

Bul' funksiyasini to'liqlikka tekshirish.

Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda Φ sistema **to'liq funksiyalar sistemasi** deb ataladi.

Istalgan funktsiyani MKNSh yoki MDNSh ko'rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi, chunki istalgan funktsiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Agar $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lsa, u holda unga ikki taraflama bo'lgan $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi.

Φ^* sistemaning to'liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1, \dots, x_n)$ funktsiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatish kerak. Buning uchun avval f^* funktsiyani $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to'liq bo'lgani uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikki taraflama qonunga asosan ikki taraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali f funktsiyani hosil qilamiz.

Berilgan Φ funksiyalar sistemasining to'liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozitsiyasi natijasida saqlansin. Haqiqatan ham, u holda bunday xususiyatga ega bo'lmagan funktsiyani Φ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali hosil qilib bo'lmaydi.

Funksiyalarning bunday xususiyatlarini tekshirish uchun odatda **funksional yopiq sinf** tushunchasidan foydalaniladi.

Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo'lgan funktsiya ham shu sistemaning elementi bo'lsa, u holda bunday sistema **superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema** deb ataladi.

Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo'lgan har qanday funksiyalar sistemasi **funksional yopiq sinf** deb ataladi.

Ravshanki, muayyan xususiyatga ega bo'lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma'lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo'lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo'la oladi:

- a) bir argumentli funksiyalar sinfi;
- b) mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi;
- d) L – chiziqli funksiyalar sinfi;
- e) S – o'z-o'ziga ikki taraflama funksiyalar sinfi;
- f) M – monoton funksiyalar sinfi;
- g) P_0 – nul qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi;
- h) P_1 – bir qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi.

Bo'sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to'plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf **xususiy funksional yopiq sinf** deb ataladi.

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to'liq bo'lishi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmaydigan funktsiya topilishi yetarli va zarurdir.

O'z-o'zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2 dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf **maksimal funksional yopiq sinf** deb ataladi.

Mantiq algebrasida hammasi bo'lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud. Bular quyidagilardir: P_0, P_1, M, S, L .

Post teoremasi. $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lishi uchun bu sistemada P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmaydigan kamida bitta funksiya mavjud bo'lishi

yetarli va zarur (ya'ni $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi faqat P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining ham qism to'plami bo'lmaganda va faqat shundagina to'liq sistema bo'ladi).

Zarurligi. $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ to'liq sistema (ya'ni $[\Phi] = P_2$) va F maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi bo'lsin deb faraz qilamiz. U vaqtda F sinfnining yopiqqligini hisobga olib, $P_2[\Phi] \subseteq [F] = F$ munosabatni yozish mumkin, ya'ni $F = P_2$. Ammo bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $\Phi \subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Post jadvali

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_n					

Yetarlilik isbotini o'quvchiga havola etamiz.

Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to'plami bo'ladi.

Amalda berilgan $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasining to'liq yoki to'liq emasligini aniqlash uchun **Post jadvali** deb ataluvchi jadvaldan foydalaniladi. Post jadvali quyida keltirilgan.

Jadvalning xonalariga o'sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo'lsa "+" ishora, bo'lmasa "-" ishorasi qo'yiladi. $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistema to'liq funksiyalar sistemasi bo'lishi uchun, Post teoremasiga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta "-" ishorasi bo'lishi yetarli va zarur.

$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lmasligi uchun P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to'plami bo'lishi, ya'ni Post jadvalining biror ustunidagi barcha ishoralar "+" bo'lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to'liqligi tushunchasi bilan sinfnining (to'planning) **yopig'i** tushunchasi o'zaro bog'langan.

A bilan P_2 (nta argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o'z ichiga olgan) to'planning biror qism to'plamini belgilaymiz. A to'plam funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan hamma B funksiyalari to'plami (A to'plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma B funksiyalari to'plami) A to'planning **yopig'i** deb aytiladi va $[A]$ kabi belgilanadi.

