

«O‘zbekiston temir yo‘llari» DATK
Toshkent temir yo‘l muhandislari instituti

«Nashrga ruxsat beraman»
O‘quv ishlari bo‘yicha prorektor
dotsent _____M.X. Rasulov.

A.M.Karimov

Oliy matematikadan ma’ruza matni

barcha bakalavriyat ta’lim yo‘nalishlarida tahsil oluvchi

talabalar uchun

Toshkent – 2012

**“OLIIY MATEMATIKA” FANIDAN
MA’RUZA, AMALIY VA
SEMINAR MASHG’ULOTLARIDA
O’QITISH TEXNOLOGIYASI**

Toshkent – 2012

1 mavzu

**Determinantlar va ularning xossalari. CHiziqli tenglamalar sistemasini
echish uchun Kramer formulasi**

- **«Determinantlar va ularning xossalari.**
- **« CHizikli tenglamalar sistemasini echish
uchun Kramer formulasi .**

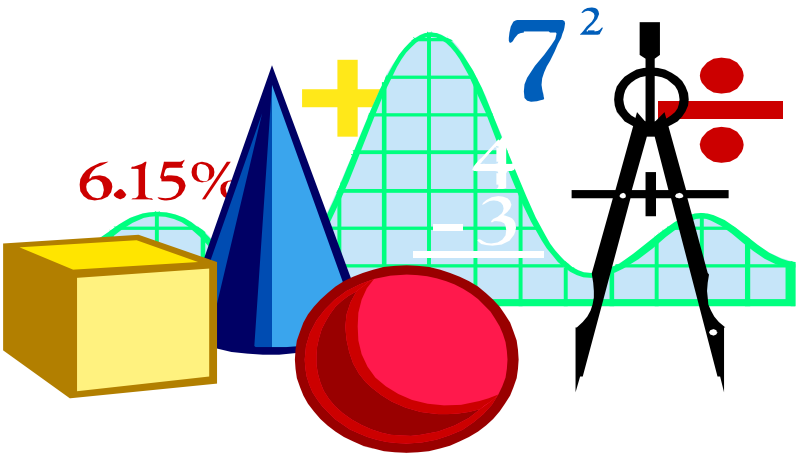
1.1. Ma'ruza mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi.

Vaqt - 2 soat	Talabalar soni: 30 - 60 nafar.
O'quv mashg'ulotining shakli	Vizual ma'ruza
Ma'ruza mashg'ulotining rejasi	1. Algebra va uning rivojlanish tarixidan. 2. 2,3-tartibli determinantlar. 3. Determinantlarning xossalari. 4. Minor va algebraik to'ldiruvchilar. 5. n - tartibli determinantlar
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Algebra, algoritm, 2, 3 va n -tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to'ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo'yicha yoyish.	
Pedagogik vazifalar	O'quv faoliyatining natijalari
-Algebra, algoritm, -2, 3 va n -tartibli determinantlar, -bosh diagonal, yordamchi diagonal, -minor, algebraik to'ldiruvchi, -uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, -determinantlarning xossalari, -determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo'yicha yoyish.	Talabalar berilgan savollarga javob beradilar mavzuni tushinib oladilar
O'qitish uslubi va texnikasi	Ma'ruza, muammoli holatlarni echish, aqliy xujum, klaster
O'qitish vositalari	Proektor, tarqatma materiallar
O'qitish shakli	Individual, frontal, juftlikda ishlash
O'qitish sharoitlari	Proektor va kompyuter bilan taaminlangan auditoriya

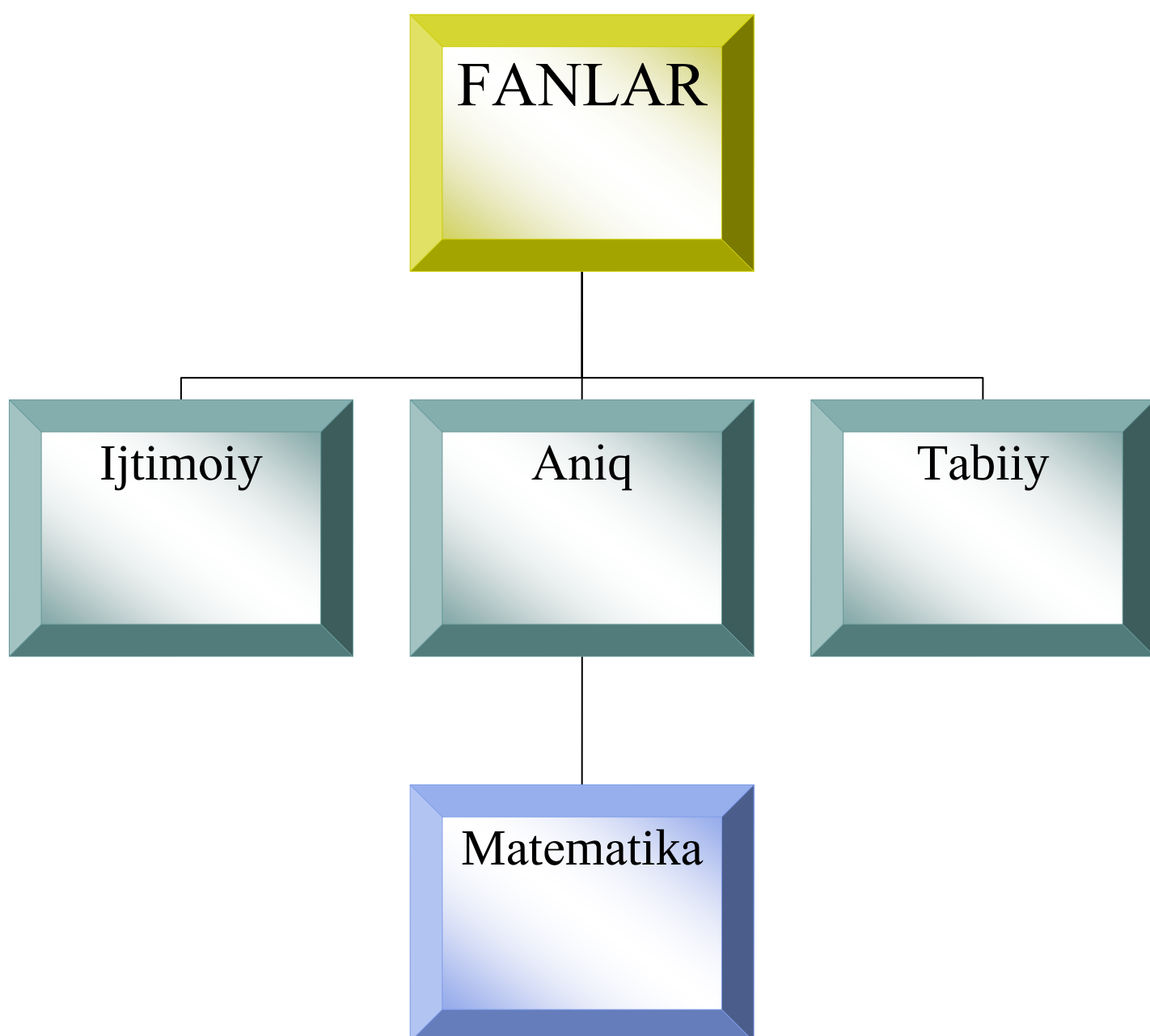
1.2. Ma'ruza mashg'ulotining texnologik kartasi.

