МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК: 517.9

АЗИМОВ АЛИЖОН АҲМАДОВИЧ

Степенные и логарифмические преобразования и их приложения

5А130101 – Математика (по направлениям)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

На соискание академической степени магистра

Работа рассмотрена на заседании кафедры и допущена к защите.
Заведующий кафедрой «Алгебры и геометрии»
доцент Г.А.Хасанов
____

Научный руководитель
проф. А.С.Солеев
____

С а м а р к а н д - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка высоко квалифицированных кадров играет важную роль в развитии экономики и общества. Позитивные преобразования в сфере среднего и высшего образования, как отметил Президент Узбекистана И.А.Каримов [1], являются практическим воплощением политики реализации целенаправленных реформ. В этом отношении необходимо отметить постоянное внимание государства к среднему и высшему образованию, подготовке высококвалифицированных научных кадров, развитию информационных технологий.

Данная диссертационная работа посвящена изучению степенных преобразований, которое широко применяется в последнее время. В работе рассматриваются системы алгебраических уравнений в малой окрестности особой точки. С помощью многогранника Ньютона показаны способы нахождения укороченных систем и степенные преобразования данных уравнений**.** Приведены способы последовательно разрешения особенности, которые позволяют находить все ветви алгебраического кривого вблизи особенности и в бесконечности. Также приведены необходимые сведения из теории линейных преобразований, которые необходимы для изучения степенных преобразований. С помощью нескольких примеров показаны различные методы нахождения матриц степенных преобразований.

Актуальность работы. Диссертационная работа на тему «Степенные и логарифмические преобразования и их приложения» посвящена изучению степенных преобразований, которые отчасти разрешает особенности алгебраических кривых и многообразий. В настоящее время разрешение особенностей алгебраических кривых и многообразий является очень актуальным в теории нелинейного анализа.

Цели и задачи исследования: Исследовать алгебраические свойства степенных преобразований, найти методы построения матриц конкретных степенных преобразований.

Степень изученности проблемы: В последние годы бурно развивается область нелинейного анализа. Нелинейные алгебраические уравнения и систем алгебраических уравнений трудно поддаются к решениям. Методом многогранников Ньютона построен алгоритм решения таких уравнений и систем. В этом методе применяются степенные преобразования.

Научная новизна: Основные результаты являются новыми, важными и состоят в следующем:

- Показана связь между элементами многогранников Ньютона и степенных преобразований.
- Изучены новые свойства степенных преобразований
- Предложен алгоритм построения матриц степенных преобразований
- Описан алгоритм решения задач нелинейных уравнений с помощью степенных преобразований.

Объект и предмет исследования: Объектом исследования являются исследования нелинейных уравнений и систем нелинейных полиномиальных уравнений.

Методы исследования: В работе используются методы теории матриц, алгебры полиномов и линейных преобразований, геометрии аффинных многообразий и компьютерных вычислений.

Основые положения, выносимые на защиту:

- Описан алгоритм построения матриц степенных преобразований.
- Найдены решения некоторых систем нелинейных полиномиальных систем уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования:

Работа носит теоретический и практический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в различных задачах разрешения особенностей алгебраических и дифференциальных, а также в решении систем нелинейных уравнений.

- **Апробация работы:** Результаты диссертации докладывались на семинаре *«Методы степенной геометрии и компьютерной алгебры в исследовании алгебраических и дифференциальных уравнений»* под руководством профессоров А. Солеева и И. Икрамова (СамГУ 2014-2016 гг.), а также в XVI научной конференции магистров 2016 и Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых, 2016 год, 29-30 января

Опубликованность результатов: Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1.А.Солеев, А. Азимов. Степенные и логарифмические преобразования. Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых, Термез, 2016 год, 29-30 января, стр. 123-125

2. А. Солеев, А. Азимов Степенные преобразования и их применения. Материалы XVI научной конференции магистров,Самарканд, 2016.стр. 29-31.

Структура и объем диссертации: Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Польный объем диссертации 82 страниц, библиография включает 32 наименований.

Во введении отражена история вопросов, рассмотренных в диссертации, и приведен обзор результатов, связанных с темой исследования. Кратко излагается содержание работы и формулируются основные результаты.

В первой главе работы рассматриваются системы алгебраических уравнений в малой окрестности особой точки. С помощью многогранника Ньютона показаны способы нахождения укороченных систем и степенные преобразования данных уравнений**.** Приведены способы последовательно разрешения особенности, которые позволяют находить все ветви алгебраического кривого вблизи особенности и в бесконечности.

Во второй главе рассматриваются конкретные примеры вычисления ветвей с помощью Многогранников Ньютона и предложено три метода построения матриц степенных преобразований. В приведенных примерах показано хорошее преимущество степных преобразований, которые сильно упрощает данные нелинейные уравнения и систем таких уравнений.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору А. Солееву за постановку задачи и постоянное внимание при работе над диссертацией, а также рецензенту, доценту кафедры алгебры и геометрии А. Баротову за полезные обсуждения и замечания.

ГЛАВА 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1. Неявные функции

В дальнейшем $X = (x_1, \dots\dots, x_n)$ вещественный или комплексный вектор, $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ и $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$ - моном. Рассмотрим функцию $f(X)$, аналитическую в точке $X = 0$. Она разлагается в степенной ряд Маклорена

$$f(X) = \sum f_Q X^Q \,, \tag{1.1}$$

где $Q \in \mathbb{Z}_+^n$ и $f_Q \epsilon \mathbb{C}$ или $f_Q \epsilon \mathbb{R}$, сходящийся в некоторой окрестности $U = \{X : |x_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$ точки $X = 0$. Пусть $f(0) = 0$, т.е. в разложении (1.1) коэффициент f_0 равен нулю.Рассмотрим уравнение

$$f(X) = 0 \tag{1.2}$$

Совокупность решений уравнения (1.2) в окрестности U образует аналитическое множеств [8] точнее говоря, аналитическую гиперповерхность, проходящую через точку X=0. Линейные члены в разложении (1.1) суть

$$f_{E_1} x_1 + f_{E_2} x_2 + \cdots + f_{E_n} x_n,$$

где $E_i - i$ −й единичный вектор; при этом

$$f_{E_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X=0}, \quad i = 1, \dots., n.$$

Если хотя бы один коэффициент f_{E_i} не равен нулю,то точка $X = 0$ является *простой точкой* гиперповерхности (1.2), в противном случае она *называется критической.*

Начнем с разрешения уравнения (1.2) в окрестности простой точки $X = 0$, считая для определенности, что

$$a \stackrel{\text{def}}{=} f_{E_1} \neq 0. \tag{1.3}$$

Обозначим $X'' = (x_1, \dots\dots, x_n)$, $\|Q\| = q_1 + \cdots + q_n$.

Теорема 1.1. *Пусть функция* $f(X)$ *аналитическая в нуле* $X = 0, f(0) = 0$ *и выполнено* (1.3). *Тогда уравнение* (1.2) *имеет аналитическое решение*

$$x_1 = \varphi(X'') = \sum \varphi_{R''} \, X''^{R''}, \tag{1.4}$$

где $R'' \in Z_+^{n-1}$ При этом

$$\varphi_{R''} = \beta_{R''}(\{f_Q\})/a^{k+1}, \tag{1.5}$$

где $\beta_{R''}$ *суть многочлены степени* k+1 *от коэффициентов*

$$f_Q \text{ с } \|Q\| \leq k \stackrel{\text{def}}{=} \|R''\|.$$

Доказательство. Первое утверждение см. [9, § 184; 18, гл. I, п. 2.1]. Второе утверждение теоремы также следует из доказательства в [9] ибо для a = -1 там доказано, что $\varphi_{R''}$ суть многочлены степени $\|R''\| + 1$ от коэффициентов f_Q с $\|Q\| \leq \|R''\|$. Если положить $\tilde{f} = -f/a$, то получаем случай с a = -1 и $\widetilde{f_Q} = -f/a$. Доказательство окончено.

Первое утверждение теоремы 1.1 это теорема Коши о неявной функции. Многочлены $\beta_{R''}$ можно выписать в явном виде для небольших $\|R''\|$. Например, при $n = 2$ имеем

$$\beta_1 = -af_{10}, \beta_2 = -f_{20}a^2 + f_{11}f_{10}a - f_{02}f_{10}^2.$$

Теперь рассмотрим ряд (1.1), у которого коэффициенты f_Q суть функции от координат $Y = (y_1, \dots\dots, y_m)$ (вещественных или комплексных), определенные и однозначные в некоторой области ***D.*** Пусть в этой области

$$|a| > \varepsilon > 0, \varepsilon = const. \tag{1.6}$$

Тогда теорема 1.1 остается справедливой для всех $Y \in D$. Пусть $\xi_1(Y), \dots, \xi_1(Y)$-базовые функции от Y. Мы будем рассматривать случаи, когда все коэффициенты f_Q суть рациональные функции от $\xi_1, \dots, \xi_l$, т.е. суть отношения многочленов от них. Согласно (1.5) в этих случаях коэффициенты $\varphi_{R''}$ ряда (1.4) суть также рациональные функции от $\xi_1, \dots, \xi_l$, которые могут быть явно вычислены для всех показателей R" с нормой $\|R''\|$, ограниченной весьма большим числом. При этом специфика функций не играет роли; нужно только свойство (1.6). Обычно теоремы о неявной функции (вроде теоремы 1.1) носят локальный характер (для малых $|x_i|$). Но при указанной зависимости от У теорема 1.1 является локальной по X и глобальной по У.

Следуя Гурса [9, § 161-164], рассмотрим числовой ряд

$$\sum a_Q, \tag{1.7}$$

в котором индексы $Q = (q_1, \dots, q_n)$ пробегают n −мерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$. Пусть индексы Q изображены точками в $\mathbb{R}^n$. Вообразим себе в $\mathbb{R}^n$ бесконечную возрастающую последовательность областей

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots \subset \Omega_k \subset \dots,$$

в пределе при $k \to \infty$ занимающую все пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$s_k = \sum a_Q, \text{ по } Q \in \Omega_k,$$

т.е. сумма тех членов ряда (1.7), индексы которых лежат в области Ω_k. Если при неограниченном возрастании k сумма s_k стремится к пределу s и этот предел не зависит от выбора последовательности областей $\{\Omega_k\}$,то ряд (1.7) сходится к сумме s. Если при некоторой последовательности областей $\{\Omega_k\}$, соответствующие частичные суммы ряда

$$\sum |a_Q|, \tag{1.8}$$

стремятся к пределу, то ряд (1.7) абсолютно сходится, и суммы рядов (1.7) и (1.8) не зависят от выбора последовательности областей $\{\Omega_k\}$.

Все сказанное применимо к кратным степенным рядам вида (1.1). Пусть в разложении (1.1) все подобные члены приведены; множество $S = \{Q: f_Q \neq 0\}$ называется носителем разложения (1.1) и обозначается supp$f$ или S(f). Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан выпуклый конус T. Будем говорить, что разложение (1.1) принадлежит классу C(T), если supp$f \subset T$.

Пусть конус T выступающий и $T_1, \dots\dots, T_2$ — его остов. Если ряд (1.1) абсолютно сходится для $X = X_0$, т.е. сходится ряд

$$\sum |f_Q| |X_0|^Q,$$

то согласно [10, гл. I, п. 3.4] ряд (1.1) абсолютно сходится при всех X, удовлетворяющих неравенствам

$$|X|^{T_i} \leq |X_0|^{T_i}, i = 1, \dots., l.$$

Поэтому ряд (1.1) класса $C(T)$ будем называть сходящимся, если он абсолютно сходится в области вида

$$U(T, \varepsilon) = \{X: |X|^{T_i} \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$. Для $n = 2$ строение таких областей подробно рассмотрено в [10,гл. I].

Замечание 1.1. Пусть C — некоторый многогранный выпуклый n-мерный конус в $\mathbb{R}^n_*$, который задается неравенствами $\langle P, T_i \rangle < 0$, $i = 1, \dots., l.$ Тогда двойственный к C конус T является конической оболочкой векторов $T_1, \dots, T_l$. Можно считать, что они образуют остов конуса T. Конусу $C \subset \mathbb{R}^n_*$ поставим в соответствие множество U(T, ε).

Теорема 1.2. [10, гл. I, п. 3.5]. *Сумма f ряда* (1.1) *класса* C(T) *является аналитической функцией во всех внутренних точках множества сходимости, исключая, быть может, координатные подпространства.*

Рассмотрим теперь конус T с остовом $E_1, T_2, \dots, T_l$, причем у векторов $T_2, \dots, T_l$ равна нулю первая координата. Тогда теорему 1.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3. Пусть $T_1 = E_1$, у векторов $T_2, \dots, T_l$ равна нулю первая координата и $T_1, \dots, T_l$ - остов конуса T, а $T_2, \dots, T_l$ - остов конуса T''. Пусть вектор $K = (1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}_*^n$ такое, что $\langle K, T_i \rangle > 0$ для $i = 2, \dots, l$ и $\langle K'', Q'' \rangle \geq 1$ для всех $Q'' \in T'' \cap \mathbb{Z}^{n-1}$, $Q'' \neq 0$. Пусть ряд (1.1) принадлежит классу $C(T)$ и абсолютно сходится в некотором множестве $U(T, \varepsilon)$. Пусть $f_0 = 0$ и выполнено (1.3). Тогда уравнение (1.2) имеет решение (1.4), где ряд φ принадлежит классу $C(T'')$ и абсолютно сходится в некотором множестве $U(T, \varepsilon'')$. При этом справедлива формула (1.5), где $\beta_{R''}$ суть определенные многочлены степени не выше $k+1$ от коэффициентов f_Q с $\langle K, Q \rangle \leq k \stackrel{\text{def}}{=} \langle K'', R'' \rangle$.

Доказательство. Почти полностью повторяем доказательство теоремы 1.1. Надо только заметить, что $a\varphi_{R''}$ есть сумма членов вида

$$f_Q \varphi_{R_1''} \dots \varphi_{R_3''} \qquad (1.9)$$

где

$$Q'' + R_1'' + \dots + R_3'' = R'', Q = (q_1, Q''), s \geq 1 \qquad (1.10)$$

При этом $\langle K'', Q'' \rangle \geq 0$, $\langle K'', R_j'' \rangle \geq 1$, и если $\langle K'', Q'' \rangle = 0$, то $s \geq 2$. Следовательно, в сумме (1.10) имеется по крайней мере два слагаемых, Q'' и R_1'' или R_1'' и R_2'', для каждого из которых скалярное произведение с вектором K'' не меньше единицы. Поэтому в сумме (1.10) выполнены неравенства $\langle K'', R_j'' \rangle < k$ для $j = 1, \dots, s$. То, что носитель ряда (1.4) лежит в конусе T'', доказывается индукцией по k. Действительно, в равенстве (1.10) точка $,Q''$ принадлежит T'', поэтому если вектор R'' не лежит в конусе T'', то согласно равенству (1.10) по крайней мере один вектор R_j'' не лежит в конусе T'', ибо $Q'' \in T''$ по условию. Но тогда по индуктивному предположению в произведении (1.9) соответствующий множитель $\varphi_{R_j''}$ равен нулю, т.е. все члены (1.9) аннулируются. Доказательство окончено.

Замечание 1.2. Все утверждения относительно зависимости коэффициентов f_Q и $\varphi_{R''}$ от дополнительных координат, сделанные после доказательства теоремы 1.1, остаются в силе и для теоремы 1.3.

§ 2. Многогранник Ньютона

В настоящем параграфе определяются укорочения полиномов и изучаются те свойства этих укорочений, которые используются для укорочения систем алгебраических уравнений (см. [11, 10]).

В дальнейшем мы будем рассматривать функции от τ лишь при $\tau \to +\infty$ в вещественном случае и при $\tau \to \infty$ в комплексном. Ниже подробно рассматривается вещественный случай. Аналогичные рассуждения пригодны и в комплексном случае, если τ заменить на $|\tau|$ и сравнивать модули мономов. Напомним, что при $\tau \to +\infty$ имеем $\tau^{p_1} < \tau^{p_2}$, если $p_1 < p_2$,

$$\tau^p \to \begin{cases} 0, \text{если } p < 0, \\ 1, \text{если } p = 0, \\ +\infty, \text{если } p > 0, \end{cases}$$

и $\tau^p > 0$ при $\tau > 0$ и любом действительном p.

Вектор $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_*^n$ назовем (векторным) порядком векторной функции

$$(b_1\tau^{p_1}(1 + o(1)), \dots, b_n\tau^{p_n}(1 + o(1))),$$

где $o(1)$ – функция, стремящаяся к 0, и все $b_i \neq 0$..

Лемма 2.1. Пусть

$$x_i = b_i\tau^{p_i}(1 + o(1)),\ i = 1, \dots, n,\ P = (p_1, \dots, p_n) \neq 0. \qquad (2.1)$$

$$x_i = b_i^{'}\tau^{'p_i^{'}}(1 + o(1)), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad P = (p_1^{'}, \dots, p_n^{'}) \neq 0. \qquad (2.2)$$

суть различные параметризации одной кривой линии в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что $p_i = \lambda p_i^{'}, i = 1, \dots, n,$ или, в векторной записи,

$$P = \lambda P^{'}.$$

Доказательство. Так как (2.1) задает взаимно однозначное отображение полупрямой $a < \tau < +\infty$ на кривую линию, а (2.2) на ту же кривую линию взаимно однозначно отображает полупрямую $a^{'} < \tau^{'} < +\infty$, то существует взаимно однозначное отображение $\tau^{'} = \xi(\tau)$ такое, что $\tau^{'} \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$ и выполнены соотношения

$$b_i \tau^{p_i}\big(1 + o(1)\big) = b_i^{'}[\xi(\tau)]^{p_i^{'}}\big(1 + o(1)\big), \qquad i = 1, \dots\dots, n. \qquad (2.3)$$

Найдем $\xi(\tau)$, исследовав одно из этих равенств. По условию $P^{'} \neq 0$, следовательно, одно из $p_i^{'}$ отлично от нуля. Пусть $p_1^{'} \neq 0$, тогда из (2.3) для $i = 1$ получим

$$\xi(\tau) = [b_1/b_1^{'}]^{1/p_1^{'}}\,\tau^{p_1/p_1^{'}}\big(1 + o(1)\big).$$

Так как $\xi(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$, то $\tau^{p_1/p_1^{'}} = \lambda > 0$. После подстановки найденного выражения $\xi(\tau)$ в равенства (2.3) они должны обратиться в тождества:

$$b_{\boldsymbol{i}} \tau^{p_i}\big(1 + o(1)\big) = b_i^{'}[b_1/b_1^{'}]^{p_i^{'}/p_1^{'}}\tau^{(p_1/p_1^{'})p_i^{'}}\big(1 + o(1)\big), \;\; i = 1, \dots, n.$$

откуда заключаем, что

$$p_i = (p_1/p_1^{'})p_i^{'} = \lambda p_i^{'}, \qquad\qquad b_{\boldsymbol{i}} = \varkappa^{p_i^{'}}\, b_i^{'}, i = 1, \dots, n,$$

где $\varkappa = [b_1/b_1^{'}]^{1/p_1^{'}}$. Лемма доказана.

Итак, если у кривой линии есть параметризация, имеющая порядок P, то порядок $P^{'}$ любой другой параметризации может отличаться от P лишь положительным скалярным множителем. Иначе говоря, порядок кривой линии определен с точностью до произвольного положительного множителя.

Вектор $Q = (q_1, \dots, q_n)$, где q_i действительны, назовем (векторной) степенью монома

$$X^Q \overset{\text{def}}{=} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots . x_n^{q_n} \tag{2.4}$$

Если нас интересуют только вещественные значения X, то рассматриваются лишь те значения x_i, при которых $x_i^{q_i}$ действительны, что всегда будет при $x_i > 0$. В дальнейшем, не оговаривая этого особо, для вещественных X мы будем подразумевать два основных случая:

1) случай, когда все рассматриваемые векторные степени имеют целые компоненты. Тогда под X подразумевается любая точка пространства $\mathbb{R}^n$;

2) случай, когда на векторные степени нет ограничений. Тогда под X подразумевается точка из $\mathbb{R}_+^n = \{X \geq 0\}$.

