

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



TOSHKENT AXBOROT
TEKNOLOGIYALARI
UNIVERSITETI



DASTURIY MAHSULOTLAR VA
APPARAT-DASTURIY MAJMUALAR
YARATISH MARKAZI

SCIENTIFIC JOURNAL
PROBLEMS OF
COMPUTATIONAL AND
APPLIED MATHEMATICS

The journal was established in 2015.
4 issues are published per year.

Founder:

Centre for the development of software and
hardware- program complexes at Tashkent university
of information technologies

Editor-in-chief:

Ravshanov N.

Deputy editor:

Azamov A.A., Mirzaev N.M.

Executive secretary:

Nuraliev F.M.

Editorial board members:

Alimov I., Aloe R.J., Aripov M.M.,
Bondarenko B.A., Chye En Un (Russia),
Gasnov E.E. (Russia), Hayotov A.R.,
Hudayberdiev M.H., Hujayorov B.B., Hujayev I.K.,
Ignatyev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanihin S.I. (Russia),
Kabilyjanov A.S., Karachik V.V. (Russia),
Muhamadiev E. (Russia), Muhamediya D.T.,
Normurodov Ch.B., Starovoytov V.V. (Belarus),
Samal D.I. (Belarus), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Shadimetov H.M., Tashev A.A. (Kazakhstan),
Uteuliev N.U., Yuldashev T.

The journal is registered in the Uzbek Agency of
Press and Information. The registration certificate for
the № 0856 on August 5, 2015.
ISSN 2181-8460.

At a reprint of materials the reference to the journal
is obligatory. Authors are responsible for the
accuracy of the facts and reliability of the
information.

Editorial address:

100125, Tashkent, Durmon yuli st., 25

Tel.: +(99871)237-62-34

E-mail: info@pvp.m.uz

Website: http://www.pvp.m.uz

Design & Computer imposition:

Rasulov A.B., Ahmedov D.

**Responsible for updating the web-page
of the journal:**

Ergashev M.

Printing office of the Center of DS and HPC at TUTT
100125, Tashkent, Durmon Yuli st., 25

Signed for print 07.06.2016.

Format 60x84 1/8.

Order № 5. Print run 100 copies.

№2 2016

CONTENTS

MATHEMATICAL MODELLING

Atabekov I.U.
Mathematical model of mineralization of Aydar-Amasay
lake system..... 5

Burnashev V.F., Khujayorov B.H.
Mathematical modeling of oil bed flooding by polymer
solutions with taking into account disperse states of
liquids..... 10

Kabulov A.V., Normatov I.H., Kalandarov I.I.
Algorithmic model of management on the basis of
algebra over functioning tables..... 19

Palvanov B.Yu., Abdurrahmanova Sh.A., Karshiyev D.
Numerical solution of problems of technological process
separation of granular mixtures flat vibrolattices..... 24

Ravshanov N., Kodirov K.
Modeling of the process of free water filtration of
groundwater based on the availability of gallery
of wells..... 33

Ravshanov N., Muradov F.K., Nabulima L.M.
Numerical modeling of transfer and diffusion processes of
active aerosol particles in the boundary layer of the
atmosphere..... 47

Khujayev J.I.
Mathematical model and algorithm of solution of Stefan
problem with the account of density change..... 59

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Annakulova G.K., Abdullayeva M.G., Igamberdiev K.A.
Building a Lyapunov function for highly nonlinear self-
oscillating systems..... 71

Aripov M.M., Yuldoshev Yu.Sh.
Contact of fuchsian group with hyperbolic metric..... 75

Malikov Z.M., Nazarov F.Kh.
Method of the numerical solution of the equations of
hydrodynamics for streams in channels..... 82

Shabozov M.Sh., Dadaboev P.A.
On the asymptotic point estimates of approximate
integration of the curvilinear integrals on certain classes
of functions and curves..... 86

Shadimetov H.M., Jalolov Ik.I.
Optimal quadrature formulas in the space of Sobolev..... 94

PROGRAMMING TECHNOLOGIES

Bruskov V.P., Bazarov D.K., Bazarov R.K.
The program module of visualization of intermediation
results of molecular docking problem..... 103

УДК 512.312

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ АКТИВНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Равшанов Н.

д.т.н., заведующий лабораторией Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99871) 262-71-62, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Мурадов Ф.А.

старший преподаватель Самаркандского филиала ТУИТ,
тел.: +(99897) 925-05-65, e-mail: farrux1981@unail.uz

Набиулина Л.М.

к.т.н., заведующий кафедрой Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами,
тел.: +(99890) 988-11-26, e-mail: luiza_n@list.ru

Рассматривается проблема, связанная с распространением активных аэрозольных соединений под влиянием химических реакций в атмосфере и переходом их в другие более токсичные вещества. Дается краткий обзор научных работ по математическому обеспечению процесса переноса и диффузии активных вредных веществ в атмосфере. Разработана математическая модель процесса переноса и диффузии активных вредных веществ в приземном слое атмосферы, где под влиянием химических реакций в атмосфере они переходят в другие формы, описываемая системой дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: математическая модель, перенос и диффузия вредных веществ, погодно-климатический фактор, гидромеханика, численный алгоритм, программное средство, вычислительный эксперимент.

NUMERICAL MODELING OF TRANSFER AND DIFFUSION PROCESSES OF ACTIVE AEROSOL PARTICLES IN THE BOUNDARY LAYER OF THE ATMOSPHERE

Ravshanov N.K., Muradov F.K., Nabiulina L.M.

The paper considers the problems associated with the spread of active aerosol compounds under the influence of chemical reactions in the atmosphere and move into other more toxic substances. A brief review of scientific papers related to the software of the process of transfer and diffusion of active harmful substances in the atmosphere is given. In the article the mathematical model of the process of active transport and diffusion of pollutants in the atmospheric boundary layer, where under the influence of chemical reactions in the atmosphere is transformed into other forms, describing the system of differential equations in partial derivatives.

Keywords: mathematical model, transfer and diffusion of harmful substances, weather-climatic factor, hydromechanics, numerical algorithm, software, computational experiment.

ATMOSFERANING CHEGARA QATLAMIDA FAOL AEROZOL ZARRALARINING KO'CHISH VA DIFFUZIYA JARAYONLARINI SONLI MODELLASHTIRISH

Ravshanov N.K., Muradov F.K., Nabiulina L.M.

Ushbu ishda atmosferaning kimyoviy reaksiyalari ostidagi aktiv aërozol birikmalarining va boshqa yanada zaharliroq moddalarning tarqalishi bilan bog'liq muammo qarab o'tilgan. Zararli moddalarning ko'chish va diffuziyasi jarayonining matematik ta'minoti bilan bog'liq ilmiy ishlar haqida umumiy ma'lumot berib o'tilgan. Maqolada atmosferaning yuza qatlamida zararli moddalarning ko'chish va diffuziyasining matematik modeli yaratilgan bo'lib, u yerda atmosferaning kimyoviy reaksiyasi ta'siri ostida boshqa, xususiyl hosilalarda differensial tenglmalar sistemasi bilan ifodalanuvchi formaga o'tiladi.

Tayanch iboralar: matematik model, zararli moddalarning ko'chish va diffuziyasi, ob-havo va iqlim ko'rsatkichi, gidromexanika, sonli algoritim, dasturiy ta'minot, hisoblash tajribasi.

1. Введение

Интенсивный рост использования ископаемого органического топлива в конце XX и начале XXI веков привел к резкому ухудшению экологического состояния атмосферы и подстилающей поверхности земли, а также водных акваторий. В состав вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу промышленными объектами, входят оксид серы и азота, твердые зольные частицы, а также соединения тяжелых металлов и конденсированные ароматические органические системы, обладающие канцерогенными свойствами.

Во всех промышленно развитых европейских и азиатских странах установлены низкие значения предельно допустимых концентраций (ПДК) летучей золы, оксидов серы и азота в воздухе, причем их нижние пределы периодически пересматриваются в сторону уменьшения.

Анализ экологического состояния мегаполисов показал, что примерно третья часть всех вредных выбросов приходится на долю тепловых электростанций. В большинстве стран мира приняты законодательные меры, призванные ограничить выброс вредных веществ в атмосферу электростанциями. С 1 января 2000 г. на территории России в соответствии с решениями Европейской комиссии вдвое снижены допустимые пределы по выбросам (ПДВ) летучей золы, оксидов серы и азота для установок тепловых электростанций мощностью более 50 МВт. Новые нормативы действовали до конца 2005 г. в дальнейшем планируется их ужесточение и приведение в соответствие со стандартами промышленно развитых стран.

Для снижения выбросов вредных веществ до нормативных значений на тепловых электростанциях применяются специальные мероприятия, включающие способы сокращения образования вредных веществ в процессе сжигания топлива и меры по очистке газов от уже образовавшихся продуктов сгорания. К таким мероприятиям относятся: использование экологически чистого топлива, совершенствование технологии сжигания топлива, газоочистка, золоулавливание, сероочистка и азотоочистка. В данной работе более подробно рассмотрим азотоочистку дымовых газов.

С середины 80-х – начала 90-х годов прошлого века на ТЭС проводят очистку дымовых газов от оксидов азота (денитрификацию). Сегодня на ТЭС эксплуатируется свыше 500 азотоочистных установок, причем их используют, как правило, в сочетании с первичными методами подавления образования NOX в процессе горения топлива. Наиболее широко азотоочистные системы применяют на электростанциях в Японии, Германии, Австрии, Дании, Швейцарии, Швеции, Нидерландах и США. Азотоочистные установки используют как на котельных агрегатах, сжигающих угольное и мазутное топливо, так и на газовых турбинах, расположенных в основном в крупных городах.

Также надо отметить, что добыча и разработка новых углеводородных месторождений и земных недр в мировом масштабе, запуск мощных объектов

производства, рост транспортно-коммуникационных средств и т.д. привели к их резкому воздействию на окружающую среду, вследствие чего нарушается экологическое равновесие как локально – на отдельных территориях, так и глобально – в масштабах всей планеты. Это особенно заметно в государствах с быстрым ростом производительных мощностей объектов производства и первичной переработки сырья, например в таких странах, как Индия, Китай, Северная Корея, Малайзия, Сингапур, а также в странах Европы и т.д. Например, в Китае и Индии за период 2014-2015 гг. неоднократно было объявлена «желтая» и «красная» экологическая угроза.

Результаты проведенного исследования показали, что загрязнение воздуха в Китае является причиной смерти примерно 1,6 миллиона человек каждый год. Это ошеломляет — почти 4400 смертей в день [1].

Анализ проведенных исследований показал, что самыми опасными загрязнителями воздуха являются крошечные аэрозольные частицы, выделяемые в результате работы электростанций, сжигания ископаемого топлива в объектах производства и отопительных системах. Эти крошечные частицы, выброшенные в атмосферу, попадают в лёгкие и кровь людей, что приводит к таким заболеваниям, как астма, болезни сердца и др.

По сообщению «New York Times», исследователи утверждают, что их оценки смертности основаны на данных Всемирной организации здравоохранения, полученных в рамках программы по исследованию причин смертности от пяти заболеваний, связанных с воздействием различных уровней загрязнения воздуха мелкозернистыми частицами.

В результате нарушения экологического баланса на земном шаре резко начали расти раковые, астматические, аллергические и другие заболевания, а также отмечается сокращение численности многих видов фауны и флоры.

В своем докладе на Климатическом Саммите ООН в Париже президент РФ В.В. Путин подчеркнул, что «Выбросы парниковых газов в атмосферу всех стран мира в 2012 году составили 46 миллиард тонн» [2]. Эти тревожные факты говорят о том, что перед человечеством стоит острая проблема – защита окружающей среды от техногенных факторов и принятие управленческих решений в мировом масштабе. В связи с остротой этой мировой проблемы Российская Федерация 2017 год объявила годом «Экологии - защиты окружающей среды».

Несмотря на то что Узбекистан является одним из благоприятных регионов, с точки зрения экологического состояния в мире, на государственном уровне особое внимание уделяется решению этой проблемы, активно работают экологические комитеты по охране окружающей среды, недрпользования, во всех вузах республики для подготовки специалистов по решению экологических проблем созданы и создаются кафедры и научные направления и т.д.