Agar $[A] = A$ bo'lsa, u holda A to'plam (sinf) **funksional yopiq sinf** deb ataladi.

Har qanday $[A]$ funksional sinf yopiq sinf bo'ladi. Bu hol ko'pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To'plam yopig'i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to'liqligi ta'rifini (avvalgi ta'rifga ekvivalent bo'lgan ta'rifni) berish mumkin.

Agar $[A] = P_2$ bo'lsa, u holda A funksiya-lar sistemasi **to'liq** deb ataladi.
 $f = (x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y)$ funksiyaning Post teoremasiga asosan to'liqlilikka tekshiramiz

Birinchi qadam: Funksiyaning konstanta 0 saqllovchilikka tekshiramiz.

$$(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y) = 1 \wedge 1 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1;$$

Chunki,

$$(x \Leftrightarrow y) = (0 \Leftrightarrow 0) = 1;$$

$$(x \Rightarrow y) = (0 \Rightarrow 0) = 1;$$

$$(x \downarrow y) = (0 \downarrow 0) = 1.$$

Bundan kelib chiqib funksiya $(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y) \notin T_0$, ya'ni konstanta 0 saqllovchi emas.

Ikkinchi qadam: Funksiyaning konstanta 1 saqllovchilikka tekshiramiz.

$$(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y) = 1 \wedge 1 \vee 0 = 1 \vee 0 = 1;$$

Chunki,

$$(x \Leftrightarrow y) = (1 \Leftrightarrow 1) = 1;$$

$$(x \Rightarrow y) = (1 \Rightarrow 1) = 1;$$

$$(x \downarrow y) = (1 \downarrow 1) = 0.$$

Bundan kelib chiqib funksiya $(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y) \in T_1$, ya'ni konstanta 1 saqllovchi.

Uchunchi qadam: Chiziqlilikka tekshiramiz.

Quyidagi funksiya uchun Jigalkin polinomini topamiz.

Birinchi usul.

$$x\bar{y} \vee \bar{x}y = x + y, \text{ ayniyat formulasi} \quad (1)$$

Ayniyat formulalaridan foydalanib

$$\bar{x} = x + 1 \text{ va } \bar{\bar{x}} = x, \quad x + x = 0, \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

quyidagini topamiz,

$$\begin{aligned} xy \vee \bar{x}\bar{y} &= \overline{\overline{xy} \bar{x}\bar{y}} = \overline{(xy + 1)(x + 1)(y + 1)} + 1 = \\ &= \overline{(xy + 1)(xy + x + y) + 1} = \\ &= xy + xy + xy + xy + x + y + 1 = x + y + 1 = \overline{x + y} \end{aligned} \quad (2)$$

Berilgan formulani soddalashtiramiz

$$x\bar{y}z \vee \bar{x}yz = z(x\bar{y} \vee \bar{x}y),$$

$$x\bar{y}z \vee \bar{x}yz = \bar{z}(xy \vee \bar{x}\bar{y}) \text{ bundan kelib chiqadi}$$

$$x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}yz = z(x\bar{y} \vee \bar{x}y) \vee \bar{z}(xy \vee \bar{x}\bar{y})$$

Ayniyat formuladan foydalanib

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge \bar{x} = 0 \text{ va (1), (2)}$$

quyidagini topamiz,

$$\begin{aligned} z(x\bar{y} \vee \bar{x}y) \vee \bar{z}(xy \vee \bar{x}\bar{y}) &= \\ &= z(x + y) \vee \bar{z}(\overline{x + y}) = z(x + y) + \bar{z}(\overline{x + y}) + z(x + y) \wedge \bar{z}(\overline{x + y}) \end{aligned}$$

chunki,

$$\bar{z}(\overline{x + y}) = (z + 1)(x + y + 1) \text{ va } z(x + y) \wedge \bar{z}(\overline{x + y}) = 0$$

Bundan kelib chiqadi,

$$z(x + y) \vee \bar{z}(\overline{x + y}) = zx + zy + zx + zy + z + x + y + 1 = x + y + z + 1.$$

Bundan kelib chiqadiki, berilgan funksiya chiziqli.