Если в произведении (2.4) положить

$$x_i = \tau^{p_i}, i = 1, \dots, n, \tag{2.5}$$

$$X^Q = x_1^{q_1} \dots . x_n^{q_n} = \tau^{p_i q_i + \dots + p_n q_n} = \tau^{\langle P,Q \rangle},$$

т.е. получается степенная функция от τ, показатель которой есть скалярное произведение порядка P кривой линии (2.5) и степени Q произведения (2.4).

Пусть S — дискретное множество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сумму произведений типа (2.4) с действительными или комплексными коэффициентами

$$f(X) = \sum f_Q X^Q \quad \text{по} \quad Q \epsilon S. \tag{2.6}$$

предполагая, что подобные члены уже приведены, т.е. каждой векторной степени Q отвечает одно и только одно слагаемое $f_Q X^Q$ c $f_Q \neq 0,$ т.е. S — носитель суммы (2.6).

Если в $f(X)$ сделать подстановку (2.5), то получим

$$f(\tau^{p_1}, \dots, \tau^{p_n}) = \sum f_Q \, \tau^{\langle P,Q \rangle} \text{ по } Q \epsilon S.$$

Выделим в этой сумме те слагаемые, которые имеют наибольшую степень по τ, т.е. те $Q^{'} \epsilon S$, для которых

$$\langle P, Q^{'} \rangle = sup\langle P, Q \rangle = c_P \text{ по } Q \epsilon S. \tag{2.7}$$

Согласно § 1 гл. I те точки $Q \epsilon S$, на которых скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ достигает максимального значения c_P, образуют граничное подмножество S_P множества S. Кроме того, множеству $S = supp\ f$ соответствует внешняя выпуклая оболочка $\Gamma(f) \stackrel{\text{def}}{=} CNV\, S$, которую называют многогранник Ньютона суммы f. Граница $\partial\Gamma$ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$; каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют граничное подмножество $S_j^{(d)}$ и касательный конус $T_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}^n$, а также нормальный конус $U_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}_*^n$. Если $P \epsilon U_j^{(d)}$, то $S_P = S_j^{(d)}$. Каждому граничному подмножеству $S_j^{(d)}$ множества S соответствует своя подсумма

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum f_Q X^Q \text{ по } Q \epsilon S_j^{(d)} \tag{2.8}$$

суммы (2.6), которую называют укорочением суммы (2.6) по порядку P и обозначают также $\hat{f}_P(X)$. При этом нормальный и касательный конусы относят также к укорочению.

Пример 2.1. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3 \tag{2.9}$$

Тогда

$$\hat{f}_P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{если } P = (-1, -1, -1), \tag{2.10}$$

$$\hat{f}_P = x_1 x_2 x_3, \quad \text{если } P = (1,1,1), \tag{2.11}$$

$$\hat{f}_P = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 x_3, \text{ если } \quad P = (-1, -1, 0),$$

и т.д. Заметим, что по двум порядкам, $P=(1,1,1)$ и $P=(-1,-1,-1)$, отличающимся только знаками, укорочения разные. Это не удивительно, ибо вектору $P=(1,1,1)$ соответствует подстановка

$$x_1=b_1\tau\big(1+o(1)\big), x_2=b_2\tau\big(1+o(1)\big),\ x_3=b_3\tau\big(1+o(1)\big),$$

и так как везде $\tau\to\infty$, то здесь $x_1,x_2,\ x_3\to\infty$. Вектору же $P=(-1,-1,-1)$ соответствует подстановка

$$x_1=b_1\tau^{-1}\big(1+o(1)\big), x_2=b_2\tau^{-1}\big(1+o(1)\big),\ x_3=b_3\tau^{-1}\big(1+o(1)\big),$$

где $x_1,x_2,\ x_3\to 0.$ Итак, при $P=(1,1,1)$ функция $f(X)$ рассматривается в окрестности точки $X^0=(\infty,\infty,\infty)$, а при $P=(-1,-1,-1)$ функция $f(X)$ рассматривается в окрестности точки $X^0=(0,0,0)$.

Укорочение функции $f(X)$ по порядку P дает ведущий член при подстановках вида (2.1), что точно выражено в следующих свойствах:

1) $\hat{f}_P(X)$ однородно по порядку P, т.е.

$$\hat{f}_P(b_1\tau^{p_i},\dots,b_\mathrm{n}\tau^{p_n})=\hat{f}_P(b_1,\dots,b_\mathrm{n})\tau^c;$$

2) $\hat{f}_P(b_1\tau^{p_1}\big(1+o(1)\big),\dots,b_\mathrm{n}\tau^{p_n}\big(1+o(1)\big)=\hat{f}_P(b_1,\dots,b_\mathrm{n})\tau^c+o(1)\tau^c;$ возможно, что $\hat{f}_P(b_1,\dots,b_\mathrm{n})=0;$

3)$f(b_1\tau^{p_1}\big(1+o(1)\big),\dots,b_\mathrm{n}\tau^{p_n}\big(1+o(1)\big)=\hat{f}_P(b_1,\dots,b_\mathrm{n})\tau^c+o(1)\tau^c.$

Доказательства, если их проводить последовательно, очевидны. Отметим, что свойство 3) выражает сущность укорочения — выделение части $\hat{f}$, определяющей асимптотическое поведение всей функции f на кривой линии порядка P.

Теорема 2.1. Если кривая (2.1) является решением уравнения $f(X)=0$, то ее первое приближение

$$x_i=b_i\tau^{p_i}, i=1,\dots,n, \tag{2.11}$$

является решением соответствующего укороченного уравнения $\hat{f}_P(X) = 0$.

Доказательство тривиально следует из свойств укорочений. Отсюда получаем, что для решения (2.1) уравнения $f(X) = 0$ векторный

коэффициент B должен быть корнем уравнения $\hat{f}_P(P) = 0$. Это подсказывает путь поиска асимптотических (или локальных) разложений для решений уравнения $f(X) = 0$. Чтобы любое укорочение привести к некоторому стандартному виду, используем степенные преобразования. *Размерность укорочения* $\hat{f}_j^{(d)}$ равна размерности d соответствующей грани $\Gamma_j^{(d)}$.

Пример 2.2. ([3] продолжение примеров 3.1 и 5.1 гл. I). Пусть задан многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^3 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_2^3.$$

Для этого многочлена носитель $S(f) = \{Q_1 = (1,1,1,), Q_2 = (4,0,0), Q_3 =$ *0,4,0,Q4=0,0,4,Q5=2,0,2.* Многогранник Ньютона $\Gamma f -$ тетраэдр. Каждой из его вершин, ребер, граней соответствует свой нормальный конус.

§ 3. Степенные преобразования

Пусть $\alpha = (\alpha_{ij}) -$ квадратная матрица размера n с вещественными элементами α_{ij} и $det\alpha \neq 0$. Преобразование

$$y_i = x_i^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}}, i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

называется степенным преобразованием с матрицей α. Обратное преобразование

$$x_i = y_i^{\beta_{i1}} \dots . y_n^{\beta_{in}}, \ i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

также является степенным преобразованием с матрицей $\beta = (\beta_{ij}) = \alpha^{-1}$. Если ввести векторы $lnX = (lnx_1, \dots, lnx_n)$ и lnY, то степенные преобразования (3.1) и (3.2) суть линейные преобразования этих векторов: $lnY = \alpha lnX$ и $lnX = \beta \ lnY$.

Отметим некоторые свойства степенного преобразования (3.1).

1. При преобразовании (3.1) $X^Q = Y^{\tilde{Q}}$, где

$$\tilde{Q} = \beta^* Q \quad (3.3)$$

и $\beta^* -$ транспонированная матрица β. Действительно,

$$X^Q = \langle lnX, Q\rangle = exp\langle\beta lnY, Q\rangle = exp\langle lnY, \beta^* Q\rangle = Y^{\beta^* Q}.$$

Итак, при степенном преобразовании (3.1) векторные показатели

испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы

$$f(X) = \sum f_Q X^Q \text{ по } Q \in S, \quad (3.4)$$

которая при преобразовании (3.2) перейдет в сумму

$$f(X) = g(Y) = \sum g_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}} \text{ по } \tilde{Q} \in \tilde{S}, \quad (3.5)$$

где $\tilde{Q} = \beta^* Q, \tilde{S} = \beta^* S, g_{\tilde{Q}} = f_Q$. Геометрические конструкция множеств S и S' также связаны тем же линейным преобразованием (3.3). Поэтому при преобразовании (3.1) укорочение переходит в укорочение, т.е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

2. При преобразовании (3.1) кривая

$$x_i = b_i \tau^{p_i}\big(1 + o(1)\big), i = 1, \dots, n, \tau \to \infty,$$

с векторным порядком $P = (p_1, \dots, p_n)$ перейдет в кривую

$$y_i = \tilde{b}_i \tau^{\tilde{p}_i}\big(1 + o(1)\big), i = 1, \dots, n,$$

с векторным порядком

$$\tilde{P} = \alpha P. \qquad (3.6)$$

Действительно, $lnX = ln\tau\big(P + o(1)\big), lnY = ln\tau(\tilde{P} + o(1))$ и $lnY = \alpha lnX$, т.е. $ln\tau\left(\tilde{P} + o(1)\right) = ln\tau\big(\alpha P + o(1)\big)$. Следовательно, в пространстве $\mathbb{R}_*^n$ порядков P степенное преобразование (3.1) индуцирует линейное преобразование (3.6). Это преобразование сопряжено преобразованию (3.3). Поэтому пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ оказываются сопряженными, и скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ сохраняется при степенном преобразовании (3.1). В частности, конусы укорочений $U_k^{(d)}$ суммы (3.4) переходят в конусы укорочений $U_k^{'(d)}$ суммы (3.5). Вообще говоря, все геометрические объекты сопряженных пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ испытывают линейные преобразования (3.3) и (3.6) и сохраняют все свои линейные свойства.

3. Преобразование (3.1) взаимно однозначно отображает множество $\{X: 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ на множество $\{\mathrm{Y}:\ 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица α унимодулярно, т.е. все α_{ij} целые, $det\alpha = \pm 1$. В этой главе используются преимущественно степенные преобразования с унимодулярной матрицей α.

4. Пусть, кроме (3.1), имеется степенное преобразование

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \dots y_n^{\gamma_{in}}, i = 1, \dots, n,$$

с матрицей $\gamma = (\gamma_{ij})$. Тогда координаты Z связаны с координатами X степенным преобразованием с матрицей $\gamma\alpha$, т.е. степенные преобразования образуют группу, а степенные преобразования с унимодулярной матрицей образуют ее подгруппу.

Пусть $f(X) -$ произвольный многочлен Лорана и $d -$ размерность его многогранника Ньютона $\Gamma = \Gamma(f)$; будем называть d размерностью многочлена $f(X)$. В $\mathbb{R}_*^n$ рассмотрим линейное подпространство $N(f)$, нормальное к $\mathbf{\Gamma}(f)$. Очевидно, $\dim \mathbf{\Gamma} + \dim N = \mathrm{n}$.

Теорема 3.1. Пусть размерность суммы (3.4) есть $d < n$. Тогда существует матрица α и вектор $T \in \mathbb{R}^n$ такие, что при степенном преобразовании (3.1)

$$X^T f(X) = g(y_{1,\dots\dots,} y_d).$$

Доказательство. Согласно результатам § 11 гл. I [3] существуют такие матрица α и вектор T, что множество (11.7) гл. I [1] лежит в координатном подпространстве, натянутом на $E_1, \dots, E_d$. Но это означает, что $X^T f(X)$ при степенном преобразовании (3.1) переходит в сумму

$$g(Y) = \sum g_Q Y^Q \text{ по } Q \in \alpha^{*-1}(S + T), \tag{3.7}$$

в которой у всех Q равны нулю компоненты $q_{d+1}, \dots, q_n$. Следовательно, в сумме (3.7) координаты $y_{d+1}, \dots, y_n$ встречаются только в нулевой степени, т.е. отсутствуют. Доказательство окончено.

Теорема 3.2. Пусть $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ - укорочение конечной суммы (3.4). Существуют матрица α и вектор $T \in \mathbb{R}^n$ такие, что при степенном преобразовании (3.1)

$$X^T \hat{f}_j^{(d)}(X) = \hat{g}(y_1, \dots, y_d), \tag{3.8}$$

$$X^T f(X) = g(Y) = \sum g_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}}. \tag{3.9}$$

При этом $g(Y) -$ многочлен, т.е. в $\tilde{S}$ все $\tilde{Q} \geq 0$.

Доказательство следует из решения задачи 5 § 11 гл. I.[3]

Следствие. Для укорочения $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ многочлена Лорана (3.4) существуют унимодулярная матрица α и целочисленный вектор Т такие, что выполнены равенства (3.8), (3.9). При этом $\hat{g} -$ многочлен от $y_1, \dots, y_d$, а $g -$ многочлен от $y_{d+1}, \dots, y_n$.

§ 4. Асимптотическое решение алгебраического уравнения

Рассмотрим уравнение

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Q \in S} f_Q X^Q = 0 \qquad \textit{(4.1)}$$

с конечным носителем $S = suppf \subset \mathbb{Z}^n$, т.е $f(X) -$ многочлен Лорана. Отыскание тех решений уравнения (4.1), у которых хотя бы одна из координат тождественно равна нулю или бесконечности, будем считать решенной задачей, так как она приводится к нескольким задачам, аналогичным исходной, но с меньшими размерностями. Поэтому будем искать такие решения уравнения (4,1), у которых ни одна координата не равна нулю или бесконечности тождественно. Для таких решений в уравнении (4.1) можно производить сокращения на любой моном, что индуцирует параллельный перенос множества S в $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (4.1) определяет в пространстве координат X алгебраическую гиперповерхность $\mathcal{F}$. Нас интересуют те части этой гиперповерхности, на которых можно хотя бы одну координату x_i устремить к нулю или бесконечности, т.е. части, на которых существует кривая вида (2.1) с $P \neq 0$ и всеми $b_i \neq 0$, удовлетворяющая уравнению (4.1). Согласно теореме 2.1 первое приближение (2.11) такой кривой (2.1) удовлетворяет соответствующему укороченному уравнению

$$\hat{f}_P(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Q \in S_P} f_Q X^Q = 0 \qquad (4.2)$$

Согласно результатам § 2 гл. I имеем [3] $S_P = S_j^{(d)}$ для $P \in U_j^{(d)}$. Причем объединение всех $U_j^{(d)}$ заполняет $\mathbb{R}_*^n \setminus \{0\}$, т.е. каждый вектор $P \neq 0$ попадает в какой-то нормальный конус $U_j^{(d)}$. Поэтому надо составить список всех граничных подмножеств $S_j^{(d)}$ и указать их нормальные конусы $U_j^{(d)}$, т.е. для множества $S = suppf$ решить задачу 1 из § 2 гл. I.[3]

Теперь заметим, что нуль мерное укорочение $\hat{f}_j^{(0)}$ является мономом $f_Q X^Q$. Уравнение $\hat{f}_j^{(0)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} f_Q X^Q = 0$ имеет только такие решения X, у которых одна из координат x_i тождественно равна нулю. По теореме 2.1 этому уравнению должно удовлетворять первое приближение (2.11) кривой (2.1) со всеми $b_i \neq 0$. Но это невозможно, ибо на кривой (2.11)

$$\hat{f}_j^{(0)}(X) \equiv f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q \rangle} \neq 0.$$

Поэтому из списка граничных подмножеств надо выбросить все вершины многогранника $\mathbf{\Gamma}$, а из пространства $\mathbb{R}_*^n$ – все их нормальные конусы $U_j^{(0)}$. Теперь для каждого граничного подмножества $S_j^{(d)}$ с $d > 0$ будем искать свою часть гиперповерхности $\mathcal{F}$. Для этого к паре $f(X)$, $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ применим преобразования, указанные в следствии теоремы 3.2, т.е. умножение на моном X^T и степенное преобразование (3.1). Получим пару — многочлен Лорана и его укорочение–

$$g(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum g_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}} \text{ по } \tilde{Q} \in \tilde{S} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{*-1}(S+T), \tag{4.3}$$

$$\hat{g}_j^{(d)}(y_1, \dots, y_d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum g_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}} \text{ по } \tilde{Q} \in \tilde{S}_j^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{*-1}\left(S_j^{(d)} + T\right), \tag{4.4}$$

где $\tilde{g}$ – обычный многочлен и g – обычный многочлен по $y_{d+1}, \dots, y_n$.

При этом $\tilde{P} = \alpha P \in \widetilde{U}_j^{(d)} = \alpha U_j^{(d)}$ и нормальный конус $\widetilde{U}_j^{(d)}$ лежит в координатном подпространстве $\tilde{p}_1 = \cdots = \tilde{p}_d = 0$. Касательный конус $\tilde{T}_j^{(d)}$ содержит ограничения только на $\tilde{q}_{d+1}, \dots, \tilde{q}_n$ и лежит в конусе

$$\tilde{q}_{d+1}, \dots, \tilde{q}_n \geq 0$$

Укороченное уравнение

$$\hat{g}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_j^{(d)}(y_1, \dots, y_d) = 0 \tag{4.5}$$

определяет в $d-$ мерном пространстве поверхность $\hat{\mathcal{G}}$ размерности не более $d-1$. Теперь нам надо найти всю эту поверхность. Выделим сначала подмножество $\hat{\mathcal{G}}_c$ всех ее критических точек Y, в которых

$$\hat{g}(Y)=\frac{\partial\hat{g}}{\partial y_1}=\cdots=\frac{\partial\hat{g}}{\partial y_d}=0. \tag{4.6}$$

Остальную часть поверхности $\hat{\mathcal{G}}\setminus\hat{\mathcal{G}}_c$ можно разбить на конечное число частей $\hat{\mathcal{G}}_1,\dots,\hat{\mathcal{G}}_k$, в каждой из которых хотя бы одна из частных производных $\partial\hat{g}/\partial y_i$ не обращается в нуль и координата y_i может быть выражена как функция от остальных координат $y_1,\dots,y_d$. Пусть $\hat{\mathcal{G}}_1-$ такая часть поверхности $\hat{\mathcal{G}}\setminus\hat{\mathcal{G}}_c$, на которой $\partial\hat{g}/\partial y_1\neq 0$ и $y_1=\psi_1(y_2,\dots,y_d)$. В многочлене Лорана $g(Y)$ сделаем замену координат $y_1=\psi_1+z_1$ и получим многочлен

$$h(z_1,\psi_1,y_2,\dots,y_d,y_{d+1},\dots,y_n)\stackrel{\text{def}}{=}g(Y),$$

который запишем как многочлен $\breve{h}$ от $\breve{Z}=(z_1,y_{d+1},\dots.,y_n)$:

$$\breve{h}=\sum\breve{h}_{\breve{Q}}\breve{Z}^{\breve{Q}}, \tag{4.7}$$

с коэффициентами $\breve{h}_{\breve{Q}}$, зависящими от $\psi_1,y_2,\dots,y_d$. В "точке" $z_1=y_{d+1}=\cdots=y_n=0$ имеем $\partial\breve{h}/\partial z_1=(\partial\hat{g}/\partial y_1)(\psi_1,y_2,\dots,y_d)\stackrel{\text{def}}{=}a\neq 0$, и показатели $\breve{Q}$ разложения (4.7) лежат в касательном конусе $\breve{T}$, равном проекции конуса $\tilde{T}$ на подпространство координат $\tilde{q}_1,\tilde{q}_{d+1},\dots,\tilde{q}_n$. Теперь к уравнению $\breve{h}(\breve{Z})=0$ можно применить теорему 1.3 о неявной функции и получить его решения в виде ряда

$$z_1=\varphi(y_{d+1},\dots,y_n)\stackrel{\text{def}}{=}\sum\varphi_{R''}Y''^{R''},$$

где

$$Y''=(y_{d+1},\dots,y_n),\ R''=(r_{d+1},\dots,r_n),$$

а коэффициенты $\varphi_{R''}$ являются полиномами от $\psi_1, y_2, \dots, y_d$, деленными на степени

$$a \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_1}(\psi_1, y_2, \dots, y_d).$$

Вспоминая, что $y_1 = \psi_1 + z_1$, и возвращаясь от Y к координатам X с помощью обратного к (3.1) степенного преобразования, получим $x_1, \dots, x_n$ как функции параметров $y_2, \dots, y_n$. Эти функции можно представить как степенные ряды по $y_{d+1}, \dots, y_n$, коэффициенты которых суть рациональные функции от $\psi_1(y_2, \dots, y_d), y_2, \dots, y_d$.

