обозначать $P[x_1,x_2,...,x_n]$.

Пусть $\alpha = a\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ и $\beta = b\,x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$ – два различных член многочлена $f(x_1,...,x_n)\in P[x_1,x_2,...,x_n]$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Член α будем считать *выше* члена β (а член β -- *ниже* члена α), если существует такое i, $1\le i\le n$, что $k_1=l_1, k_2=l_2,...,k_{i-1}=l_{i-1}$, но $k_i>l_i$.

Если все члены многочлена $f(x_1,...,x_n)$ расположены так, что каждый следующий ниже предыдущего, то говорят, что члены этого многочлена расположены *лексикографически* или *словарно* (или многочлен $f(x_1,...,x_n$ записан лексикографически (словарно)).

Тот член, который при лексикографической записи многочлена расположен на первом месте, называется *высшим членом многочлена.* Высший член произведения многочленов равен произведению высших членов сомножителей.

П р и м е р 1. а) Степень $3x_1^6x_2^2x_3^5$ равна 13;

b) степень многочлена $f=3x_1x_2^5x_3^3+x_2^3x_3^8-4x_1^6x_2^7x_3^8$ равна 21;

c) $f=2x_1^3x_2^2x_3^4-7x_1x_2^8+11x_2^3x_3^6$ является однородным многочленом девятой степени. ■

Многочлен $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *симметрическим,* если он не меняется ни при какой перестановке переменных $x_1,x_2,...,x_n$. Точнее, пусть $\alpha-$подстановка из S_n; для многочлена $f=f(x_1,...,x_n)$ положим $\alpha\, f(x_1,\dots x_n)=f(x_{\alpha(1)},\dots x_{\alpha(n)})$. Многочлен f называется симметрическим, если $\alpha\, f=f$ для всех $\alpha\in S_n$.

П р и м е р 2. Следующие многочлены из кольца $\boldsymbol{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ являются симметрическими:

a) $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$; b) $g = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$;

c) $h = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2$.

Симметрические многочлены от n переменных

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$;

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$;

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_n + \cdots + x_1x_2x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$;

....

$\sigma_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3\cdots x_n$;

$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n$

называются *элементарными* (или *основными) симметрическими многочленами.*

Если $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ –многочлен с коэффициентами из поля P от одного переменного, то значения элементарных симметрических многочленов от n переменных при значениях переменных, равных корням многочлена $g(x)$, равны соответственно $-\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ..., (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$.

Симметрический многочлен от $x_1, x_2, ..., x_n$ все члены которого могут быть получены из одного из них путем перестановок переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется *моногенным* многочленам. Если $a\, x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ – вышей член моногенного многочлена, то этот многочлен обозначается через $S(a\, x_1^{k_1}...x_n^{k_n})$.

О с н о в н а я т е о р е м а о с и м м е т р и ч е с к и х м н о г о ч л е н а х.

Всякий симметрический многочлен от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем P можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ с коэффициентами, принадлежащими полю P и это представление единственно.

Чтобы найти выражение данного симметрического многочлена через элементарные, нужно сначала разбить этот многочлен на однородные части, собирая вместе все члены многочлена, имеющие одну и ту же степень по совокупности переменных, и затем выражать через элементарные симметрические многочлены каждую однородную часть отдельно. Чтобы выразить через элементарные симметрические многочлены однородный симметрический многочлен $f(x_1, ..., x_n)$, нужно взять его вышей член $a\, x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$, выписать набор показателей в нем $k_1, k_2, ..., k_n$ и составить всевозможные наборы чисел вида $l_1, l_2, ..., l_n$ со свойствами:

1) сумма чисел $l_1 + l_2 + ... + l_n$ в каждом наборе одна и та же и равна $k_1 + k_2 + ... + k_n$;

2) числа каждого набора идут, не возрастая, т.е. $l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_n$

3) член $x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$ не выше члена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$.

После этого для каждого наборе $l_1,l_2,...,l_n$ нужно составить произведение $\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$ и многочлен $f(x_1,x_2,...,x_n)$ приравнять сумме построенных так произведений, взятых с неопределенными коэффициентами (коэффициент при произведении $\sigma_1^{k_1-k_2}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$ берется сразу равным a_0). Если найти эти коэффициенты, придавая различными способами численные значения переменным $x_1, x_2,...,x_n$ в обеих частях равенства, то получится выражение $f(x_1,x_2,...,x_n)$ через элементарные симметрические многочлены.

П р и м е р 3. Выразить многочлен

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_2+x_1^4x_3+x_1x_2^4+x_1x_3^4+x_2^4x_3+x_2x_3^4$$

через основные симметрические многочлены.

Решение. Здесь $f(x_1,x_2,x_3)$ − уже однородный симметрический многочлен.

1) Высший член многочлена f равен $x_1^4x_2$;

2) для всевозможных наборов показателей и соответствующих им произведений $\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$ получаем следующую таблицу:

Набор показателей	$\sigma_1^{l_1-l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$
4 1 0	$\sigma_1^3\sigma_2$
3 2 0	$A\,\sigma_1\sigma_2^2$
3 1 1	$B\,\sigma_1^2\sigma_3$
2 2 1	$C\,\sigma_2\sigma_3$

3) $f=\sigma_1^3\sigma_2+A\,\sigma_1\sigma_2^2+B\,\sigma_1^2\sigma_3+C\,\sigma_2\sigma_3$, где A,B,C—неизвестные коэффициенты;

4) придаем переменным $x_1, x_2,...x_n$ различные значения и результаты вычислений сводим в следующую таблицу:

x_1	x_2	x_3	f	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	6	3	3	1
1	1	0	2	2	1	0
1	1	-1	2	1	-1	-1

5) Из пунктов 4 и 3 получаем:

$$\begin{cases} 6=81+27A+9B+3C \\ 2=8+2A \\ 2=-1+A-B+C \end{cases};$$

6) решая эту систему, получаем: $A=-3,\quad B=-1,\quad C=5$;

7) получаем окончательный ответ: $f=\sigma_1^3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2^2-\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3$. ■

П р и м е р 4. Выразить многочлен

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = S(x_1^3) + 2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_n^2$$

через основные симметрические многочлены .

Решение. Разбиваем $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на однородные части: $f_1(x_1, ..., x_n) = S(x_1^3)$ и $f_2(x_1, ..., x_n) = S(2x_1^2)$.