Bosqichlar vaqti	Faoliyat mazmuni	
	O'qituvchi	Talaba
1-bosqich. Kirish (5 min.)	1.1. Mavzu maqsad va rejalashtirilgan o'quv natijalarini e'lon qiladi. 1.2. Rejani ekranga chiqaradi.	1.1. Eshitadilar, yozib oladilar. 1.2. E'tibor beradilar.
2-bosqich. Bilimlarni faollashtirish. (10 min.)	2.1. Asosiy tushunchalarni namoyish qiladi. 2.2. O'quv faoliyatini baholash mezonlarini ma'lum qiladi.	2.1. Aniqlik kiritadilar, savollar beradilar.
3-bosqich. Asosiy (55 min.)	3.1. Quyidagi savol bilan murojat qiladi. Anik fanlar tizimiga qaysi fanlar kiradi? 3.2. Fanning ob'ekti va predmeti nazariyasidan kelib chiqib oliy matematika fanining ob'ekti va predmeti bilan tanishtiradi. 3.3. 2, 3 va n -tartibli determinantlar, determinantlarning xossalari, 3.4. bosh diagonal, yordamchi diagonal 3.5. minor, algebraik to'ldiruvchi, uchbur chaklar qoidasi, diagonal qoidasi 3.6. determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo'yicha yoyish.	3.1. Anik fanlar tizimiga kiruvchi fanlarni sanaydilar. 3.2. YOzib oladilar. 3.3. Tushunchlarni mohiyatini anglaydilar. 3.4. fanning metodologik asosini anglaydi. 3.5. YOzib oladilar.
4-bosqich. YAkuniy (10 min.)	4.1. Mavzuga xulosa yasaydi. O'quv jarayonida faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. 4.2. Musatqil ishlash va bilimlarni mustaxkamlash uchun savollar beradi.	4.1. Eshitadilar. 4.2. Topshiriqlarni yozib oladilar.

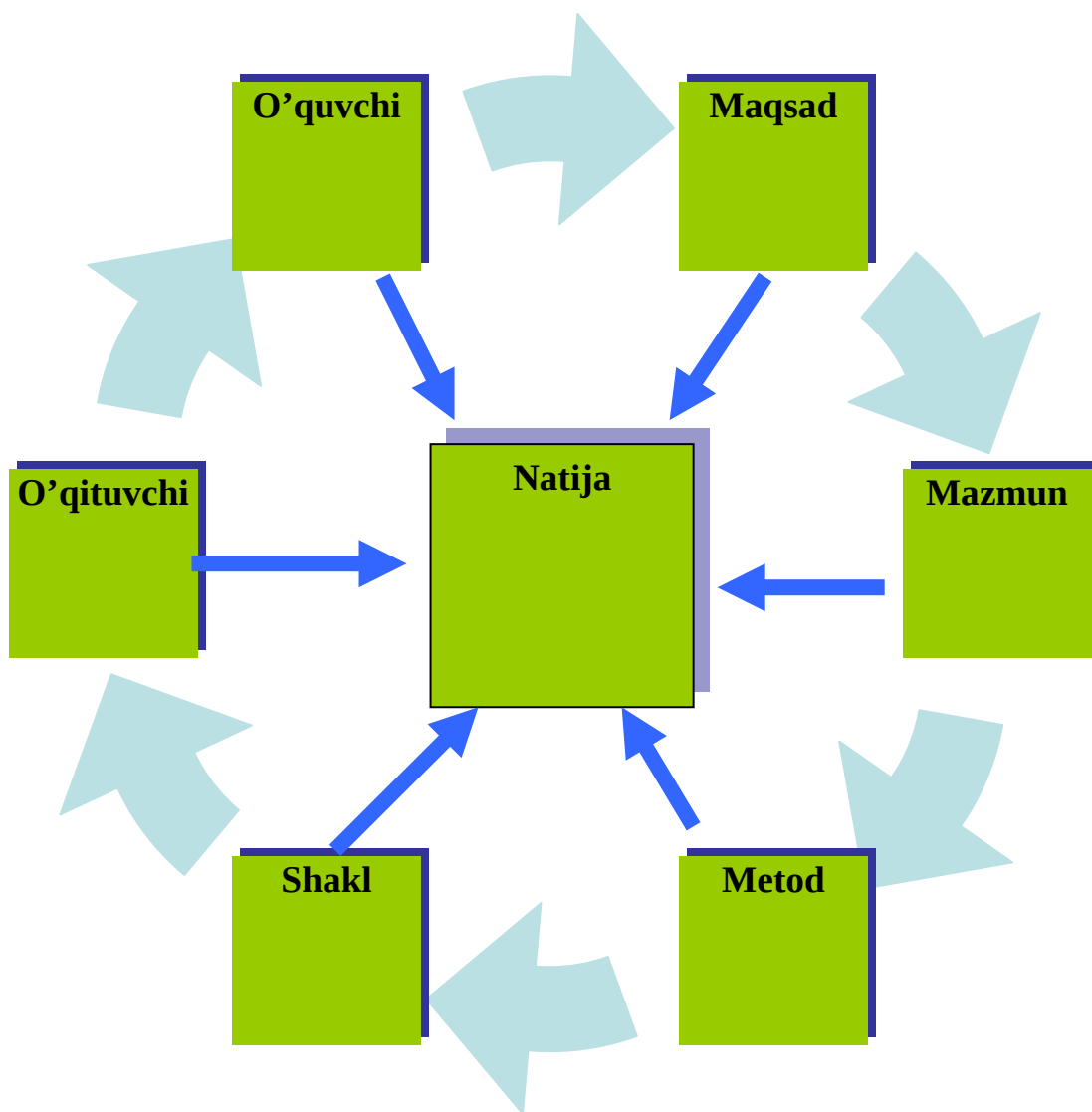
Ilovalar



Matematikaning fanlar tizimidagi o'рни

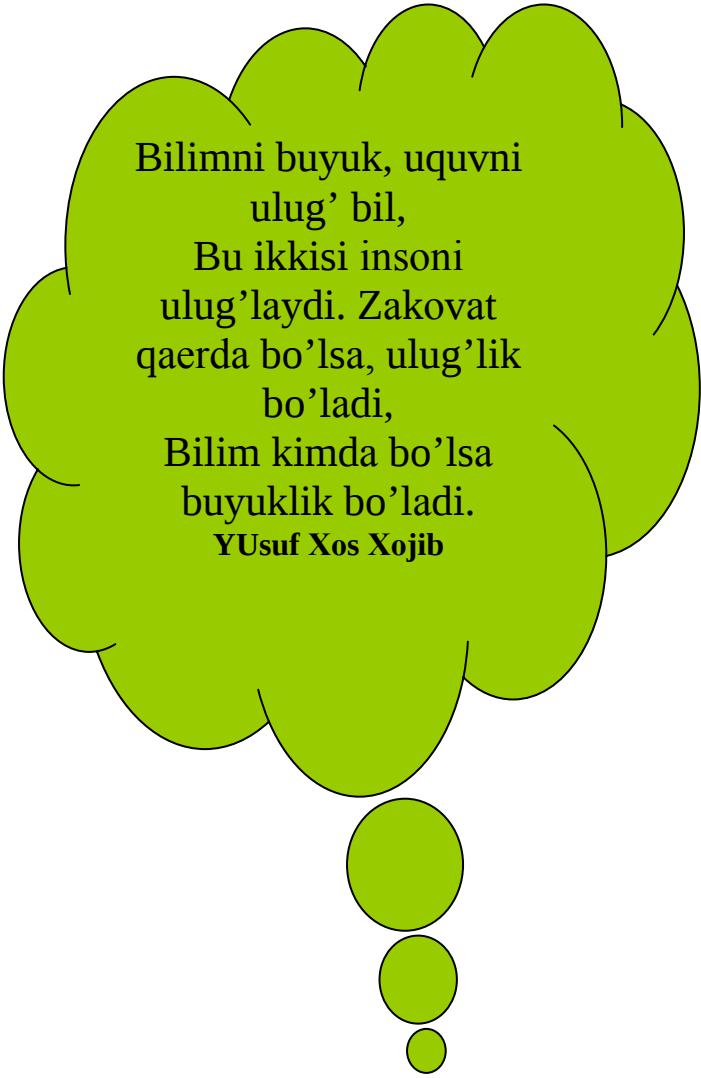


Oliy matematika fanini o'qitish



tizimi

1. Texnologiya – biror ishda maxoratda, jarayonda qo'llaniladigan yo'llar, usullar majmuasi.
2. Pedagogik texnologiya – pedagogik va texnologik yondashuvlar integrasiyasidir.
3. Pedagogik loyixalash – yaratilgan modelni dastlabki va yakuniy ko'rinishda ishlab chiqish va uni amaliy qo'llash darajasiga etkazishdan iborat.
4. Pedagogik tizim – bir biri bilan o'zaro bog'langan muaayyan munosabatda bo'lgan elementlar bilan tasvirlangan yaxlit ta'lim tizimidir.
5. Pedagogik innovasiya – pedagogik jarayonga yangilik kiritish.
6. Pedagogik jarayon – oqituvchi va o'quvchi orasidagi taolimiy va tarbiyaviy munisabatlar tizimi.