Вопрос о вычислимости этих разложений в конкретных случаях упирается в вопрос о вычислимости функции ψ_1. В простых случаях функция $\psi_1(y_2, \dots, y_d)$ может быть элементарной, но в более сложных случаях ее не удается выписать явно, а можно только вычислить приближенно. На самом деле вычисление этой функции можно оставить до последнего момента, а сначала вычислить символично достаточное число коэффициентов указанных рядов как рациональные функции от символов, $\psi_1, y_2, \dots, y_d$. Подставляя в эти коэффициенты достаточно точные значения функции ψ_1, получим их приближенные значения с любой степенью точности.

Таким образом, вблизи всех частей поверхности $\hat{\mathcal{G}} \setminus \hat{\mathcal{G}}_c$ можно получить асимптотические разложения для частей гиперповерхности $\mathcal{G}$, определяемой уравнением

$$g(Y) = 0 \tag{4.8}$$

Остается исследовать гиперповерхность $\mathcal{G}$ вблизи множества критических точек $\hat{\mathcal{G}}_c$. Это множество определяется системой алгебраических уравнений (4.6) и состоит из конечного числа компонент $\hat{\mathcal{G}}_{cj}$ разной размерности. Рассмотрим его нуль мерную компоненту

$$y_i = y_i^0, i = 1, .., d.$$

После подстановки

$$y_i = y_i^0 + z_1, i = 1, .., d,$$

в уравнение (4.8) получаем уравнение

$$h(z_1, \dots, z_d, y_{d+1}, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} g(Y) = 0, \tag{4.9}$$

решения которого надо исследовать вблизи точки $z_1 = \dots = z_d = y_{d+1} = \dots == y_n = 0$. При этом $h -$ многочлен от своих аргументов. Это такая же задача, с которой мы начали, но теперь имеется

конус задачи $K = \{P: p_1, \dots, p_d < 0, (p_{d+1}, .., p_n) \in \widetilde{U}_j^{(d)}\}$. Для ее решения снова надо применить технику многогранника Ньютона и степенных преобразований, но теперь особенность в координатах $z_1, \dots, z_d, y_{d+1}, \dots, y_n$

проще, чем была в координатах X, ибо она уже частично разрешена. При этом надо оставлять только те подмножества множества полученных решений, которые лежат в множестве $U(T, \varepsilon)$, соответствующем конусу K согласно замечанию 1.1, с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Продолжая этот процесс, можно надеяться через конечное число таких шагов получить ситуацию без особенностей, которая исчерпывается теоремой о неявной функции.

Пусть компонента $\hat{\mathcal{G}}_{cj}$ множества $\hat{\mathcal{G}}_{c,}$ имеет положительную размерность e,

$0 < e < d$. Разбивая эту компоненту на части, как было сделано с поверхностью $\hat{\mathcal{G}}_c \setminus \hat{\mathcal{G}}_{c,}$ и выписывая явные представления для каждой части, можно продолжить разрешение особенности вблизи этих частей, но здесь мы не будем этого делать, чтобы не усложнять изложение.

Проделывая описанные вычисления для всех граничных подмножеств $S_j^{(d)}$ с $d > 0$, получим асимптотические разложения по параметрам для разных частей гиперповерхности $\mathcal{F}$. Теперь надо срастить те разложения, области применимости которых на $\mathcal{F}$ пересекаются. Такие разложения относятся либо к одному граничному подмножеству $S_j^{(d)}$ с $d > 0$, либо к соседним граничным подмножествам $S_j^{(d)}$ и $S_k^{(d)}$, имеющим непустое пересечение. Но здесь мы не будем заниматься сращиванием асимптотических разложений.

Зачастую нужно исследовать гиперповерхность $\mathcal{F}$ не везде, а вблизи какой-то точки X^0 или линейного многообразия $\mathcal{M}$. Тогда линейной заменой координат точка переводится в начало координат, а линейное многообразие $-$ в координатное подпространство, и затем исследуются только их окрестности, что соответствует наличию конуса задачи. В этом случае надо решать задачу 1' гл. I,[3] что уменьшает объем вычислений, но их характер остается таким же, как описано выше.

Пример 4.1. Пусть $n = 3$ и

$$f = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + f_3(X), \tag{4.10}$$

где f_3 $-$ многочлен, не содержащий членов ниже третьей степени. Надо разрешить уравнение $f = 0$ в в окрестности точки $X = 0$. Носитель $supp\, f$ содержит точки $Q_1 = (2,0,0), Q_2 = (0,2,0), Q_3 = (0,0,2)$ и точки $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ с $q_1 + q_2 + q_3 \geq 3$. Поэтому многогранник

Ньютона $\Gamma(f)$ имеет грань $\Gamma_1^{(2)}$ с вершинами Q_1, Q_2, Q_3 и нормалью $N = -(1,1,1)$. Соответствующее укорочение –

$$\hat{f}_1^{(2)}(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Степенное преобразование

$$y_1 = x_1 x_3^{-1}, y_2 = x_2 x_3^{-1}, y_3 = x_3$$

с обратным

$$x_1 = y_1 y_3, x_2 = y_2 y_3, x_3 = y_3$$

приводит многочлен (4.10) к виду

$$f = y_3^2 \left(y_1^2 - y_2^2 - 1 + y_3 \hat{f}(Y) \right),$$

где $\hat{f}$ − некий многочлен от $Y = \left(y_{1,} y_2, y_3 \right)$. После сокращения на y_3^2 получаем

$$g \stackrel{\text{def}}{=} y_3^{-2} f = y_1^2 - y_2^2 - 1 + \sum_{k=1}^{m} \hat{g}_k (y_{1,} y_2)\, y_3^k, \tag{4.11}$$

$$\hat{g} = y_1^2 - y_2^2 - 1,$$

где g_k − многочлены от $y_{1,} y_2$ степени не выше $k + 2$. Уравнение $\hat{g}$=0 определяет гиперболу, не имеющую критических точек. Это уравнение имеет два решения:

$$y_1 = \pm \sqrt{y_2^2 + 1}.$$

Пусть ψ_1 − одно их этих решений. На нем $\partial \hat{g} / \partial y_1 = 2 y_1 = 2 \psi_1$. В (4.11) положим $y_1 = \psi_1 + z_1$; тогда

$$h(z_1, \psi_1, y_2, y_3) = z_1^2 + 2 \psi_1 z_1 + \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} h_{kl} (\psi_1, y_2) z_1^k y_3^l,$$

где h_{kl} − многочлены от своих аргументов степени не выше $l - k + 2$. Применим к уравнению $h = 0$ в точке $z_1 = y_3 = 0$ теорему 3.1 о неявной функции. Здесь $a = 2\psi_1$. Следовательно, решение этого уравнения представляется рядом вида

$$z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\psi_1, y_2) y_3^k / a^{k+1}, \tag{4.12}$$

где β_k − многочлены от своих аргументов, и можно показать, что их степени не превосходят $2k + 2$. Возвращаясь к координатам X, получаем решение (4.12) в виде

$$x_1 = x_3\psi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\psi_1, x_2 x_3^{-1}) x_3^{k+1} / (2\psi_1)^{k+1}. \qquad (4.13)$$

Обозначим $\omega = x_3\psi_1$, т.е. $\omega = \pm\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Поскольку $\beta_k(\omega x_3^{-1}, x_2 x_3^{-1})$ суть многочлены степени $2k+2$, т.е. $\beta_k x_3^{2k+2}$ суть однородные многочлены от ω, x_2, x_3 степени $2k+2$, которые обозначим $2^{k+1}c_k$, то разложение (4.13) имеет вид

$$x_1 = \omega + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega, x_2, x_3)/\omega^{k+1}. \qquad (4.14)$$

Это разложение описывает две поверхности, соответствующие двум значениям: $\omega = \pm\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Похожее на (4.14) разложение для решений уравнения (4.10) было получено в [12] с помощью другого подхода.

Замечание 4.1. При отыскании решений системы (4.6) можно использовать либо метод исключения, либо метод базиса Грёбнера [13].

Замечание 4.2. Описанная в этом параграфе процедура вычисления асимптотических разложений для ветвей решений уравнения (4.1) применима также в случаях с бесконечным носителем $supp\, f$ и подходящим конусом задачи согласно § 8 гл. I.[3]

Замечание 4.3. Не совсем ясно, нужно ли указанным способом рассматривать каждую грань $\Gamma_j^{(d)}$ с $d > 0$ отдельно или достаточно рассмотреть только гиперграни $\Gamma_j^{(n-1)}$, приписывая каждой гиперграни конус, являющийся объединением всех конусов $U_k^{(d)}$ с $\Gamma_k^{(d)} \subset \Gamma_j^{(n-1)}$.

Неявные функции

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, чем в § 1-4 [3]. Пусть имеется $m(m<n)$ функций

$$f_1(X),\dots,f_m(X), \tag{5.1}$$

аналитических в нуле $X=0$ и разлагаемых в степенные ряды

$$f_i(X)=\sum f_{iQ}X^Q,\ i=1,\dots,m, \tag{5.2}$$

где $Q\in Z_+^n$ и все $f_{i0}=0$. Разобъем векторы длины n на два подвектора длин m и $n-m$ соответственно; например, $X=(x_1,\dots,x_n)=(X',X'')$, где $X'=(x_1,\dots,x_m), X''=(x_{m+1},\dots,x_n)$. Пусть

$$a\stackrel{\text{def}}{=}\det\left(f_{iEj}\right), i,j=1,\dots,m, \tag{5.3}$$

т.е.

$$a=\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial X'} \qquad \text{при } X=0.$$

Теорема 5.1. Пусть функции (5.1) аналитичны в нуле $X=0$, все $f_i(0)=0$, и в (5.3) a $\neq 0$. Тогда система уравнений

$$f_i(X)=0, i=1,\dots,m, \tag{5.4}$$

имеет единственное аналитическое решение

$$x_i=\varphi_i(X'')\stackrel{\text{def}}{=}\sum\varphi_{iR''}X''^{R''},\ \ i=1,\dots,m, \tag{5.5}$$

где $R''\in Z_+^{n-m}$. При этом коэффициенты

$$\varphi_{iR''}=\beta_{iR''}(\{f_{jQ}\})/a^{k+1}, \tag{5.6}$$

где $\beta_{iR''}$ суть многочлены от коэффициентов f_{jQ} с $\|Q\|\le k\stackrel{\text{def}}{=}\|R''\|$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Замечание 5.1. Так же, как в § 1 [3], в теореме 5.1 можно предположить, что коэффициенты f_{jQ} суть глобальные функции от Y, лишь было бы выполнено условие $a \neq 0$. Тогда коэффициенты $\varphi_{iR''}$ также суть глобальные функции от Y.

Теперь рассмотрим обобщенные степенные ряды, как в теоремах 1.2 и 1.3.

Теорема 5.2. Пусть $T_i = E_i, i = 1, \dots, m,$ у векторов $T_{m+1}, \dots, T_l$ части T_j' равны нулю и $T_1, \dots, T_l -$ остов конуса $T \subset \mathbb{R}^n$, а $T_{m+1}, \dots, T_l -$ остов конуса $T'' \subset \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть вектор $K = (1, \dots, 1, k_{m+1}, \dots, k_n)$ таков, что $\langle K, T_j \rangle > 0$ для $j = m+1, \dots, l$ и $\langle K'', R'' \rangle \geq 1$ для всех $Q'' \in T'' \cap \mathbb{Z}^{n-m} \setminus \{0\}$. Пусть ряды (5.1) принадлежат классу $\mathrm{C}(T)$ и абсолютно сходятся в некотором множестве $\mathcal{U}(T, \varepsilon)$. Пусть все $f_{i0} = 0$ и в (5.3) $a \neq 0$.

Тогда система уравнений (5.4) имеет решение (5.5), где ряды φ_i принадлежат классу $\mathrm{C}(T'')$ и абсолютно сходятся в некотором множестве $\mathcal{U}(T'', \varepsilon'')$. При этом справедлива формула (5.6), где $\beta_{iR''}$ суть определенные многочлены степени не выше k+1 от коэффициентов f_{jQ} с $\langle K, Q \rangle \leq \langle K'', R'' \rangle$.

Доказательство аналогично доказательству теорем 1.3 и 5.1. Для теоремы 5.2 остается в силе замечание 5.1.

§ 5. Укороченные системы уравнений

Теперь рассмотрим совокупность многочленов

$$f_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum f_{iQ} X^Q \text{ по } Q \in S_i, i = 1, \dots, m, \qquad (6.1)$$

Предположим, что подобные члены в каждом многочлене f_i приведены. Каждому из полиномов f_i $(i = 1, \dots, m)$ поставим в соответствие носитель S_i, многогранник Γ_i, укорочения $\hat{f}_{ik_i}^{(d_i)}(X)$, нормальные конусы $U_{ik_i}^{(d_i)}$ и другие объекты, определенные ранее. При этом первый нижний индекс i будет указывать на принадлежность объекта к f_i. Совокупность укороченных многочленов

$$\hat{f}_{iP}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum f_{iQ} X^Q \text{ по } Q \in S_{iP}, \ i = 1, \dots, m, \qquad (6.2)$$

назовем укорочением совокупности (6.1) по порядку $P = (p_1, \dots, p_n)$, если для каждого $i = 1, \dots, m$, многочлен $\hat{f}_{iP}(X)$ является укорочением многочлена f_i по порядку P.

Множество Π векторов P в $\mathbb{R}_*^n$ назовем конусом укорочения совокупности (6.2), если для любого $P \in \Pi$ укорочением по порядку P совокупности (6.1) является совокупность (6.2), и обратно, если (6.2) — укорочение совокупности (6.1) по порядку P, то $P \in \Pi$. Конус Π совпадает с нормальным конусом Π некоторой совокупности граничных подмножеств $S_{ik_i}^{(d_i)}$, определенным в § 9 гл. I.[3]. Пусть $d_i -$ размерность укорочения $\hat{f}_{iP}$ в смысле § 3.[3] Размерность укороченной системы (6.2) — это коразмерность конуса укорочения этой системы, или

$$d = n - dim\Pi \leq \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 + \dots + \mathrm{d}_\mathrm{m}.$$

Наряду с системами многочленов (6.1) и (6.2) рассмотрим систему уравнений

$$f_i(X) = 0, i = 1, \dots, m, \qquad (6.3)$$

и укороченную систему уравнений

$$\hat{f}_{iP}(X) = 0, i = 1, \dots, m, \tag{6.4}$$

Теорема 6.1. Пусть кривая (2.1) является решением полной системы уравнений (6.3) и вектор P лежит в конусе П укороченной системы (6.4). Тогда первое приближение кривой (2.1)

$$x_i = b_i \tau^{P_i}, i = 1, \dots, n, \tag{6.5}$$

является решением укороченной системы (6.4).

Доказательство. Используем свойства укорочений из § 2. [3]

(По свойству 3)

$$f\left(b_1\tau^{P_i}\big(1 + o(1)\big), \dots, b_n\tau^{P_n}\big(1 + o(1)\big)\right) = \hat{f}(b_1, \dots, b_n)\tau^c + o(1)\tau^c$$

и по свойству 1)

$$\hat{f}(b_1\tau^{P_i}, \dots, b_n\tau^{P_n}) = \hat{f}(b_1, \dots, b_n)\tau^c.$$

Следовательно, (6.5) есть решение укороченной системы (6.2). Теорема доказана. Аналогичное утверждение имеется у Бернштейна[14].

Предположим, что в $\mathbb{R}_*^n$ задан открытый выпуклый конус K и из множеств $S_i = S(f_i)$ нужно выделить только те граничные подмножества $S_{ik_i}^{(d_i)}$, для которых нормальные конусы $U_{ik_i}^{(d_i)}$ пересекаются с конусом K. Здесь K является конусом задачи. При исследовании окрестности какой-либо точки X^0 конус задачи K определяется этой точкой. Например, при исследовании окрестности точки $X^0 = 0$ конус задачи есть $K = \{P: p_1 < 0, \dots, p_n < 0\}$, а если точка X^0 такая, что $x_i^0 = 0, i = 1, \dots, l, x_j^0 = \infty$, $j = l + 1, \dots, n$, то

$$K = \{P: p_1 < 0, \dots, p_l < 0, p_{l+1} > 0, \dots, p_n > 0\}.$$

При $m = 1$ все определения и конструкции этого параграфа совпадают с соответствующими определениями и конструкциями § 2. [3]

Пример 6.1. Пусть имеем систему уравнений

$$f(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_1x_1x_2x_3 + a_2x_1^4 + a_3x_2^4 + a_4x_3^4 + a_5x_1^2x_3^2 = 0,$$

(6.6)

$$f_2(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_{21}x_2x_3 + a_{22}x_1^2x_3 + a_{23}x_1^3x_2 + a_{24}x_1^2x_2x_3 = 0.$$

Многогранник Ньютона $\Gamma = \Gamma(f)$ и сопутствующие объекты были построены в примерах 3.1 и 5.1 гл. I (см. также пример 2.2 гл. II),[3] а многогранник Ньютона $\Gamma_2 = \Gamma(f_2)$ – в примере 9.1 гл. I.[3] Там же для конуса задачи

$K = \{P < 0\}$ были найдены два пересечения нормальных конусов

$U_{1j}^{(d_1)} \cap U_{2k}^{(d_2)}$ с $d_1, d_2 > 0$. Это $\Pi_1 = \{P = -\lambda(1,2,1)\} = U_2^{(2)} \cap U_{21}^{(1)}$ и

$\Pi_2 = \{P = -\lambda(7,3,5)\} = U_4^{(1)} \cap U_{22}^{(1)}, \lambda > 0$. Конусу Π_1 соответствует укороченная система

$$\hat{f}(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_1x_1x_2x_3 + a_2x_1^4 + a_4x_3^4 + a_5x_1^2x_3^2 = 0,$$

$$\widehat{f_2}(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_{21}x_2x_3 + a_{22}x_1^2 \qquad (6.7)$$

а конусу Π_2 – укороченная система

$$\hat{f}(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_2x_1^4 + a_3x_2^4 = 0, \qquad (6.8)$$

$$\widehat{f_2}(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} a_{21}x_2x_3 + a_{23}x_1^3x_2 = 0 \qquad (6.9)$$

Пусть разложения

$$x_k = g_k(Z) = g_{kR'}Z^{R'} \text{ по } R' \in S_k', k = 1, \dots, n, \qquad (6.10)$$

где $Z \in \mathbb{C}^l, R' \in \mathbb{R}^l$, представляют $l-$ параметрическое решение системы уравнений (6.3), и $X \to X^0$ при $Z \to Z^0$. Для разложений (6.10) справедливы все описанные выше конструкции, связанные с выделением укорочений. Пусть фиксирован вектор $P' \in \mathbb{R}_*^l$ и укорочение совокупности функций $\{g_k\}$ по порядку P' есть

$$\hat{g}_k(Z), k = 1, \dots, n,$$

т.е. при подстановке

$$z_i = \tau^{p_i'}\left(b_i' + o(1)\right), i = 1, \dots, l, \tag{6.11}$$

имеем

$$\hat{g}_k = \tau^{\langle P', R_k' \rangle}\left(const + o(1)\right), R_k' \in S_{kj_k}^{'(d_k)}, k = 1, \dots, n.$$

Обозначим $p_k = \langle P', R_k' \rangle, k = 1, \dots, n$. Тогда вектор $P = (p_1, \dots, p_n)$ является порядком решения (6.10), соответствующим вектору P' подстановки (6.11), т.е. порядку P' параметров Z.

Теорема 6.2 [15]. Пусть:

а) разложения (6.10) дают l-параметрическое решение системы (6.3);

б) укорочение этого решения по порядку P' есть

$$x_k = \hat{g}_k(Z), k = 1, \dots, n, \tag{6.12}$$

и на кривых (6.11) оно имеет порядок P;

в) (6.4) — укорочение системы уравнений (6.3) по порядку P. Тогда укорочение (6.12) решения (6.10) является решением укороченной системы уравнений (6.4).