Выразим $f_1 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$ через элементарные симметрические многочлены:

1) высший член многочлена f_1 равен x_1^3;

2) для всевозможных наборов показателей и соответствующих им произведений получаем таблицу:

Набор показателей	$\sigma_1^{l_1-l_2} \cdots \sigma_n^{l_n}$
3 0 0	σ_1^3
2 1 0	$A\,\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$B\,\sigma_3$

3) $f_1 = \sigma_1^3 + A\,\sigma_1\sigma_2 + B\,\sigma_3$, где A и B – неизвестные коэффициенты;

4) придаем переменным $x_1, x_2, ...x_n$ различные значения и результаты вычислений сводим в следующую таблицу:

x_1	x_2	x_3	…	x_n	f_1	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	…	1	n	n	C_n^2	C_n^3
1	1	0	…	0	2	2	1	0

5) из пунктов 4 и 3 получаем:

$$\begin{cases} n = n^3 + nC_n^2 A + C_n^3 B \\ 2 = 8 + 2A + 0 \cdot B \end{cases};$$

6) решая систему из пункта 5 получаем: $A = -3$, $B = 3$;

7) $f_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Аналогично находим , что $f_2(x_1, ..., x_n) = 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2$.

Таким образом, $f(x_1, \ldots x_n) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2$. ■

Пользуясь основной теоремой о симметрических многочленах, можно найти значение любого симметрического многочлена от n переменных при значениях входящих в него переменных, равных корням многочлена $g(x)$ $n-$й степени от одного переменного, не зная самих этих корней.

П р и м е р 5. Найти сумму кубов корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ многочлена $g(x) = 7x^4 - 14x^3 - 7x + 2$.

Решение. Рассмотрим симметрический многочлен $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ и выражаем его через элементарные симметрические многочлены: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

При значениях переменных имеем: $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$, $x_4 = \alpha_4$ имеем: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$. Отсюда

$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3=8-0+3=11$. ■

Степенными суммами называются симметрические многочлены $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$, $k=1,2,\ldots$. С элементарными симметрическими многочленами они связаны *формулами Ньютона:*

$$S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0,\quad k\le n,$$

$$S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^n S_{k-n}\sigma_n=0,\quad k>n.$$

Из этих формул можно последовательно находить выражения $S_1,S_2,\ldots$ через $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ или наоборот.

Пример 6. Пусть $n\ge 3$. Тогда $S_1=\sigma_1$; $S_2-S_1\sigma_1+2\sigma_2=0$, откуда $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$; $S_3-S_2\sigma_1+S_1\sigma_2-3\sigma_3=0$, откуда $S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

119. Выразить через элементарные симметрические многочлены:

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$;

e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

120. Выразить через элементарные симметрические многочлены;

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

121. Выразить через элементарные симметрические многочленны моногенные многочлены от *n* переменных

a) $S(x_1^2)$; b) $S(x_1^2x_2x_3)$; c) $S(x_1^2x_2^2)$; d) $S(x_1^3x_2)$;

e) $S(x_1^4)$; f) $S(x_1^2x_2^2x_3)$; g) $S(x_1^3x_2x_3)$; h) $S(x_1^3x_2^2)$;

i) $S(x_1^4x_2)$; j) $S(x_1^5)$; k) $S(x_1^2x_2^2x_3x_4)$; l) $S(x_1^2x_2^2x_3^2)$;

m) $S(x_1^3x_2x_3x_4)$; n) $S(x_1^3x_2^2x_3)$; o) $S(x_1^3x_2^3)$; p) $S(x_1^4x_2x_3)$;

q) $S(x_1^4x_2^2)$; r) $S(x_1^5x_2)$; s) $S(x_1^6)$.

122. Выразить через элементарные симметрические многочлены моногенный многочлен $S(x_1^2x_2^2\cdots x_k^2)$.

123. Выразить через элементарные симметрические многочлены следующие дроби:

a) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}$; b) $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\dfrac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}\right)\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}\right)$.

124. Выразить через элементарные симметрические многочлены:

a) $\sum \frac{1}{x_i}$; b) $\sum \frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$.

125. Вычислить сумму квадратов корней уравнения

$x^3 + 2x - 3 = 0.$

126. Вычислить $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + x_3^3 x_1 + x_3 x_1^3$ от корней уравнения $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0.$

127. Определить значение моногенного многочлена $S(x_1^3 x_2 x_3)$ от корней многочлена $f(x) = x^4 + x^2 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$

128. Выразить значение симметрического многочлена $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ от корней многочлена $g(x)$, если:

a) $f = S(x_1^4 x_2), \quad g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1;$ b) $f = S(x_1^3 x_2^3), \quad g(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1;$

c) $f = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_1x_3 + x_1^2),\ g(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8.$

129. Выразить через коэффициенты уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ следующие симметрические функции;

a) $a_0^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2$; b) $a_0^4(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2)$;

c) $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_1 - x_3)^2}{x_1x_3} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3}$;

d) $a_0^4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2).$

130. Найти выражение для S_4, S_5, S_6 через элементарные симметрические многочлены, пользуясь формулами Ньютона.

131. Выразить $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ через степенные суммы $S_1, S_2, ...,$, пользуясь формулами Ньютона.

132. Вычислить сумму $k - x$ степеней корней многочлена;

a) $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1, \quad k = 5;$ b) $x^4 - x^3 - 1, \quad k = 8;$

c) $x^3 - 3x + 1, \quad k = 10;$ d) $x^5 - x^4 - x - 1, \quad k = 5;$ e) $x^5 - x^4 - x^3 - 1, \quad k = 6.$

133. Найти $S_1, S_2, ..., S_n$ от корней уравнения

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 0.$$

134. Найти многочлен третьей степени, если его корни равны x_1^2, x_2^2, x_3^2, где x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $3x^3 - 4x^2 + 6x + 10.$

135. Найти многочлен третьей степени, если его корни равны $x_1^3 + x_1, \quad x_2^3 + x_2, \quad x_3^3 + x_3$, где x_1, x_2, x_3 — корни многочлена

$2x^3 + 6x^2 + 6x - 3.$

136. Найти уравнение n — й степени, для которых

$S_1 = S_2 = \cdots = S_{n-1} = 0.$

137. Найти уравнение n — й степени, для которых

$S_2 = S_3 = \cdots = S_n = 0.$

138*. Доказать, что
$$S_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1. \end{vmatrix}$$

139. Доказать, что
$$\sigma_k = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \cdots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \cdots & S_1. \end{vmatrix}$$

140. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \\ S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n & S_{n-1} & S_{n-2} & \cdots & n. \end{vmatrix}$$

ОТВЕТЫ

§ 1.