Обзор научных публикаций за последние годы показывает, что в перечне актуальных задач, решаемых с помощью математического

моделирования, вопросы экологии занимают особое место.

Обзорный анализ источников [3-11] показал, что воздействие аэрозольных частиц на состояние окружающей среды зависит, как правило, от совокупности химических и физических процессов, происходящих в атмосфере. При переносе и диффузии вредных веществ в атмосфере существенную роль играет состав и размер частиц аэрозолей. Для адекватного описания формирования аэрозольных частиц необходимы комплексные математические модели, учитывающие динамические, физико-химические и кинетические процессы, происходящие в атмосфере. Указанный выше подход позволяет в рамках единой модели учитывать сложные взаимосвязи между динамическими и физико-химическими процессами и процессами формирования аэрозолей в атмосфере. С помощью разработанных этих моделей можно воспроизвести эволюцию газовых примесей и аэрозольных частиц в атмосфере, начиная с молекулярного уровня до образования частиц в несколько микрон с учетом их ионного состава, а также эффективно представить пространственно-временную изменчивость газовых примесей и аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы и оценить антропогенную нагрузку на природную среду.

В частности, в работе [3] рассмотрен комплекс математических моделей для решения задач динамики и кинетики многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Сформулирована базовая математическая модель, включающая динамические газо- и жидкофазные химические процессы, а также кинетические процессы нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции, с использованием неравновесной функции распределения частиц по размерам. Особое внимание уделяется механизмам образования частиц новой фазы из газов-предшественников при гомогенной нуклеации паров серной кислоты и воды.

Для построения вычислительного алгоритма решения дискретных аналогов уравнений гидромеханики воспользуемся методом расщепления по физическим процессам. На каждом малом интервале получается схема, состоящая из шести этапов: 1) перенос многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей по траекториям; 2) турбулентная диффузия; 3) фотохимическая трансформация; 4) кинетические процессы конденсации; 5) процессы коагуляции; 6) совместная модель химических процессов, протекающих в газовой и жидкой фазах с учетом процессов массообмена на разделе газ-частица.

По разработанным моделям проводились численные эксперименты для воспроизведения пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере в региональном и глобальном масштабах.

В работе [4] проведены аналитические исследования процессов распространения в атмосфере вредных выбросов предприятий. В

качестве основного атмосферного загрязнителя рассматривается углекислый газ (CO_2).

Решается задача при разовом мгновенном выбросе вредной примеси в стандартном приземном слое атмосферы с заданным ветровым полем и получено выражение для концентрации примесей в стационарном случае и при непрерывно действующем источнике загрязнения. Построены уровни равного загрязнения атмосферы и проанализирована их трансформация при изменении параметров источника.

В работе [5] разработана трехмерная нестационарная математическая модель процесса распространения радионуклидов в атмосфере и расчета доз облучения, позволяющая проводить прогнозные расчеты эволюции радиационной обстановки в районе Волгодонской атомной электростанции. Разработанная математическая модель учитывает факторы, определяющие распространение радионуклидов в атмосфере и загрязнение подстилающей поверхности, а также формирование индивидуальных доз облучения. На основе разработанной модели численного алгоритма создан проблемно-ориентированный программный комплекс «RADExpert», который предназначен для проведения прогнозных расчетов распространения радионуклидов и индивидуальных доз облучения, оперативной оценки последствий внештатных ситуаций работы ВоАЭС с учетом характеристик местности, различных метеословий и радионуклидных составов выбросов, и отличается от известных программных комплексов данного типа тем, что состоит из геонформационной, моделирующей и экспертно-аналитической систем. Автором получены новые взаимозависимости, позволяющие учитывать влияние метеорологических условий на процесс распространения радионуклидов при запроектных авариях 1-го и 2-го типов, которые создают экологически неблагоприятные последствия для городов Цимлянск и Волгодонск.

Задача численного моделирования влияния дымовых аэрозолей в атмосфере рассмотрена в работе [6]. В работе предлагается негидростатическая модель атмосферного пограничного слоя, учитывающая фазовые переходы в системе пар-вода-лед. Разработано математическое обеспечение для расчета различных сценариев формирования конвективной облачности в районе пожара и переноса дымового аэрозоля.

При выводе математической модели процесса распространения дымовых аэрозолей учитывают процессы конвекции, турбулентного обмена, влажности, силы и направления ветра. Количество и распределение осадков при наличии в атмосфере различных концентраций примесей позволили сделать предположение, что активный вертикальный теплоперенос, генерируемый в зоне массовых лесных пожаров, может оказаться фактором влияния локальных процессов в зоне пожара на атмосферную циркуляцию регионального масштаба. Как утверждают авторы, полученные результаты моделирования распространения дымового аэрозоля

в тропосфере под влиянием различных метеорологических факторов являются новыми.

В диссертационной работе [7] рассмотрен процесс распространения активной примеси в свободной и облачной атмосфере. Предложена математическая модель рассеяния активной примеси в атмосфере, основанная на применении линейризованных уравнений движения Навье-Стокса. Основное отличие данной модели от других моделей рассеяния примесей в атмосфере состоит в том, что используя данную модель, можно найти значения мгновенной концентрации активной примеси в любой точке облачной атмосферы, основываясь на простых для определения физических параметрах: поле давления, поле температуры, поле плотности, векторное поле скорости атмосферного воздуха. Коэффициенты турбулентной диффузии в предлагаемой модели используются только при моделировании процесса рассеяния водяного.

В работе [8] рассмотрена задача оперативного прогноза - метод учета эмиссий загрязняющих веществ в атмосферу от очагов лесных пожаров. При моделировании переноса загрязняющих веществ в атмосфере от очагов лесных пожаров учтено обратное влияние состава воздуха на прогноз метеорологических величин.

В [9-13] созданы численный алгоритм и программный комплекс для обработки и анализа видеозаписей на базе персонального компьютера и разработаны методы анализа, позволяющие определять дисперсию примеси и коэффициенты турбулентной диффузии по видеозаписям аэрозольного шлейфа от стационарного точечного источника выброса вредных веществ в атмосфере. Разработанный алгоритм преобразования цифровой видеопоследовательности в динамическое изображение позволяет существенно уменьшить объем исходной видеoinформации. С использованием созданных программ статистической обработки были построены динамические изображения. Данные изображения используются при расчетах коэффициента турбулентной диффузии.

В работах [14-16] проведены исследования процесса распространения и трансформации примесей в регионе оз. Байкал, на основе разработанной нелинейной модели объекта, которая описывается уравнением турбулентной диффузии. Проведенные авторами исследования показали, что наибольшее влияние на оз. Байкал оказывают выбросы предприятий Слюдянки и Байкальска. Проведенными вычислительными экспериментами показано незначительное влияние Иркутско-Черемховского промышленного комплекса из-за удаленности источников выбросов от озера и наличия орографических неоднородностей. При северо-западном ветре со скоростью 2 м/с Приморский хребет и Олхинское плато задерживают третью часть ртути от попавшей на озеро. В радиусе 5 км от одиночного источника оседает примерно

10% валового выброса ртути, что соответствует результатам других исследователей.

Работа [17] посвящена построению информационной модели расчета распространения примеси в приземном слое атмосферы над промышленными регионами. Для реализации рассмотренных задач в работе была разработана структура информационной модели расчета загрязнения атмосферы, которая включает три стадии обработки экологической информации: предобработку, обработку и постобработку.

Предлагаемая структура содержит модуль импорта информации с целью перевода информации, предоставленной субъектами экологического мониторинга из распространенных форматов в формат внутреннего представления в виде SQL команд и базу исходных данных. Представленная в виде SQL запросов информация в зависимости от ее типа подразделяется на три блока: информация о концентрациях загрязняющих веществ, метеорологическая и географическая информация; сортировка баз данных. Так как исходные данные от субъектов мониторинга могут поступать в неопределенном порядке, необходимо выполнять сортировку каждый раз при добавлении новых данных в базу, поскольку для большинства методов прогнозирования важен порядок наблюдения во времени. На этапе удаления аномальных наблюдений предварительной обработкой производится исключение из дальнейшей обработки или коррекция исходных данных, которые являются аномальными. Этап инициализации параметров предусматривает расчет и инициализацию параметров, которые не зависят ни от времени, ни от пространственных характеристик, а зависят только от типа территориально распределенного объекта и являются общими для большинства методов расчета.

Работы [18-19] посвящены определению источников загрязнения вредных веществ в атмосфере математическими методами, в основе которых лежит решение обратной задачи переноса примеси. Эти методы позволяют по определенному числу точек наблюдений восстановить параметры источников загрязнения и выявить территориальное расположение аэрозольного загрязнения.

В результате проведенных исследований определены количественные характеристики загрязнения территории города предприятием циркониевого цикла, пространственного распределения загрязняющих веществ и отработка методики выявления источников загрязнения по результатам наблюдений состояния окружающей среды.

Вместе с тем, анализ многочисленных работ позволяет утверждать, что в исследованиях авторов не рассмотрены химические процессы, протекающие в газовой и жидкой фазах, с учетом процессов массообмена на разделе газ-частица в трехмерной постановке и скорости перемещения воздушной массы атмосферы по трем направлениям u , v , w и при учете влияния химических реакций на аэрозольные частицы в атмосфере, в результате чего

появляются более токсичные вещества, чем первоначальные.

Также следует отметить, что при математическом моделировании процесса распространения вредных веществ в работах многих авторов предполагается, что распространение вредных веществ от источников не достигает рассматриваемых границ области решения задачи и отсутствует приток вредных веществ через них.

Исходя из сказанного, в настоящей работе предприняты усилия для восполнения указанного пробела. Целью данной работы является разработка математической модели и численного алгоритма решения задачи переноса и диффузии активных аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы при взаимодействии с влажной воздушной массой атмосферы.

2. Постановка задачи

В процессе переноса и диффузии часть аэрозольных соединений под влиянием химических реакций в атмосфере переходит в другие формы, появляются более токсичные вещества, чем первоначальные. Цепочку превращений аэрозольных частиц можно представить следующим образом: $\theta \rightarrow \theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_3$. Этот процесс описывается системой дифференциальных уравнений переноса и диффузии с соответствующими им начальными и граничными условиями [3, 21, 22]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial z} - \\ & - \mu \cdot \frac{\partial^2 \theta_1(x, z, t)}{\partial x^2} - k \cdot \frac{\partial^2 \theta_1(x, z, t)}{\partial z^2} + \\ & + G_1 \cdot \theta_1(x, z, t) = F_1(x, z, t); \\ & \frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial z} - \\ & - \mu \cdot \frac{\partial^2 \theta_2(x, z, t)}{\partial x^2} - k \cdot \frac{\partial^2 \theta_2(x, z, t)}{\partial z^2} + \\ & + G_2 \cdot \theta_2(x, z, t) - \bar{G}_1 \cdot \theta_1(x, z, t) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial z} - \\ & - \mu \cdot \frac{\partial^2 \theta_3(x, z, t)}{\partial x^2} - k \cdot \frac{\partial^2 \theta_3(x, z, t)}{\partial z^2} + \\ & + G_3 \cdot \theta_3(x, z, t) - \bar{G}_2 \cdot \theta_2(x, z, t) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta_1(x, z, t)|_{t=0} = \theta_{1,0}(x, z);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0; \\ \frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\beta \cdot \theta_1(x, z, t);$$

$$\frac{\partial \theta_1(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0;$$

$$\theta_2(x, z, t)|_{t=0} = \theta_{2,0}(x, z) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\gamma \cdot \theta_2(x, z, t);$$

$$\frac{\partial \theta_2(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0;$$

$$\theta_3(x, z, t)|_{t=0} = \theta_{3,0}(x, z) = 0;$$

$$\frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\gamma \cdot \theta_3(x, z, t);$$

$$\frac{\partial \theta_3(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ - количество распространяющейся субстанции; t - время, x, z - координаты; u, v, w - составляющие скорости ветра по направлениям x, z соответственно; w_g - скорость осаждения частицы; k - коэффициент турбулентного перемешивания; γ - коэффициент взаимодействия аэрозольных частиц с подстилающей поверхностью земли; μ - коэффициент диффузии; $\bar{G}_i = G_i + s_i$, G_i - коэффициент поглощения; s_i - количественная характеристика изменения массы концентрации в результате взаимодействия с компонентами атмосферы; $F = Q\delta(x - x_i, z - z_k)$; Q - мощность источника; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ принимают значение 0 или 1 в зависимости от постановки задачи.