Доказательство. Пусть (6.10) представляет $l-$параметрическое решение системы уравнений (6.3) и $X \to X^0$ при $Z \to Z^0$. Каждой сумме $g_i(Z)$

соответствуют многогранник Ньютона $\mathbf{\Gamma}_i'$, набор его граней $\mathbf{\Gamma}_{ij_i}^{'(d_i)}$, их нормальные конусы $\mathbf{U}_{ij_i}^{'(d_i)}$, а также граничные подмножества $\mathbf{S}_{ij_i}^{'(d_i)}$ и укорочения $\hat{g}_{ij_i}^{(d_i)}$. Рассмотрим пересечение

$$\mathbf{U}_{ij_1}^{'(d_i)} \cap \ldots \cap \mathbf{U}_{nj_1}^{'(d_n)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{j_1,\ldots,j_n}^{'(d_1,\ldots,d_n)}. \tag{6.13}$$

Предположим, что конус (6.13) непуст и ему соответствует совокупность укорочений

$$\hat{g}_k(Z) \stackrel{\text{def}}{=} g_{kR'} Z^{R'} \text{ по } R_k' \in S_{kj_k}^{'(d_k)}, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда при $Z \to Z^0$ совокупность укорочений (6.12) является первым приближением совокупности решений (6.10). Пусть вектор $P' = (p_1', \ldots, p_l')$ лежит в конусе (6.13), т.е. укорочение (6.12) является укорочением совокупности (6.10) по порядку P'. При подстановке (6.11) в (6.10) имеем

$$x_k = g_k = \tau^{\langle P', R_k' \rangle}\big(\hat{g}_k(b_1', \ldots, b_l') + o(1)\big),$$

$$R_k' \in S_{kj_k}^{'(d_k)},\ k = 1, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Обозначим

$$p_k = \langle P', R_k' \rangle, b_k = \hat{g}_k(b_1', \ldots, b_l'), k = 1, \ldots, n. \tag{6.15}$$

тогда (6.14) примет вид

$$x_k = g_k(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{p_k}\big(b_k + o(1)\big), k = 1, \ldots, n. \tag{6.16}$$

При этом вектор $P = (p_1, \ldots, p_n)$ является порядком решения (6.10), соответствующим вектору P' подстановки (6.11), а в (6.15) все $b_k \not\equiv 0$, ибо $\hat{g}_k \not\equiv 0$ и, варьируя b_i', всегда можно добиться, что все $b_k \neq 0$.

По условию в) теоремы система (6.4) это укорочение системы уравнений (6.3) по порядку P. . Поэтому воспользуемся свойствами укорочений из § 2. [3] По свойству 3) при подстановке (6.16) имеем

$$f_i\left(\tau^{p_1}\big(b_1+o(1)\big),\dots,\tau^{p_n}\big(b_n+o(1)\big)\right)=\hat{f}_i(b_1,\dots,b_n)\tau^{c_i}+o(1),$$

$$c_i=\langle P,Q\rangle, Q\in S_{ij_i}^{(d_i)}, i=1,\dots,m,$$

и по свойству 1)

$$\hat{f}_i(b_1\tau^{p_1},\dots,b_n\tau^{p_n})=\hat{f}_i(b_1,\dots,b_n)\tau^{c_i}, i=1,\dots,m.$$

Укорочение (6.12) по порядку P после подстановки $z_i=b_i^{'}\tau^{P_i^{'}}, i=1,\dots,l,$ (ср. (6.11)) [3], имеет вид

$$x_k=b_k\tau^{P_k}, k=1,\dots,n.$$

Доказательство теоремы окончено.

Другими словами, первое приближение решения является решением соответствующего первого приближения системы уравнений. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. не всякое решение первого приближения (укорочения) системы уравнений является первым приближением некоторого решения этой системы. Обобщение теоремы 6.2 на другие классы решений см. в [12].

Замечание 6.1. При выделении укорочений существенны лишь асимптотические координаты x_k, которые стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Если функции f_i зависят также от нейтральных координат Y так, что коэффициенты f_{iQ} суть функции от Y, которые остаются ограниченными от 0 и ∞, то вся описанная выше конструкция выделения укорочений применима и в этом случае. При этом коэффициенты $g_{kR'}$ суть также ограниченные функции от Y.

Замечание 6.2. Может случиться, что укороченная совокупность (6.2) является вырожденной, т.е. между $\hat{f}_{ij}^{(d_i)}(X)$ существует больше функциональных зависимостей, чем между $f_i(X)$. Тогда посредством операции над f_i от совокупности (6.1) можно перейти к эквивалентной совокупности, у которой будет другая совокупность укорочений. Например, если $f_1 = \varphi_3 + \varphi_9, f_2 = \varphi_3,$, где $\varphi_k -$ однородные многочлены степени к и $X^0 = 0,$ то для $P = (-1, \dots, -1)$ имеем $\hat{f}_{1P} = \hat{f}_{2P} = \varphi_3$, но для совокупности

$f_3 = f_1 - f_2, f_2$ имеем $\hat{f}_{3P} = \varphi_9, \hat{f}_{2P} = \varphi_3$. Для некоторых случаев процедура изменения заданных уравнений с целью улучшения укороченной системы изложена в § 8.[3]

Замечание 6.3. Здесь изложен комплексный вариант. Все остается справедливым, если все коэффициенты f_{iQ} принадлежат $\mathbb{R}$ и все координаты x_k вещественны и неотрицательны. Если еще все показатели $Q \in \mathbb{Z}^n$, то x_k могут быть любого знака.

§ 6. Линейные преобразования показателей степеней

Здесь рассмотрим преобразования системы уравнений (6.1), которым в пространстве $\mathbb{R}^n$ показателей степеней Q соответствуют параллельные переносы (для каждого f_i свой) и афинные преобразования (одно для всех f_i). Эти преобразования делают геометрию показателей степеней более содержательной и дают способ для решения укороченных систем.

Отыскание тех решений системы (6.1), у которых одна из координат тождественно равна нулю, будем считать решенной задачей, так как она приводится к задаче, аналогичной исходной, но с меньшей размерностью. Поэтому будем искать решения системы (6.1), для которых ни одна координата не равна нулю тождественно. Для таких решений в каждом из уравнений системы (6.1) можно производить сокращение на любое произведение степеней координат. Если в $i-$ м уравнении сделать сокращение на X^{-T_i}, то в нем векторные показатели степени станут равными $\tilde{Q} = Q + T_i$, т.е. множество S_i, параллельно переносится на вектор T_i.

Пусть $f(X)$ − многочлен Лорана и d − размерность его многогранника Ньютона $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(f)$; в § 3 [3] она названа размерностью многочлена $f(X)$. В $\mathbb{R}_*^n$ рассмотрим линейное пространство $\mathrm{N}(f)$, нормальное к $\Gamma(f)$. Очевидно, $dim\,\boldsymbol{\Gamma} + dim\,N = n$. Аналогично для системы многочленов Лорана $f_i(X)$,

$i = 1, \dots, m$, рассматриваем многогранники $\mathbf{\Gamma}(f_i)$ и их нормальные пространства $\mathrm{N}(f_i)$. Обозначим

$$N = N(f_1) \cap \dots . \cap N(f_m)$$

и $d = n - dimN$. Величину d назовем размерностью указанной системы многочленов (см. § 6) [3]. Для укороченной системы это определение размерности совпадает с данным ранее и всегда $d < n$.

Пусть для системы уравнений (6.1), (6.3) имеется укороченная система уравнений (6.2), (6.4)

Теорема 7.1. Если размерность системы (6.4) равна d, то существует матрица α такая, что степенным преобразованием (3.1) с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе m уравнений относительно d переменных. Если в (6.2) все показатели Q целочисленные, то существует унимодулярная матрица α.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1, только для каждого i берется свой вектор T_i такой, что

$$X^{T_i}\hat{f}_i(X) = \hat{g}_i(y_1, \dots ., y_d), i = 1, \dots, m.$$

Обозначим через $d(i)$ размерность подсистемы из первых i уравнений системы (6.4). Очевидно, $d(i) \leq d(i+1)$и $d(m) = d$. Из теоремы 7.1 вытекает

Теорем а 7.2. Существуют степенное преобразование (3.1) и сокращения такие, что система (6.4) размерности d приводится к системе m уравнений относительно d переменных, имеющей квазитреугольный вид: подсистема из первых i уравнений зависит от $d(i)$ переменных ($i = 1, \dots, m$).). Если в (6.2) все показатели Q целочисленные, то существует преобразование (3.1) с унимодулярной матрицей α.

Действительно, по теореме 7.1 всю систему (6.4) приведем к системе от

d переменных. Затем, также делая степенное преобразование для этих d переменных, подсистему из первых $i = m - 1$ уравнений приведем к подсистеме от $d(m-1)$ переменных и т.д. по убыванию i от m до 1.

Следствие 1. Предположим, что в системе (6.4) $d(i) = i$ для $i < n$, и если $m > n - 1$, то $d(j) = n - 1$ для $n \leq j \leq m$. Тогда существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием (3.1) и подходящими сокращениями эта система приводится к треугольному виду

$$\hat{g}_i(y_1, \dots, y_i) = 0, i = 1, \dots, \min(n-1, m), \tag{7.1}$$

$$\hat{g}_j(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0, j = n, \dots, m.$$

Следствие 2. Рассмотрим такую систему (6.4), у которой размерность каждого многочлена $\hat{f}_i$ равна единице. Тогда степенным преобразованием и сокращениями система приводится к виду (7.1), где каждая из функций $\hat{g}_i$ является многочленом от одного монома Y^{R_i}:

$$\hat{g}_i \equiv h_i(Y^{R_i}), \qquad i = 1, \dots, m,$$

с $R_i = (r_{i1}, \dots, r_{ii}, 0, \dots, 0)$ при $i < n$. Если найти все корни $z_i^{(1)}, \dots, z_i^{l_i}$ каждого уравнения

$$h_i(z_i) = 0, \ \ i = 1, \dots, m,$$

то система (7.1) приводится к $l_1 l_2 \dots l_m$ системам

$$Y^{R_i} = z_i^{(j_i)}, i = 1, \dots, m,$$

где $j_i = 1, \dots, l_i$.

Пусть в ситуации следствия 2 сокращения уже произведены (т.е. $0 \in S(\hat{f}_i)$) и $S_i -$ базисный вектор линейной оболочки носителя $S(\hat{f}_i)$. Тогда $r_{11} \dots r_{ii} = \pm$НОД главных миноров матрицы

$$(S_1 \dots S_i), \ \ i \le \min(m, n-1)\,;$$

т.е. всегда $r_{11} = 1$. Если все $r_{ii} = \pm 1$, то дополнительным степенным преобразованием можно добиться того, что $r_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Тогда $Y^{R_i} = y_i$ для $i \le \min(m, n-1)$.

Изменением порядка нумерации многочленов $\hat{f}_i$ в системе (6.4) можно получить дополнительные упрощения в преобразованной системе

$$\hat{g}_i(y_1, \dots, y_d) \stackrel{\text{def}}{=} X^{T_i} \hat{f}_i\,(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, m, \qquad (7.2)$$

полученной по теореме 7.2. Для небольших размерностей $(n \le 6)$ нужные перестановки можно увидеть непосредственно из преобразованной системы (7.2). В общем случае выбор наилучшей нумерации требует перебора различных вариантов. На этом здесь не будем останавливаться.

Теорема 7.3. Пусть (6.2) — укорочение совокупности многочленов Лорана (6.1) и $d(i) -$ размерность совокупности первых i многочленов в (6.2). Существует матрица α и векторы $T_1, \dots, T_m$ такие, что в результате степенного преобразования (3.1) и сокращений система (6.1) перейдет в систему многочленов

$$g_i(Y) = X^{T_i} f_i(X), \quad i = 1, \dots, m,$$

а ее укорочение (6.2) — в укорочение

$$\hat{g}_i\big(y_1, \dots, y_{d(i)}\big) = X^{T_i} f_i(X), \quad i = 1, \dots, m.$$

Если целочисленны носители всех многочленов $f_i(X)$, то матрицу α можно взять унимодулярной, а векторы $T_1, \dots, T_m$ целочисленными. Доказательство следует из теоремы 11.1 гл. I.[3]

Замечание 7.1. В ситуации теоремы 7.3 существуют матрица α и векторы $T_1, \dots, T_m$ такие, что все $\hat{g}_i$ суть обычные многочлены от $y_1, \dots, y_d$, а все g_i суть многочлены от $y_{d+1}, \dots, y_n$ и многочлены Лорана по $y_1, \dots, y_d$. Такие матрицы о легче находить, чем матрицы а теоремы 7.3.

Пример 7.1. Рассмотрим укороченную систему (6.7) примера 6.1. Для нее имеем $Q_1 - Q_2 = (-3,1,1)$, $Q_2^2 - Q_1^2 = (2,-1,0)$. Составляем из этих векторов две первые строки матрицы а и подбираем третью строку, чтобы получить $\det \alpha = 1$. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Степенное преобразование с матрицей а и его обратное суть

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{-3} x_2 x_3, \qquad & x_1 &= y_2 y_3, \\ y_2 &= x_1^2 x_2^{-1}, \qquad & x_2 &= y_2 y_3^2, \\ y_3 &= x_1^{-1} x_2; \qquad & x_3 &= y_1 y_2^2 y_3. \end{aligned} \tag{7.3}$$

После степенного преобразования (7.3) и сокращения первого уравнения укороченной системы (6.7) на $y_2^4 y_3^4$, а второго на $y_1 y_2^3 y_3^3$ получим систему

$$\hat{g}(y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 + a_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0, \tag{7.4}$$

$$\hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} + a_{22} y_2 = 0.$$

При этом согласно замечанию 7.1 полная система (6.6) переходит в систему

$$g(y_1, y_2, y_3) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 + a_2 + a_3 y_3^4 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0,$$

$$y_1 g_2(y_1, y_2, y_3) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} + a_{22} y_2 + a_{23} y_1^{-1} y_2 y_3^2 + a_{24} y_2^2 y_3^2 = 0. \tag{7.5}$$

Согласно формулам (9.5), (3.2), (3.1) гл. I и примеру 9.1 гл. I [3] укороченной системе (6.8), (6.9) соответствуют $S_4^{(1)} = \{Q_2, Q_3\}$ и $S_{22}^{(1)} = \{Q_1^2, Q_3^2\}$. Составим разности: $Q_3 - Q_2 = 4(-1, -1{,}0)$, $Q_1^2 - Q_3^2 = (-3{,}0{,}1)$. Векторы $(-1, -1{,}0)$ и $(-3{,}0{,}1)$ записываем в первые две строки матрицы α, а в качестве третьей берем единичный вектор. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Степенное преобразование с этой матрицей а и его обратное суть

$$y_1 = x_1^{-1} x_2, \qquad x_1 = y_{3,}$$

$$y_2 = x_1^{-3} x_3, \qquad x_2 = y_1 y_3,$$

$$y_3 = x_1; \qquad x_3 = y_2 y_3^3.$$

После этого степенного преобразования и сокращения уравнения (6.8) на x_1^4, а уравнения (6.9) на $x_1^3 x_2$, получим укороченную систему

$$\hat{g}(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_2 + a_3 y_1^4 = 0,\ \hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} y_2 + a_{23} = 0. \qquad (7.6)$$

§ 7. Асимптотическое решение системы уравнений

Рассмотрим основную задачу. Пусть дана система уравнений

$$f_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Q \in S_i} f_{iQ} X^Q = 0,\ i = 1, \dots, m, \qquad (8.1)$$

где $f_i(X)$ − многочлены Лорана, и выпуклый конус K в $\mathbb{R}_*^n$. Требуется найти все те решения системы (8.1), которые лежат в множестве $U(K^*, \varepsilon)$, где K^* − конус, двойственный конусу K, и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и через которые можно провести кривую вида (2.1) с $P \in K$ $(P \neq 0)$, удовлетворяющую системе уравнений (8.1).

Основную задачу назовем приведенной, если ищутся ветви, у которых ни одна из координат не равна тождественно нулю (или бесконечности). Очевидно, основная задача распадается на $n-$ мерную приведенную задачу и конечное число приведенных задач, в которых некоторые координаты x_i положены нулями (или бесконечностями), т.е. постоянны, и конус задачи является пересечением конуса основной задачи K с множеством

$$\{P: p_i = -\infty, \text{если } x_i \equiv 0; p_j = +\infty, \text{если } x_j = \infty\}.$$

Для решения приведенной задачи с конусом задачи K по каждому f_i образуем многогранник Ньютона $\mathbf{\Gamma}_i$ и выделим его грани $\mathbf{\Gamma}_{ik}^{(d)}$ с нормальными конусами $\mathbf{U}_{ik}^{(d)}$. При этом достаточно выделить все те грани $\mathbf{\Gamma}_{ik}^{(d)}$, для которых пересечение $\mathbf{U}_{ik}^{(d)} \cap K$ отлично от нуля. Обозначим

$\mathbf{K}_{ik}^{(d)} = K \cap \mathbf{U}_{ik}^{(d)}$ и рассмотрим всевозможные непустые пересечения

$$K_{1k_1}^{(d_1)} \cap \ldots \cap K_{mk_m}^{(d_m)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_\lambda, \lambda = 1, \ldots, l. \qquad (8.2)$$

Пусть Π_λ — одно из таких пересечений, и ему соответствует укороченная система

$$\hat{f}_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Q \epsilon S_{ik_i}^{(d_i)}} f_{iQ} X^Q = 0\,, i = 1, \ldots, m. \qquad (8.3)$$

Если какое-то $d_i = 0$, то $\hat{f}_i = aX^Q$. У решений уравнения $aX^Q = 0$ одна из координат тождественно равна нулю (или бесконечности), и они не могут быть решениями приведенной задачи. Поэтому надо рассматривать лишь укороченные системы (8.3), у которых все $d_i > 0$. По укороченной системе (8.3) сделаем степенное преобразование и сокращения, указанные в теореме 7.1. Тогда система (8.1) перейдет в систему

$$g_i(y_1, .., y_n) \stackrel{\text{def}}{=} X^{T_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots., m, \qquad (8.4)$$

и укороченная система (8.3) перейдет в систему

$$\hat{g}_i(y_1, .., y_d) \stackrel{\text{def}}{=} X^{T_i} \hat{f}_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots., m, \qquad (8.5)$$

где d — размерность укороченной системы (8.3). Будем считать, что $\hat{g}_i$ — обычные многочлены от $y_1, .., y_d$, а в g_i координаты $y_{d+1}, \ldots, y_n$ входят в неотрицательных степенях. Этого всегда можно добиться согласно **замечанию 7.1.** При этом конус укорочения (8.5) есть

$$\widetilde{\Pi}_\lambda = \alpha \Pi_\lambda \subset \{P: p_1 = \cdots = p_d = 0\}.$$

Теперь надо найти такие решения

$$y_i = c_i \tau^{p_i}\big(1 + o(1)\big), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

полной системы (8.4), у которых векторный порядок $P \in \widetilde{\Pi}_\lambda$. По теореме 6.1 у таких решений значения $y_i = c_i$, $i = 1, \ldots, d$, удовлетворяют системе (8.4). При этом все $c_1, \ldots, c_d$ отличны от нуля и бесконечности.

Касательный конус $\tilde{T}$ укороченной системы (8.5) содержит ограничения только на $q_{d+1}, \dots, q_n$ и лежит в конусе $q_{d+1}, \dots, q_n \geq 0$.

Если $d < m$, то в случае общего положения укороченная система (8.5) не имеет решений. Если же она имеет решениями изолированное линейное многообразие, то в системе (8.4) надо сделать линейную замену координат, переводящее это многообразие в координатное подпространство, и решать ее в окрестности этого подпространства, если надо, используя многогранники Ньютона. Если система (8.5) имеет непрерывное множество решений, не являющееся линейным многообразием, такой случай будем считать вырожденным; его рассмотрим позже.