1. a) $q(x) = x^2 - 2x + 4,\ r(x) = 3x + 11;$
b) $q(x) = 5x^2 - 15x + 34,\ r(x) = -72x - 62;$ c) $q(x) = 0,\ r(x) = 2x^2 - 3x + 1;$
d) $q(x) = 2x^2 + 3x + 11, r(x) = 25x - 5.$

2. a) $a = 0,\quad q = -1;$ b) $a = -3,\ q = 8;$ c) $p = a^3 - 2a, q = a^2 - 1;$
d) $a = \pm 3,\quad q = 1;\quad a = 0,\quad q = -8.$

3. a) $r(x) = 0, q(x) = x^2 + 2$ в $\boldsymbol{Z}_3[x]; r(x) = 3x - 3, q(x) = x^2 + 2$ в $\boldsymbol{Z}_5[x]$ и в $\boldsymbol{Q}[x]$; b) $r(x) = 2x + 1,\quad q(x) = 2x + 2$ в $\boldsymbol{Z}_3[x]; r(x) = 2x, q(x) = 2x^2$ в $\boldsymbol{Z}_5[x]; r(x) = 2x + 1, q(x) = 2x^2 + 5$ в $\boldsymbol{Q}[x].$

5. НОД: a) $x+1;$ b) $x^2+1;$ c) $x^3+1;$ d) 1; e) 1. НОК: a) $\dfrac{f(x)g(x)}{x+1};$
b) $\dfrac{f(x)g(x)}{3(x^2+1)};$ c) $\dfrac{f(x)g(x)}{3(x^3+1)};$ d) $f(x)g(x)$; e) $f(x)g(x)$.

6. a) $x^2 - 2 = (-x-1)f(x) + (x+2)g(x);$
b) $x^3 + 1 = -f(x) + (x+1)g(x);$ c) $x - 1 = -\dfrac{x-1}{3}f(x) + \dfrac{2x^2 - 2x - 3}{3}g(x);$
d) $1 = xf(x) + (-3x^3 - x + 1)g(x);$ e) $1 = (-x-1)f(x) + (x^3 + x^2 - 3x - 2)g(x);$
f) $1 = \dfrac{-x^2+3}{2}f(x) + \dfrac{x^4 - 2x^2 - 2}{2}g(x).$

9. a) $\varphi(x) = 4 - 3x, \psi(x) = 1 + 2x + 3x^2;$

b) $\varphi(x)=\frac{1}{16}(x^2-6x+9),\psi(x)=-\frac{1}{16}(x^3-3x^2-4)$;

c) $\varphi(x)=\frac{1}{17}(6x-11),\ \psi(x)=-\frac{1}{17}(6x^2-5x+25)$;

d) $\varphi(x)=\frac{-16x^2+37x+26}{3},\psi(x)=\frac{16x^3-53x^2-37x-23}{3}$.

10. a) x^3-3x+3; b) $4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$; c) x^4-3x^2+1.

11. a) $\frac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$; b) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$; c) $\frac{1}{5}(1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{4})$.

12. a) $\varphi(x)=9x^2-26x-21,\psi(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$;

b) $\varphi(x)=3x^3+3x^2-7x+2,\psi(x)=-3x^3-6x^2+x+2$.

13. $\varphi(x)=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}x^{m-1}$,

$$\psi(x)=1+\frac{m}{1}(1-x)+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-x)^2+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(1-x)^{n-1}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(n-1)!}-\frac{m}{1}\frac{(m+2)\cdots(m+n-1)}{(n-2)!}x+$$

$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\frac{(m+3)\cdots(m+n-1)}{(n-3)!}x^2-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Указание. Поделить на $(1-x)^n$ и дифференцировать $m-1$ раз, полагая после каждого дифференцирования $x=0$. Воспользоваться тем, что степень $\psi(x)$ меньше m, степень $\varphi(x)$ меньше n.

14. a) $x+2$ в $\boldsymbol{Z}_3[x]$ единица в $\boldsymbol{Z}_5[x]$ и $\boldsymbol{Q}[x]$; b) единица в $\boldsymbol{Z}_3[x]$, x^3+3x+2 в $\boldsymbol{Z}_5[x]$, $x+1$ в $\boldsymbol{Q}[x]$; c) единица в $\boldsymbol{Z}_3[x]$, $x-2$ в $\boldsymbol{Z}_5[x]$, единица в $\boldsymbol{Q}[x]$.

15. a) $(f(x),g(x))=x^2+x+1,\varphi(x)=x+1,\psi(x)=x^2$;

b) $(f(x),g(x))=x+1,\varphi(x)=x,\psi(x)=x^2+1$;

c) $(f(x),g(x))=1,\varphi(x)=x+1,\psi(x)=x^2$;

d) $(f(x),g(x))=1,\varphi(x)=x^3+x,\psi(x)=x^4+x+1$.

§ 2.

16. a) 0; b) 1.

17. a) $q(x)=x^3-x^2+3x-3,\quad r(x)=5$;

b) $q(x)=2x^4-6x^2+13x^2-39x+109,\quad r(x)=-327$;

c) $q(x)=4x^2-(3+4i)x+7i-1,\quad r(x)=8-6i$;

d) $q(x)=x^2-2ix-5-2i,\quad r(x)=8i-9$.

18. a) 136; b) 286; c) $\frac{151}{16}$; d) -1-44i ; e) $5+22i$.

19. a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;

c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;

d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$;

e) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$.

20. a) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$; b) $2x^4+13x^3+35x^2+54x+39$;

c) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$; d) $x^5+15x^4+88x^3+255x^2+376x+229$.

21. a) 3; b) 4; c) 2.

22. x. **23.** $-x^2-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}$. **24.** $-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{6}x$.

25. a) $6x+1$; b) 1; c) $3x^3+3x+1$.

28. $b=9a^2$, $1728a^5+c^2=0$.

29. $a=-5$. **30.** $a=3$, $b=-4$.

31. a) $p=-\frac{8}{3}$, $q=2$, $r=-\frac{1}{3}$; b) $p=-\frac{1}{3}$, $q=2$, $r=-\frac{8}{3}$.