Ikkinchi usul (aniqmas koeffisientlar usuli).

$f(x,y,z)$ funksiya uchun Jigalkin polinomi umumiy ko'rinishi quyidagi:

$$f(x,y,z)=a_0xyz+a_1xy+a_2xz+a_3yz+a_4x+a_5y+a_6z+b.$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b$ koeffitsiyentlarni aniqlash uchun chinlik jadvalini tuzamiz

xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$f(x,y,z)$
000	0	0	0	1	1
001	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0
011	0	0	1	0	1
100	0	0	0	0	0
101	0	1	0	0	1
110	1	0	0	0	1
111	0	0	0	0	0

Chinlik jadvaliga asoslanib quyidagi tenglamalarni tuzishimiz mumkin:

$$f(0,0,0)=1=a_0000+a_100+a_200+a_300+a_40+a_50+a_60+b, \text{ bundan kelib chiqib } b=1,$$

$$f(0,0,1)=0=a_0001+a_100+a_201+a_301+a_40+a_50+a_61+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_6=1,$$

$$f(0,1,0)=0=a_0010+a_101+a_200+a_310+a_40+a_51+a_60+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_5=1,$$

$$f(0,1,1)=1=a_0011+a_101+a_201+a_311+a_40+a_51+a_61+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_3=0,$$

$$f(1,0,0)=0=a_0100+a_110+a_210+a_300+a_41+a_50+a_60+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_4=1,$$

$$f(1,0,1)=1=a_0101+a_110+a_211+a_301+a_41+a_50+a_61+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_5=0,$$

$$f(1,1,0)=1=a_0110+a_111+a_210+a_310+a_41+a_51+a_60+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_6=0,$$

$$f(1,1,1)=0=a_0111+a_111+a_211+a_311+a_41+a_51+a_61+1, \text{ bundan kelib chiqib } a_0=0,$$

$$f(x,y,z) = x + y + z + 1$$

Bundan kelib chiqadiki, berilgan funksiya chiziqli.

To'rtinchi qadam: Monotonlikka tekshiramiz.

Quyidagi funksiyalarni qaysi biri monoton:

$$a) xy \vee xz \vee \bar{x}z \quad b) x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$$

a) $xy \vee xz \vee \bar{x}z = xy \vee z(x \vee \bar{x}) = xy \vee z$ formulani soddalashtiramiz. Birinchidan funksiyaning DNSh da o'zgaruvchilarining inkorlari qatnashmagan, shuning uchun u monoton. Ikkinchidan funksiya (0,0,0), (0,1,0), (1,0,0) to'plamlarda nolga teng. Qolgan to'plamlarda, (0,0,1) tashqari, ikkita ko'pkonstanta bir qatnashgan. To'plam (0,0,1) $\succ$ (0,0,0), qolgan ikkita to'plam bilan esa solishtirib bo'lmaydi. Demak, ko'riladigan funksiya monoton.

b) Funksiya monoton emas, chunki

funksiyaning DNSh da

$$x \Rightarrow (x \Rightarrow y) = \bar{x} \vee (\bar{x} \vee y) = \bar{x} \vee y \text{ o'zgaruvchilarning inkorlari qatnashmagan va } (0,0) \prec$$

$$(1,0), \text{ lekin } 0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0) = 1 \succ 1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 0.$$

Beshinchi qadam: O'z-o'ziga qo'shmallikka tekshiramiz.

$xy \vee yz \vee xz$ funksiya o'z-o'ziga qo'shmami?