Рассмотрим теперь систему (8.5) с

$$m \leq d. \tag{8.6}$$

В $d -$ мерном пространстве с координатами $y_1, .., y_d$ укороченная система уравнений (8.5) определяет алгебраическое многообразие $\hat{\mathcal{G}}$. Теперь надо найти все это многообразие. Выделим сначала подмногообразие $\hat{\mathcal{G}}_{\text{c}}$ всех критических точек $y_1, .., y_d$, в которых выполнены равенства (8.5), и у матрицы

$$\frac{\partial(\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} \tag{8.7}$$

размера $d \times m$ ранг меньше m. Множество $\hat{\mathcal{G}} / \hat{\mathcal{G}}_{\text{c}}$, можно разбить на конечное число частей $\hat{\mathcal{G}}_1, \dots, \hat{\mathcal{G}}_l$, в каждой из которых хотя бы один главный минор

$$\frac{\partial(\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m)}{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{im})}$$

матрицы (8.7) отличен от нуля, и соответствующие координаты $y_{i_1}, \dots, y_{im}$ могут быть выражены как функции от остальных $y_1, \dots, y_d$. Пусть $\hat{\mathcal{G}}_1$ – такая часть множества $\hat{\mathcal{G}}/\hat{\mathcal{G}}_c$, на которой

$$\partial(\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m)/\ \partial(y_1, \dots, y_m) \neq 0$$

и $y_i = \psi_i(y_{m+1}, \dots, y_d), i = 1, \dots, m.$ В полной системе (8.4) сделаем замену координат

$$y_i = \psi_i + z_i,\ \ i = 1, \dots, m, \tag{8.8}$$

и получим функции

$$h_i(z_1, \dots, z_m, \psi_1, \dots, \psi_m, y_{m+1}, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} g_i(Y), i = 1, \dots, m,$$

которые запишем как многочлены от $\grave{Z} = (z_1, \dots, z_m, y_{d+1}, \dots, y_n)$:

$$\check{h}_i = \sum \check{h}_{i\check{Q}} \check{Z}^{\check{Q}},\ \ \ i = 1, \dots., m, \tag{8.9}$$

с коэффициентами $\check{h}_{i\check{Q}}$, зависящими от $\psi_1, \dots, \psi_m, y_{m+1}, \dots, y_d$. В "точке" $\grave{Z} = 0$ имеем

$$\frac{\partial(\check{h}_1, \dots, \check{h}_m)}{\partial(z_1, \dots, z_m)} = \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} /_{y_i = \psi_i} \stackrel{\text{def}}{=} a \neq 0, \tag{8.10}$$

и показатели $\check{Q}$ разложений (8.9) лежат в касательном конусе $\check{T}$, равном проекции конуса $\check{T}$ на подпространство координат $q_1, \dots., q_m, q_{d+1}, \dots, q_n$. Теперь к системе уравнений

$$h_i(\grave{Z}) = 0, \qquad i = 1, \dots., m,$$

можно применить теорему 5.2 о неявных функциях и получить ее решения в виде рядов

$$z_i = \varphi(y_{d+1}, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \varphi_{iR''} Y''^{R''},\qquad i = 1, \dots, m, \tag{8.11}$$

где $Y'' = (y_{d+1}, \dots, y_n)$, $R'' = (r_{d+1}, \dots, r_n)$, а коэффициенты $\varphi_{iR''}$ являются полиномами от $\psi_1, \dots, \psi_m, y_{m+1}, \dots, y_d$, деленными на степени а из (8.10). Вспоминая замену (8.8) и возвращаясь от Y к X с помощью степенного преобразования, получим параметрическое представление $X = X(y_{m+1}, \dots, y_n)$ некоторых решений исходной системы уравнений (8.1). Аналогично получаются решения, связанные с остальными частями $\hat{\mathcal{G}}_j$ множества $\hat{\mathcal{G}}/\hat{\mathcal{G}}_c$.

Множество критических точек $\hat{\mathcal{G}}_c$ многообразия $\hat{\mathcal{G}}$ само является алгебраическим многообразием. Оно состоит из нескольких связных компонент $\hat{\mathcal{G}}_{c1}, \dots, \hat{\mathcal{G}}_{ck}$. $\hat{\mathcal{G}}_{cj}$ —– изолированное линейное многообразие, то в полной системе (8.4) делаем линейную замену координат, приводящую это многообразие в координатное подпространство, и исследуем полученную систему в окрестности этого подпространства. Это опять основная задача, но для более узкого множества решений. Если $\hat{\mathcal{G}}_{cj}$ не является линейным многообразием, то этот случай также назовем *вырожденным*.

К настоящему времени еще не выработана единая стратегия для изучения вырожденных случаев. В [16, § 4] предложены две такие стратегии. Первая заключается в том, чтобы посредством манипуляций с полиномами $g_1, \cdots, g_m$

получить такой новый многочлен g_{m+1}, который является функцией от $g_1, \dots, g_m$ и имеет укорочение $\hat{g}_{m+1}$, которое не является функцией от укорочений $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m$. Если такой многочлен не получается, то многочлены $g_1, \dots, g_m$ функционально зависимы, и можно получить эту зависимость. Вторая стратегия заключается во введении новых координат $y_{n+i} = \alpha_i$, $i = 1, \dots, s$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – полиномиальный базис идеала многообразия $\hat{\mathcal{G}}_{cj}$, и разложении функций $g_1, \dots, g_m$ по $y_{n+i}, \dots, y_{n+s}$.

Итак, здесь был описан один шаг процедуры решения поставленной в этом параграфе задачи. В результате такого шага первичная основная задача распадается на конечное число вторичных основных задач, каждая из которых в некотором смысле проще, чем исходная. Некоторые из них имеют единственное решение-ветвь либо не имеют ни одного такого решения; для них процедуру выделения ветвей можно считать законченной.

Для остальных вторичных основных задач процедуру надо продолжить. Через конечное число таких шагов можно отделить все однократные ветви, хотя число шагов априори не известно (ср. [17]).

Наиболее изучен случай $m = n - 1$, когда все многочлены $f_1, \dots, f_{n-1}$ функционально независимы, система (8.1) определяет алгебраическую кривую и надо найти ее ветви [16]. Если $d = m = n - 1$, то классическая теорема Безу утверждает, что число комплексных решений системы укороченных уравнений (8.5) оценивается через их степени (оно равно произведению этих степеней). Более точно число решений системы уравнений получено Бернштейном [14] (ср. [18, 19, 20]). Оно равно смешанному объему Минковского $V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\mathrm{m}})$ многогранников Ньютона $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\mathrm{m}}$ соответствующих полиномов (см. [21]).

Сложностью укороченной системы (8.3) назовем $(n-1)-$ мерный смешанный объем Минковского соответствующих параллельно перенесенных граней $\Gamma_{ik}^{(d_i)} + T_i$, $i = 1, \dots, m$, где $-T_i \in \Gamma_{ik}^{(d_i)}$, а сложностью приведенной задачи — сумму сложностей всех укороченных систем, нормальные конусы которых пересекаются с конусом задачи. Тогда в случае общего положения число комплексных ветвей приведенной задачи равно ее сложности.

Для числа ветвей системы (8.1) в малой окрестности изолированной особой точки $X = 0$ имеется формула в терминах показателей степеней данной системы (см. [22, 23, 24]). Обозначим через b число ветвей решений системы (8.1) в малой окрестности изолированной особой точки $X = 0$, положим

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} (x_1^2 + \cdots + x_n^2), \qquad \Delta \overset{\text{def}}{=} \det[\partial(F, \Omega)/\partial X],$$

где $F \overset{\text{def}}{=} (f_1, \dots, f_{n-1})$. Очевидно, $\Delta(0) = 0$. Пусть $H \overset{\text{def}}{=} (F, \Delta)$.

Теорем а 8.1 [25]. Если начало координат является изолированной особой точкой системы (8.1) с $m = n - 1$, то для $H(0) = 0$ оно также будет изолированной особой точкой и $b = 2 \deg H$.

З. Шафраниек [25] утверждает, что эта формула запрограммирована на ЭВМ и использует диаграмму начальных показателей системы (8.1).

Пример 8.1 (продолжение примеров 6.1 и 7.1). При значениях $a_1 = 40$, $a_2 = -a_3 = 25, a_4 = -1, a_5 = 16, a_{2i} = -1, i = 1,2,3,4,$ рассмотрим систему (6.6). Тогда укороченные системы (7.4) и (7.6) имеют по два вещественных и по два комплексных простых решения. Так, система (7.4) имеет два вещественных решения:

$$Y_1'^0 = (-1, -1), Y_2'^0 = (5, -1);$$

и два комплексных:

$$Y_{3,4}'^0 = (-2 \pm i, -1). \tag{8.12}$$

Так как все корни простые и $d = n - 1$, то ветви отделены, т.е. применима теорема 5.2 о неявных функциях. Делая в систему (7.5) подстановки $Y' = Y'^0 + Z'$ и вычисляя первые члены в разложениях $Z'(y_3)$, получаем

$$z_1 = -14y_3^2/3 + O(y_3^4), \quad z_2 = -2y_3^2 + O(y_3^4) \text{ в } Y_1'^0,$$

$$z_1 = -68y_3^2/15 + O(y_3^4),\ \ z_2 = -4y_3^2/5 + O(y_3^4)\ Y_2'^0,$$

$$z_1 = (13 \mp 6i)y_3^2/5 + O(y_3^4),\ z_2 = -(2 \pm i)y_3^2/5 + O(y_3^4), \text{ в } Y_{3,4}'^0.$$

Возвращаясь к исходным координатам по (7.3), находим две вещественные ветви $\mathcal{F}_j$:

$$x_1 = (-y_3 + b_j' y_3^3 + O\big(y_3^5\big), \qquad x_2 = -y_3^2 + b_j' y_3^4 + O(y_3^6),$$

$$x_3 = b_j y_3 + c_j y_3^3 + O\big(y_3^5\big),\quad j = 1,2,$$

где

$$b_1' = -2, b_1 = -1, c_1 = -2/3;\ b_2' = -4/5, b_2 = 5, c_2 = 52/15.$$

Комплексные корни (8.12) системы (7.4) дают две комплексные ветви $\mathcal{F}_{5,6}$:

$$x_1 = -y_3 - \tfrac{1}{5}(7 \pm i)y_3^3 + O\big(y_3^5\big), x_2 = -y_3^2 - \tfrac{1}{5}(7 \pm i)y_3^4 + O(y_3^6),$$

$$x_3 = (-2 \pm i)y_3 + \frac{1}{5}(3 \mp 21i)y_3^3 + O\big(y_3^5\big).$$

Укороченная система (7.6) имеет два вещественных простых решения: $y_{1_{1,2}}^0 = \pm 1,\ \ y_2^0 = -1$; и два комплексных простых решения: $y_{1_{3,4}}^0 = \pm i$, $y_2^0 = -1$.

Для этих решений соответственно находим две вещественные ветви $\mathcal{F}_{3,4}$:

$$x_2 = \pm x_1 - \frac{7}{5}x_1^2 + o(x_1^2), x_3 = -x_1^3 \pm x_1^4 + o(x_1^4);$$

и две комплексные ветви $\mathcal{F}_{7,8}$:

$$x_2 = \pm i x_1 - \frac{7}{5}x_1^2 + o(x_1^2), x_3 = -x_1^3 \pm i x_1^4 + o(x_1^4).$$

Для найденных ветвей роль параметра τ играют y_3^{-1} и x_1^{-1} соответственно.

На рис. II. 1 показано примерное расположение вещественных полуветвей $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ для $y_3 > 0$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_4$ для $x_1 > 0$ в малой окрестности точки $X = 0$; штриховыми линиями изображены кривые с $x_2 < 0$.

Теперь рассмотрим ситуацию с бесконечными носителями, разобранную в § 8 гл. I.[1] Если $S -$ носитель ряда Лорана f и $K -$ конус задачи, то выпуклую оболочку множества $\partial_{\acute{K}}\Gamma$ назовем ведущим многогранником Ньютона для f.

Рассмотрим теперь основную задачу, где носители $S_i = suppf_i$ бесконечны, целочисленны и лежат в множествах вида C^* $(Q_1^i, \dots, Q_{l_i}^i)$ (разных для разных i), а конус задачи K лежит внутри целого конуса C. Для решения такой основной задачи применима процедура, описанная выше для случая конечных носителей $suppf_i$. Отличие только в том, что при подстановках вида $y_j = y_j^0 + z_j$ $(y_j^0 \neq 0), j = 1, \dots, d$, получаются ряды по неотрицательным степеням z_j (вместо многочленов). В частности, если функции $f_i, i = 1, \dots, m$, аналитичны в окрестности точки $X = 0$, то они разлагаются в ряды Маклорена

$$f_i = \sum f_{iQ} X^Q, \qquad Q \geq 0.$$

Систем (8.1) определяет аналитическое множество (см. [26]). Здесь

$\mathbf{C} = \{P\colon\ P \le 0\}$, $\mathbf{K} = \{P\colon\ P < 0\}$ и $Q \ge 0$ для всех $\mathbf{S}_i$.

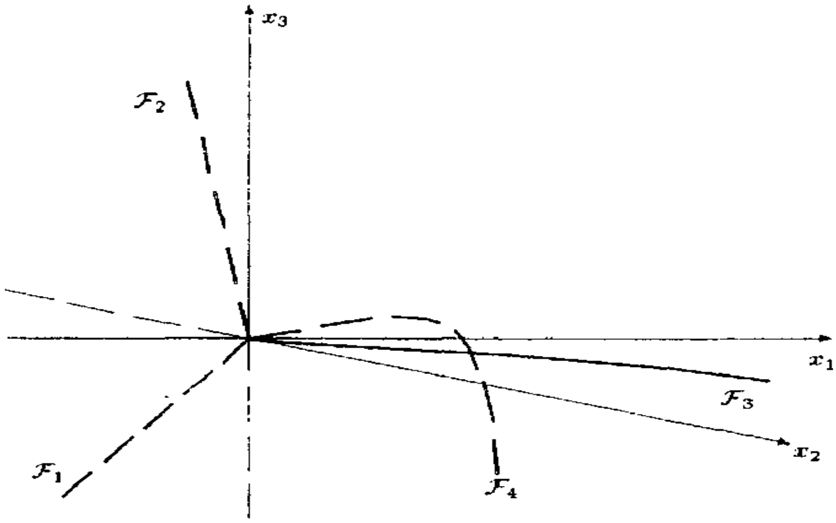


Рис. II.1. Расположение полуветвей кривой примера 8.1[3] вблизи точки $X = 0$

После выделения укороченной системы и степенного преобразования исходные конусы $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{K}$ преобразуются в некоторые конусы $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ более общей природы. Поэтому основная задача сразу была сформулирована в форме, инвариантной относительно степенных преобразований. О замене аналитических уравнений алгебраическими см. также [27].

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ СТЕПЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ПРИМЕРЫ

§1.БОЛЬШОЙ ПРИМЕР

Пусть кривая задана системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1x_1x_2x_3 + a_2x_1^6 + a_3x_2^6 + a_4x_3^6 + a_5x_1^3x_3^3 = 0, \\ f_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21}x_2^2x_3 + a_{22}x_1x_3 + a_{23}x_1^3x_2 + a_{24}x_1^2x_2x_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать все ветви этой кривой в окрестности особой точки $X^0 = 0$, т.е. конус задачи $U = \{P < 0\}$.

Решение. Находим носители S(f_1) и S(f_2):

$$S(f_1) = \{Q_1^1 = (1,1,1), Q_2^1 = (6,0,0), Q_3^1 = (0,6,0), Q_4^1 = (0,0,6), Q_5^1 = (3,0,3)\},$$

$$S(f_2) = \{Q_1^2 = (0,2,1), Q_2^2 = (1,0,1), Q_3^2 = (3,1,0), Q_4^2 = (2,1,1)\}.$$

В пространстве R^3 построим отдельно многогранники $\Gamma(f_1)$ и $\Gamma(f_2)$, как выпуклые оболочки множеств S(f_1) и S(f_2) (рис. 1 и рис. 2). Выделим все вершины, рёбра и грани многогранников $\Gamma(f_1)$ и $\Gamma(f_2)$.

Рассмотрим в отдельности $\Gamma(f_1)$. Он является тетраэдром, состоит из четырёх вершин Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1 и Q_4^1, шести рёбер и четырёх обычных граней. При этом точка Q_5^1 лежит на ребре, соединяющие вершины Q_2^1 и Q_4^1.

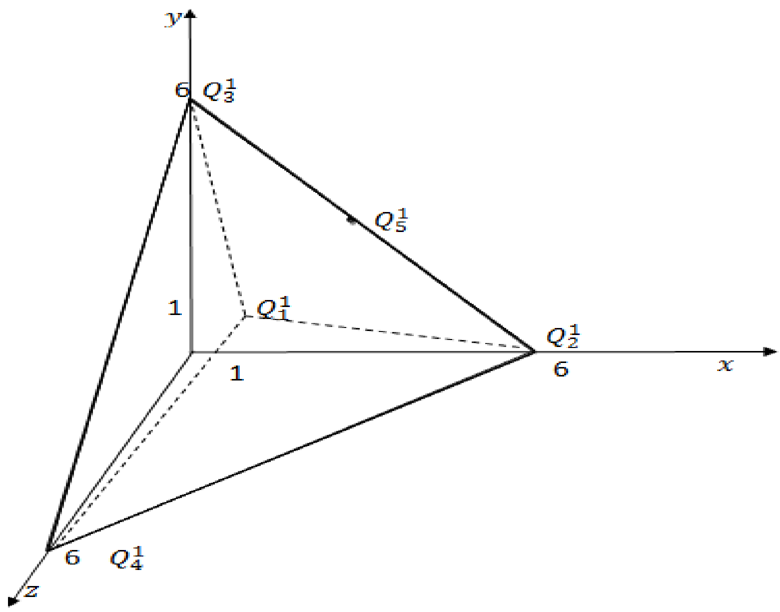


Рис.1.$\Gamma(f_1)$.

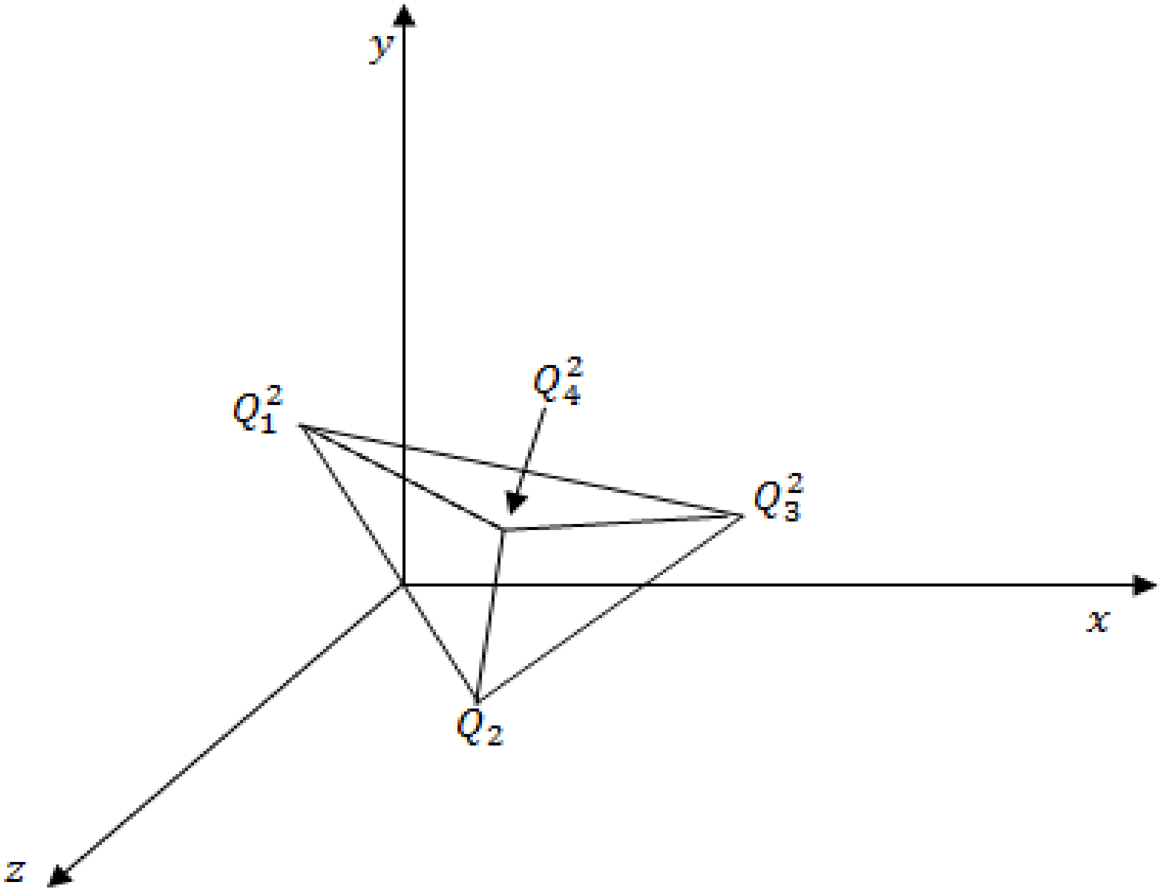


Рис. 2. $\Gamma(f_2)$.