32. a) $a=-3$, $k=3$; b) $a=-4$, $k=2$; c) $a=4$, $k=2$.

34. *Решение.* Для того чтобы $f(x)$ делилось на $(x-1)^{k+1}$ необходимо и достаточно, чтобы $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n=0$ и $f'(x)$ делилось на $(x-1)^k$, для чего, в свою очередь, при выполнении условия $f(1)=0$ необходимо и достаточно, чтобы $f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$ делилось на $(x-1)^k$. Рассматривая $f_1(x)$ формально как многочлен n-й степени, повторяем то же рассуждение k раз.

35. *Решение*. Производная $x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$ не имеет кратных корней, кроме нуля.

36. *Решение*. Положив $(m,n)=d$, $m=dm_1$, $n=dn_1$ получим условие в виде

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}m_1^{m_1}a^{n_1}=b^{m_1}n_1^{n_1}.$$

37. *Указание.* Доказывается методом математической индукции.

38. *Указание.* Отличный от нуля корень $(k-1)-$кратности многочлена $f(x)$ есть корень $(k-2)-$кратности многочлена $xf'(x)$ и т.д. Если $x_1\neq 0-$корень $(k-1)-$кратности многочлена $a_1x^{m_1}+\cdots+a_kx^{m_k}$, то числа $a_1x^{m_1},\cdots,a_kx^{m_k}$ составляют решение однородной системы

$$\left.\begin{array}{l} z_1+z_2+\cdots+z_k=0 \\ m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_kz_k=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_1^{k-2}z_1+m_2^{k-2}z_2+\cdots+m_k^{k-2}z_k=0 \end{array}\right\}$$

и, следовательно, пропорциональны числам $\dfrac{\Delta}{\varphi'(m_1)},\dots,\dfrac{\Delta}{\varphi'(m_k)}$, где Δ- определитель Вандерионда.

39. *Решение*. Если $f(x)$ делится на $f'(x)$, то частное есть многочлен первой степени со старшим коэффициентом $\dfrac{1}{n}$, где $n-$степень $f(x)$. Поэтому $n\,f(x)=(x-x_0)\,f'(x)$. В результате дифференцирования получаем $(n-1)\,f'(x)=(x-x_0)\,f''(x)$ и т.д., откуда $f(x)=\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)$. Обратное очевидно.

40. *Решение.* Кратный корень многочлена $f(x)=1+\dfrac{x}{1}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}$ должен быть также корнем его производной

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}.$$

Следовательно, если $f(x_0)=f'(x_0)=0$, то $x_0=0$, но ноль не является корнем $f(x)$.

41. *Решение.* Если $f(x)=(x-x_0)^k\,f_1(x)$, где $f_1(x)-$дробно – рациональная функция, не обращающаяся в ноль при $x=x_0$, то непосредственное дифференцирование дает:

$$f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

42. *Решение.* Функция

$$g(x)=\frac{\psi(x)}{\omega(x)}=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\dots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

удовлетворяет условию $g(x_0)=g'(x_0)=\dots=g^{(n)}(x_0)=0$. Следовательно, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}\,F(x)$, где $F(x)-$многочлен, что и требовалось доказать.

43. *Решение.* Если $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$ не равно нулю тождественно, то можно считать, что $f_1(x_0)\neq 0$. Рассмотрим дробно – рациональную функцию $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}-\dfrac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Она не равна тождественно нулю и имеет корнем x_0. Кратность этого корня на единицу выше кратности x_0 как корня производной, равной $\dfrac{f_1(x)f_2'(x_0)-f_2(x)f_1'(x_0)}{[f_1(x)]^2}$, откуда справедливость доказываемого утверждения следует непосредственно.

44. *Решение.* Пусть x_0 -- корень кратности k для $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$. Тогда $f(x_0)\neq 0$, ибо иначе x_0 было бы общим корнем для $f(x)$ и $f'(x)$. По предыдущей задаче x_0 будет корнем кратности $k+1$ для многочлена

$f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$, степень которого не превосходит n. Следовательно, $k+1\le n$, $k\le n-1$.

45. *Решение.* Многочлен $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$ должен иметь x_0 корнем $n-$й кратности, т.е. должен равняться $A(x-x_0)^n$, где $A-$постоянная. Разложение по степеням $x-x_0$ после замены $x-x_0=z$ дает $(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n)a_1-(a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1})a_0=Az^n$, причем $a_0=f(x_0)\ne 0$. Отсюда $a_2=\dfrac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3=\dfrac{a_1^3}{a_0^2 3!},\dots,a_n=\dfrac{a_1^n}{a_0^{n-1}n!}$. Заменив $\dfrac{a_1}{a_0}=\alpha$, получим $f(x)=a_0\left[1+\dfrac{\alpha(x-x_0)}{1!}+\dfrac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\alpha^n(x-x_0)^n}{n!}\right]$.

46. *Решение.* Так как $u(x,y)=\dfrac{1}{2}(f(x+yi)+\bar f(x-yi)$ и

$\upsilon(x,y)=\dfrac{1}{2i}(f(x+yi)-\bar f(x-yi))$, заключаем, что система $u=0$, $\upsilon=0$ равносильна системе $f(x+yi)$ $\bar f(x-yi)=0$, откуда $x+yi=z_k$, $x-yi=\bar z_m$ и $x=\dfrac{z_k+\bar z_m}{2}$, $y=\dfrac{z_k-\bar z_m}{2i}$. Здесь z_k, $k=\overline{1,n}-$ корни многочлена $f(z)$, индексы k и m меняются независимо от 1 до n.

47. a) $(x-1)^3(x+1)$; b) $(x^2-4)^3(x^2+4)^2$; c) $(x^2+1)(x^4+1)^3\cdot(x^6+1)^5(x^8+1)^7$.

48. $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{3}(1\pm i\sqrt{2})-$корни $f(x)$, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{3}(1\pm i\sqrt{2})$- корни $g(x)$.

49. a) $\varphi(x)=(x+1)(x-3)$, $f(x)=(x+1)^4(x-3)^2$;

b) $\varphi(x)=x^2-1$, $f(x)=(x-1)^4(x+1)^2$;

c) $\varphi(x)=(x-1)(x^2+1)$, $f(x)=(x-1)^4(x+i)(x-i)$;

d) $\varphi(x)=(x-1)(x-2)$, $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$.