Bu funksiya o'z-o'ziga qo'shma, chunki funksiyaning chinlik jadvali simmetrik

xyz	xy	yz	xz	$f(x,y,z)$
000	0	0	0	0

001	0	0	0	0
010	0	0	0	0
011	0	1	0	1
100	0	0	0	0
101	0	0	1	1
110	1	0	0	1
111	1	1	1	1

Quyidagi funksiyaning o'z-o'ziga qo'shma funktsiyasi ekanligini analitik usulda ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned}\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} &= (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) = (y \vee xz)(x \vee z) = \\ &= xy \vee yz \vee xz \vee xz = xy \vee yz \vee xz \\ y' \text{ ani, } \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= f(x, y, z).\end{aligned}$$

$\frac{N_0}{f}$	T_0	T_1	S	L	M
$(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y)$	-	+	+	+	-

Bul funksiya sistemasi to'liqlikka tekshirish.

Berilgan bul funksiya sistemasi to'liqlikka tekshiring

a) $D_1 = \{x|y\}$ 6) $D_2 = \{x+y+z, xy, 0, 1\}$

a) $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Ma'lumki $x|y \notin T_0$, $x|y \in T_1$ ($0|0 = \bar{0} \vee \bar{0} = 1, 1|1 = \bar{1} \vee \bar{1} = 0$).

Chunki $\overline{x|y} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \vee y \neq x|y$, to $x|y \notin S$.

$x|y = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy} = xy + 1$ funksiya uchun Jigalkin polinomini topamiz. Bundan kelib chib, $x|y \notin L$.

Agar $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$ va $(0,0) \prec (1,1)$, lekin $1 = \bar{0} \vee \bar{0} > \bar{1} \vee \bar{1} = 0$, unda $x|y \notin M$.
 D_1 sistema uchun Post jadvali.

D_1	T_0	T_1	S	L	M
$x y$	-	-	-	-	-

Demak, D_1 - sistema to'liq.

6)

D_2	T_0	T_1	S	L	M
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
xy	+	+	-	-	+
$x+y+z$	+	+	+	+	-

$f(x, y) = x \wedge y$ konstanta 0 va konstanta 1 saqlovchi, chunki,

$f(0,0) = 0 \wedge 0 = 0$ va $f(1,1) = 1 \wedge 1 = 1$.

$f(x, y) = x \wedge y$ o'z-o'ziga qo'shma emas, chunki,

$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{y} = x \vee y$ ya'ni $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(x, y)$.

$f(x, y) = x \wedge y$ chiziqli emas, chunki funksiyaning Jigalkin polinomi

$f(x, y) = x \wedge y$.

Funksiya monotonn, chunki DNSh da o'zgaruvchilarning inkori qatnashmagan

$f(x, y) = x \wedge y$

$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{y} = x \vee y$

Funksiya $x + y + z$ o'z-o'ziga qo'shma, chunki $\bar{x} = x + 1$ va $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z)$

$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = x + y + z + 1 + 1 + 1 = x + y + z$

Funksiya $x + y + z$ monotonn emas, chunki funksiya DNSh da

$f(x, y, z) = x + y + z = (\bar{x}y \vee x\bar{y}) + z = (\bar{x}y \vee x\bar{y})\bar{z} \vee (\bar{x}y \vee x\bar{y})z = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee y\bar{z}$

O'zgaruvchilarning inkorlari qatnashgan va

$(0,0,1) \prec (0,1,1)$, lekin $1=0+0+1 > 0+1+1=0$.

D_2 - to'liq sistema.

Foydalanilgan adabiyot.

1. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г., Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения, Санк-Петербург: ЛАНЬ, 1999, 286 с.
2. Гиндикин С.Г., Алгебра логики в задачах. М: Наука, 1972, 288 с.
3. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику. М: Наука, 1979, 272с.
4. Б. Н. Иванов. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Учебное пособие. - М.:Лаборатория Базовых Знаний, 2003, 288с.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Учебное пособие. Москва: Наука.