Для интегрирования поставленной задачи основные параметры математической модели процесса u, v, w, μ будем определять в виде степенных функций

$$u(x, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \cos \beta,$$

$$v(z, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n,$$

$$w(z, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \sin \beta,$$

$$k(z, t) = k_0(z, t) + \bar{k}(z, t),$$

$$\mu = |\bar{v}| \left(k_x + R\theta_0^2\right),$$

где $|v_1|$ – модуль скорости ветра при $z = 1$ м.

Коэффициент диффузии зависит от расстояния источника загрязнения, а θ_0^2 – дисперсия возмущений направления ветра, усреднённая за достаточно большой промежуток времени. Здесь R – расстояние от источника, k_x – параметр, определяемый по характеристикам приземного слоя. Коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью γ изменяется в пределах $0 \leq \gamma \leq 1$. Если частица попадает в твердую стенку, то считается $\gamma = 0$, если в водную поверхность, то $\gamma = 1$. Обычно часть аэрозольных выбросов в зависимости от своих масс, метеорологических и климатических условий, характеристик подстилающей поверхности и географического расположения области распространения попадает на подстилающую поверхность, часть из них опять попадает в атмосферу. Считают, что γ является постоянной величиной в рассматриваемой области. Это искажает прогноз распределения частиц на подстилающей поверхности. Чтобы избежать такой проблемы, при разработке математической модели процесса нужно учитывать $\gamma = \gamma(x, z, r)$.

Для учета поглощения аэрозольных частиц на растительном покрове коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью γ необходимо вычислить с помощью формулы

$$\gamma(x, z, r) = \begin{cases} 0, & z > z_k \\ 0.264u(z)^{1.65} w_z^{0.66} s(z), & z < z_h \end{cases}$$

Здесь z_1 – высота слоя растительности, $s(z)$ – удельная поверхность растительности.

Задача рассматривается в течение времени $(0, T)$, коэффициент турбулентности зависит от высоты и времени прогнозирования процесса. Как правило, ночью и в подутреннее время наблюдается устойчивая и безразличная стратификация атмосферы, а в дневное время – неустойчивая стратификация атмосферы. Поэтому надо ее учитывать при построении вычислительного алгоритма и программного обеспечения.

Для вычисления коэффициента турбулентности воспользуемся метеорологическими характеристиками в пограничном слое атмосферы, которые функционально связывают вертикальное распределение коэффициента турбулентности от стратификации атмосферы и числа Россби.

Обычно высоты загрязняющих источников расположены по вертикали неравномерно. Поэтому основная задача решается по x, y на равномерных сетках, а по вертикали – на неравномерных сетках.

В зависимости от стратификации атмосферы, от высоты источников загрязнения выбирается коэффициент турбулентности. Коэффициент

диффузии μ также зависит от скорости ветра, т.е. изменяется по вертикали и по времени. Поэтому при построении вычислительного алгоритма надо учитывать изменение этих параметров в поставленной задаче.

3. Метод решения

Так как поставленная задача описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными краевыми условиями, получить решение в аналитической форме затруднительно. Для решения задачи область непрерывного решения заменяем на сеточную и получаем конечно-разностную модель рассматриваемого процесса в аналоговом виде [21-23]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^n}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i+1,k}^n}{\Delta t / 2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^n - \theta_{1,i-1,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \quad (9) \\ & = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) + \\ & + k \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k}^n}{\Delta z} \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В уравнении (9) диффузионные члены, заменяя на конечно-разностные

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right); \\ & k \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k}^n}{\Delta z} \right) = \\ & = \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k}^n - \left(\theta_{1,i,k}^n - \theta_{1,i,k-1}^n \right) \right) = \\ & = \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^n - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^n + \theta_{1,i,k-1}^n \right), \end{aligned}$$

в конечном итоге получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^n}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i+1,k}^n}{\Delta t / 2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^n - \theta_{1,i-1,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^n - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^n + \theta_{1,i,k-1}^n \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично данную процедуру повторяем для целого шага интегрирования по времени и в уравнении (1) заменяем диффузионные члены уравнения и получаем

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & k \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+1}}{\Delta z} \right) = \\ & = \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+1} - \left(\theta_{1,i,k}^{n+1} - \theta_{1,i,k-1}^{n+1} \right) \right) = \\ & = \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} + \theta_{1,i,k-1}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \\ & + u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta z} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta z} + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} = \quad (10) \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} + \theta_{1,i,k-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+1}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения в уравнение (10):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta t}; \quad \eta_1 = \frac{u}{2 \cdot \Delta x}; \quad \eta_2 = \frac{w - w_g}{2 \cdot \Delta z}; \\ \eta_3 &= \frac{\mu}{\Delta x^2}; \quad \eta_4 = \frac{k}{\Delta z^2}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \\ & + u \cdot \frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta z} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta z} + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} = \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) + \\ & + k \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+1}}{\Delta z} \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+1}, \\ & A \cdot \left(\theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k}^n \right) + A \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i+1,k}^n \right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^n - \theta_{1,i-1,k}^n \right) + \\ & + \eta_2 \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^n - \theta_{1,i,k-1}^n \right) + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \eta_3 \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \eta_4 \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^n - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^n + \theta_{1,i,k-1}^n \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & A \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - A \cdot \theta_{1,i,k}^n + A \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & - A \cdot \theta_{1,i+1,k}^n + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i+1,k}^n - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i-1,k}^n + \\ & + \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k+1}^n - \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k-1}^n + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \eta_3 \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \eta_3 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_3 \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k+1}^n - 2 \cdot \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k}^n + \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k-1}^n + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Группируя все члены уравнения (12), получаем

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2} \cdot \eta_1 + \eta_3 \right) \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + (A + G_1 + 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \left(A + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 - \eta_3 \right) \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i-1,k}^n + (A - 2 \cdot \eta_4) \cdot \theta_{1,i,k}^n + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \right) \cdot \theta_{1,i+1,k}'' + \left(A + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 - \eta_4 \right) \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+1} = \\
 & + (\eta_4 + \eta_2) \cdot \theta_{1,i,k-1}'' + = (\eta_1 + \eta_3) \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + (A - 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + (\eta_4 - \eta_2) \cdot \theta_{1,i,k+1}'' + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}, + (\eta_3 - \eta_1) \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} +
 \end{aligned}$$

или

$$-a_i \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + b_i \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + c_i \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = d_i.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_1 + \eta_3; \\
 b_i &= A + G_1 + 2 \cdot \eta_3; \\
 c_i &= A + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 - \eta_3; \\
 d_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{1,i-1,k}'' + (A - 2 \cdot \eta_4) \cdot \theta_{1,i,k}'' + \\
 & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \right) \cdot \theta_{1,i+1,k}'' + (\eta_4 + \eta_2) \cdot \theta_{1,i,k-1}'' + \\
 & + (\eta_4 - \eta_2) \cdot \theta_{1,i,k+1}'' + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Аналогичную процедуру, повторяя для уравнения (11), получаем

$$\begin{aligned}
 & A \cdot \left(\theta_{1,j,k}^{n+1} - \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + A \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\
 & + \eta_1 \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \theta_{1,i,k-1}^{n+1} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} = \\
 & = \eta_3 \cdot \left(\theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\
 & + \eta_4 \cdot \left(\theta_{1,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} + \theta_{1,i,k-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+1},
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & A \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} - A \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + A \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \\
 & - A \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_1 \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_1 \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+1} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + G_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} = \\
 & = \eta_3 \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \eta_3 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_3 \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} + \eta_4 \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+1} + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+1}, \\
 & - \left(\frac{1}{2} \cdot \eta_2 + \eta_4 \right) \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+1} + \\
 & + (A + G_1 + 2 \cdot \eta_4) \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1}
 \end{aligned}$$

В конечном итоге имеем

$$-\bar{a}_i \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+1} + \bar{b}_i \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} + \bar{c}_i \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+1} = \bar{d}_i.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_2 + \eta_4; \\
 \bar{b}_i &= A + G_1 + 2 \cdot \eta_4; \\
 \bar{c}_i &= A + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 - \eta_4; \\
 \bar{d}_i &= (\eta_1 + \eta_3) \cdot \theta_{1,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + (A - 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\eta_3 - \eta_1) \cdot \theta_{1,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{1,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \right) \cdot \theta_{1,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot F_{1,i,k}^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Теперь аппроксимируем граничные условия (3):

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Со вторым порядком точности получаем

$$\frac{-3 \cdot \theta_{1,0} + 4 \cdot \theta_{1,1} - \theta_{1,2}}{2 \cdot \Delta x} = 0. \tag{13}$$

Из соотношения (13) определяем прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_0 = \frac{b_1 + 4 \cdot c_1}{a_1 + 3 \cdot c_1}; \quad \beta_0 = -\frac{d_1}{a_1 + 3 \cdot c_1}.$$

Заменяем граничное условие

$$\left. \frac{\partial \theta_{1,1}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

на конечно-разностное:

$$\frac{-3 \cdot \theta_{1,N} + 4 \cdot \theta_{1,N-1} - \theta_{1,N-2}}{2 \cdot \Delta x} = 0.$$

В итоге значения искомой функции на границе определяем с помощью

$$\theta_{1,N} = \frac{(4 - \alpha_{N-2}) \cdot \beta_{N-1}}{3 - (4 - \alpha_{N-2}) \cdot \alpha_{N-1}} - \frac{\beta_{N-2}}{3 - (4 - \alpha_{N-2}) \cdot \alpha_{N-1}}.$$

Используя указанные выше преобразования, далее граничное условие

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right|_{z=0} = -\gamma \cdot \theta_1, \tag{14}$$

заменяя на конечно-разностное

$$\frac{-3 \cdot \bar{\theta}_{1,0} + 4 \cdot \bar{\theta}_{1,1} - \bar{\theta}_{1,2}}{2 \cdot \Delta z} = -\gamma \cdot \bar{\theta}_{1,1},$$

после некоторого преобразования окончательно вместо уравнения (14) получаем

$$\bar{\alpha}_{1,0} = \frac{\bar{b}_1 + 4 \cdot \bar{c}_1 + 2 \cdot \Delta z \cdot \gamma \cdot \bar{c}_1}{\bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{c}_1}, \quad \bar{\alpha}_{1,1} = -\frac{\bar{d}_1}{\bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{c}_1},$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\bar{b}_1 + 4 \cdot \bar{c}_1 + 2 \cdot \Delta z \cdot \gamma \cdot \bar{c}_1}{\bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{c}_1}, \quad \bar{\beta}_0 = -\frac{\bar{d}_1}{\bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{c}_1}.$$

Аналогично граничное условие

$$\left. \frac{\partial \theta_{1,1}}{\partial z} \right|_{z=L_z} = 0, \quad (15)$$

заменяя на разностное

$$\frac{-3 \cdot \bar{\theta}_{1,M} + 4 \cdot \bar{\theta}_{1,M-1} - \bar{\theta}_{1,M-2}}{2 \cdot \Delta z} = 0,$$

после преобразований вместо (15) получаем

$$\theta_{1,M} = \frac{(4 - \bar{\alpha}_{M-2}) \cdot \bar{\beta}_{M-1} - \bar{\beta}_{M-2}}{3 - (4 - \bar{\alpha}_{M-2}) \cdot \bar{\alpha}_{M-1}}.$$