50. a) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$; b) $x^4+(3-i)x^3+(3-3i)x^2+(1-3i)x-i$; c) $x^4-3x^3+2x^2+2x-4$; d) $x^4-19x^2-6x+72$.

51. a) $\dfrac{2}{3}$ и -$\dfrac{2}{3}$; b) a^2 и $(-1)^n$ в.

52. -1 и $(-1)^{n-1}$.

53. a) –216; b) –25 или –16.

54. $p^3+4pq+8r=0$.

55. $p^2s=r$.

57. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=5$, $\alpha_4=7$.

58. $a_1^2-2a_2$, $-a_1^3+3a_1a_2-3a_3$.

59. $9x^3+20x^2+116x-100$.

60. a) $-\alpha_1$, $\alpha_2,\dots$, $-\alpha_n$; b) $\dfrac{1}{\alpha_1}$, $\dfrac{1}{\alpha_2},\dots$, $\dfrac{1}{\alpha_n}$;

c) $\alpha_1 - a, \quad \alpha_2 - a, ..., \quad \alpha_n - a;$ d) $b\alpha_1, \quad b\alpha_2, ..., \quad b\alpha_n$.

61. $\lambda = -3$.

62. $q^3 + pq + q = 0$.

63. $x^4 - ax^2 + 1 = 0$, где $a = \dfrac{\alpha^4 + 1}{\alpha^2}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что уравнение не должно изменяться при замене x на $-x$ и x на $\dfrac{1}{x}$.

64. $(x^2 - x + 1)^3 - a(x^2 - x)^2 = 0$, где $a = \dfrac{(\alpha^2 - \alpha + 1)^3}{(\alpha^2 - \alpha)^2}$. *Указание.* Уравнение не должно меняться при замене x на $\dfrac{1}{x}$ и x на $1 - x$.

66. a) $-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - 2(x-1)(x-2)(x-4) +$
$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}x + 15$

b) $\frac{1}{2}(5-(1-i))x - x^2 - (1+i)x^3$; c) $x^3 - 3x + 1$; d) $x^4 - x^2 + 1$.

67. a) $x + 1 + \dfrac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$; b) $-x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5$;

c) $1 + \dfrac{2}{5}(x-1) - \dfrac{1}{105}(x-1)(4x-9) + \dfrac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4)$, $f(2) = 1\dfrac{389}{945}$;

d) $x^3 - 9x^2 + 21x - 8$.

68. $f(x) = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1 - i\ ctg\dfrac{k\pi}{n})x^k$. *Указание.* Воспользоваться формулой Лагранжа. Произвести деление в каждом слагаемом результата и привести подобные члены, используя результаты задачи 64, гл. II (Комплексные числа).

69. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{y_k(x^n - 1)}{(x - \varepsilon_k)n\varepsilon_k^{n-1}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{y_k(1 - x^n)}{1 - x\varepsilon_k^{-1}}$, $\quad f(0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$.

70. *Решение*. Многочлен x^s представим через свои значения при помощи интерполяционной формулы Лагранжа: $x^s = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^s\varphi(x)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0$.

71. *Решение.* $x^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)} = 1$.

72. a) $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\cdots+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$;

b) $f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1!}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{2!}+\cdots+\frac{(a-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

Указание. Составить интерполяционный многочлен по способу Ньютона.

73. $f(x)=1-\frac{2x}{1!}+\frac{2x(2x-2)}{2!}+\cdots+\frac{2x(2x-2)\cdots(2x-4n+2)}{(2n)!}$. *Указание.* Найти значения искомого многочлена при $x=0,1,2,3,...,2n$.

74. $f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}=$ $=\frac{n!-(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!\,x.}$ *Указание.* Можно решить задачу, пользуясь способом Ньютона. Короче рассмотреть многочлен $F(x)=x\,f(x)-1$, где $f(x)-$искомый многочлен.

75. $f(x)=\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$,, где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.. *Указание.* Рассмотреть многочлен $(x-a)f(x)-1$.

76. Решение. Составим многочлен по способу Ньютона. Ищем $f(x)$ в виде $f(x)=A_0+A_1\frac{x-m}{1!}+A_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{2!}+\cdots+A_m\frac{(x-m)(x-m-1)\cdots(x-m-n+1)}{n!}$, где $m,m+1,...,m+n-$целые значения x, при которых по условию $f(x)$ принимает целые значения.

Пологая последовательно $x=m,m+1,...,m+n$, получим равенства для определения $A_0,A_1,...,A_n$: $A_0=f(m)$,

$A_k=f(m+k)-A_0-\frac{k}{1!}A_1-\frac{k(k-1)}{2!}A_2-\cdots-kA_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$, из которых следует, что все коэффициенты A_k- целые.

При целых значениях x все слагаемые $f(x)$ обращаются в биномиальные коэффициенты с целыми множителями A_k и потому являются целыми числами. Следовательно, $f(x)$ принимает целые значения при целых значениях x.

77. *Решение.* Рассмотрим многочлен $F(x)=f(x^2)$, где $f(x)-$искомый многочлен. Многочлен $F(x)$ степени $2n$ принимает целые значения при $2n+1$ значениях $x=-n,\ -(n-1),...,-1,0,1,...,n$ и в силу предыдущей задачи принимает целые значения при всех целых значениях x.

§ 3.

78. a) x^3+x+1; b) $(x+1)^3(x^2+x+1)$; c) $(x+3)(x^2+4x+2)$;
d) $(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

79. $f_1(x) = x^2 + 1$; $f_2(x) = x^2 + x + 2$, $f_3(x) = x^2 + 2x + 2$.

80. $f_1(x) = x^3 + 2x - 1$, $f_2(x) = x^3 + 2x + 2$, $f_3(x) = x^3 + x^2 + 2$, $f_4(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, $f_5(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, $f_6(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $f_7(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $f_8(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$.