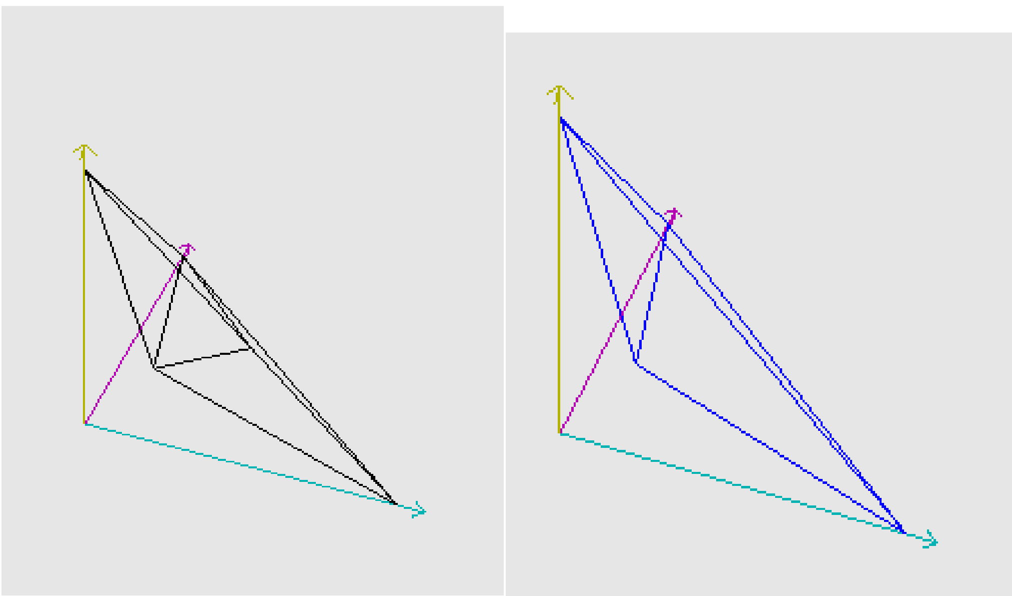


Рис.1.$\Gamma(f_1)$.

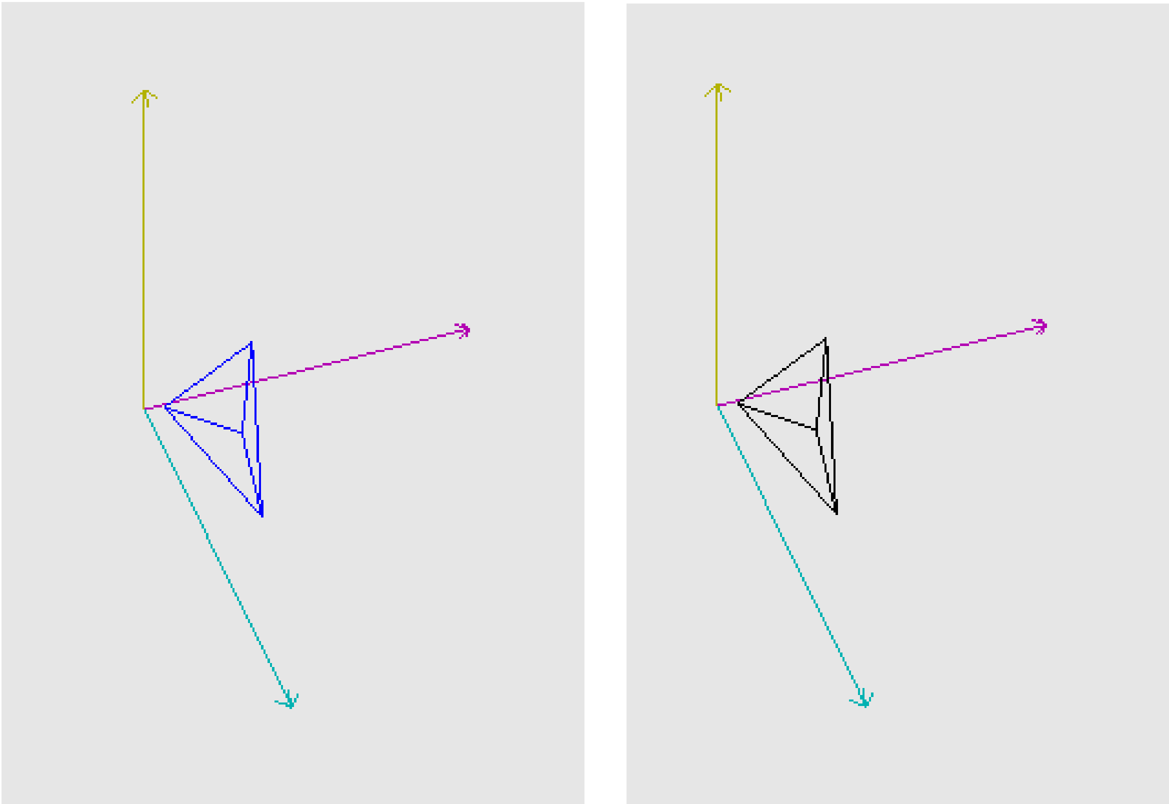


Рис.1. $\Gamma(f_2)$

Каждому элементу $\Gamma_{1j}^{(d)}$ соответствует свой нормалный конус $U_{1j}^{(d)}$, определяемый неравенствами

$$\langle P, Q_1\rangle = \cdots = \langle P, Q_l\rangle,$$
$$\langle P, Q_j\rangle < \langle P, Q_1\rangle,\ l < j \le m.$$

Так, вершина $\Gamma_{11}^{(0)} = \{Q_1^1\}$ имеет нормальный конус:

$U_{11}^{(0)} = \left\{P: \langle P, Q_1^1\rangle > \langle P, Q_j^1\rangle, j = 2,3,4\right\} = \left\{P: \langle P, Q_j^1 - Q_1^1\rangle < 0, j = 2,3,4\right\} =$
$\{P: 5p_1 - p_2 - p_3 < 0, -p_1 + 5p_2 - p_3 < 0, -p_1 - p_2 + 5p_3 < 0\} =$
$\{P: 5p_1 < p_2 + p_3, 5p_2 < p_1 + p_3, 5p_3 < p_1 + p_2\}$; ребро

$\boldsymbol{\Gamma_1^{(1)} \supset \{Q_1^1; Q_4^1\}}$ имеет нормальный конус: $U_{11}^{(1)} = \{(P, Q_1^1) =$
$(P, Q_4^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_2^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_3^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_5^1)\}$

$P_1 + P_2 + P_3 = 6P_3$	$P_1 + P_2 = 5P_3$
$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_1$	$P_1 + P_2 > 5P_1$
$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_2$	$P_1 + P_3 > 5P_2$

$P_1 + P_2 + P_3 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad -2P_1 + P_2 - 2P_3 > 0$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$-1 - \mathrm{P}_3 = 5\mathrm{P}_3$ $\qquad \mathrm{P}_3 = -1/6$

$P_2 + P_3 > 5(-1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3)$ $\qquad \mathrm{P}_2 > -2/3$

$-1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_3 > 5\mathrm{P}_2$ $\qquad \mathrm{P}_2 < -1/6$

$-\mathbf{2}(-1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3) + \mathrm{P}_2 - 2\mathrm{P}_3 > 0$ $\qquad \mathrm{P}_2 > -2/3$

$\Gamma_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} \supset \{\boldsymbol{Q_1^1}; \boldsymbol{Q_4^1}\}$ имеет нормальный конус: $\qquad U_{12}^{(1)} = \{(P, Q_1^1) = (P, Q_3^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_2^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_4^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_5^1)\}$

$P_1 + P_2 + P_3 = 6P_2$ $\qquad P_1 + P_3 = 5P_2$

$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_1$ $\qquad P_2 + P_3 > 5P_1$

$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_3$ $\qquad P_1 + P_2 > 5P_3$

$P_1 + P_2 + P_3 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad -2P_1 + P_2 - 2P_3 > 0$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$-1 = 6\mathrm{P}_2$ $\qquad \mathrm{P}_2 = -1/6$

$P_2 + P_3 + 5 + 5\mathrm{P}_2 + 5\mathrm{P}_3 > 0$ $\qquad \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 > -5/6$

$-1 - 6\mathrm{P}_3 > 0$ $\qquad \mathrm{P}_3 < -1/6$

$\mathbf{2} + 2\mathrm{P}_2 + 2\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2 - 2\mathrm{P}_3 > 0$ $\qquad \mathrm{P}_3 > -2/3$

$\Gamma_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{1})} \supset \{\boldsymbol{Q_1^1}; \boldsymbol{Q_2^1}\}$ имеет нормальный конус: $\qquad U_{13}^{(1)} = \{(P, Q_1^1) = (P, Q_2^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_3^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_4^1), (P, Q_1^1) > (P, Q_5^1)\}$

$P_1 + P_2 + P_3 = 6P_1$ $\qquad P_2 + P_3 = 5P_1$

$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_2$ $\qquad P_1 + P_3 > 5P_2$

$P_1 + P_2 + P_3 > 6P_3$ $\qquad$ $P_1 + P_2 > 5P_3$

$P_1 + P_2 + P_3 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad$ $-2P_1 + P_2 - 2P_3 > 0$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$6P_2 + 6P_3 = -5$ $\qquad$ $P_3 = -\frac{5}{6} - \mathrm{P}_2$

$-1 - 6\mathrm{P}_2 > 0$ $\qquad$ $\mathrm{P}_2 < -1/6$

$-1 - 6\mathrm{P}_3 > 0$ $\qquad$ $\mathrm{P}_3 < -1/6$

$3\mathrm{P}_2 + 2 > 0$ $\qquad$ $\mathrm{P}_2 > -2/3$

$\Gamma_{\boldsymbol{4}}^{(\boldsymbol{1})} \supset \{\boldsymbol{Q_4^1}; \boldsymbol{Q_2^1}\}$ имеет нормальный конус:

$U_{14}^{(1)} = \{(P, Q_4^1) = (P, Q_2^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_1^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_3^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_5^1)\}$

$6\mathrm{P}_3 = 6\mathrm{P}_2$ $\qquad$ $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_2$

$6\mathrm{P}_3 > P_1 + P_2 + P_3$ $\qquad$ $5\mathrm{P}_3 > P_1 + P_2$

$6\mathrm{P}_3 > 6\mathrm{P}_2$ $\qquad$ $\mathrm{P}_3 > \mathrm{P}_2$

$6\mathrm{P}_3 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad$ $3\mathrm{P}_3 > 3P_1$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$\mathrm{P}_2 = -1 - 2P_3$ $\qquad$ $\mathrm{P}_2 = -1 - 2P_3$

$P_3 > -1/6$ $\qquad$ $P_3 > -1/6$

$P_3 > -1 - 2P_3$ $\qquad$ $P_3 > -1/3$

$2P_3 + \mathrm{P}_2 > -1$ $\qquad$ $2P_3 + \mathrm{P}_2 > -1$

$\Gamma_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})} \supset \{\boldsymbol{Q_4^1}; \boldsymbol{Q_3^1}\}$ имеет нормальный конус:

$U_{15}^{(1)} = \{(P, Q_4^1) = (P, Q_3^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_1^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_2^1), (P, Q_4^1) > (P, Q_5^1)\}$

$6P_3 = 6P_2$ $\qquad\qquad$ $P_3 = P_2$

$6P_3 > P_1 + P_2 + P_3$ $\qquad\qquad$ $5P_3 > P_1 + P_2$

$6P_3 > 6P_1$ $\qquad\qquad$ $P_3 > P_1$

$6P_3 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad\qquad$ $3P_3 > 3P_1$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$P_3 = P_2$ $\qquad\qquad$ $P_3 = P_2$

$P_3 > -\frac{1}{6}$ $\qquad\qquad$ $P_3 > -\frac{1}{6}$

$3P_3 > -1$ $\qquad\qquad$ $P_3 > -\frac{1}{3}$

$2P_3 + P_2 > -1$ $\qquad\qquad$ $P_3 > -\frac{1}{3}$

$\Gamma_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{1})} \supset \{\boldsymbol{Q_3^1}; \boldsymbol{Q_2^1}\}$ имеет нормальный конус:

$U_{16}^{(1)} = \{(P, Q_3^1) = (P, Q_2^1), (P, Q_3^1) > (P, Q_1^1), (P, Q_3^1) > (P, Q_4^1), (P, Q_3^1) > (P, Q_5^1)\}$

$6P_2 = 6P_1$ $\qquad\qquad$ $P_1 = P_2$

$6P_2 > P_1 + P_2 + P_3$ $\qquad\qquad$ $5P_2 > P_1 + P_3$

$6P_2 > 6P_3$ $\qquad\qquad$ $P_2 > P_3$

$6P_2 > 3P_1 + 3P_3$ $\qquad\qquad$ $2P_2 - P_3 > P_1$

$$\boldsymbol{P_1 = -1 - P_2 - P_3}$$

$P_3 = -1 - 2P_2$ $\qquad\qquad$ $P_3 = -1 - 2P_2$

$P_2 > -1/6$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P_2 > -1/6$

$P_2 > -1 - 2P_2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P_2 > -1/3$

$P_2 > -1/3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P_2 > -1/3$

Для вектора $H = (1, 1, 1)$ пересечение нормальных конусов $U_{1j}^{(d)}$ с плоскостями $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ показаны на рис.3 в координатах p_2, p_3. При этом пересечения обозначены так же, как сами нормальные конусы.

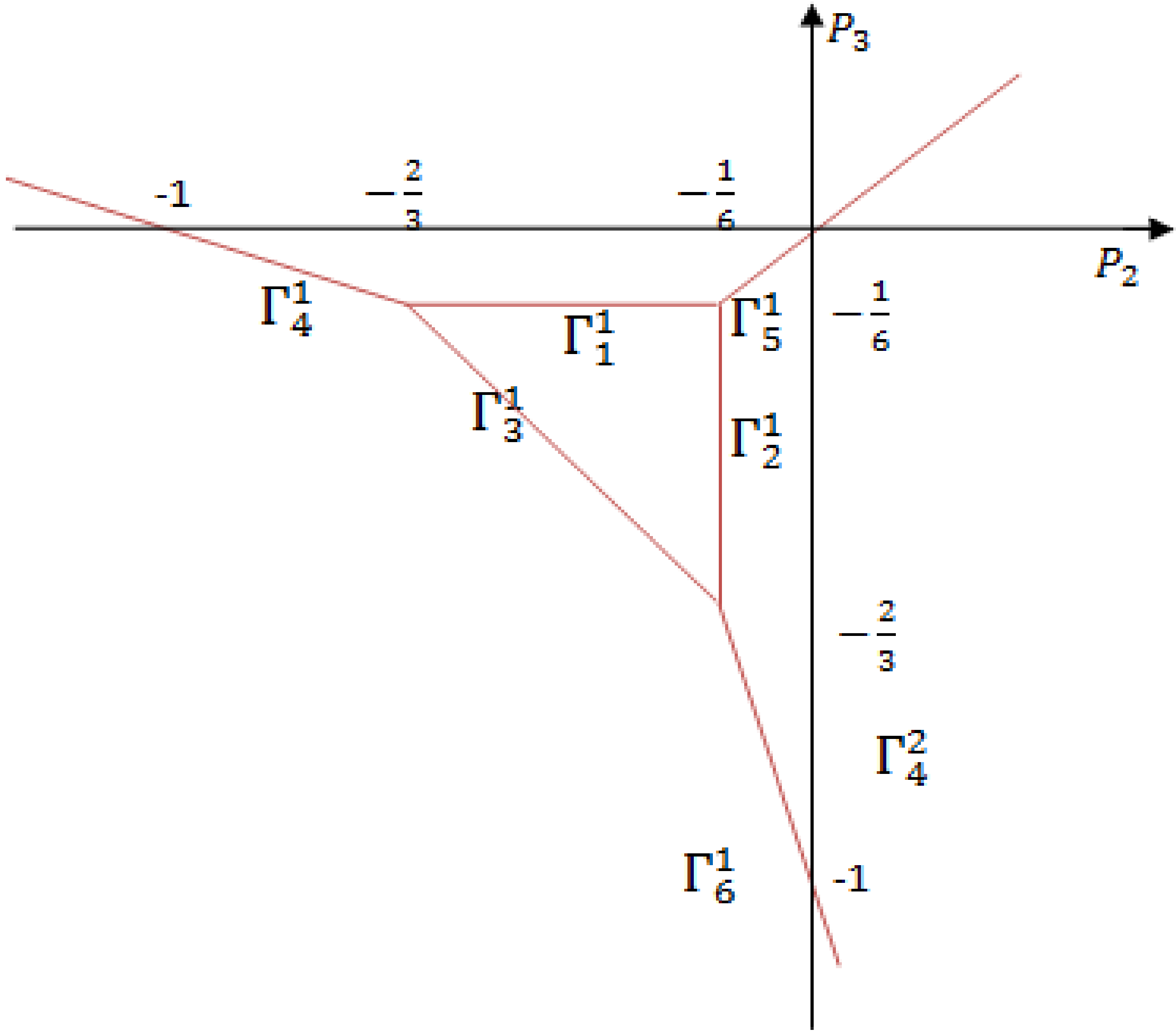


Рис.3 . Пересечение нормальных конусов $U_{1j}^{(d)}$ *с плоскостями* $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ *рис.а)*

Аналогичным образом для каждого $\Gamma_{2j}^{(d)}$ находится нормальный конус $U_{2j}^{(d)}$. Они указаны в таблице 2. $\Gamma(f_2)$ – является тетраэдром (рис. 2), у которого все точки Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 и Q_4^2 являются вершинами. Для вектора $H = (1, 1, 1)$ пересечение нормальных конусов $U_{2j}^{(d)}$ с плоскостью $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ показано на рис. в координатах p_2, p_3.

Используя компьютерную программу, для носителя $S(f_1)$ получена следующая таблица соответствия (таблица 1):

	Вектора	Q_1^1	Q_2^1	Q_3^1	Q_4^1	Q_5^1
1)	(-4 ;-1; -1;)	+	-	+	+	-
2)	(-1; -4; -1)	+	+	-	+	+
3)	(-1; -1; -4)	+	+	+	-	-
4)	(1; 1; 1)	-	+	+	+	+

Таблица 1

Аналогичным образом получена таблица соответствия для $S(f_2)$ (таблица 2)

	Вектора	Q_1^2	Q_2^2	Q_3^2	Q_4^2
1)	(-2; -1; -5)	+	+	+	-
2)	(0; 0; 1)	+	+	-	+
3)	(1; -1; 1)	-	+	+	+
4)	(1; 0; 1)	+	-	+	+

Из таблиц соответствия видно, какие конусы удовлетворяют конусу задачи $P < 0$ (т.е. с отрицательными компонентами); какие точки являются вершинами; какие точки какие грани образуют. Это существенно облегчает дальнейший процесс вычисления пересечения конусов в конусе задачи.

Из таблиц соответствия видно, какие конусы удовлетворяют конусу задачи $P < 0$ (т.е. с отрицательными компонентами); какие точки являются вершинами; какие точки какие грани образуют. Это существенно облегчает дальнейший процесс вычисления пересечения конусов в конусе задачи.