Для численного интегрирования задачи аналогичные уравнения (1) и соответствующие им краевые условия (5), (6) заменяем на конечно-разностные уравнения и получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i,k}^n}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i+1,k}^n}{\Delta t / 2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{2,i+1,k}^n - \theta_{2,i-1,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{2,i,k+1}^n - \theta_{2,i,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} + G_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^n - 2 \cdot \theta_{2,i,k}^n + \theta_{2,i,k-1}^n \right) + \frac{1}{2} \cdot \bar{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}; \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{2,i,k}^{n+1} - \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - \theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \\ & + u \cdot \frac{\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - \theta_{2,i,k-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta z} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta z} + G_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} = \\ & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} + \theta_{2,i,k-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \bar{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Группируя члены уравнений (16), получаем

$$A \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - A \cdot \theta_{2,i,k}^n + A \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} -$$

$$\begin{aligned} & - A \cdot \theta_{2,i+1,k}^n + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i+1,k}^n - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i-1,k}^n + \\ & + \eta_2 \cdot \theta_{2,i,k+1}^n - \eta_2 \cdot \theta_{2,i,k-1}^n + G_1 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \eta_3 \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \eta_3 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_3 \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \eta_4 \cdot \theta_{2,i,k+1}^n - 2 \cdot \eta_4 \cdot \theta_{2,i,k}^n + \eta_4 \cdot \theta_{2,i,k-1}^n + \frac{1}{2} \cdot \bar{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2} \cdot \eta_1 + \eta_3 \right) \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + (A + G_2 + 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \left(A + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 - \eta_3 \right) \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i-1,k}^n + (A - 2 \cdot \eta_1) \cdot \theta_{2,i,k}^n + \\ & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \right) \cdot \theta_{2,i+1,k}^n + (\eta_4 + \eta_2) \cdot \theta_{2,i,k-1}^n + \\ & + (\eta_4 - \eta_2) \cdot \theta_{2,i,k+1}^n + \frac{1}{2} \cdot \bar{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

После группировки членов уравнение (17) записываем в виде трехдиагональной матрицы:

$$-\tilde{a}_i \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{b}_i \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_i \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{d}_i,$$

где

$$\tilde{a}_i = \frac{1}{2} \cdot \eta_1 + \eta_3;$$

$$\tilde{b}_i = A + G_2 + 2 \cdot \eta_3;$$

$$\tilde{c}_i = A + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 - \eta_3;$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i & = \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{2,i-1,k}^n + (A - 2 \cdot \eta_1) \cdot \theta_{2,i,k}^n + \\ & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \right) \cdot \theta_{2,i+1,k}^n + (\eta_4 + \eta_2) \cdot \theta_{2,i,k-1}^n + \\ & + (\eta_4 - \eta_2) \cdot \theta_{2,i,k+1}^n + \frac{1}{2} \cdot \bar{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично, применяя указанные выше процедуры для целого шага интегрирования по времени, получаем

$$\begin{aligned} & A \cdot \left(\theta_{2,i,k}^{n+1} - \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + A \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - \theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \eta_1 \cdot \left(\theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - \theta_{2,i,k-1}^{n+1} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{2,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + G_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} = \end{aligned}$$

$$= \eta_3 \cdot \left(\theta_{2,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{2,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \eta_4 \cdot \left(\theta_{2,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} + \theta_{2,i,k-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1},$$

или

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2} \cdot \eta_2 + \eta_4 \right) \cdot \theta_{2,i,k-1}^{n+1} + \\ & + (A + G_2 + 2 \cdot \eta_4) \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} + \\ & + \left(A + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 - \eta_4 \right) \cdot \theta_{2,i,k+1}^{n+1} = \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & = (\eta_1 + \eta_3) \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + (A - 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + (\eta_3 - \eta_1) \cdot \theta_{2,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{2,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \right) \cdot \theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1}. \end{aligned}$$

Вводя в уравнения (18) обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_2 + \eta_4; \\ \tilde{b}_i &= A + G_2 + 2 \cdot \eta_4; \\ \tilde{c}_i &= A + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 - \eta_4; \\ \tilde{d}_i &= (\eta_1 + \eta_3) \cdot \theta_{2,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + (A - 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + (\eta_3 - \eta_1) \cdot \theta_{2,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{2,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \right) \cdot \theta_{2,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_1 \cdot \theta_{1,i,k}^{n+1} \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$-\tilde{a}_i \cdot \theta_{2,i,k-1}^{n+1} + \tilde{b}_i \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1} + \tilde{c}_i \cdot \theta_{2,i,k+1}^{n+1} = \tilde{d}_i.$$

Указанные выше процедуры применяем для граничных условий (4), (5) и окончательно получаем

$$\theta_{2,0} = \frac{\tilde{b}_1 + 4 \cdot \tilde{c}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1} \cdot \theta_{2,1} - \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1},$$

где прогоночные коэффициенты определяются с помощью

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= \frac{\tilde{b}_1 + 4 \cdot \tilde{c}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1}; & \tilde{\beta}_0 &= -\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1}; \\ \tilde{\alpha}_0 &= \frac{\tilde{b}_1 + 4 \cdot \tilde{c}_1 + 2 \cdot \Delta z \cdot \gamma \cdot \tilde{c}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1}; & \tilde{\beta}_0 &= -\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1}, \end{aligned}$$

а значения искомой переменной вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_{2,N} &= \frac{(4 - \tilde{\alpha}_{N-2}) \cdot \tilde{\beta}_{N-1}}{3 - (4 - \tilde{\alpha}_{N-2}) \cdot \tilde{\alpha}_{N-1}} - \\ & - \frac{\tilde{\beta}_{N-2}}{3 - (4 - \tilde{\alpha}_{N-2}) \cdot \tilde{\alpha}_{N-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{2,M} &= \frac{(4 - \tilde{\alpha}_{M-2}) \cdot \tilde{\beta}_{M-1}}{3 - (4 - \tilde{\alpha}_{M-2}) \cdot \tilde{\alpha}_{M-1}} - \\ & - \frac{\tilde{\beta}_{M-2}}{3 - (4 - \tilde{\alpha}_{M-2}) \cdot \tilde{\alpha}_{M-1}}. \end{aligned}$$

Для численного интегрирования уравнения (2), заменяя дифференциальные операторы на конечно-разностные, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{3,i,k}^n}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{3,i+1,k}^n}{\Delta t / 2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\theta_{3,i+1,k}^n - \theta_{3,i-1,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{3,i,k+1}^n - \theta_{3,i,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} + G_3 \cdot \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{3,i,k+1}^n - 2 \cdot \theta_{3,i,k}^n + \theta_{3,i,k-1}^n \right) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{3,i,k}^{n+1} - \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_{3,i,k+1}^{n+1} - \theta_{3,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + \\ & + u \cdot \frac{\theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta x} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{3,i,k+1}^{n+1} - \theta_{3,i,k-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta z} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (w - w_g) \cdot \frac{\theta_{3,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{3,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \Delta z} + G_3 \cdot \theta_{3,i,k}^{n+1} = \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\mu}{\Delta x^2} \cdot \left(\theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{k}{\Delta z^2} \cdot \left(\theta_{3,i,k+1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{3,i,k}^{n+1} + \theta_{3,i,k-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+1}. \end{aligned}$$

Группируя члены уравнений (19), (20), получаем

$$\begin{aligned} -\hat{a}_i \cdot \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{b}_i \cdot \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{c}_i \cdot \theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \hat{d}_i, \\ -\hat{a}_i \cdot \theta_{3,i,k-1}^{n+1} + \hat{b}_i \cdot \theta_{3,i,k}^{n+1} + \hat{c}_i \cdot \theta_{3,i,k+1}^{n+1} &= \hat{d}_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_1 + \eta_3; \\ \hat{b}_i &= A + G_3 + 2 \cdot \eta_3; \\ \hat{c}_i &= A + \frac{1}{2} \cdot \eta_1 - \eta_3; \\ \hat{d}_i &= \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \cdot \theta_{3,i-1,k}^n + (A - 2 \cdot \eta_4) \cdot \theta_{3,i,k}^n + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_1 \right) \cdot \theta_{3,i+1,k}^n + (\eta_4 + \eta_2) \cdot \theta_{3,i,k-1}^n + \\
 & + (\eta_4 - \eta_2) \cdot \theta_{3,i,k+1}^n + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}}; \\
 & \hat{a}_i = \frac{1}{2} \cdot \eta_2 + \eta_4; \\
 & \hat{b}_i = A + G_3 + 2 \cdot \eta_4; \\
 & \hat{c}_i = A + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 - \eta_4; \\
 & \hat{d}_i = (\eta_1 + \eta_3) \cdot \theta_{3,i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + (A - 2 \cdot \eta_3) \cdot \theta_{3,i,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\eta_3 - \eta_1) \cdot \theta_{3,i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \cdot \theta_{3,i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left(A - \frac{1}{2} \cdot \eta_2 \right) \cdot \theta_{3,i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \tilde{G}_2 \cdot \theta_{2,i,k}^{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Аппроксимируя краевые условия (7), (8) уравнения (2), получаем

$$\theta_{3,0} = \frac{\hat{b}_1 + 4 \cdot \hat{c}_1}{\hat{a}_1 + 3 \cdot \hat{c}_1} \cdot \theta_{3,1} - \frac{\hat{d}_1}{\hat{a}_1 + 3 \cdot \hat{c}_1},$$

где прогоночные коэффициенты вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_0 &= \frac{\hat{b}_1 + 4 \cdot \hat{c}_1}{\hat{a}_1 + 3 \cdot \hat{c}_1}; & \hat{\beta}_0 &= -\frac{\hat{d}_1}{\hat{a}_1 + 3 \cdot \hat{c}_1}; \\
 \tilde{\alpha}_0 &= \frac{\tilde{b}_1 + 4 \cdot \tilde{c}_1 + 2 \cdot \Delta z \cdot \gamma \cdot \tilde{c}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1}; & \tilde{\beta}_0 &= -\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{a}_1 + 3 \cdot \tilde{c}_1},
 \end{aligned}$$

а значения искомой функции на границах области решения задачи имеют вид

$$\theta_{3,N} = \frac{(4 - \hat{\alpha}_{N-2}) \cdot \hat{\beta}_{N-1}}{3 - (4 - \hat{\alpha}_{N-2}) \cdot \hat{\alpha}_{N-1}} - \frac{\hat{\beta}_{N-2}}{3 - (4 - \hat{\alpha}_{N-2}) \cdot \hat{\alpha}_{N-1}},$$

Литература

- [1] Загрязнение воздуха в Китае является причиной смерти 4400 человек в день / Сайт ИНОСМИ.РУ. – 2015. – Режим доступа: http://inosmi.ru/epoch_times/20150818/229704802.html?id=229704928.
- [2] Выступление Владимира Путина на открытии климатической конференции в Париже. – Режим доступа: <http://rusvesna.su/news/1448892801>.
- [3] Мирчук Г.И., Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере и их значение для биосферы // Междисциплинарный научный и прикладной журнал «Биосфера». – СПб., 2009. – Т. 1, № 1. – С. 48-57.
- [4] Чернявский С.А. Математическая модель процесса распространения в атмосфере газовых загрязнителей при различных погодных условиях // Технические науки — от теории к практике: Материалы XX международной заочной научно-практической конференции. – 17 апреля 2013.
- [5] Глушанин М.В. Математическое моделирование и разработка программного комплекса в задачах распространения радионуклидов в атмосфере: Дис.... канд. техн. наук. - Ростов-на-Дону, 2009. – 179 с.
- [6] Дубровская О.А., Климова Е.Г. Прогнозирование распространения дымовых аэрозолей на территории Сибири // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2007. – Т. 12, № 5. – С.68-77.
- [7] Ионисян А.С. Математическое моделирование процесса распространения активной примеси в свободной и облачной атмосфере: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Ставрополь, 2003. – 190 с.
- [8] Ревокатова А.П., Суркова Г.В., Кирсанов А.А., Ривин Г.С. Прогноз загрязнения атмосферы Московского региона с помощью модели COSMOART // Вестник Московского университета. Сер. 5: География. – С.77-85.

4. Выводы

Для прогнозирования и мониторинга воздушного бассейна и атмосферы промышленных регионов вследствие переноса и диффузии выброшенных активных аэрозольных примесей разработана математическая модель, где учитываются поглощение аэрозольных частиц и их переход под действие химических реакций из одного состояния в другое, более токсичное.