81. a) $(x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$, $(x-2)(x^2+2x+4)$;

b) $(x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$, $(x+2)(x^2-2x+4)$;

c) $(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$, $(x-2)(x+2)(x^2+4)$;

d) $(x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, $(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$;

e) $(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$;

f) $(x-\sqrt[4]{3})^2(x-i\sqrt{3})^2(x+\sqrt[4]{3})(x+i\sqrt[4]{3})^2$, $(x-\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x^2+\sqrt{3})^2$;

g) $\prod_{k=0}^{n-1}(x-(\cos\frac{1+8k}{4n}\pi \pm i\sin\frac{1+8k}{4n}\pi))$, $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2\sqrt[2n]{2}x\cos\frac{8k+1}{4n}\pi+\sqrt[n]{2})$;

h) $\prod_{k=0}^{n-1}(x-(cos\frac{2\pi(1+3k)}{3n} \pm isin\frac{2\pi(1+3k)}{3n}))$, $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2xcos\frac{2\pi(3k+1)}{3n}+1)$;

i) $\prod_{k=0}^{2n-1}(x-(\cos\frac{k\pi}{n} \pm i\sin\frac{k\pi}{n}))$, $(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1)$;

j) $\prod_{k=0}^{2n}(x-(\cos\frac{3k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}))$, $(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$.

83. a) $x^4-(1+i)x^3-(1-i)x^2+(1+i)x-i$, x^5-x^4-x+1;

b) $x^3-3(1+2i)x^2-3(3+4i)x+(11-2i)$, $x^6-6x^5+27x^4-68x^3+135x^2-150x+125$;

c) $x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x+1-i$, $x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$;

d) $x^4+6x^3+(15+2i)x^2+(18+6i)x+8+6i$, $x^8+12x^7+66x^6+216x^5+461x^4+$ $+660x^3+624x^2+360x+100$

e) x^3-ix^2-x+i, x^4-1.

84. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

85. x^d-1, где $d=(m,n)$. *Указание.* Найти общие корни.

86. x^d+a^d, если числа $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ -- нечетные; 1, если хотя бы одно из них четное; $d=(m,n)$.

87. a) $m=3n+1$ и $m=3n+2$; b) $m=6n+1$ и $m=6n+5$; c) $m=6n+2$ и $m=6n+4$.

88. a) $m=6k+1$; b) $m=6k+4$.

89. Нет, так как первая и вторая производные не обращаются в ноль одновременно.

91. a) -3; b) -2; c) -2 - двукратный корень; d) 2; e) целых корней нет.

92. *Решение.* Подставив $\dfrac{k}{l}$ в $f(x)$, получим после умножения на l^n: $a_0k^n + a_1k^{n-1}l + \cdots + a_{n-1}kl^{n-1} + a_nl^n = 0$, откуда a_0k^n делится на l, $a_n\, l^n$ делится на k. Числа k и l взаимно просты. Следовательно a_o делится на l, a_n делится на k.

Расположим теперь $f(x)$ по степеням $(x-m)$:

$f(x) = a_0(x-m)^n + c_1(x-m)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(x-m) + c_n$.

Коэффициенты $c_1,\dots,c_n$ – целые числа, так как m – целое: $c_n = f(m)$. Подставив $x = \dfrac{k}{l}$, получим $a_0(k-ml)^n + c_1(k-ml)^{n-1}l + \cdots + c_{n-1}(k-ml)l^{n-1} + c_nl^n = 0$, откуда следует, что $c_n\, l^n$ делится на $k-ml$, следовательно, $c_n = f(m)$ делится на $k-ml$, ибо l и $k-ml$ взаимно просты.

93. a) 2; b) -3; c) -2; d) -3, $\dfrac{1}{2}$; e) $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{4}$; f) 1, -2, 3; g), h) рациональных корней нет; i) $-\dfrac{1}{2}$ – двукратный корень.

94. a), d) неприводимы; b) $(3x+2)(x^2+x+1)$; c) $(2x+1)(5x-1)(3x+1)$.

95. *Указание.* c) разложить многочлен по степеням $(x-1)$; e) разложить по степеням $x-1$ (или положить $x = y+1$).

96. *Решение.* По задаче 92 числа k и $k-l$ – одновременно нечетные. Следовательно, l – число четное и не может равняться единице.

97. *Решение.* По задаче 92 $k - x_1\, l = \pm 1$, $k - x_2\, l = \pm 1$, откуда $(x_2 - x_1)l = \pm 2$ или 0. Значение *O* отпадает, так как $q > 0$, $x_2 \neq x_1$. Положив для определенности $x_2 > x_1$, получим $(x_2 - x_1)l = 2$. Это равенство невозможно при $x_2 - x_1 > 2$. Положим теперь, что $x_2 - x_1 = 1$ или 2. Единственно возможные значения для k и l, при которых возможно равенство $(x_2 - x_1)\, q = 2$, есть $p = x_1\, q + 1, q = \dfrac{2}{x_2 - x_1}$, откуда единственная возможность для рационального корня $\dfrac{p}{q} = x_1 + \dfrac{1}{q} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, что и требовалось доказать.

99. *Решение.* Разложим на неприводимые множители по модулям 2 и 3:

$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \equiv (x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(\text{mod } 2)$,

$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \equiv (x^2+1)(x^3 - x - 1)(\text{mod } 3)$.

Сомножители неприводимы по соответствующим модулям, их степени различны.

100. *Решение.* Если $f(x+a) = f(x+b)$, то $f(x) = f(x+c) = f(x+2c) = \cdots = f(x+(p-1)c)$, где $c = b - a$. Если

$b \not\equiv a(mod p)$, то $0, c, 2, c, \ldots, (p-1)c$ составляют все элементы поля вычетов, так что $f(x) = f(x+1) = \cdots = f(x+p-1)$.

101. *Решение.* Пусть $\varphi(x)$ – неприводимый множитель $f(x)$. Его степень больше 1. Многочлены $\varphi(x), \varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+p-1)$ все неприводимы и делят $f(x)$. Они не могут быть попарно различны, так как $f(x)$ не может делиться на их произведение, степень которого $\geq 2p$. Следовательно, $\varphi(x) = \varphi(x+1) = \ldots = \varphi(x+p-1)$. Поэтому $\varphi(x) - \varphi(0) = 0$ при $x = 0, 1, \ldots, p-1$, так что степень $\varphi(x)$ не меньше p и $f(x) = \varphi(x)$.

102. a) $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$; b), c) неприводимы; d) $(x^2 - x - 1)(x^2 - 2)$.

103. *Решение.* Многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, не имеющий рациональных корней, может быть разложен, в случае приводимости, только на множители второй степени с целыми коэффициентами:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + \lambda x + m)(x^2 + \mu x + n).$$

Число m, очевидно, должно быть делителем d; $mn = d$. Сравнение коэффициентов при x^3 и x дает $\lambda + \mu = a$, $n\lambda + m\mu = c$.