Bilimni buyuk, uquvni
ulug' bil,
Bu ikkisi insoni
ulug'laydi. Zakovat
qaerda bo'lsa, ulug'lik
bo'ladi,
Bilim kimda bo'lsa
buyuklik bo'ladi.
YUsuf Xos Xojib

Matematika so'zi yunoncha - fan bilim so'zidan xosil bo'lgan. Matematikaning fan sifatida shakllanishini eramizdan avvalgi VI - V asrlarga taaluqli deyish mumkin, bu davrga kadar esa boshlangich ma'lumotlar to'planib bora bergan. SHu to'plangan materiallar asosida arifmetika va geometriya fanlari yuzaga kelgan.

1. Algebra matematikaning bir qismi va u turli miqdorlar ustida amallarni hamda shu amallar bilan bog'liq tenglamalarni echishni o'rganadi. Kengroq ma'noda algebrada ixtiyoriy tabiatli to'planning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Uch og'aynining yoshlari 30, 20, 6 da. Necha yildan keyin eng kattasining yoshi ikkala ukasi yoshining yig'indisiga teng bo'ladi. $30 + x = (20 + x) + (6 + x)$, $x = 4$. Bunday tenglamalar eramizdan avval 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda ma'lum edi. Lekin ular harflardan foydalanmagan. Eramizdan avvalgi 2 minginchi yil boshida qadimgi bobilliklar yanada murakkabroq masalalarni echishgan.

2. III asrda yashagan Iskandariyalik olim Diofant geometrik bayonni rad etib harfiy ifodalardan foydalanadi. Unda manfiy ko'rsatkichli darajalar, manfiy sonlar, musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish qoidalarini yozish uchun qisqacha belgilar bor edi.

Algebraning keyingi rivojiga Diofant o'rgangan algebraik tenglamalar kuchli ta'sir ko'rsatgan.

VI asrdan boshlab matematik tadqiqotlar markazi Hindiston, Xitoy, YAqin SHarq va O'rta Osiyo mamlakatlariga ko'chdi. Xitoylik olimlar chiziqli tenglamalar sistemasining echimini topishda noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulini topishgandi. Ammo algebra, tenglamalarni echish masalalariga bog'liq muammolarni bayon etuvchi matematikaning maxsus tarmog'i sifatida YAqin SHarq va O'rta Osiyo olimlari ishlarida shakllandi. IX asrda o'zbek matematigi va astronomi Muhammad ibn Muso al Xorazmiy (783-850) «Al-jabr val muqobala» asarini yozdi. Bu asarda Xorazmiy chiziqli tenglamalarni echishning umumiy qoidasini berdi va kvadrat tenglamalarni sinflarga ajratib, har bir sinf uchun echish yo'llarini ko'rsatdi. Al-jabr (tiklash) so'zi tenglamadagi manfiy hadlarni uning ikkinchi qismiga ishorasini o'zgartirib o'tkazishni bildirgan. YAngi fan «**Algebra**»ning nomi o'sha «Al-jabr» so'zidan olingan.

3. 2, 3 - tartibli determinantlar. Determinantlarni hisoblashga keltiriladigan ushbu masalani qaraylik. Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi hom ashyodan foydalaniladi. Bitta A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur hom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur hom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlikda berilgan bo'lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun hom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur hom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur hom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur hom ashyo jami sarfi miqdorini ifodalaydi, bu hom ashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilish mumkin. SHunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, hom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

4. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

echimga ega bo'ladi. (2) formuladagi sur'at va mahrajdagi ifodalar 2- tartibli

determinant(aniklovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. SHunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (4)$$

ifodaga 3- tartibli determinant deyiladi va $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar bosh diagonalni, a_{13}, a_{22}, a_{31}

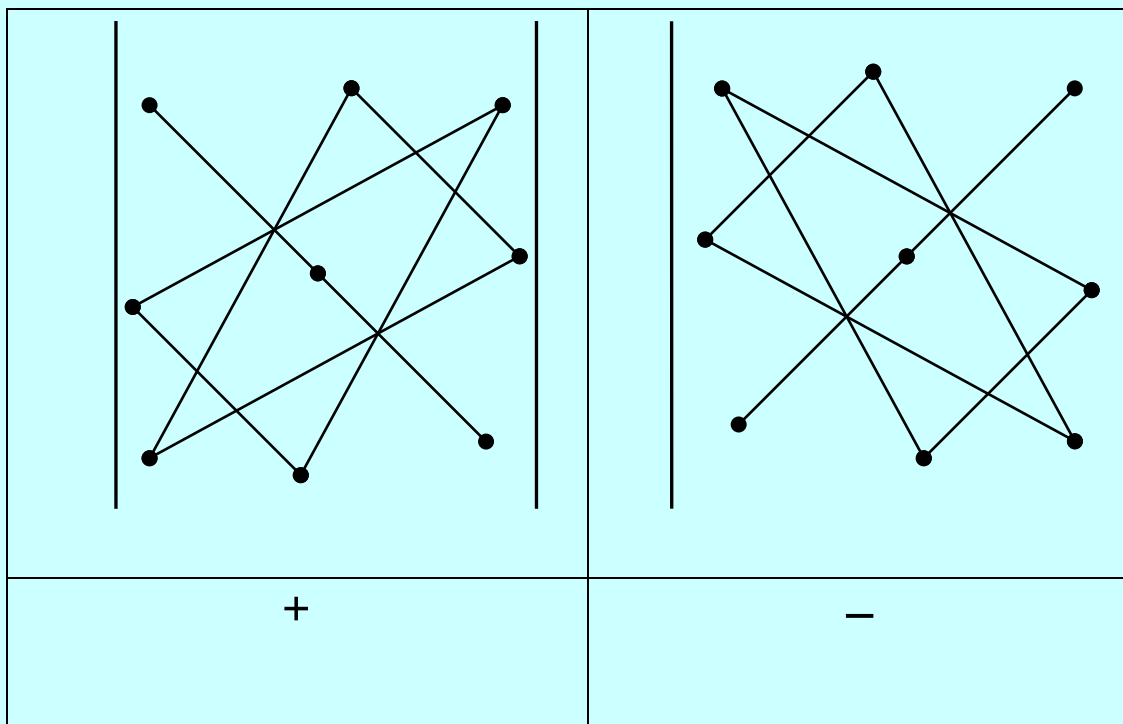
yordamchi diagonalni ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni qiymatlari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (5)$$

bo'ladi. (5) formulani esda saqlash uchun uchburchak qoidasidan foydalanish mumkin.

Determinantlarni hisoblashning uchburchak usuli

Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema hosil bo'ladi :



(+) ishora bilan,

(-) ishora bilan olinadi.

Determinantlarning xossalari

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirilsa uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 0 - 0 + 4 - 0 = 22$

bo'lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 - 0 + 4 - 0 = 22$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkala holda ham bir xil qiymat hosil bo'ldi, bu birinchi xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

2. Ikkita satrni o'zaro almashtirilsa determinant qiymatining ishorasi teskarisiga o'zgaradi; haqiqatan ham 1- misoldagi determinantda 1-satrini 3-satri bilan o'zaro almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 24 - 0 + 6 = -28 + 6 = -22$$

bo'lib, bu 2-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

3. Ikkita bir xil satrli determinant qiymati nolga teng; ikkita satri bir xil bo'lgan determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 + 36 - 0 - 0 = 0$$

bo'ladi, bu esa 3-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

4. Determinant biror satrining hamma elementlari $m \neq 0$ songa ko'paytirilsa, uning qiymati shu m songa ko'payadi.

Haqiqatan ham, 1-xossada keltirilgan determinantning 2-satri elementlarini 2 ga ko'paytirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

bo'lib, bu xossaning ham to'g'riligi ko'rinadi.