Так как разработанная математическая модель переноса и диффузии активных аэрозольных частиц в атмосфере описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, для ее решения разработан эффективный численный алгоритм с высоким порядком аппроксимации по времени и пространственными переменными.

Получены зависимости для определения основных параметров процесса переноса и диффузии частиц в пограничном слое атмосферы в виде функциональных зависимостей, где учитываются скорости воздушной массы атмосферы и ее направление.

Так как коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью земли играет существенную роль в процессе переноса и диффузии аэрозольных частиц, для его учета получена функциональная зависимость, где учитывается поглощение аэрозольных частиц растительным покровом.

- [9] *Dmitriev B.N., Petrov A.V., Sutorikhin I.A.* Definition coordinates diffusion of particles of an impurity under the dynamic images of aerosol plums. - SPIE Vol. 3991 * 0277-786x/03. – Pp. 375-388.
- [10] Numerical Modeling of Hydrogen Release, Mixture and Dispersion in Atmosphere / E.A. Granovskiy, V.A. Lyfar, Yu.A. Skob, M.L. Ugryumov // Abstracts Book and CD-ROM Proceedings the International Conference on Hydrogen Safety. – Pisa (Italy). – 2005. – 10 p. (ICHS Paper No. 110021)
- [11] *Witcofski R.D., Chirivella J.E.* Experimental and Analytical Analyses of the Mechanisms Governing the Dispersion of Flammable Clods Formed by Liquid Hydrogen Spills // Int. J. Hydrogen Energy. – 1984. – Vol. 9, No. 5. – Pp. 425-435.
- [12] *Петров А.В.* Использование полистатической схемы визирования при мониторинге аэрозольных выбросов. // Ползуновский вестник. – 2004. – № 2. – С. 99-103.
- [13] *Петров А.В., Суторихин И.А.* Определение дисперсии примеси и мощности выброса от промышленного источника // Международная конференция «ENVIROMIS 2004»: Тезисы докладов. – Томск: ЦНТИ, 2004. – С. 29.
- [14] *Макухин В.Л., Потемкин В.Л.* Моделирование переноса и трансформации загрязняющих примесей, в том числе ртути, на акватории оз. Байкал // Междисциплинарный научный и прикладной журнал «Биосфера». – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 286-292.
- [15] *Аргучинцев В.К.* Численное моделирование распространения аэрозолей в пограничном слое атмосферы // Оптика атмосферы и океана. – 1994. – Т. 7. – С. 1106-1111.
- [16] *Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В.* Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал. – Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. – 255 с.
- [17] *Павлий В.А., Аверин Г.В.* Информационно-аналитические модели переноса примесей над территориально-распределенными объектами // Тези доп. міжнар. наук. конф. “Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій” (ISDMIT 2006). – Євпаторія, 2006. – С.108-111.
- [18] *Левенец В.В., Ролик И.Л., Мец К.А.* Оценка риска при воздействии выбросов в атмосферу Вольногорского горно-металлургического комбината // Научно-производственный журнал «Экология и промышленность». – 2009. – № 3. – С. 83-89.
- [19] *Левенец В.В., Ролик И.Л.* Метод выражения специфических и неспецифических ингаляционных рисков в единых показателях // Вестник НГУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С. 78-83.
- [20] *Кожевникова М.Ф., Левенец В.В., Ролик И.Л.* Программная реализация метода оценки риска от загрязнения атмосферного воздуха выбросами химического производства // Вестник НГУ «ХПИ». – 2009. – № 24. – С. 164-171.
- [21] *Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N.* Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Modeling and Optimization. – 2015. – Vol. 3. – № 2. – Pp. 35-39.
- [22] *Равиштов Н., Шарипов Д.К., Ахмедов Д.* Моделирование процесса загрязнения окружающей среды с учетом рельефа местности погодноклиматических факторов // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж, 2015. – № 3. – С. 222-235.
- [23] *Sharipov D.K.* Development of mathematical software aerosol transport and diffusion of the atmospheric emissions // European Applied Sciences. – 2013. – Vol. 1. – № 1. – Pp. 233-240.

УДК 512.312

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА СЕПАРИРОВАНИЯ СЫПУЧИХ СМЕСЕЙ НА ПЛОСКИХ ВИБРОРЕШЕТКАХ

Палванов Б.Ю.

старший научный сотрудник-соискатель Центра разработки программных продуктов
и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +99894 607 67 80, e-mail: Bozorboy@yandex.ru

Абдурахманова Ш.А.

преподаватель Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами,
тел.: +99890 951 22 86

Каршиев Д.

к. ф.-м.н., заведующий кафедрой Ташкентского педиатрического медицинского института,
тел.: +(99890) 177 56 02

Приводятся математическая модель, численный алгоритм и результаты проведенных вычислительных экспериментов на ЭВМ для исследования нестационарного технологического процесса сепарирования сыпучих смесей с целью синтеза основных параметров и их диапазонов изменения при различных режимах работы сепарирующих агрегатов. Приведенная математическая модель объекта исследования описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для ее решения разработан численный алгоритм, основанный на замене дифференциальных операторов на конечно-разностную.

Ключевые слова: математическая модель, численный алгоритм, технологический процесс, сыпучая смесь, программные средства, вычислительный эксперимент.

NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEMS OF TECHNOLOGICAL PROCESS SEPARATION OF GRANULAR MIXTURES FLAT VIBROLATTICES

Palvanov B.Yu., Abdurahmanova Sh.A., Karshiyev D.

The article presents a mathematical model, numerical algorithm and the results of computational experiments on computers for research of non-stationary technological process separation granular mixtures to synthesize the basic parameters and their ranges change under different operating conditions of the separation aggregates. The above mathematical model of the object of study is described by a system of nonlinear differential equations in partial derivatives, for to solve the numerical algorithm is based on the replacement of differential operators on a finite-difference.

Keywords: mathematical model, numerical algorithm, technological process, free flowing mixture, software, computing experiment.

YASSI VIBROG'ALVIRDA SOCHILUVCHAN ARALASHMALARNI TOZALASH TEXNOLOGIK JARAYONI MASALASINI SONLI YECHISH

Palvanov B.Yu., Abdurahmanova Sh.A., Qarshiyev D.

Maqolada sochiluvchan aralashmalarni tozalash o'zgaruvchan texnologik jarayonlarining asosiy parametrlari va o'zgarish oraliqlarini agregatning turli rejimlarida tanlash maqsadida tadqiq etish uchun matematik model, sonli algoritim va EHMda sonli hisoblashdan o'tkazilgan tajriba natijalari keltirilgan. Keltirilgan tadqiqot ob'ektining matematik modeli xususiy hosilali chiziqsiz differentsial tenglamalar tizimi ko'rinishida ifodalangan bo'lib, uni yechish uchun differentsial operatorlarni chekli-ayirmali sxemaga almashtirish usuliga asoslangan sonli algoritimni yaratildi.

Tayanch iboralar: Matematik model, sonli algoritim, texnologik jarayon, sochiluvchan aralashma, dasturiy vosita, hisoblash tajribasi.

1. Введение

При приготовлении, обработке, сортировке и производстве продуктов питания, очистке и обработке горно-обогачительных пород, извлечении из сырья выщелоченных дорогостоящих металлов, выборе биологически полноценных семян различных сельскохозяйственных культур и т.д. роль процесса сепарирования и сортирования огромна.

Для достижения максимально лучшего результата по очистке конечного продукта от нежелательных примесей в процессе сепарирования и сортирования последний должен быть организован как технологический цикл с оптимальными параметрами, включающими характеристики самих сепараторов и их режимы работы.

Поскольку процесс сепарирования особенно сильно загрязненных сыпучих смесей представляет собой сложный нестационарный процесс, зависящий от многих факторов, задача определения режимов работы сепараторов в зависимости от технических характеристик агрегатов представляет собой весьма серьезную задачу.

Как показала практика, разделение трудноразделяемых многокомпонентных сыпучих сред требует создания высокоэффективного оборудования, обеспечивающего однородность выходного продукта, повышение качества его очистки от нежелательных технических примесей и отходов. Так как технологический процесс сепарирования сыпучих смесей (ТПССС) осуществляется с помощью различных видов агрегатов и машин с различными принципами работ, то неправильный выбор технологий и устройств приводит к значительной потере ценного сырья, уменьшению производительности сепараторов, снижению качества получаемого выходного продукта. Поэтому необходимо проведение комплексного исследования указанного процесса с помощью того или иного инструмента. Одними из эффективных инструментов для исследования и оптимального управления ТПССС являются математическое моделирование (ММ) и вычислительный эксперимент (ВЭ), реализуемые в виде программно-алгоритмических средств с учетом новых информационных технологий и возможностей современной вычислительной техники.

Исходя из сказанного выше, исследование, прогнозирование и управление указанным процессом с помощью математического аппарата перспективны и актуальны.

В области развития методов математического моделирования для исследования ТПССС к настоящему времени получены значительные результаты фундаментального и прикладного характера. В частности, работа [1] посвящена исследованию процесса сепарирования сыпучих смесей с помощью статистического метода для изучения характеристики скорости потоков гранулированных смесей по шероховатым наклонным поверхностям. Проведенными исследованиями показано, что угол наклона поверхности решета сепаратора оказывает

значительное влияние на реологию смесей, с точки зрения как скорости колебания частиц, так и скорости сдвига потока.

В работе [2] процессы перемещения и разделения смесей, состоящих из полидисперсных сферических частиц, в лопастном смесителе были исследованы с использованием экспериментальных и вычислительных экспериментов, проведенных на ЭВМ. Моделирование методом дискретных элементов было использовано для воспроизведения качественных характеристик процесса разделения, а скорости движения смесей по поверхности были установлены экспериментальным путем. Численные расчеты показали, что степень сегрегации в лопастном смесителе может быть уменьшена путем введения промежуточных размеров частиц между самыми маленькими и самыми крупными частицами.

В работе [3] получены функциональные зависимости для расчёта проекций скорости и траектории полёта центра масс сферической частицы, вращающейся вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью. Также проанализировано влияние различных параметров на кинематические параметры разработанного математического процесса объекта.

В работе [4] построены математические модели кинетики целого класса процессов переработки материалов в процессе смешивания, измельчения, классификации зернистых материалов по размерам на основе теории Марковских процессов и приведены решения соответствующих дифференциальных уравнений.

В работе [5] приведен анализ разработанной математической модели процесса вибрационного сепарирования семенных смесей на шероховатых неперфорированных плоскостях вибрационных семяочистительных машин и показано, что для более адекватного отражения процесса необходимо при разработке математических моделей учитывать соударение компонент семенных смесей между собой.

В работе [6] получено решение краевой задачи о колебаниях скорости виброоживленного неоднородного слоя в функциях Кельвина, когда его вязкость является степенной функцией координаты и перпендикулярной скорости потока смеси. Источником изменений скорости потока во времени служат продольные колебания наклонного виброрешета в его плоскости.

Работа [7] посвящена построению аналитического решения краевой задачи гидродинамики с учетом разделения смеси на проходную и сходовую фракции, а также колебаний скорости движения, обусловленных осевыми вибрациями вращающегося решета.

В работе [8] предложена математическая модель процесса смешивания сыпучих материалов в устройстве гравитационно-пересыпного действия. При этом поток ключевого компонента складывается из двух составляющих: потока циркуляции, отображающего движение частиц материала по замкнутым траекториям, и потока сегрегации, возникающего вследствие различия частиц по

физическим свойствам. В модели учитывается влияние на процесс смешивания дополнительных рабочих органов, лопаток, установленных в смесителе, которые препятствуют развитию потока сегрегации.

Численное моделирование технологического процесса сепарирования смесей при стесненном перемещении частиц рассмотрено в работах [9, 10]. Проведенные исследования показали, что увеличение скорости перемещения частиц только за счет роста частоты колебания сита приводит к разрыхлению слоя сепарирования и интенсификации процесса разделения смеси, но в последующих интервалах времени этот эффект резко убывает. Рост скорости просеивания сыпучей смеси со временем, в зависимости от частоты колебания сита, имеет пикообразный характер. Поэтому для эффективного сепарирования сыпучей смеси скорость прохода частиц сыпучей массы необходимо увеличивать за счет роста амплитуды колебания сита, а не только за счет роста частоты колебания сита.