Если $m \neq n$, то $\lambda = \dfrac{c - am}{n - m} = \dfrac{cm - am^2}{d - m^2}$, что и требовалось доказать.

Если же $m = n$, то $d = m^2$, $c = am$. В этом случае λ и μ определяются из системы, $\lambda + \mu = a$, $\lambda\mu + 2m = b$.

104. *Решение.* В случае приводимости необходимо, чтобы $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (x^2 + \lambda x + m)(x^3 + \lambda' x^2 + \lambda'' x + n)$. Коэффициенты множителей должны быть целыми.

Сравнение коэффициентов даст $nm = e$, откуда следует, что m есть делитель e. Далее,

$$\lambda + \lambda' = a,$$
$$n\lambda + m\lambda'' = d,$$
$$m + \lambda\lambda' + \lambda'' = b',$$
$$n + \lambda\lambda'' + m\lambda' = c,$$

откуда

$$m\lambda'' - n\lambda' = d - an,$$
$$\lambda(m\lambda'' - n\lambda') + m^2\lambda' - n\lambda'' = cm - bn$$

и, следовательно, $(d - an)\lambda + m^2\lambda' - n\lambda'' = cm - bn$. Решая это уравнение совместно с $\lambda + \lambda' = a$, $n\lambda + m\lambda'' = d$, получим $\lambda = \dfrac{am^3 - cm^2 - dn + be}{m^3 - n^2 + ae - dm}$, что и требовалось доказать.

105. a) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x - 3)$; b) неприводим; c) $(x^2 - x - 4)(x^2 + 5x + 3)$; $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 3)$.

106. a) $x^5 + mx^3 - mx + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1)$;

$x^5 + mx^3 - (m+2)x + 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + (m+1)x^2 + (m+1)x - 1)$;

$x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2-1);$
$x^5-2x^3-x+1=(x^2+x-1)(x^3-x^2-1);$
$x^5+2x^3+x+1=(x^2-x+1)(x^3+x^2+2x+1);$
$x^5-4x^3+3x+1=(x^2-x-1)(x^3+x^2-2x-1).$

107. Для привидимости многочлена x^4+px^2+q необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

p^2-4q есть квадрат рационального числа;

q есть квадрат рационального числа μ, $2\mu-p$ есть квадрат рационального числа λ.

108. *Решение.* Пусть $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и $\varphi(x),\psi(x)$ имеют целые коэффициенты. Так как $f(a_i)=-1$, то должно быть $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$, или $\varphi(a_i)=-1$, $\psi(a_i)=1$ и, следовательно,

$$\varphi(a_i)+\ \psi(a_i)=0,\quad i=\overline{1,n}.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оба непостоянные, то степень $\varphi(x)+\psi(x)$ меньше n, откуда следует, что $\varphi(x)+\psi(x)$=0 тождественно. Итак, должно быть $f(x)=-[\varphi(x)]^2$. Это невозможно, так как старший коэффициент $f(x)$ положителен.

109. Если многочлен $n-$степени $f(x)$ при $n=2m$ или $n=2m+1$ приводим, то степень одного из его множителей $\varphi(x)$ не превосходит m. Если $f(x)$ принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной, то $\varphi(x)$ тоже принимает значения ± 1 при тех же значениях переменной. Среди этих значений для $\varphi(x)$ найдется более чем m равных +1 или -1. Но в таком случае $\varphi(x)$=+1 или -1 тождественно.

110. *Решение.* Многочлен $f(x)$ на имеет вещественных корней. Следовательно, если он приводим, его множители $\varphi(x)+\psi(x)$ не имеют вещественных корней и потому не меняют знака при действительных значениях x. Можно считать, что $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$ при всех вещественных значениях x. Так как $f(a_k)=1$, то $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1, k=\overline{1,n}.$ Если степень $\varphi(x)$ (или $\psi(x)$) меньше n, то $\varphi(x)$=1 (или $\psi(x)$=1) тождественно. Следовательно, степени $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны n. Тогда $\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)...(x-a_n)$, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)...(x-a_n)$, где α и β-- некоторые целые числа. Но тогда

$$f(x)=(x-a_1)^2...(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)...(x-a_n)+\alpha\beta(x-a_1)^2...(x-a_n)^2.$$

Сравнение коэффициентов при x^{2n} и при x^n дает систему уравнений $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=0$, не имеющую целых решений. Следовательно, $f(x)$ неприводим.

111. *Решение.* Пусть $a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)\omega(x)$. Один из множителей имеет степень $\le n$; $\psi(x)$ принимает значения $+1$ при $x=a_1a_2,...,a_n$ и ввиду того, что $n\ge 7$, все эти значения $\psi(x)$ должны быть одного знака. Следовательно,

$$\psi(x)=\pm1+\alpha(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)=\pm1+\alpha\varphi(x).$$

Если $\alpha\ne 0$, то $\omega(x)$ тоже имеет степень n и $\omega(x)=\pm1+\beta\varphi(x)$. Но равенство $a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=[\pm1+\alpha\varphi(x)][\pm1+\beta\varphi(x)]$ невозможно, так как многочлен ax^2+bx+c неприводим.

§ 4.

112. a) $\dfrac{1}{12(x-1)}-\dfrac{4}{3(x+2)}+\dfrac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\dfrac{1}{6(x-1)}+\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{9}{2(x-3)}+\dfrac{1}{6(x-4)}$;

$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-2+i}{2(x-i)}+\dfrac{-2-i}{2(x+i)}$; d) $\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{i}{4(x-i)}+\dfrac{i}{4(x+i)}$;

e) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\dfrac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1+i}{x-1-i}+\dfrac{1-i}{x-1+i}+\dfrac{-1+i}{x+1-i}+\dfrac{-1+i}{x+1+i}\right)$;

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$;

$-\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\eta_k}{x-\eta_k}$, $\eta_k=cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n}+i\,sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; j) $\sum\limits_{k=-n}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}C_{2n}^{n+k}}{x-k}$. *Указание.* Проще по формуле Лагранжа.