5. Determinantning ikkita satri elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, uning qiymati nolga teng, misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning 1 va 2-satri elementlari o'zaro proporsional, uni hisoblasak

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

bo'lib, bu esa 5-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

6. Determinantning qiymati, biror satri elementlarini unga mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganiga teng. 1-xossada keltirilgan misolni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

bu determinantni 3-satr elementlari bo'yicha yoyib yozsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

kelib chiqadi, bu esa 6-xossaning ham o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

7. Determinant biror satrining har bir elementi ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinant ikkita determinant yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{pmatrix} (a_{11} + b_1) a_{12} a_{13} \\ (a_{21} + b_2) a_{22} a_{23} \\ (a_{31} + b_3) a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix}.$$

***n*- tartibli determinantlar haqida.** Ko'pgina masalalarni echishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n -tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to'ldiruvchilaridir. Ma'lumki, algebraik to'ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo'ladi. Determinantlarning hamma xossalari n -tartibli determinant uchun ham o'rinlidir.

YUqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elementlari bo'yicha voysak ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning qiymati ham yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning qiymatini hisoblash kerak bo'lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o'z navbatida 5-tartibli determinanatlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

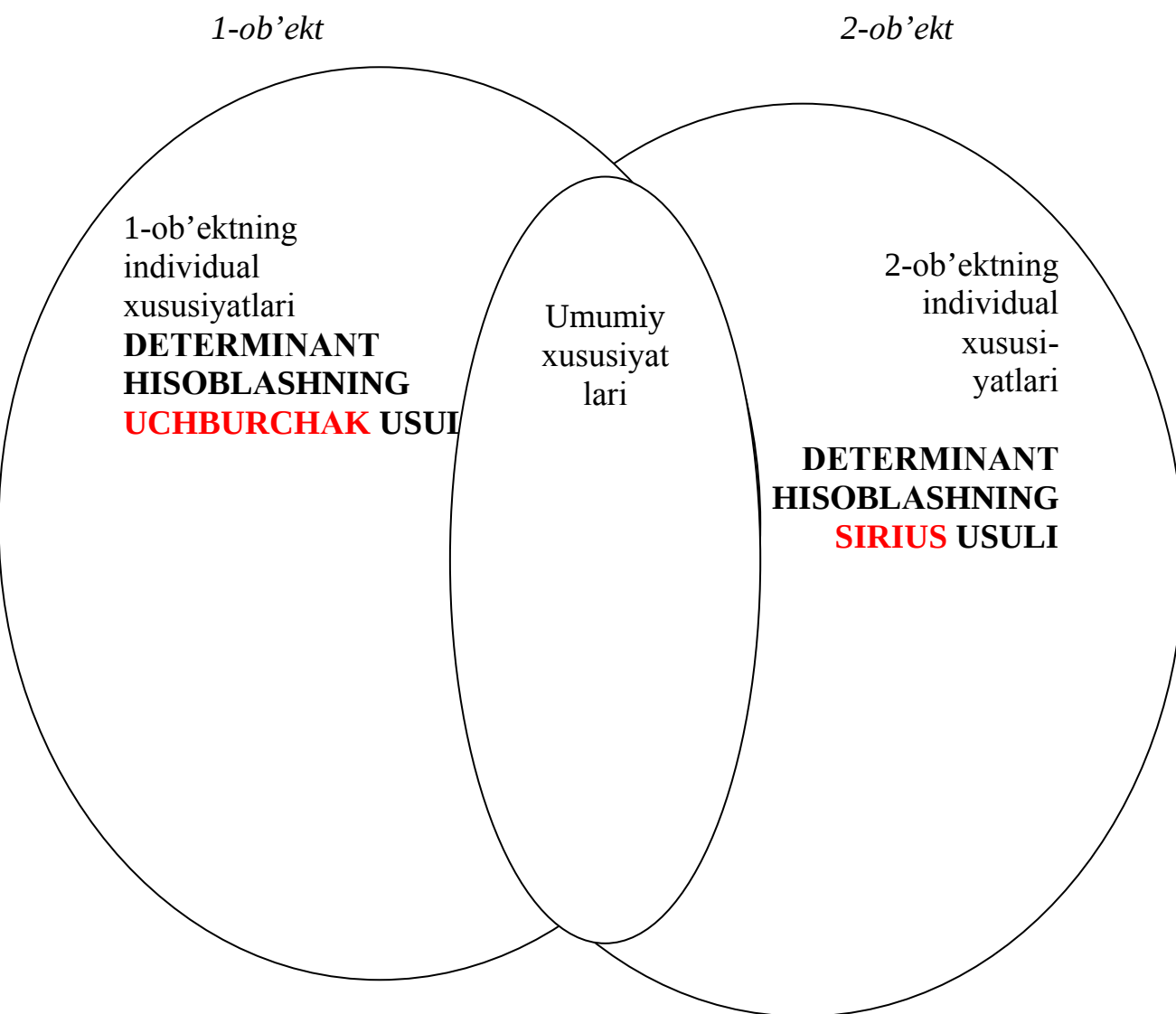
**Savollar: Takrorlash uchun
savollar**

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog'liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?
4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.
5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?

«VENN diagrammasi»

U ikki yoki undan ortiq katta o'lchamdagi o'zaro kesishuvchi aylanaplar asosida tuziladi. Aylanalar orasida yozuv uchun etarli joy qolishi kerak.

Bu diagramma asosan g'oyalarni kontrastlash (bir-biridan ajratish) uchun qo'llaniladi va taqqoslanayotgan ob'ektlarga xos umumiy va individual xususiyatlarini ko'rsatib beradi.



Vazifa. Ushbu 1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

2)
$$\begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3727 \end{vmatrix}$$

determinantlarning qiymatini hisoblang.

Ushbu

1)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix};$$
 2)
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantlarni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang

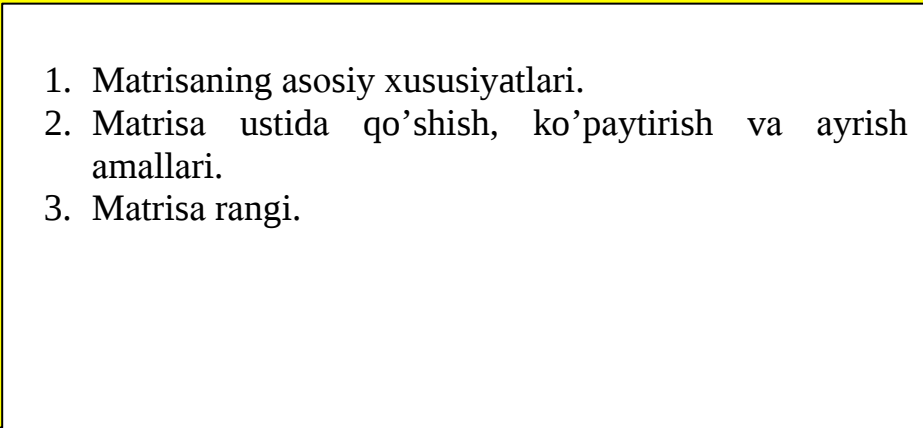
FOYDALANILGAN ADABIETLAR RUYXATI.