Математическая модель технологии гравитационно-вибрационного разделения смеси при стесненном движении частиц рассмотрена в работе [11]. Также проведено исследование процесса сепарирования смесей при учете гравитационных, градиентных, архимедовых и гравитационно-вибрационных сил, действующих на частицы сыпучих смесей.

Работы [12-14] посвящены компьютерному моделированию процесса сепарирования трудноразделяемых сыпучих смесей центробежным сепаратором.

В [15] разработаны двухмерная математическая модель и вычислительный алгоритм для решения задачи технологического процесса сепарирования сыпучих смесей на виброрешетках. Вычислительным экспериментом установлено, что в изменении скорости движения частиц по поверхности сита существенную роль играет угол наклона решета относительно горизонта. Согласно результатам численных расчетов на ЭВМ, с ростом угла наклона решета агрегата растет скорость перемещения частиц по поверхности решета сита, а при угле больше 9° резко растет скорость и сокращается время пробега частиц. При росте частоты колебания решета скорость зерна, образующая графические кривые, уменьшается, а при увеличении амплитуды процесс выглядит наоборот.

Из анализа проведенных исследований процесса следует, что для определения основных параметров и их диапазонов изменения ТПССС необходимо проводить комплексное исследование с помощью адекватно описывающей математической модели объекта исследования.

2. Материалы и методы

Для вывода математической модели ТПССС используем основные законы механики, уравнения материального баланса и баланса сил, действующих на частицы в режимах вибрационного и

пульсационного колебания сита, и получаем [9,11,15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) + A_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g \cos \theta - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right) + A_2 \omega_2^2 \sin \omega_2 t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g_1, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g_2, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} u &= u(x, z, t), \quad w = w(x, z, t), \\ g_1 &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + A_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t, \\ g_2 &= g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + A_2 \omega_2^2 \sin \omega_2 t. \end{aligned}$$

Схема перемещения сыпучих смесей по поверхности виброрешета приведена на рис. 1.

Для замыкания и интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) ставим начальные и краевые условия, соответствующие реальной постановке задачи:

$$u(x, z, 0) = u_0(x, z); \quad w(x, z, 0) = w_0(x, z); \quad (2)$$

$$\text{при } 0 \leq x \leq L_x; \quad 0 \leq z \leq L_z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, z, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, z, t) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L_x, z, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L_x, z, t) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial w}{\partial z}(x, 0, t) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, L_z, t) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z}(x, L_z, t) = -k_0 w \cos \theta. \quad (6)$$

Итак, в конечном итоге получена математическая модель процесса сепарация сыпучей смеси, которая описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (1) и соответствующими им краевыми условиями (2) - (6).

3. Метод решения задачи

Согласно постановке задачи, получить решение в аналитическом виде затруднительно. Для численного интегрирования используем конечно-разностный метод. Для этого заменяем область непрерывного решения на сеточную по пространственному и временному переменному:

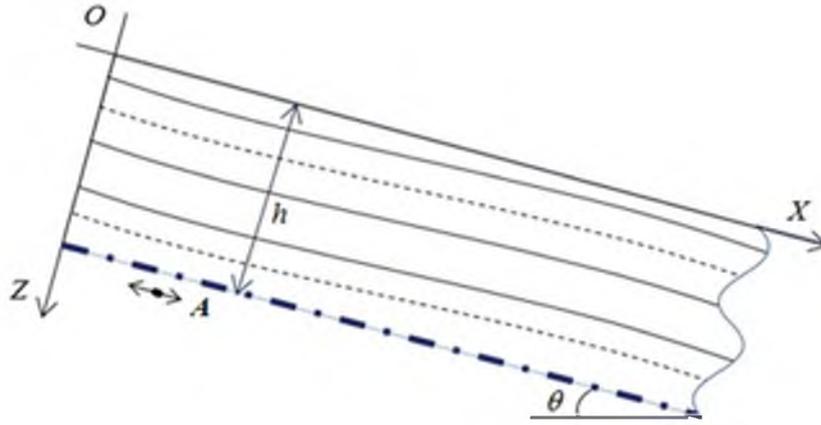


Рис. 1. Расчетная схема движения частиц сыпучих смесей по поверхности виброрешета

$$D_h = \begin{cases} x_i = h_x \cdot i, \quad i=1, \dots, N_1+1, \quad h_x = \frac{L_x}{N_1+1}, \\ z_j = h_z \cdot j, \quad j=1, \dots, N_2+1, \quad h_z = \frac{L_z}{N_2+1}, \\ t = n \cdot \tau, \quad n=1, 2, 3, \dots, T. \end{cases}$$

Введем конечно-разностную схему по методам переменных направлений [9] и вместо системы (1) получаем следующую:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\tau/2} + \hat{u}_{i,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \\ & + w_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_z} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_{1x} + \frac{g_1}{2}, \\ & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \hat{u}_{i,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \\ & + w_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2h_z} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_{1z} + \frac{g_1}{2}, \\ & \frac{w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i,j}^n}{\tau/2} + u_{i,j} \frac{w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \\ & + \hat{w}_{i,j} \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2h_z} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_{2x} + \frac{g_2}{2}, \\ & \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \hat{w}_{i,j} \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2h_z} + \\ & + u_{i,j} \frac{w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_{2z} + \frac{g_2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{1x} &= \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_z^2}, \\ \Delta_{1z} &= \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_z^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2x} &= \frac{w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{h_z^2}, \\ \Delta_{2z} &= \frac{w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j-1}^{n+1}}{h_z^2}. \end{aligned}$$

После группировки членов и некоторых преобразований переходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} a_{1i} u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - b_{1i} u_i^{n+\frac{1}{2}} + c_{1i} u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} = -d_{1i}, \\ a_{1j} u_{j+1}^{n+1} - b_{1j} u_j^{n+1} + c_{1j} u_{j-1}^{n+1} = -d_{1j}, \\ a_{2i} w_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - b_{2i} w_i^{n+\frac{1}{2}} + c_{2i} w_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} = -d_{2i}, \\ a_{2j} w_{j+1}^{n+1} - b_{2j} w_j^{n+1} + c_{2j} w_{j-1}^{n+1} = -d_{2j}. \end{cases} \quad (7)$$

Элементы трехдиагональной матрицы:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{\mu}{\rho h_x^2} - \frac{\hat{u}_{i,j}}{2h_x}, \quad b_{1i} = \frac{2\mu}{\rho h_x^2} + \frac{2}{\tau}, \quad c_{1i} = \frac{\mu}{\rho h_x^2} + \frac{\hat{u}_{i,j}}{2h_x}, \\ d_{1i} &= \frac{g_1}{2} - \left(\frac{w_{i,j}^n}{2h_z} - \frac{\mu}{\rho h_z^2} \right) u_{i,j+1}^n - \left(\frac{2\mu}{\rho h_z^2} - \frac{2}{\tau} \right) u_{i,j}^n + \\ & + \left(\frac{w_{i,j}^n}{2h_z} + \frac{\mu}{\rho h_z^2} \right) u_{i,j-1}^n, \\ a_{1j} &= \frac{\mu}{\rho h_z^2} - \frac{w_{i,j}}{2h_z}, \quad b_{1j} = \frac{2\mu}{\rho h_z^2} + \frac{2}{\tau}, \quad c_{1j} = \frac{\mu}{\rho h_z^2} + \frac{w_{i,j}}{2h_z}, \\ d_{1j} &= \frac{g_1}{2} - \left(\frac{\hat{u}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} - \frac{\mu}{\rho h_x^2} \right) u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\tau} - \frac{2\mu}{\rho h_x^2} \right) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & - \left(\frac{\hat{u}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \frac{\mu}{\rho h_x^2} \right) u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}, \\ a_{2i} &= \frac{\mu}{\rho h_x^2} - \frac{u_{i,j}}{2h_x}, \quad b_{2i} = \frac{2\mu}{\rho h_x^2} + \frac{2}{\tau}, \quad c_{2i} = \frac{\mu}{\rho h_x^2} + \frac{u_{i,j}}{2h_x}, \end{aligned}$$

$$d_{2i} = \frac{g_2}{2} - \left(\frac{\hat{w}_{i,j}^n}{2h_z} - \frac{\mu}{\rho h_z^2} \right) w_{i,j+1}^n - \left(\frac{2\mu}{\rho h_z^2} - \frac{2}{\tau} \right) w_{i,j}^n - \left(\frac{\hat{w}_{i,j}^n}{2h_z} - \frac{\mu}{\rho h_z^2} \right) w_{i,j-1}^n,$$

$$a_{2j} = \frac{\mu}{\rho h_z^2} - \frac{\hat{w}_{i,j}}{2h_z}, \quad b_{2j} = \frac{2\mu}{\rho h_z^2} + \frac{2}{\tau}, \quad c_{2j} = \frac{\mu}{\rho h_z^2} + \frac{\hat{w}_{i,j}}{2h_z},$$

$$d_{2j} = \frac{g_2}{2} - \left(\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} - \frac{\mu}{\rho h_x^2} \right) w_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\tau} - \frac{2\mu}{\rho h_x^2} \right) w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \frac{\mu}{\rho h_x^2} \right) w_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Для интегрирования системы уравнений (7), используя метод прогонки [15], решение ищем в виде

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{1i} u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{1i}, \quad u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i-1} u_i^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{i-1},$$

$$u_j^{n+1} = \alpha_{1j} u_{j+1}^{n+1} + \beta_{1j}, \quad u_{j-1}^{n+1} = \alpha_{1j-1} u_j^{n+1} + \beta_{1j-1},$$

$$w_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{2i} w_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{2i}, \quad w_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{2i-1} w_i^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{2i-1},$$

$$w_j^{n+1} = \alpha_{2j} w_{j+1}^{n+1} + \beta_{2j}, \quad w_{j-1}^{n+1} = \alpha_{2j-1} w_j^{n+1} + \beta_{2j-1},$$

где прогоночные коэффициенты вычисляются с помощью:

$$\alpha_{1i} = \frac{a_{1i}}{b_{1i} - c_{1i} \alpha_{1i-1}}, \quad \beta_{1i} = \frac{c_{1i} \beta_{1i-1} + d_{1i}}{b_{1i} - c_{1i} \alpha_{1i-1}},$$

$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{1j} - c_{1j} \alpha_{1j-1}}, \quad \beta_{1j} = \frac{c_{1j} \beta_{1j-1} + d_{1j}}{b_{1j} - c_{1j} \alpha_{1j-1}},$$

$$\alpha_{2i} = \frac{a_{2i}}{b_{2i} - c_{2i} \alpha_{2i-1}}, \quad \beta_{2i} = \frac{c_{2i} \beta_{2i-1} + d_{2i}}{b_{2i} - c_{2i} \alpha_{2i-1}},$$

$$\alpha_{2j} = \frac{a_{2j}}{b_{2j} - c_{2j} \alpha_{2j-1}}, \quad \beta_{2j} = \frac{c_{2j} \beta_{2j-1} + d_{2j}}{b_{2j} - c_{2j} \alpha_{2j-1}}.$$

Теперь переходим к замене краевых условий (2) - (6) в задаче (1) на конечно-разностную схему.