114. a) $\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)}$;

b) $\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{4(x-1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\dfrac{3}{(x-1)^3}-\dfrac{4}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$;

d) $\dfrac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}\right)$, $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$;

$$\text{e) } \frac{1}{x^m}+\frac{\frac{n}{1!}}{x^{m-1}}+\frac{\frac{n(n+1)}{2!}}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}}{x}+$$

$$+\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{\frac{m}{1!}}{(1-x)^{n-1}}+\frac{\frac{m(m+1)}{2!}}{(1-x)^{n-2}}+\cdots+\frac{\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{(n-1)!}}{1-x};$$

$$\text{f) } \frac{1}{(-4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right);$$

$$\text{g) } \frac{1}{(4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\left(\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right).$$

Указание. f) Положить $\frac{a+x}{2a}=y$; d), h) искать разложения способом неопределенных коэффициентов. Часть найти подстановкой $x=x_1,x_2,...,x_n$ после умножения на общий знаменатель. Затем продифференцировать и снова положить $x=x_1,x_2,...,x_n$.

115. a) $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

b) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$;

c) $\frac{1}{8}\cdot\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-2}{x^2-2x+2}$;

$\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)$;

$$\text{e) } \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right);$$

$$\text{f) } \frac{(-1)^m}{2n+1}\left(\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right);$$

$$\text{g) } \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\sum_{n=1}^{n-1}\frac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}\right);$$

$$\text{h) } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}-x\cos\frac{(2k-1)(2m+1)}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1};$$

i) $\dfrac{1}{(n!)^2 x} + 2\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k x}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}.$

Указание. Разложить по формуле Лагранжа, затем объединить комплексно сопряженные слагаемые.

116. a) $-\dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{x-1}{4(x^2+1)} + \dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2};$

b) $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{6x+2}{x^2+x+1} - \dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2};$

c) $\dfrac{1}{16(x-1)^2} - \dfrac{3}{16(x-1)} + \dfrac{1}{16(x+1)^2} + \dfrac{3}{16(x+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)^2};$

d) $\dfrac{1}{4n^2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2n-1}{x-1} + \dfrac{2n-1}{x+1}\right) +$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\dfrac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-\sin^2\dfrac{k\pi}{n} - \left(n-\dfrac{1}{2}\right)x\cos\dfrac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1}.$$

117. a) $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\dfrac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\dfrac{(\varphi'(x))^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi(x))^2}$.

118. a) 9; b) $-\dfrac{\varphi'(2)}{\varphi(2)} + \dfrac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} = -\dfrac{17}{5}$; c) 17. *Указание.* Использовать задачу 117. В b) разложить $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ на простейшие.

§ 5.

119. a) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$; b) $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$; c) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$;

d) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1^4\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^3 + 6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_2^3\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_3^2$;

e) $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$; f) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$;

g) $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$; h) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 17\sigma_3^2$.

120. a) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$; b) $\sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$; c) $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8_{\sigma_3}$.

121. a) $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$; b) $\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$; c) $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$;

d) $\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_4$; e) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$;

$\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$; g) $\sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$;

h) $\sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$;

$\sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$;

j) $\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$;

$\sigma_2\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_5 + 9\sigma_6$; l) $\sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_4 + 2\sigma_1\sigma_5 - 2\sigma_6$;

m) $\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1\sigma_5 + 6\sigma_6$;

n) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1^2\sigma_4 - 3\sigma_1^2\sigma_4 - 3\sigma_3^2 + 4\sigma_2\sigma_4 + 7\sigma_1\sigma_5 - 12\sigma_6$;

o) $\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_1^2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_2\sigma_4 - 3\sigma_1\sigma_5 + 3\sigma_6$;

p) $\sigma_1^3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 + 2\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6$;

q) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1^2\sigma_4 - 3\sigma_3^2 + 2\sigma_2\sigma_4 - 6\sigma_1\sigma_5 + 6\sigma_6$;

r) $\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 2\sigma_2^3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_4 - 3\sigma_3^2 + 6\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1\sigma_5 + 6\sigma_6$;

s) $\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_1^2\sigma_4 - 3\sigma_3^2 + 6\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6$

122. $\sigma_k^2 - 2\sigma_{k-1}\sigma_{k+1} + 2\sigma_{k-2}\sigma_{k+2} - 2\sigma_{k-3}\sigma_{k+3} + \cdots$.

123. a) $\dfrac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3}$; b) $\dfrac{2(\sigma_1^2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^3)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$; c) $\dfrac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3\sigma_3 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 9\sigma_2^3}{\sigma_3^2}$.

124. a) $\dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$; b) $\dfrac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-1}\sigma_n}{\sigma_n^2}$; c) $\dfrac{\sigma_1\sigma_{n-1} - n\sigma_n}{\sigma_n}$.

125. -4.

126. -35.

127. 16.

128. a) $\dfrac{25}{27}$; b) $\dfrac{35}{27}$; c) $-\dfrac{1679}{625}$.

129. a) $a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$; b) $a_1^3a_3 - a_2^3a_0$;
c) $\dfrac{a_1a_2}{a_0a_3} - 9$; d) $a_1^2a_2^2 - a_1^3a_3 - a_2^3a_0$.

130. $S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$;

$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$;

$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_1^2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 +$
$+ 6\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6$.

131. $2\sigma_2 = S_1^2 - S_2$; $6\sigma_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3$;

$24\sigma_4 = S_1^4 - 6S_1^2S_2 + 8S_1S_3 + 3S_2^2 - 6S_4$;

$120\sigma_5 = S_1^5 - 10S_1^3S_2 + 20S_1^2S_3 + 15S_1S_2^2 - 20S_2S_3 - 30S_1S_4 + 24S_5$;

$720\sigma_6 = S_1^6 - 15S_1^4S_2 + 40S_1^3S_3 + 45S_1^2S_2^2 - 120S_1S_2S_3 - 15S_2^3 - 90S_1^2S_4 + 40S_3^2 +$
$+ 90S_2S_4 + 144S_1S_5 - 120S_6$;

132. a) 859; b) 13; c) 621; d) 16; e) 24.

133. $S_1 = -1$, $S_2 = S_3 = \cdots = S_n = 0$.

134. $9x^3 + 20x^2 + 116x - 100$.

135. $8x^3 - 12x^2 + 726x - 291$.

136. $x^n - a = 0$.

138. *Указание*. Второй столбец умножить на $-S_1$, третий – на $S_2, \ldots$, k–й – на $(-1)^{k-1}S_k$ и добавить к первому затем воспользоваться формулами Ньютона.