1. D.Iskandarov. Oliy algebra. 1 tom. O'quvpeddavnashr 1960y.
2. G.M.Fixtengols. Matematik analiz asoslari. T. «O'kituvchi» 1972y.
3. N.S.Piskunov. Differensial va integral hisob. 1 va 2 tom. M. Nauka. 1976y.
4. V.E.SHneyder, A.I.Slusskiy, A.E.SHumov. Oliy matematikaning qisqa asoslari. 1 va 2 tom. M."Visshaya shkola" 1978
5. E.U.Soatov. Oliy matematika. 1 va 2 jild. T."Ukituvchi" 1992y.



2 mavzu

MATRISA. ASOSIY TUSHUNCHALAR. MATRISA USTIDA AMALLAR. MATRISA RANGI.

- 
1. Matrisaning asosiy xususiyatlari.
 2. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari.
 3. Matrisa rangi.

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli amaliy
Ma'ruza rejasi	1. Matrisaning asosiy xususiyatlari. 2. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari. 3. Matrisa rangi.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Matrisaning asosiy xususiyatlari. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari. Matrisa rangi. o'rgatish	
Pedagogik vazifalar: 1. Matrisaning asosiy xususiyatlari. 2. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari. 3. Matrisa rangi.	O'quv faoliyati natijalari: 1. Matrisaning asosiy xususiyatlari. 2. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari. 3. Matrisa rangi.
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali amaliy , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Matrisaning asosiy xususiyatlari. 2. Matrisa ustida qo'shish, ko'paytirish va ayrish amallari. 3. Matrisa rangi.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan Savollarga javob beradilar. Misollar echadilar
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: “Matrisalar” ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Tayanch iboralar:

Matrisa ustida amallar. Matrisani matrisaga ko'paytirish. Ekvivalent almashtirishlar. Ekvivalent matrisalar. Matrisalar rangi.

Matrisa ta'rifi oldingi ma'ruzada kiritilgan edi. Transponirlangan matrisa, matrisa satrlarini ustunlar orqali almashtirish yordamida hosil qilinadi va A^t kabi belgilanadi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Matrisa ustida amallar o'ziga xos xususiyatga ega.

Matrisalarni qo'shish va ayrish amali, tartibi bir xil bo'lgan matrisalar uchun aniqlangan bo'lib, u mos o'rinda turgan elementlarini qo'shish yoki ayirish orqali bajariladi:

$$A=(a_i), V=(b_i), i=1, 2, \dots, n$$

matrisalar uchun $S=(c_i)$ yig'indi (ayirma) matrisa elementlari $c_i = a_i \pm b_i$ munosabat orqali topiladi.

Matrisani songa ko'paytirish ixtiyoriy tartibli matrisalar uchun aniqlangan bo'lib, bu amal matrisa har bir elementini shu songa ko'paytirish bilan aniqlanadi: $D = \lambda A$.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}, \quad D = (d_{ij})_{i,j=1}^{m,n}, \quad d_{ij} = \lambda a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Matrisalarni ko'paytirish shunday matrisalar ustida aniqlanganki, bunda birinchi matrisa ustunlar soni ikkinchi matrisa satrlar soniga teng bo'lishi kerak. Bu shart bajarilganda «satrni ustunga ko'paytirish» qoidasi bajariladi.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,l}, \quad \text{bo'lsa,} \quad S = AB \quad \text{ko'paytma elementlari}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad \text{orqali topiladi.}$$

Kvadrat matrisa asosiy diagonal elementlari 1 lardan, qolgan barcha elementlari 0 lardan iborat bo'lsa, bunday matrisa birlik matrisa deyiladi.

$m \times n$ tartibga ega bo'lgan matrisani qaraylik.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matrisadan ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunni ajratamiz. Ajratilgan satrlar va ustunlar kesishgan joyda turgan elementlar k tartibli kvadrat matrisa xosil qiladi.

A matrisaning k -tartibli minori deb bu matrisadan ixtiyoriy k ta satr va k ta ustun ajratib hosil qilingan kvadrat matrisa determinantiga aytiladi.

Matrisa elementlaridan tuzilgan minorlarining ba'zilar nol ham bo'lishi mumkin.

Matrisa rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartibining eng kattasiga aytiladi.

Agar A matrisaning rangi r ga teng bo'lsa bu narsa A matrisada hech bo'lmaganda bitta noldan fvrqli r tartibli minor birligini, biroq r dan katta tartibli har qanday minor nolga tengligini anglatadi.

Matrisa rangini aniqlashda odatda, ko'p sondagi diterminantlarni xisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni osonlashtirish uchun maxsus usullarni bayonidan oldin matrisani elementar almashtirishlarini keltiramiz.

- matrisani biror satri elementlarini noldan farqli bir nolga ko'paytirish;
- matrisaning biror satrga elementlariga boshqa satrning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;
- matrisa satrlari o'rnini almashtirish;
- matrisada, barcha elementlari nol bo'lgan satrini tashlab yuborish;

Bir biridan almashtirishlar orqali hosil, qilinadigan matrisalar ekvivalent matrisalar deb ataladi. Ekvivalent matrisalar umuman aytganda bir- biriga teng emas lekin ularning ranglari teng bo'lishidan foydalanish mumkin.

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

1. Matrisa deb nimaga aytiladi?
2. Matrisaning satri va ustuni deganda nimani tushunasiz?

3. Matrisani tartibi deganda nimani tushunasiz?
4. Kvadrat matrisa deb nimaga aytiladi?
5. Sonni matrisaga ko'paytirish deganda nimani tushunasiz?
6. 0 – Nol matrisa. E – birlik matrisa deganda nimani tushunasiz?
7. Diagonal matrisa deganda nimani tushunasiz?
8. Matrisalarni qanday shart bajarilganda ko'paytirish mumkin?
9. Matrisani qo'shish va ayrish qoidalarini ayting.
10. Matrisani rangi deganda nimani tushunasiz?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. YO. Soatov «Oliy matematika» T. 1992 y.

3

mavzu

Teskari matrisa tushunchasi.

**Teskari matrisa orkali chizikli tenglamalar
sistemasini echish**

- Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.
- Teskari matrisa
- Teskari matrisa orkali chizikli tenglamalar sistemasini echish doir misollar

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

4-mavzu.	Teskari matrisa tushunchasi. Teskari matrisa orqali chiziqli tenglamalar sistemasini echish
-----------------	--

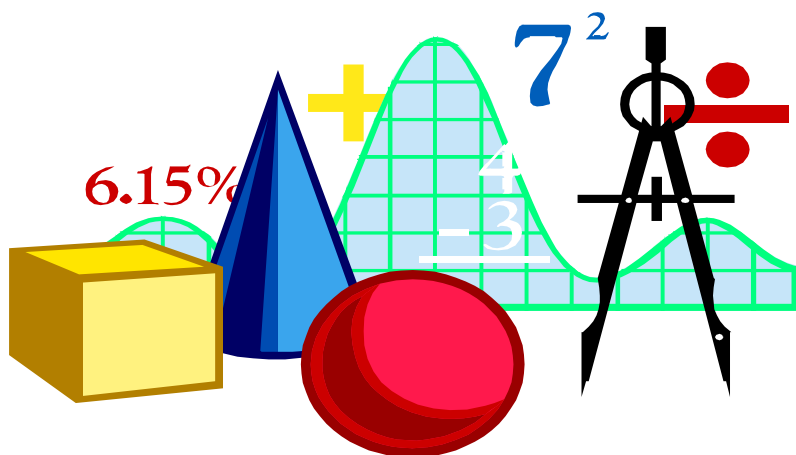
9.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	amaliy
Mashg'ulot rejasi	1.Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. 2 Teskari matrisa. 3 Teskari matrisa orqali chiziqli tenglamalar sistemasini echish
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Matrisalar algebrasi. Teskari matrisa tushunchasi. Teskari matrisa orqali chiziqli tenglamalar sistemasini echish.	
Pedagogik vazifalar: • Matrisalar algebrasi haqida tushunchalar berish. • Matrisalar ustida elementar almashtirish bajarish ketma-ketligini ko'rsatilib o'tiladi. •Kramer formulasi tushuntiriladi •Teskari matrisani topish yo'llari tushuntirib beriladi. • Teskari matrisa yordamida tenglamalar sistemasini echish yo'llari ko'rsatiladi. • Birgalashish kriteriysi haqida ma'lumotlar beriladi.	O'quv faoliyati natijalari: • Matrisalar algebrasi haqida tushunchalarga ega. • Matrisalar ustida elementar almashtirish bajarish ketma-ketligini ko'rsatilib bera oladi. •Kramer formulasi tushuntirib bera oladi. •Teskari matrisani topish yo'llari yaxshi anglab olgan. • Teskari matrisa yordamida tenglamalar sistemasini echishni biladi. Doir misollar echadi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali amaliy , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	2.1. Matrisalar algebrasi haqida tushunchalar berish. 2.2. Matrisalar ustida elementar almashtirish bajarish ketma-ketligini ko'rsatilib o'tiladi. 2.4. Teskari matrisani topish yo'llari tushuntirib beriladi. 2.5. Teskari matrisa yordamida tenglamalar sistemalarini echish yo'llari ko'rsatiladi. 2.6. Birgalashish kriteriysi haqida ma'lumotlar beriladi. 2.7. Talabalar bilimlarini faollashtirish va mustahkamlash maqsadida quyidagi savollarni beradi: ➤ Matrisaning taxrifini ayting? ➤ Kramer formulasi ayting? ➤ Teskari matrisani topish yo'llari tushuntirib bering? ➤ Teskari matrisa yordamida tenglamalar sistemalarini echish yo'llari ko'rsating?	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar. misolga javob beradilar.
3- bosqich YAKuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Matrisa" ga klaster tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