Из граничных условий находим нулевые прогоночные коэффициенты для переменной u и в целях повышения порядка погрешности воспользуемся следующими формулами для аппроксимации краевых задач:

$$\frac{-3u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} = 0,$$

$$\frac{3u_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4u_{N_1-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{N_1-2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} = 0,$$

или их можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{-3u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} = 0; \\ a_{11}^j u_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + b_{11}^j u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + c_{11}^j u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = -d_{11}^j; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3a_{11}^j - c_{11}^j) u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = (4a_{11}^j - b_{11}^j) u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + d_{11}^j;$$

$$u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(4a_{11}^j - b_{11}^j)}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)} u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{d_{11}^j}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}.$$

Отсюда получаем формулы для определения прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{10}^j = \frac{(4a_{11}^j - b_{11}^j)}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}, \quad \beta_{10}^j = \frac{d_{11}^j}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}.$$

Для выполнения обратного хода прогонки требуется найти $u_{N,j}^{n+\frac{1}{2}}$. Для этого используем граничное условие (4) и аппроксимируем вторым порядком точности:

$$\frac{3u_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4u_{N_1-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{N_1-2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} = 0,$$

$$u_{N_1-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{1N_1-1}^j u_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{1N_1-1}^j.$$

В конечном итоге получаем

$$u_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{4\beta_{1N_1-1}^j - \alpha_{1N_1-2}^j \beta_{1N_1-1}^j - \beta_{1N_1-2}^j}{3 - 4\alpha_{1N_1-1}^j + \alpha_{1N_1-1}^j \alpha_{1N_1-2}^j}.$$

Теперь находим остальные половины шага по оси Oz :

$$\frac{-3u_{i,0}^{n+1} + 4u_{i,1}^{n+1} - u_{i,2}^{n+1}}{2h_z} = 0,$$

$$\frac{3u_{i,N}^{n+1} - 4u_{i,N-1}^{n+1} + u_{i,N-2}^{n+1}}{2h_z} = 0,$$

или

$$\begin{cases} \frac{-3u_{i,0}^{n+1} + 4u_{i,1}^{n+1} - u_{i,2}^{n+1}}{2h_z} = 0; \\ a_{11}^j u_{2,j}^{n+1} + b_{11}^j u_{1,j}^{n+1} + c_{11}^j u_{0,j}^{n+1} = -d_{11}^j; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3a_{11}^j - c_{11}^j) u_{i,0}^{n+1} = (4a_{11}^j - b_{11}^j) u_{i,1}^{n+1} + d_{11}^j;$$

$$u_{i,0}^{n+1} = \frac{(4a_{11}^j - b_{11}^j)}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)} u_{i,1}^{n+1} + \frac{d_{11}^j}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}.$$

Отсюда получаем формулы для определения прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{10}^j = \frac{(4a_{11}^j - b_{11}^j)}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}, \quad \beta_{10}^j = \frac{d_{11}^j}{(3a_{11}^j - c_{11}^j)}.$$

Для выполнения обратного хода прогонки требуется найти $u_{i,N}^{n+1}$. Для этого используем граничное условие (4) и аппроксимируем вторым порядком точности:

$$\begin{cases} \frac{3u_{i,N_2}^{n+1} - 4u_{i,N_2-1}^{n+1} + u_{i,N_2-2}^{n+1}}{2h_z} = 0; \\ u_{i,N_2-1}^{n+1} = \alpha_{1N_2-1}^j u_{i,N_2}^{n+1} + \beta_{1N_2-1}^j. \end{cases}$$

В конечном итоге получаем

$$u_{i,N_2}^{n+1} = \frac{4\beta_{1N_2-1}^j - \alpha_{1N_2-2}^j \beta_{1N_2-1}^j - \beta_{1N_2-2}^j}{3 - 4 \cdot \alpha_{1N_2-1}^j + \alpha_{1N_2-1}^j \alpha_{1N_2-2}^j}$$

Аналогично для вычисления искомого переменного $w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и $w_{i,j}^{n+1}$ воспользуемся краевыми условиями (3) - (6) и получим формулу для вычисления прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{20}^j = \frac{(4a_{21}^j - b_{21}^j)}{(3a_{21}^j - c_{11}^j)}; \quad \beta_{20}^j = \frac{d_{21}^j}{(3a_{21}^j - c_{21}^j)}$$

$$w_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{4\beta_{2N_1-1}^j - \alpha_{2N_1-2}^j \beta_{2N_1-1}^j - \beta_{2N_1-2}^j}{3 - 4 \cdot \alpha_{2N_1-1}^j + \alpha_{2N_1-1}^j \alpha_{2N_1-2}^j}$$

$$\alpha_{20}^j = \frac{(4a_{21}^j - b_{21}^j)}{(3a_{21}^j - c_{11}^j)}; \quad \beta_{20}^j = \frac{d_{21}^j}{(3a_{21}^j - c_{21}^j)}$$

$$w_{i,N_2}^{n+1} = \frac{4\beta_{2N_2-1}^j - \alpha_{2N_2-2}^j \beta_{2N_2-1}^j - \beta_{2N_2-2}^j}{3 - 4 \cdot \alpha_{2N_2-1}^j + \alpha_{2N_2-1}^j \alpha_{2N_2-2}^j - k_{01}}$$

здесь $k_{01} = -2k_0 h_z \cdot \cos \theta$.

Так как поставленная задача описывается с помощью систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для ее решения используется итерационный метод Беллман-Калаба. Сходимость итерационного метода проверяется с помощью соотношения

$$\left| U_{i,j}^{(S-1)} - U_{i,j}^{(S)} \right| < \varepsilon, \quad \left| W_{i,j}^{(S-1)} - W_{i,j}^{(S)} \right| < \varepsilon,$$

где ε - точность метода итерации.

4. Обсуждение результатов

Для определения основных параметров технологического процесса, в зависимости от режимов работы сепарирующего агрегата, физико-

механических свойств сыпучей смеси и характеристики сита, на основе математического обеспечения объекта исследования было разработано программное средство для проведения ВЭ на ЭВМ. Результаты проведенных численных экспериментов приведены на рис. 2-7.

Для определения влияния на процесс сепарирования смеси частоты колебания решета сита проведены расчеты на ЭВМ (рис. 2), согласно которым частота колебания сита оказывает существенную роль на процесс сортирования сыпучих частиц. Также установлено, что с ростом частоты колебания сита происходит плавное изменение скорости перемещения частиц по поверхности решета агрегата.

Как следует из проведенных расчетов и согласно кривым на рис. 2, с ростом частоты колебания решета уменьшаются колебания частиц по поверхности решета агрегата. С ростом частоты колебания решета сокращается скорость пробега частиц, а при ее чрезмерных значениях, происходит, во-первых, недосев сыпучей смеси через отверстие решета, а, во-вторых, нарушение режима устойчивой работы сепарирующего агрегата.

На рис. 3 показано изменение скорости перемещения частиц сыпучей среды в зависимости от составляющего угла поверхности сита относительно горизонта. Из результатов проведенных численных расчетов видно, что на изменения скорости движения частиц по поверхности сита существенную роль оказывает угол наклона решета относительно горизонта.

С ростом угла наклона решета агрегата растет скорость перемещения частиц (рис. 3), при угле больше 9° резко растет скорость и сокращается время пробега частиц.

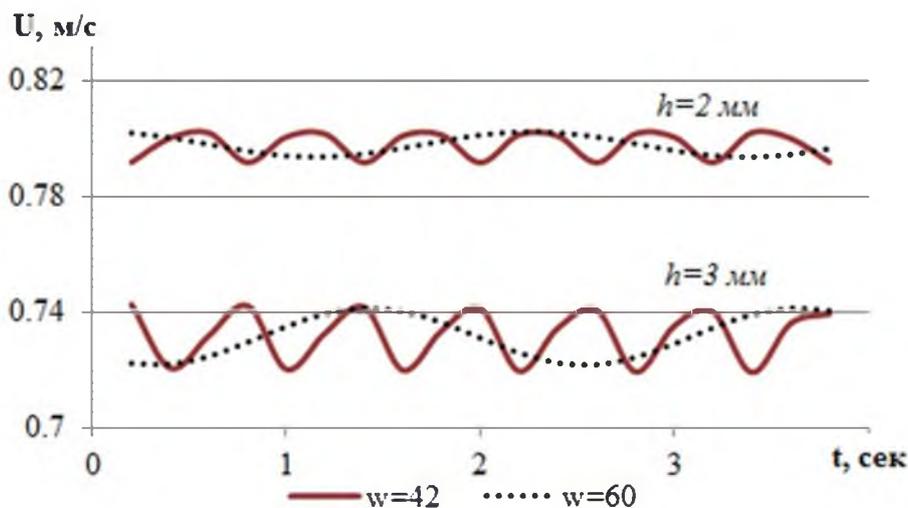


Рис. 2. Изменение скорости перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от частоты колебания поверхности сита

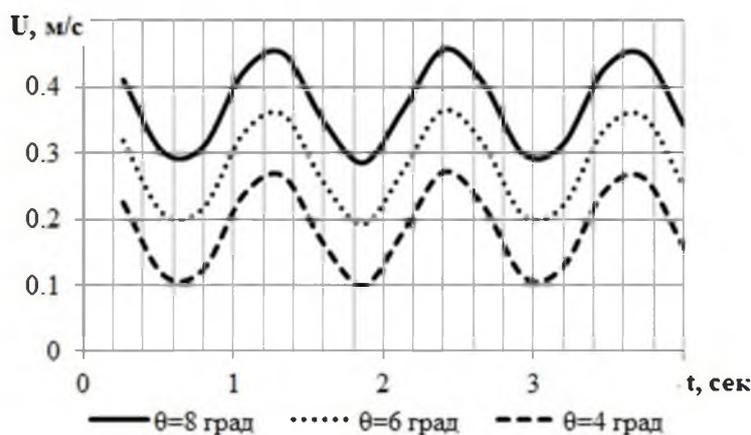


Рис. 3. Изменение скорости перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от составляющего угла поверхности сита относительно горизонта

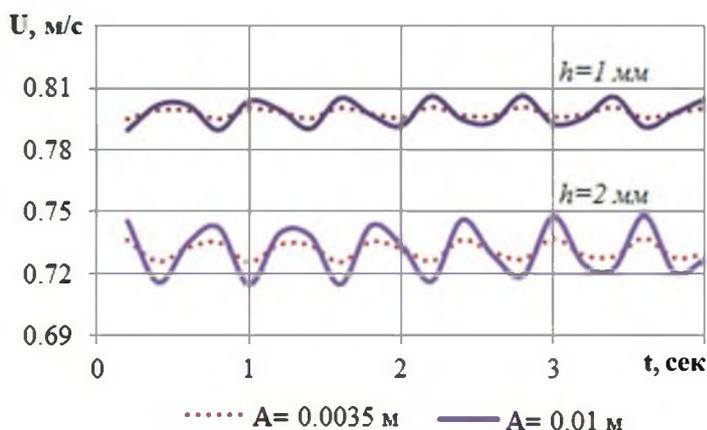


Рис. 4. Изменение скорости перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от амплитуды колебания сита по вертикали

Изменение скорости перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от амплитуды колебания сита показано на рис. 4. Как видно из проведенных численных расчетов на ЭВМ (рис.4), изменение амплитуды колебания сита не приводит к существенному изменению скорости перемещения частиц сыпучей смеси. С ростом амплитуды колебания сита происходят плавные изменения скорости перемещения частиц на поверхности

решета сита. Это особенно заметно в верхних слоях сыпучей смеси.

Для определения отклика плотности смеси на скорости перемещения частиц проведен ВЭ на ЭВМ (рис. 5). Проведенными численными экспериментами установлено, что плотность частиц сыпучей смеси играет существенную роль в процессе перемещения частиц по поверхности сита и самосортирования их по толщине слоя материала.