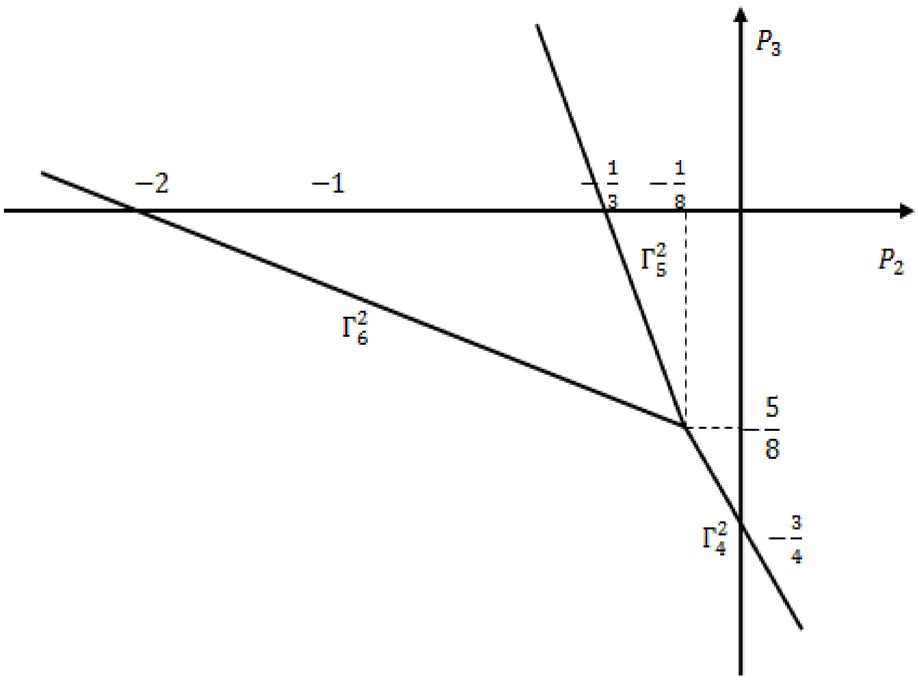


Рис.4.Пересечение нормальных конусов$U_{2j}^{(d)}$ *с плоскостью*

$$p_1 + p_2 + p_3 = -1.$$

Непосредственно из рис.1 и рис. 2 видно, что для $\Gamma(f_1)$ опорные плоскости с $P < 0$ проходят только через элементы треугольников $\Gamma_{11}^{(2)}$, $\Gamma_{12}^{(2)}, \Gamma_{13}^{(2)}$, а для $\Gamma(f_2)$ – через элементы треугольника $\Gamma_{21}^{(2)}$. Запишем линейные соотношения $\begin{matrix} \langle P, Q_1 \rangle = \cdots = \langle P, Q_l \rangle, \\ \langle P, Q_j \rangle < \langle P, Q_1 \rangle,\ l < j \leq m. \end{matrix}$ на плоскости $H_- = \{P: p_1 + p_2 + p_3 = -1\}$ в координатах p_2, p_3 для тех конусов граней $U_{ij}^{(2)}$ и тех конусов рёбер $U_{ij}^{(1)}$, которые пересекаются с конусом задачи U.

Для граней $\Gamma_{11}^{(2)}$, $\Gamma_{12}^{(2)}$, $\Gamma_{13}^{(2)}$ и $\Gamma_{21}^{(2)}$ получим точки:

показанные на рис. 4.

Изображая эти линии на плоскости H_{-}, получим картину сечения H_{-}пространства R_{*}^{3} (рис.5). Жирными и пунктирными линиями на рис. 5 изображены сечения нормальных конусов $U_{1j}^{(1)}$ и $U_{2j}^{(1)}$ рёбер многогранников $\Gamma(f_1)$и $\Gamma(f_2)$ соответственно. Там же штриховкой выделена граница пересечения $U \cap H_{-}$. Из рис. 5 видно, что множество $U \cap H_{-}$ состоит из четырёх точек, т.е. имеется только три пересечения нормальных конусов рёбер и граней:

$$\begin{cases} \mathbf{1})\ \Gamma_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} \cap \Gamma_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{2})} \quad \mathbf{2})\ \Gamma_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} \cap \Gamma_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{2})} \\ \mathbf{3})\Gamma_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} \cap \Gamma_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} \quad \mathbf{4})\Gamma_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{1})} \cap \Gamma_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

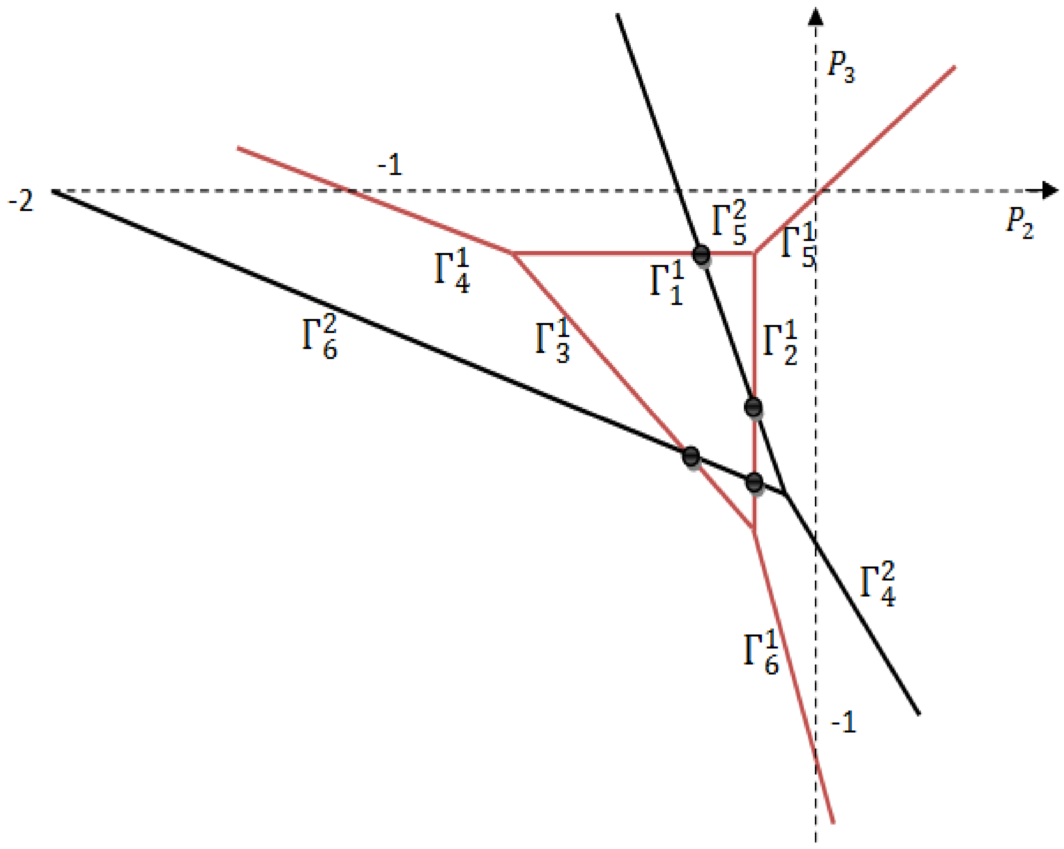


Рис.5. Пересечение нормальных конусов для двух множеств $S(f_1)$ и $S(f_2)$ *с плоскостью* $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ *для конуса задачи* $p_1, p_2, p_3 < 0$. *Штрихпунктирные линии относятся к* $S(f_2)$.

Поскольку на H_- имеем $p_1 = -1 - p_2 - p_3$, и в первом случае $\Pi_1 = \{P = -\lambda(10, 5, 3)\}$; аналогично во втором случае $\Pi_2 = \{P = -\lambda(2, 1, 3)$; аналогично в третьем случае $\Pi 3 = P = -\lambda(4, 3, 11)$ и в четырем

$\Pi_4 = \{P = -\lambda(2; 3; 7)$

Конусу Π_1 соответствует укороченная система:

$$\begin{cases} \hat{f}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_4 x_3^6 = 0 \\ \hat{f}_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} x_2^2 x_3 + a_{22} x_1 x_3 = 0; \end{cases} \tag{3}$$

конусу Π_2 – укороченная система:

$$\begin{cases} \hat{f}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_3 x_2^6 = 0 \\ \hat{f}_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} x_2^2 x_3 + a_{22} x_1 x_3 = 0; \end{cases} \tag{4}$$

конусу Π_3 – укороченная система:

$$\begin{cases} \hat{f}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_3 x_2^6 = 0 \\ \hat{f}_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{22} x_1 x_3 + a_{23} x_1^3 x_2 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

а конусу Π_4 – укороченная система:

$$\begin{cases} \hat{f}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^6 = 0 \\ \hat{f}_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{22} x_1 x_3 + a_{23} x_1^3 x_2 = 0; \end{cases} \tag{6}$$

Построим степенное преобразование для системы (3).

Для неё имеем рёбра $\Gamma_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} = \{Q_1^1, Q_4^1\}$; $\Gamma_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{2})} = \{Q_1^2, Q_2^2\}$ следующие разности

$Q_2^1 - Q_1^1 = (-1;-1;5)$; $Q_2^2 - Q_1^2 = (1;-2;0)$ Составляем из этих векторов две первые строки матрицы α и подбираем третью строку, чтобы получить $det\alpha = 1$. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -10 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Степенное преобразование с матрицей α и его обратное есть :

$$\begin{array}{ll} y_1 = x_1 x_2 x_3^{-5} & x_1 = y_1^{-2} y_2^{-3} y_3^{-10} \\ y_2 = x_1^{-1} x_2^{-4} x_3^{10} & x_2 = y_1^{-2} y_2^{-2} y_3^{-5} \\ y_3 = x_2 x_3^{-2} & x_3 = y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^{-3} \end{array} \tag{8}$$

После степенного преобразования (8)

$$\begin{array}{l} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1^{-2} y_2^{-3} y_3^{-10} y_1^{-2} y_2^{-2} y_3^{-5} y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^{-3} + a_4 y_1^{-6} y_2^{-6} y_3^{-18} = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} y_1^{-4} y_2^{-4} y_3^{-10} y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^{-3} + a_{22} y_1^{-2} y_2^{-3} y_3^{-10} y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^{-3} = 0 \end{array} \tag{9}$$

и сокращения первого уравнения укороченной системы (9) на $y_1^{-6} y_2^{-6} y_3^{-18}$, а второго на $y_1^{-5} y_2^{-5} y_3^{-13}$ получим систему:

$$\begin{cases} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 + a_4 = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) = a_{21} + a_{22} y_1^2 y_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

При этом система относительно y_1 и y_2

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a_4}{a_1} \\ y_2 = -\frac{a_{21} a_1^2}{a_{22} a_4^2} \end{cases} \tag{11}$$

<u>Построим степенное преобразование для системы (4).</u>

Для неё имеем рёбра $\Gamma_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} = \{Q_1^1, Q_3^1\}$; $\Gamma_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{2})} = \{Q_1^2, Q_2^2\}$ следующие разности

$Q_1^1 - Q_2^1 = (1; -5; 1)$; $Q_1^2 - Q_2^2 = (-1; 2; 0)$ Составляем из этих векторов две первые строки матрицы α и подбираем третью строку, чтобы получить $det\alpha = 1$. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \;\; \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Степенное преобразование с матрицей α и его обратное есть :

$$\begin{matrix} y_1 = x_1 x_2^{-5} x_3^1 & \qquad & x_1 = y_2^{-1} y_3^{-2} \\ y_2 = x_1^{-1} x_2^2 & \qquad & x_2 = y_3^{-1} \\ y_3 = x_2^{-1} & \qquad & x_3 = y_1 y_2 y_3^{-3} \end{matrix} \qquad (13)$$

После степенного преобразования (10)

$$\begin{gathered} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_2^{-1} y_3^{-2} y_3^{-1} y_1 y_2 y_3^{-3} + a_3 y_3^{-6} = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} y_3^{-2} y_1 y_2 y_3^{-3} + a_{22} y_2^{-1} y_3^{-2} y_1 y_2 y_3^{-3} = 0. \end{gathered} \qquad (14)$$

и сокращения первого уравнения укороченной системы (14) на y_3^{-6}, а второго на $y_1 y_3^{-5}$ получим систему:

$$\begin{cases} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 + a_3 = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) = a_{21} y_2 + a_{22} = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

При этом система относительно y_1 и y_2

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a_3}{a_1} \\ y_2 = -\frac{a_{22}}{a_{21}} \end{cases} \qquad (16)$$

<u>Построим степенное преобразование для системы (5).</u>

Для неё имеем рёбра $\Gamma_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} = \{Q_1^1, Q_3^1\}$; $\Gamma_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} = \{Q_2^2, Q_3^2\}$ следующие разности

$Q_2^1 - Q_1^1 = (-1; 5; -1)$; $Q_2^2 - Q_1^2 = (2; 1; -1)$ Составляем из этих векторов две первые строки матрицы α и подбираем третью строку, чтобы получить $det\alpha = 1$. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & -15 & -11 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{matrix} y_1 = x_1^{-1} x_2^5 x_3^{-1} & x_1 = y_1 y_2^{-5} y_3^{-4} \\ y_2 = x_1^2 x_2^1 x_3^{-1} & x_2 = y_1 y_2^{-4} y_3^{-3} \\ y_3 = x_1^{-3} x_3 & x_3 = y_1^3 y_2^{-15} y_3^{-11} \end{matrix} \quad (18)$$

После степенного преобразования (18)

$$\begin{matrix} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 y_2^{-5} y_3^{-4} y_1 y_2^{-4} y_3^{-3} y_1^3 y_2^{-15} y_3^{-11} + a_3 y_1^6 y_2^{-24} y_3^{-18} = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{22} y_1 y_2^{-5} y_3^{-4} y_1^3 y_2^{-15} y_3^{-11} + a_{23} y_1^3 y_2^{-15} y_3^{-12} y_1 y_2^{-4} y_3^{-3} = 0. \end{matrix} \quad (19)$$

и сокращения первого уравнения укороченной системы (19) на $y_1^5 y_2^{-24} y_3^{-18}$, а второго на $y_1^4 y_2^{-20} y_3^{-15}$ получим систему:

$$\begin{cases} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_3 y_1 = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) = a_{22} + a_{23} y_2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

При этом система относительно y_1 и y_2

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a_1}{a_3} \\ y_2 = -\frac{a_{22}}{a_{23}} \end{cases} \quad (21)$$

<u>Построим степенное преобразование для системы (6).</u>

Для неё имеем рёбра $\Gamma_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{1})} = \{Q_1^1, Q_2^1\}$; $\Gamma_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} = \{Q_2^2, Q_3^2\}$ следующие разности $Q_2^1 - Q_1^1 = (5; -1; -1)$; $Q_2^2 - Q_1^2 = (2; 1; -1)$ Составляем из этих векторов две первые строки матрицы α и подбираем третью строку, чтобы получить $det\alpha = 1$. Получаем унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & c \end{pmatrix}; \alpha = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{matrix} y_1 = x_1^{-5} x_2 x_3 & x_1 = y_1 y_2 y_3^{-2} \\ y_2 = x_1^{12} x_2^{-1} x_3^{-3} & x_2 = y_1^3 y_2^2 y_3^{-3} \\ y_3 = x_1^3 x_3^{-1} & x_3 = y_1^3 y_2^3 y_3^{-7} \end{matrix} \quad (23)$$

После степенного преобразования (23)

$$\hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 y_2 y_3^{-2} y_1^3 y_2^2 y_3^{-3} y_1^3 y_2^3 y_3^{-7} + a_2 y_1^6 y_2^6 y_3^{-12} = 0$$
$$\hat{g}_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_{22} y_1 y_2 y_3^{-2} y_1^3 y_2^3 y_3^{-11} + a_{23} y_1^3 y_2^{-15} y_3^{-12} y_1 y_2^{-4} y_3^{-3} = 0. \quad (24)$$

и сокращения первого уравнения укороченной системы (24) на $y_1^6 y_2^6 y_3^{-12}$, а второго на $y_1^4 y_2^4 y_3^{-9}$ получим систему:

$$\begin{cases} \hat{g}_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 y_1 + a_2 = 0 \\ \hat{g}_2(y_2) = a_{22} + y_1^2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

При этом полная система

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a_2}{a_1} \\ y_2 = -\frac{a_1^2 a_{22}}{a_2^2} \end{cases} \quad (26)$$

При значении $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = -1; a_4 = -1; a_5 = 2;$ $a_{21} = -1; a_{22} = -1; a_{23} = -4; a_{24} = -1;$ (3) система имеет вид

$$\begin{cases} \hat{f}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_4 x_3^6 = 0 \\ \hat{f}_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} a_{21} x_2^2 x_3 + a_{22} x_1 x_3 = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a_4}{a_1} \\ y_2 = -\frac{a_{21} a_1^2}{a_{22} a_4^2} \end{cases} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y_3^{-10} \\ x_2 = y_3^{-5} \\ x_3 = -y_3^{-3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = -y_3^{-10} \\ (x_2)^2 = (y_3^{-5})^2 \\ (x_3)^5 = (-y_3^{-3})^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2^2 \\ {x_2}^2 = y_3^{-10} \\ {x_3}^5 = -y_3^{-15} = -x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

x1=−x22x22=y3−10⇒ x35=−x22x2x1=−x22x3=−x23/5

(3)

Сделаем преобразования

$$\begin{cases} x_1 = -x_2^2 + z_1 \\ x_3 = -x_2^{3/5} + z_2 \end{cases} \quad (4)$$

Теперь (4) подставляем на (1)

$$
\cdot\begin{cases} \hat{f}_1 = (-x_2^2 + z_1)x_2\left(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2\right) + (-x_2^{3/5} + z_2)^6 = 0 \\ \hat{f}_2 = -x_2^2\left(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2\right) - (-x_2^2 + z_1)(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2) \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\begin{cases} \hat{f}_1 = (-x_2^3 + z_1x_2)\left(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2\right) - \left(z_2^6 - 6z_2^5x_2^{\frac{3}{5}} + 15z_2^4x_2^{\frac{6}{5}} - 20z_2^3x_2^{\frac{9}{5}} + 15x_2^{\frac{12}{5}}z_2^2 - 6z_2x_2^3 + x_2^{\frac{18}{5}}\right) = 0 \\ \hat{f}_2 = -x_2^2\left(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2\right) - (-x_2^2 + z_1)\left(-x_2^{\frac{3}{5}} + z_2\right) = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \hat{f}_1 = \boldsymbol{x_2^{\frac{18}{5}}} - z_2x_2^3 - z_1x_2^{\frac{8}{5}} - z_1z_2x_2 - z_2^6 + 6z_2^5x_2^{\frac{3}{5}} - 15z_2^4x_2^{\frac{6}{5}} + 20z_2^3x_2^{\frac{9}{5}} - 15z_2^2x_2^{\frac{12}{5}} + 6z_2x_2^3 - \boldsymbol{x_2^{\frac{18}{5}}} = 0 \\ \hat{f}_2 = x_2^{\frac{13}{5}} - x_2^2z_2 - \left(x_2^{\frac{13}{5}} - x_2^2z_2 - x_2^{\frac{3}{5}}z_1 - z_1z_2\right) = 0 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}_1 = 5z_2x_2^3 - z_1x_2^{\frac{8}{5}} - z_1z_2x_2 - z_2^6 + 6z_2^5x_2^{\frac{3}{5}} - 15z_2^4x_2^{\frac{6}{5}} + 20z_2^3x_2^{\frac{9}{5}} - 15z_2^2x_2^{\frac{12}{5}} = 0 \\ \hat{f}_2 = \boldsymbol{x_2^{\frac{13}{5}}} - x_2^2z_2 - \boldsymbol{x_2^{\frac{13}{5}}} + x_2^2z_2 + x_2^{\frac{3}{5}}z_1 + z_1z_2 = 0 \end{cases}
$$

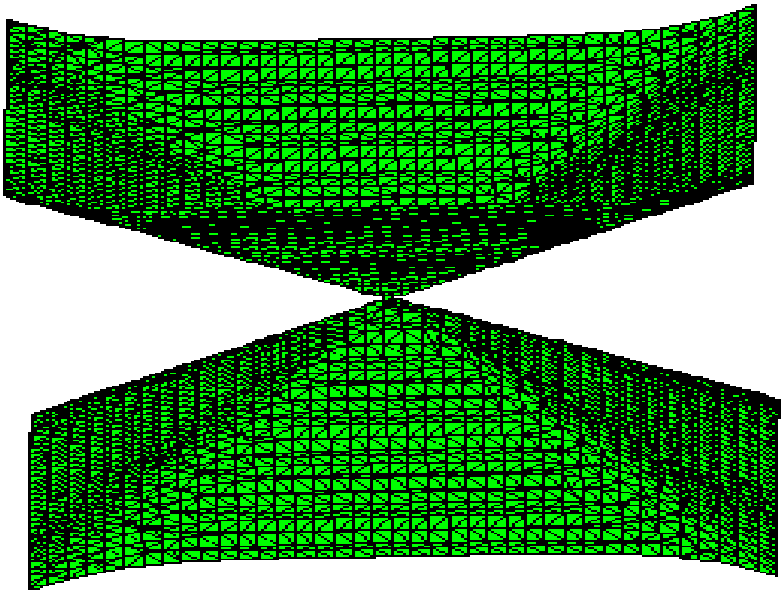
$$
\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}_1 = 5z_2x_2^3 - z_1x_2^{\frac{8}{5}} - z_1z_2x_2 - z_2^6 + 6z_2^5x_2^{\frac{3}{5}} - 15z_2^4x_2^{\frac{6}{5}} + 20z_2^3x_2^{\frac{9}{5}} - 15z_2^2x_2^{\frac{12}{5}} = 0 \\ \hat{f}_2 = x_2^{\frac{3}{5}}z_1 + z_1z_2 = 0 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \text{ответ} \begin{cases} x_3 = -2x_2^{\frac{3}{5}} \\ z_2 = -x_2^{\frac{3}{5}} \end{cases}
$$

Это выполняется только для системы (3), то есть будет решением для $П_1$.Используя этот метод можно найти решения для систем (4),(5),(6).