Tayanch tushunchalar

Matrisa, matrisaning o'lchami, matrisaning determinanti, maxsus matrisa, maxsusmas matrisa, bosh diagonal, diagonal matrisa, birlik matrisa, transponirlangan matrisa, teng matrisalar, matrisalarning yig'indisi, matrisani songa ko'paytirish, matrisalar ko'paytmasi, matrisaning k-tartibli minori, matrisaning rangi, elementar almashtirishlar, teskari matrisa.

1-ta'rif. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ **o'lchamli matrisa** deyiladi. A matrisani qisqacha (a_{ij}) ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) bilan ham belgilash mumkin. Matrisalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matrisalar **kvadrat matrisa** deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matrisa uchun uning elementlaridan tuzilgan determinantni hisoblash mumkin, bu determinantga A matrisaning determinanti deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ bilan belgilanadi. $\det A = 0$ bo'lsa, A matrisaga maxsus matrisa, $\det A \neq 0$ bo'lsa, maxsusmas matrisa deyiladi. Kvadrat matrisaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonali bosh diagonal, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonali yordamchi diagonal deyiladi. Bosh diagonalda elementlar 0 dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matrisa diagonal matrisa deyiladi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisa diagonal matrisadir. Diagonalda barcha elementlari 1 ga teng diagonal matrisa birlik matrisa deyiladi va

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

bilan belgilanadi.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14})$ matrisaga satr matrisa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matrisaga ustun matriska deb ataladi.

Barcha elementlari 0 lardan iborat bo'lgan matrisaga no'l matrisa deyiladi va O bilan belgilanadi.

A matrisaga quyidagi matrisani mos qo'yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning har bir satri A matrisaning unga mos ustunidan iborat. A^T matrisani A matrisaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1m}, j = \overline{1n}$) matrisalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo'lsa, bunday matrisalar teng deyiladi.

2. Matrisalar ustida amallar. Matrisalarni qo'shish, songa ko'paytirish va bir-biriga ko'paytirish mumkin.

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) matrisalarning yig'indisi deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ravishda aniqlanadigan uchinchi $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladi. Ravshanki, C matrisaning o'lchami oldingi matrisalarning o'lchami bilan bir xil bo'ladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisalar yig'indisi

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = C$$

bo'ladi. Matrisalarni qo'shish amali quyidagi o'rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega, yaxni

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Matrisalarni qo'shishda biror matrisaga O matrisani qo'shish odatdagi sonlarni qo'shishdagi no'l soni rolini o'ynaydi, yaxni

$$A + O = A.$$

masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A matrisani λ songa ko'paytirish deb uning hamma elementlarini shu songa ko'paytirishga aytiladi, yaxni

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

masalan,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisani $\lambda = 3$ ga ko'paytirsak,

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$m \cdot k$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ matrisaning $k \cdot n$ o'lchamli $B = (b_{ij})$ matrisaga, ko'paytmasi deb $m \cdot n$ o'lchamli shunday $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladiki uning c_{ij} elementi A matrisa i -satri elementlarini B matrisa j -ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, yaxni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Matrisalar ko'paytmasi $C = AB$ bilan belgilanadi. Demak, matrisalarni ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchining ustunlari soni, 2-ko'paytuvchining satrlari soniga teng bo'lishi talab qilinadi. SHu sababli, umuman $AB \neq BA$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. A va B

matrisalarni ko'paytiring.

Echish. Birinchi matrisaning ustunlar soni, ikkinchi matrisaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matrisalarni ko'paytirish mumkin:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 & 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni ko'paytirish ushbu

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

taqsimot

xossasiga

ega.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Bu holda

$$\begin{aligned} A \cdot (BC) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & -6 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Endi $(AB) \cdot C$ ko'paytirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 14 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 13 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 & 14 \cdot 2 + 46 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SHunday qilib

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

xossa o'rinli bo'ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$$(A + B) \cdot C$$

hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
 (A+B) \cdot C &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

O'ng tomoni

$$\begin{aligned}
 AC + BC &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

bo'ladi. SHunday qilib $(A+B) \cdot C = AC + BC$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Istalgan kvadrat matrisa A ni mos birlik E matrisaga ko'paytirganda $AE = EA = A$ tenglik o'rinli bo'ladi, masalan

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash $EA = A$ tenglikni ham tekshirib ko'rish mumkin (buni bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

4. Teskari matrisa va uni topish. A kvadrat matrisa uchun $AB = BA = E$ birlik matrisa bo'lsa, B kvadrat matrisa A matrisaga **teskari matrisa** deyiladi.

Odatda, A matrisaga teskari matrisa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matrisa teskari matrisaga ega bo'lishi uchun A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zarur va etarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkin, masalan, V.E.SHneyder va boshqalar. «Oliy matematika qisqa kursi» 1tom. T. O'qituvchi. 1985. 407 b.)

A kvadrat matrisa uchun $\det A \neq 0$ bo'lsa, unga teskari bo'lgan yagona matrisa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari A^{-1} matrisa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \text{-----} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matrisani topishga misol qaraymiz.
2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari matrisani toping.

Echish. Oldin A matrisaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matrisa mavjud, chunki

$$\Delta = 2 \neq 0$$

yaxni, berilgan matrisa maxsusmas matrisadir. A^{-1} ni topish uchun A matrisa hamma elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari matrisani topish

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formulasiga asosan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. A^{-1} teskari matrisaning to'g'ri topilganligini

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko'rish mumkin, haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2,5) + 1 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1,5) + 1 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2,5) + 4 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1,5) + 4 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2,5) + 9 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1,5) + 9 \cdot 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ya'ni, $AA^{-1} = E$ birlik matrisa hosil bo'ladi, bu A^{-1} teskari matrisaning to'g'ri topilganligini isbotlaydi.

5. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida echish Endi matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini echishga o'tamiz.

[illegible]

n noma'lumli, n ta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi (7) sistemani matrisalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. SHunday qilib, noma'lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo'ladi, yaxni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (7) tenglamalar sistemasini echishning ***matrisaviy yozuvini*** bildiradi.

1-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini eching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Echish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \quad (9)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matrisaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 2.$$

A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matrisa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona echimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matrisani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari A^{-1} matrisani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

(9) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, yaxni

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ -2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-1,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

SHunday kilib, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ yoki $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

(Topilgan echimlarni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib, echimning to'g'riligini tekshirib ko'rish mumkin).