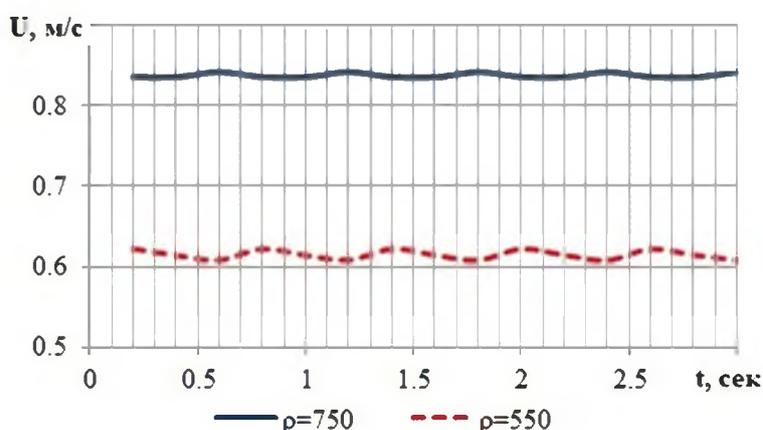


Рис. 5. Изменение скорости перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от плотности сыпучей смеси

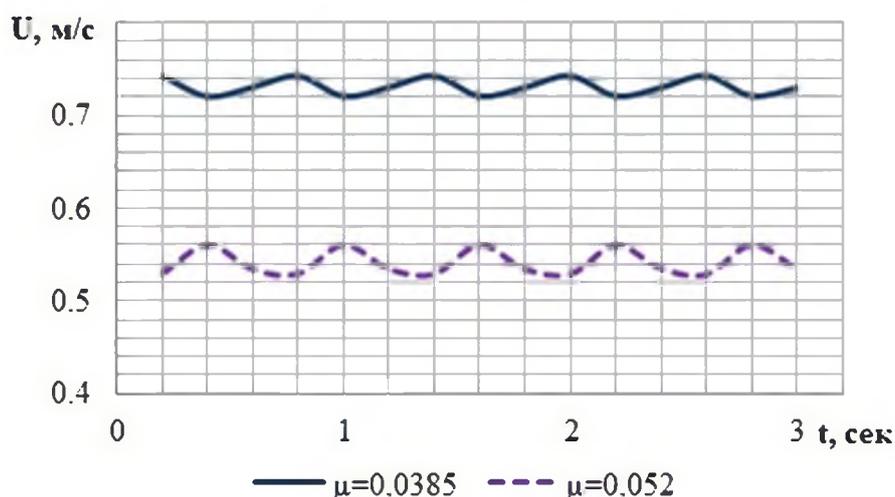


Рис. 6. Скорость перемещения частиц сыпучих смесей в зависимости от динамического коэффициента вязкости смеси

Горизонтальные и вертикальные скорости перемещения частиц растут с ростом плотности сыпучей смеси. Это особенно заметно с ростом угла наклона решета сепаратора относительно горизонта.

Для исследования влияния коэффициента вязкости смеси на процесс сепарирования проведены численные расчеты на ЭВМ при его различных значениях (рис. 6). Из результатов проведенных расчетов следует, что (кривые на рис.6) с ростом коэффициента вязкости скорость перемещения сыпучего материала по поверхности решета сепаратора пропорционально уменьшается. Согласно ВЭ, коэффициент вязкости прямым образом зависит от частоты и амплитуды колебания решета сепарируемого агрегата.

На рис. 7 приведены результаты численных расчетов на ЭВМ по изменению скорости

перемещения частиц в различных слоях смеси по толщине. Из кривых на рис.7 видно, что максимальная скорость движения сыпучих смесей происходит в верхних слоях сепарируемого материала, а также заметно, что в нижних слоях скорость перемещения частиц изменяется зигзагообразно, а в верхнем слое - плавно.

Также численные расчеты были проведены при различных значениях угла наклона решета агрегата относительно горизонта и установлено, что при угле наклона решета на 9° происходит резкий рост скорости перемещения частиц и сокращение времени пробега частиц, что приводит к недосеву сыпучего материала и потери ценного продукта.

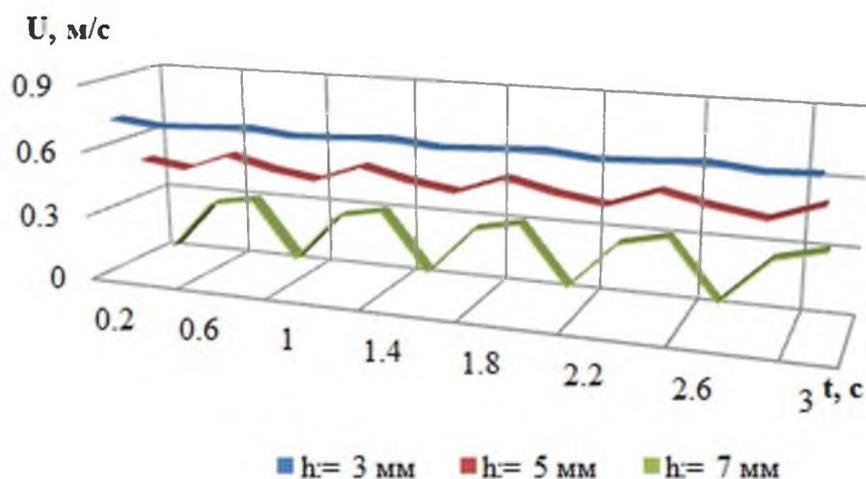


Рис. 7. Скорость перемещения частиц сыпучих смесей в различных слоях смеси

5. Заключение

Из проведенных численных расчетов на ЭВМ установлено, что частота колебания сита оказывает существенную роль на процесс сортирования сыпучих частиц. Также установлено, что с ростом

частоты колебания сита происходит плавное изменение скорости перемещения частиц по поверхности решета агрегата.

Проведенный ВЭ показал, что коэффициент вязкости прямым образом зависит от частоты и

амплитуды колебания решета сепарируемого агрегата.

Согласно проведенным численным экспериментам, плотность частиц сыпучей смеси играет существенную роль в процессе перемещения частиц по поверхности сита и самосортирования их по толщине слоя материала.

Также согласно ВЭ, при угле наклона решета на 9° происходит резкий рост скорости перемещения частиц и сокращается время пробега частиц, что приводит к недосеву сыпучего материала и потери ценного продукта.

Литература

- [1] *Lo C. Y., Bolton M. D., Cheng Y. P.* Velocity fields of granular flows down a rough incline: a DEM investigation, *Granular Matter*, 2010. – Pp. 477-482. DOI: 10.1007/s10035-010-0212-9.
- [2] *Remy B., Khinast G., Glasser B. J.* Polydisperse granular flows in a bladed mixer: Experiments and simulations of cohesionless spheres. *Chemical Engineering Science*, 2011. – № 66. – Pp. 1811-1824. DOI:10.1016/j.ces.2010.12.022.
- [3] *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Колебания кольцевого слоя зерновой смеси в цилиндрическом виброрешете // *Техническая механика*. – Харьков: Харьковский национальный технический университет, 2011. – № 2. – С. 101-108.
- [4] *Ахмидиев Ф.Г.* Математическое моделирование кинетики технологических процессов переработки дисперсных сред // *Известия КГАСУ*. – 2011. – № 3 (17). – С. 257-267.
- [5] *Лукьяненко В.М.* Математическое моделирование вибросепарирования семенных смесей на неперфорированных поверхностях // *ХНТУСТ*. – 2014. – № 148. – С. 342-349.
- [6] *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Динамика неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете // *Динамические системы*. – 2010. – № 28. – С. 162-170.
- [7] *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // *Динамика и мощность машин*. Сб.науч. тр. «Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С. 180-189.
- [8] *Волков М.В., Королев Л.В., Таршик М.Ю.* Математическая модель процесса смешивания сыпучих материалов в новом устройстве гравитационно-пересыпного действия // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 9. – С. 960-964.
- [9] *Равишнов Н., Палванов Б.Ю., Каршиев Д.* Численное моделирование технологического процесса сепарирования смесей при стесненном перемещении частиц // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – Ташкент, 2015. – № 2 (2). – С. 19-24.
- [10] *Равишнов Н. и др.* Исследование сложных технологических процессов фильтрации многокомпонентных суспензий и управление ими // *Химическая технология. Контроль и управление*. – 2008. – № 6. – С. 41-47.
- [11] *Равишнов Н.* Математическая модель процесса сепарирования сыпучих смесей при гравитационно-вибрационном и стесненном движении частиц // *Узб. журнал «Проблемы информатики и энергетики»*. – Ташкент, 1997. – № 3. – С. 19-23.
- [12] *Равишнов Н., Палванов Б.Ю.* Компьютерная модель процесса сепарирования трудноразделяемых сыпучих смесей центробежным сепаратором // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – Ташкент, 2015. – № 1 (1). – С. 40-46.
- [13] *Ravshanov N., Sharipov D.* Model of optimum control of technological process of filtering of mixtures // «*International Journal of Academic Research*». – Baku, 2010. – № 1. – Pp. 150-153.
- [14] *Абуталиев Ф.Б., Равишнов Н.* Моделирование технологического процесса сепарирования трудноразделяемых смесей // *Докл. АН РУз*. – Ташкент, 1997. – № 7. – С. 26-30.
- [15] *Равишнов Н., Палванов Б.Ю.* Компьютерное моделирование процесса сепарирования сыпучих смесей // *Информационные технологии моделирования и управления*. – Москва: Научная книга, 2016. – № 2 (98). – С. 109-122.

УДК 004.94:532.685

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА БЕЗНАПОРНЫХ ПОТОКОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ГАЛЕРЕИ СКВАЖИН

Равшанов Н.

д.т.н., заведующий лабораторией Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий, тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Кодиров К.

заведующий по учебным делам Национального Института Художеств и Дизайна имени Камолиддин Бехзода, тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Рассматривается математическая постановка задачи о неустойчивых безнапорных потоках фильтрации подземных вод с учетом наличия галерей скважин в неоднородных пористых средах, которые отличаются друг от друга гидрогеологическими характеристиками. Для получения линеаризованной системы, описывающей процесс безнапорной фильтрации подземных вод, с применением интегрального преобразования Лапласа по переменной t получено аналитическое решение задачи. Для создания изолированных областей, не позволяющих распространению вредных жидкостей, и защиты подземных вод в прослойках получены соотношения для поддержки напоров в них и формул для определения уровней грунтовых вод в соответствующих зонах области фильтрации подземных вод в прослойках.

Ключевые слова: математическая модель, пластовая фильтрация, пористая среда, массообмен, интегральное преобразование Лапласа, аналитическое решение.

MODELING OF THE PROCESS OF FREE WATER FILTRATION OF GROUNDWATER BASED ON THE AVAILABILITY OF GALLERY OF WELLS Ravshanov N., Kodirov K.

In this paper, the mathematical statement of the problem of unsteady free water filtration of groundwater, taking into account the existence of galleries of wells in heterogeneous porous medium, which differ from each other with hydrogeological characteristics. To obtain linearized system describing the process of free water filtration of groundwater using the integral transform of Laplace with the variable t analytical solution of the problem is obtained. In order to create isolated areas, which do not allow emission of harmful liquids, and the protection of groundwater in the interlayers the relations for the support of heads in them, and formulas to determine the level of groundwater in the relevant areas of filtration of groundwater in the interlayers.

Keywords: mathematical model, reservoir filtration, porous medium, mass transfer, integral transform of Laplace, analytic solution.

QUDUQ GALEREYASINI HISOBGA OLGAN HOLDA YEROSTI SUVLARI FILTRATSIYASINING BOSIMSIZ OQIMINING O'ZGARISHINI MODELLASHTIRISH Ravshanov N., Qodirov K.

Bu maqolada, quduq galereyasining geterogen g'ovak muhitda, ya'ni bir biridan gidrogeologik xususiyatlari bilan farq qiladigan, mavjudligini hisobga olgan holda noturg'un yerosti suvlari filtratsiyasining bosimni hisobga olmagan holda oqim muammosining matematik masalasining qo'yilishi qarab chiqilgan. Yerosti suvlari filtratsiyasining bosimni hisobga olmagan holda oqimning filtratsiya jarayonini ifodalovchi chiziqli tizimga erishish uchun Laplasning integral almashirishi ishlatilgan va o'zgaruvchi t bilan masalaning analitik yechimi olingan. Zararli suyuqliklarning tarqalishiga yo'l qo'ymaydigan izolyatsiyalangan maydonlarni hosil qilish va qatlamlarda yerosti suvlarini muhofaza qilish uchun ularda bosimni qo'llab-quvvatlash va qatlamlardagi yerosti suvlarining filtratsiya maydonining mos joylarida yerosti suvlarining balandligini aniqlash formulalarining bog'liqligiga erishildi.

Tayanch iboralar: matematik model, qatlam filtratsiyasi, g'ovakli muhit, massa uzatish, Laplasning integral almashirishi, analitik yechim.