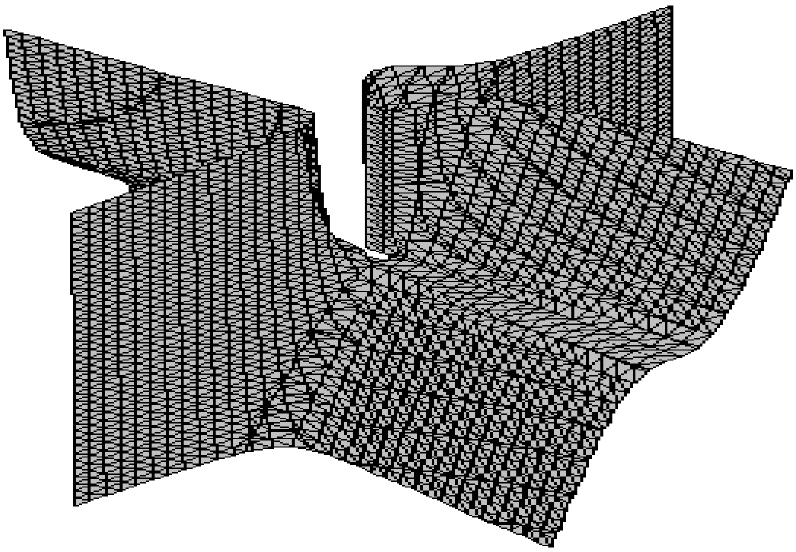
Для решения данной системы (1) при некоторых значениях a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 была построена программа maple

```
> with(plots) :
> implicitplot3d( x·y·z + 2·x^6−y^6 − z^6 + 2·x^3·z^3 = 0, x =−10..10, y =
    −10..10, z =−10..10, grid = [40, 40, 40], color = green );
```



>

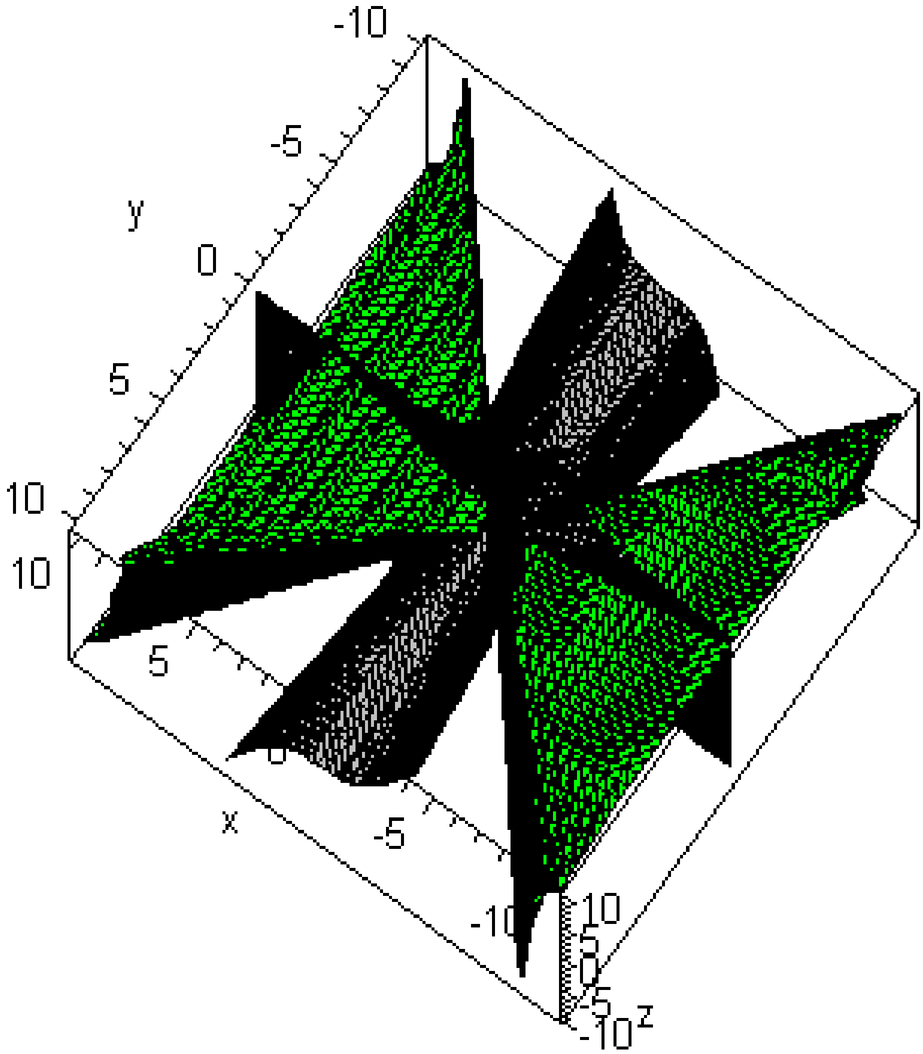
$implicitplot3d\left(-y^2\cdot z-x\cdot z-4\cdot x^3\cdot y-x^2\cdot y\cdot z=0, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, grid=[40,40,40], color=grey\right);$



> $a := implicitplot3d\left(x\cdot y\cdot z+2\cdot x^6-y^6-z^6+2\cdot x^3\cdot z^3=0, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, grid=[40,40,40], color=green\right):$

> $b := implicitplot3d\left(-y^2\cdot z-x\cdot z-4\cdot x^3\cdot y-x^2\cdot y\cdot z=0, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, grid=[50,50,50], color=grey\right):$

> $display(\{a,b\}, axes=boxed)$



Замечание 1. Для получения большей степени точности для ветвей кривой, необходимо делать подстановку $y = y_п + y_н$, где $y_п$- предыдущее представление приближённого решения в близи нуля, а $y_н$ - новое приближение, которое необходимо найти, выраженное через параметр.

Замечание 2. Найденные точки пересечения (вектора), дают первые степени параметра в представлении решения вблизи особенностей. При составление степенного преобразования, для обратного преобразование это пересечение составляет третий столбец.

<u>Замечание 3</u>. Компьютерная программа для ЭВМ позволяет построить «многогранник Ньютона», так как размерность равна 3. Что позволяет не строить рисунки, особенно искать точки, лежащие на гранях, рёбрах или внутри многогранника. Такую же информацию можно получить непосредственно из таблиц соответствия. Точка не имеющая плюсы находится внутри, один плюс – на грани, два плюса - на ребре. Также можно указать какие точки составляют ту или иную грань или ребро. Этот процесс определения элементов «многогранника Ньютона» обобщается для пространства любой размерности. Что важно в связи с отсутствием рисунков для таких случаев.

§ 2.Построение матриц степенных преобразований

Методы нахождение матриц степенных преобразований

Здесь м**етод**ы нахождение матриц степенных преобразований покажем в примерах.

1-метод.

Пример:$f\ (X) = x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_2^2x_3 = 0$

Находим носители $Q_1 = (1,3,0)$, $Q_2 = (3,0,1)$, $Q_3 = (0,2,1)$. Теперь

Находим разностные векторы $\overline{Q_1}$, $\overline{Q_2}$ следующим образом

$$\overline{Q_1} = Q_2 - Q_1 = (2,-3,-1), \quad \overline{Q_2} = Q_3 - Q_1 = (-1,-1,1)$$

и составим матрицу $\beta^* = (\bar{Q}_1\bar{Q}_2 0)$.

$$\beta = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем элементарную преобразованию над строками

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем элементарное преобразование над столбцами

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_3+C_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3C_2+C_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+C_2\,,-2C_1+C_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После элементарных преобразований над строками и столбцами, точно также сделаем элементарные преобразование над строками и столбцами единичную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_3+C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3C_2+C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2\,,-2C_1+C_3}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно мы преобразовали β к следующему виду

$$\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \delta \cdot \gamma_1$$

Значить, если $\gamma \cdot \gamma_1$ обозначим как унимодулярная матрица – α, тогда

$$\alpha = \gamma \cdot \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Степенное преобразование приходит к такому виду

$$\begin{cases} x_1 = y_1^3 y_2 y_3^{-2} \\ x_2 = y_1^2 y_2 y_3^{-3} \\ x_3 = y_1^4 y_2^2 y_3^{-5} \end{cases}$$

После такого преобразование уравнение имеет вид

$g(Y) = y_1^9 y_2^4 y_3^{-11}$+$y_1^{13} y_2^5 y_3^{-11}$+$y_1^8 y_2^4 y_3^{-11}$=0

$g(Y) = y_1^8 y_2^4 y_3^{-11} \cdot (y_1 + y_1^4 y_2 + 1) = 0$. Если обих сторон этого равенства делим на мономе $y_1^8 y_2^4 y_3^{-11}$, мы получим следующие равенство

$$\hat{g}(Y) = y_1 + y_1^4 y_2 + 1$$

2-метод Алгоритм Эйлера

$f(X)$ =$x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_2^2 x_3 = 0$

$$Q_2 - Q_1 = (2, -3.1)$$

$$Q_3 - Q_1 = (-1, -1, 1)$$

Составим матрицу A в следующем виде:

A=$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, det A = $a \cdot (-2)$+$b \cdot (-3)$+$c \cdot (-5)$

В место α, β, γ соответственно возьмем -2,-3,-5.

L = $(\alpha, \beta, \gamma\ )$=$(2, -3, -5)$ и используем Алгоритм Эйлера.

$\alpha = -2, \beta = -3, \gamma = -5$ c=$\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right] = \left[\frac{-2}{-5}\right] = 0$, $b = \left[\frac{\beta}{\gamma}\right] = \left[\frac{-3}{-5}\right] = 0$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α'= $\alpha - c\gamma = -2$, $\beta' = \beta - b\gamma = -3$, $\gamma' = \gamma = -5$

$\alpha_1 = -5,$ $\beta_1 = -2$, $\gamma_1 = -3$, $c_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right] = 1$, $b_1 = \left[\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right] = 0$

$$M_2 = R_1 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'' = -2 \ , \ \beta'' = -2 \ , \ \gamma'' = -3$$

$$\alpha_2 = -3, \qquad \beta_2 = -2 \ , \quad \gamma_2 = -2 \ , \quad c_2 = \left[\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\right] = 1\ , \qquad b_2 = \left[\frac{\beta_2}{\gamma_2}\right] = 1$$

$$M_3 = R_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha''' = -1 \ , \ \beta''' = 0 \ , \ \gamma'' = -3$$

$$\alpha_3 = -2, \qquad \beta_3 = -1 \ , \quad \gamma_3 = -0\ , \ c_3 = 2$$

$$M_4 = R_3 \cdot S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Унимодуляр $-N$ матрица с целыми элементами. Если мы возьмем эту матрицу как матрицу степенных преобразований то получим следующую

$$\begin{cases} x_1 = y_2 y_3^2 \\ x_2 = y_2 y_3^3 \\ x_3 = y_1 y_3^5 \end{cases}$$

После такого преобразование функция $f(X)$ имеет вид

$g(Y) = y_2^4 y_3^{11} + y_1 y_2^3 y_3^{11} + y_1 y_2^2 y_3^{11} = y_2^2 y_3^{11}(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1) = 0$

или $\tilde{g}(Y) = y_1 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0$

3-метод.

$f(X) = x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_2^2 x_3 = 0$

$Q_1 = (\ 1,3,0\ ), Q_2 = (\ 3,0,1\ ) Q_3 = (\ 0,2,1\ )$

$$\overline{Q_1} = Q_2 - Q_1 = (2\,,-3,1)\overline{Q_2} = Q_3 - Q_1 = (-1,-1,1)$$

Значит здесь $k_1 = k_2 = 1$ va $\overline{Q_1} = (a_1, a_2, a_3) = (2\,,-3,\ 1\,)$, $\overline{Q_2} = (b_1, b_2, b_3) = (-1,-\,1,\ 1\,)$

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,,\ M_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Выберем q_1 и q_2 так что выполнялось равенство $q_1M_2 - q_2M_1 = 1 \quad -3q_1 + 2q_2 = 1, q_1 = 1,\ \ q_2 = -1,$

$\delta_1 = -a_1q_1 - a_2q_2 = -2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) = 2 - 3 = -1,$

$\delta_2 = -b_1q_1 - b_2q_2 = -1 \cdot (-1) + (-1) = 1 + 1 = 2$

Теперь составим унимодулярную матрицу α

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 & 1\cdot 1 & -2 \\ -1\cdot 1 & 1\cdot 1 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Значит степенное преобразование имеет следующий вид $\begin{cases} x_1 = y_1^{-1} \cdot y_2 \cdot y_3^{-2} \\ x_2 = y_1^{-1} \cdot y_2 \cdot y_3^{-3} \\ x_3 = y_1^{-1} \cdot y_2 \cdot y_3^{-5} \end{cases}$

Эту степенную преобразованию приложим на данную уравнению $f(X) = g_1(Y) = y_1^{-4} \cdot y_2^{4} \cdot y_3^{-11} + y_1^{-4} \cdot y_2^{5} \cdot y_3^{-11} + y_1^{-3} \cdot y_2^{4} \cdot y_3^{-11} = 0$

$g_1(Y) = y_1^{-4} \cdot y_2^{4} \cdot y_3^{-11} \cdot (1 + y_2 + y_1) = 0$

$g(Y) = 1 + y_2 + y_1 = 0.$

Заключение

В последнее время, в математике, стали уделять внимание изучению решений нелинейных уравнений и их систем, которые имеют широкую область практического применения. На основе различных математических методов облегчается решение многих задач механики, физики, химии, биологии и других наук. Но большинство известных методов не дают простого и более общего метода решения поставленных задач. В силу различных причин они либо имеют громоздкие вычисления, либо дают не полный спектр решений задач. Наиболее практичным, с этой точки зрения, является метод многогранников Ньютона, который включает в себя степенные и логарифмические преобразования на основании которого написана данная работа. Этот метод изучает свойства решений систем уравнений по показателям степеней входящих в него мономов.

С помощью степенных преобразований с унимодулярной матрицей α решается укороченная система, и тем самым получаем первое приближённое решение. Делая замену в виде суммы найденного решения и неизвестного нового, повторяя этот процесс можно получить решение с любой степенью точности вблизи особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов И. А. “Позитивные преобразования в сфере среднего и высшего образования”. Ташкент

2. Солеев А. С. Особые точки трёхмерной алгебраической кривой. //Вопросы алгебры и теории чисел. Сборник научных трудов.-Самарканд, изд. СамГУ, 1982, с.41-62.

3. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит, 1998, с.5-126 . § 11 гл. I 48 стр, § 11 гл. I

4. Солеев А.С. Алгоритм вычисления многогранников Ньютона. //ДАН Уз ССР. 1982, №5, с.14-16.

5. Солеев А.С., Арансон А. Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В.Келдышева РАН, Москва, 1994.

6. Черников С.Н. Линейные неравенства. - М.: Наука 1968. 488 с.

7. Soleev, A. Algorithm of Local Resolution of Singularities of a Space Curve.// V.G.Ganzha, E.W.Mayr, and E.V. Vorozhtsov (Eds.): CASC 2005, LNCS 3718, pp. 405-415, 2005.

8. Фукс Б .А.Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.М.:Физматгиз,1962.

9. Гурса Э. Курс математического анализа.М.-Л.:ГТТИ,1933.Т.1.Ч.2.

10. Брюно. А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных

уравнений. М.:Наук,1979.254 с.

11. Брюно. А. Д.Степенные асимптотики решений нелинейных систем // Изв.АН СССР.Сер.матем.1965.Т.вып.С.329-364.

12 Брюно. А. Д.Общий подход к асимптотическому нелинейному анализу//

Вестн.Моск.ун-та.Сер.1.Матем.Механ.1996.№6.С.24-27.

13 Becker T.,Weispfenning V.Grobner Bases.Springer-Verlag, New York,Berlin etc.1993.574 p.

14. Бернштейн Д.Н.Число корней системы уравнений // Функ.анализ и его прил.1975. Т.9,вып.3С.1-4.

15. Брюно. А. Д.,Солеев А.Первые приближения алгебраических уравнений// ДАН.1994.Т.335,вып.3.С.277-278.

16. Брюно. А. Д.,Солеев А.Локальная униформизация ветвей пространственной кривой и многогранники Ньютона//Алгебра и анализ.1991.Т.3, вып.1.С.67-102.

17. Куклес И.С.,Груз Д.М. О числе операций, связанных с применением метода Фроммера // Изв.АН УзССР.Сер.физ.-мат.наук.1958.№1.С.29-45.

18. Кушниренко А.Г.Многогранники Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными // УМН.1975.Т.30,вып.2.С.266-267.

19. Кушниренко А.Г. Многогранники Ньютона и теорема Безу // Функц.анализ и его прил.1976.Т.10,вып.3.С.82-83.

20. Хованский. А.Г. Многогранники Ньютона и формула Эйлера-Якоби // УМН.1978.Т.33,вып.6.С.245-246.

21. Khovanskii A.G.Algebra and mixed volumes // Burago Yu/D., Zalgaller V.A.,Geometric Inequalities.Berlin:Springer,1988.P.182-207.

22. Гринь А.Н.К теории ветвления решений нелинейного уравнения в многомерном случае ветвления // ДАН СССР.1971.Т.201,вып.1.С.22-23.

23. Fukuda T., Aoki K., Sun W.Z. On the number of branches of a plane curve germ // Kodai math.J.1986.V.9.P.178-187.

24. Motzkin T.S., Schoenberg G.J.The relaxation method for linear inequalities // Canad.J.Math.1954.V.6.P.393-404.

25.Szafraniec A.A formula for the number of branches for one-dimensional semiana-litic sets // Math.Proc.Camb.Phic.Soc.1992.V.112.P.527-534.

26.Zariski O. Local uniformization on algebraic varieties // Ann.of Math.1940.

V.41,№ 2.P. 852-896.

27. MacMilan W.A reduction of a system of power series to an equivalent system of polynomials // Math.Ann.1912.V.72.P.157-179.

28.www.ziyonet.uz.

29.www.math.ru.

30.www.wikipedia.ru.

31.www.math.net.

32.www.mat-net.ru.