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ matrisalarni ko'paytiring.}$$

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisalarni ko'paytiring.

3-misol. Ushbu

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix};$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ matrisalarga teskari matrisalarni toping.

4-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 34 \end{pmatrix},$$

matrisalarning rangini hisoblang.

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J..X,Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston» , 2001y
- 2.Kurosh A.G. Oliy algebra kursi , Toshkent «O'qituvchi», 1967y
- 3.Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

1. Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta maktab», 1963
2. g'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G FunkSIONal analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
3. g'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
4. Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi»,1977.

Internet saytlari

1. <http://WWW.mcce.zu>
2. <http://lib.mexmat.zu>, Gel'fand
3. <http://WWW.mecceG'zu>, <http://G'G'lip.mexmet.zu>,Kostrikan A.I.
4. <http://WWW.mecce.zu>, <http://lip.mexmat.zu>,Kurosh A.G.

[illegible]
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad a_{11} \neq 0 \quad \text{but}$$

sistemani ikkingchi, uchinchi va x. S- tenglamalarni mos tomonlariga qo'shib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1k_2} x_{k_2} + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{2k_2}^{(1)} x_{k_2} + ... + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \\ a_{sk_2}^{(1)} x_{k_2} ..+ a_{sn}^{(1)} x_n = b_s^{(1)} \end{array} \right. \quad (2) \text{ bunda } a_{2k_2}^{(1)} \neq 0$$

larga ko'paytirib, 2-, ..., S- tenglamalarining mos tomonini qo'shsak,

[illegible]

bunda $a_{3k_3}^{(3)} \neq 0$. Bu jarayonni r - marta davom ettirib, kuyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k_2} x_{k_2} + \dots + a_{1k_r} x_{k_r} + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{2k_2}^{(1)} x_{k_2} + \dots + a_{2k_r}^{(1)} x_{k_r} + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{rk_r}^{(r-1)} x_{kr} \dots + a_{rn}^{(r-1)} x_n = b_r^{(r-1)} \\ 0 = b_{r+1}^{(r)} \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

bunda $1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r$, $\lambda_3 = \frac{1}{5}$, $\lambda_2 = \frac{4}{5}$, $\lambda_1 = -\frac{4}{5}$, $a_{2k_2}^{(1)}, \dots, a_{rk_r}^{(r-1)}$ lar noldan farqli sonlar, qolgan koeffisientlar ixtiyoriy sonlar. Ozod xadlar $b_1, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m} \in L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_s})$, $b_r^{(r-1)}, \dots, b_{r+1}^{(r)}$ lar ham ixtiyoriy sonlar.

Hosil qilingan (4) sistema (1) sistemaga teng kuchli, chunki (4) sistema (1) chekli elementar elementar almashtirishlar natijasida hosil qilingan. SHuning uchun agar (4) sistema birgalashgan bo'lsa, (1) sistema ham birgalashgan bo'ladi.

(4) sistemani pog'ona(zina) simon sistema deyiladi. Bu erda ikki hol bo'lishi mumkin.

1⁰. $b_{r+1}^{(r)} \neq 0$ bu holda (4) sistemaning oxirgi $0 = b_{r+1}^{(r)}$ uringa ega bo'lmaydi. Bu ziddiyat (4) sistemani o'z navbatida (1) sistemani echimga ega emasligi (birgalashmagan ekanligini) ko'rsatadi.

2⁰. $b_{r+1}^{(r)} = 0$ bu holda (4) sistema birgalashgan bo'ladi. (4) sistemaning $x_1, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ noma'lumlarini $x_{k_r+1}, \dots, x_n$ noma'lumlari orqali ifodalay ularni ozod noma'lumlar deyiladi. Natijada (4) sistema quyidagi sistemaga keladi.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \sum_j c_{1j} x_j \\ x_{k_2} = \alpha_{k_2} + \sum_j c_{k_2 j} x_j \\ \text{-----} \\ x_{k_r} = \alpha_{k_r} + \sum_j c_{k_r j} x_j \end{cases} \quad (5)$$

Bundagi $j \leq n$ va $1, k_2, \dots, k_r$ dan boshqa ham ma qiymatlarni qabul qiladi. $x_1, x_2, \dots, x_{k_2}$ lar asosiy, $x_{k_2+1}, \dots, x_n$ larni ozod noma'lumlar deyiladi.

a) $n=r$ (bu hol faqat $s \geq n$ bo'lganda o'ringa ega) bu xolda ham ma noma'lumlar asosiy bo'lib (5) dan $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ ga ega bo'lamiz, bu holda (5) (4) sistema o'z navbatda (1) sistema yagona echimga ega bo'lib, (1) sistema aniq sistema bo'ladi.

b) $r < n$ bu holda ozod noma'lumlar bo'lib ularga ixtiyoriy qiymatlar berib asosiy noma'lumlarni qiymatini topamiz. bu xolda (4) sistema o'z navbatida (1) sistema cheksiz ko'p echimga ega bo'lib, (1) sistema aniqmas sistema bo'ladi.

. Quyidagi sistemani Gauss usuli bilan eching.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

ECHISH. Berilgan sistemaning 1-tenglamasini har ikki tomonining (-3) ga, (-2) ga, (-1) larga ko'paytirib, mos ravishda 2-, 3-, 4- tenglamalariga qo'shamiz (bu bajarilgan elementar almashtirishlarni sxematik tasvirlaymiz) natijada berilgan sistemaga teeng kuchli bo'lgan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemadagi 2 va 4-tenglamalar-ning o'rinlarini o'zaro almashtirib, unga ekvivalent bo'lgan (bu almashtirishni sxematik ravishda yuqoridagidek belgilay-miz)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sxemada ko'rsatilgan elementar almashtirishni bajarib,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases}$$

sistemaga kelimiz. Bu sistemaning 3-tenglamasini 3ga, 4-tenglamasini (-3) ga qisqartirib, (har ikki tomonini bo'lib) ularning o'rinlarini almashtirib yozamiz (sxematik belgilashga qarang)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

oxirgi sistemaning 4-tenglamasidan $x_4=1$. x_4 ning bu qiymatini sistemaning 3-tenglamasiga qo'yib, $x_3=0$ ni topamiz. x_3 , x_4 larni bu qiymatlarini 2-tenglamaga quyib, $x_2=-1$ ni topamiz. x_2 , x_3 , x_4 larni bu topilgan qiymatlarini 1-tenglamaga qo'yib, $x_1=-1$ ni topamiz. demak. berilgan sistema yagona $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$ echimga ega.

MISOLLAR

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini eching.

Echish. Sistema matrisasini va uning kengaytirilgan matrisasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B matrisada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B

matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug'iladi. SHunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo'ladi. Ma'lum bo'ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinasiyasidan iborat. SHuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan echish mumkin emas, chunki ularning koeffitsientlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan echish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

x_2, x_3 larni **bosh (bazis) o'zgaruvchilar**, x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani echib $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4$ ni

aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p echimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1 = 0, x_4 = 1$ bo'lganda $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$ echim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu echim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini eching.

Echish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matrisaning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

SHunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli echimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma'lumlar koefitsientidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun x_4 ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini echamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 - 1 - 3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 - x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, \quad x_2 = \frac{43}{21}x_4, \quad x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu echimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib echimning to'g'riligiga ishonish mumkin.

6-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan eching.

Echish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9-4 \cdot 6, \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10-3 \cdot 6 \end{cases}$$

yaxni

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 7x_2 - 8x_3 &= -15 \\ -x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi.

SHu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o'z o'rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo'lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ bo'ladi. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak $x_1 = 1$ bo'ladi. SHunday qilib, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul yagona echimga olib keladi;

2) sistema **birgalikda va aniqmas bo'lsa**, bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi;

3) sistema **birgalikda bo'lmasa**, u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo'qotilayotgan) noma'lum bilan birgalikda qolgan barcha noma'lumlar ham yo'qotiladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

Mustaqil echish uchun misollar

1. Ushbu

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining birgalikdaligini tekshiring va ularning echimini toping.

2. Quyidagi tenglamalar sistemasini eching:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

3. Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini eching:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 12x_2 + 13x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4-7. Quyidagi tenglamalar sistemasini eching:

4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J..X,Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston» , 2001y
- 2.Kurosh A.G. Oliy algebra kursi , Toshkent «O'qituvchi», 1967y
- 3.Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

5. Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta

maktab», 1963

6. g'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G FunkSIONal analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
7. g'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
8. Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi»,1977.

Internet saytlari

5. <http://WWW.mcce.zu>
6. <http://lib>, mexmat. zu, Gel'fand
7. <http://WWW>. meceG' zu, <http://G'G'lip.mexmet.zu>,Kostrikan A.I.
8. <http://WWW>, mece.zu, <http://lip>. mexmat.zu,Kurosh A.G.

4 mavzu

***Dekart koordinatalar sistemasi.
Ikki nuqta orasidagi masofa,
kesmani berilgan nisbatda bo'lish,
uchburchak yuzini topish.***

- 1. Dekart koordinatalar sistemasi.***
- 2. Ikki nuqta orasidagi masofa.***
- 3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.***
- 4. Uchburchak yuzini topish.***

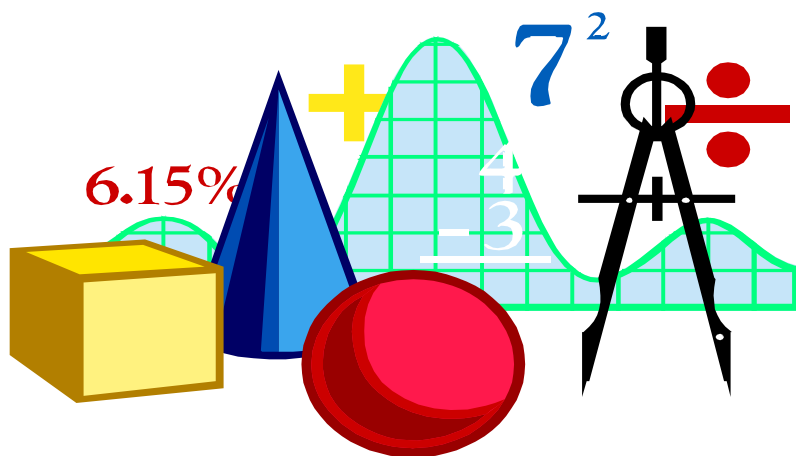
5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Dekart koordinatalar sistemasi. 2. Ikki nuqta orasidagi masofa. 3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. 4. Uchburchak yuzini topish.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Son o'qi, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi tushunchasini berish. Masofa aksiomalari. Uchburchak yuzini topish formulasi bilan tanishtirish.	
Pedagogik vazifalar: • Son o'qini tushuntirish. • Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi tushunchasini berish. • Masofa aksiomalari. • Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qoidasi. • Uchburchak yuzini topish formulasi bilan tanishtirish. • Umumiy xulosa;	O'quv faoliyati natijalari: • Son o'qini tushunish va ishlatishni bilib oladi. • Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasidan foydalanib masalalar echishni o'rganadi. • Masofa aksiomalarini biladi. • Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qoidasini o'zlashtiradi. • Uchburchak yuzini topish formulasini bilib oladi.
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali amaliy , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	2.1. Son o'qini tushuntirish. 2.2. Tekislikda Dekart koordina talar sistemasi tushunchasi. 2.3. Masofa aksiomalari. 2.4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qoidasi. 2.5. Uchburchak yuzini topish formulasi ishlatib ko'rsatiladi. 2.6. Talabalar bilimlarini faollashtirish va mustahkamlash maqsadida quyidagi savollarni beradi: Son o'qi nima? Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi tushuntiring. Masofa aksiomalarini ayting. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qoidasi qanday? Uchburchak yuzini topish formulasini ayting.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar. Mustakil misollar echadilar
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar extiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Dekart koordinatalar sistemasi" ga klaster tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



Sonlar o'qi. To'g'ri chiziq olib, unda ixtiyoriy bir nuqtani belgilab, boshlang'ich nuqta deymiz va O orqali belgilaymiz. To'g'ri chiziq ikkita nurga ajraydi. Bu nurlardan biriga yo'nalish belgisi «→» ni qo'yib, shu tomonga yo'nalishni «*musbat yo'nalish*» deb qabul qilamiz.

Biror kichik, «—» kesma olib uni, masshtab birligi va uzunligini 1 ga teng deymiz. Bu kesma uzunligini sirkul bilan o'lchab, O nuqtadan boshlab o'ng tomonga, ketma-ket qo'yamiz va har bir qo'yish oxiriga 1, 2, 3, . . . sonlarini yozamiz.

Xuddi shu kabi, O nuqtadan boshlab birlik kesmani chap tomonga ketma-ket qo'yamiz va har bir qo'yish oxiriga -1, -2, -3, . . . sonlarini yozamiz.

Bunday belgilashlardan so'ng hosil bo'lgan to'g'ri chiziqni *sonlar o'qi* yoki *koordinata o'qi* deb yuritiladi. Sonlar o'qining har bir nuqtasi biror sonni ifodalaydi va aksincha, har bir songa sonlar o'qida bitta nuqta mos keladi.

Tekislikda koordinatalar sistemasi.

Ikkita son o'qini, ularning boshlang'ich nuqtalarini ustma-ust qo'yib, o'zaro perpendikulyar holda joylashtiramiz. Agar ularning masshtab birliklari bir xil bo'lsa, *Dekart koordinatalar sistemasi* hosil bo'ladi.

Odatda son o'qlaridan birini gorizontal, ikkinchisini vertikal holda chiziladi va koordinatalar o'qi deyiladi. Kesishish nuqtani koordinatalar boshi deyiladi va O orqali belgilanadi. Gorizontal o'qni Ox bilan belgilanadi va *absissalar o'qi*, vertikal o'qni Oy bilan belgilanadi va *ordinatalar o'qi* deyiladi. O'qlar tekislikni 4 qismga ajratadi. Bu qismlar mos ravishda I, II, III, IV chorak deyiladi.

Tekislikdagi biror M nuqtaning turgan joyini, ya'ni vaziatini aniqlash uchun bu nuqtadan koordinatalar o'qlariga perpendikulyar tushiramiz. Ox o'qidagi OA=x son M nuqtaning *absissasi*, Oy o'qidagi OV=u son M nuqtaning *ordinatasi* deyiladi. Demak, tekislikdagi ixtiyoriy M nuqta ikkita x va u sonlar bilan aniqlanar ekan. Bu sonlar M *nuqtaning koordinatalari* deyiladi va M(x;u) kabi belgilanadi.

Koordinatalari bilan berilgan A(x₁;u₁) va V(x₂;u₂) ikki nuqta olaylik. Ular orasidagi masofani |AV| kabi belgilaymiz va u

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{formula bilan hisoblanadi.}$$

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Ikki A(x₁;u₁) va V(x₂;u₂) nuqtalar berilgan. Ularni tutashtiruvchi kesmani AV orqali belgilaymiz. Biror λ son uchun AV kesmada shunday S(x;u) nuqta topingki, AS kesma uzunligining SV kesma uzunligiga nisbati λ ga teng bo'lsin, ya'ni |AS| : |SV| = λ.

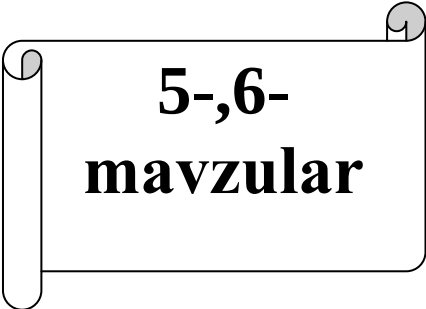
S nuqtaning koordinatalari $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ formulalar bilan topiladi. Xususan, λ=1 bo'lsa $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ bo'lib AV kesmaning o'rtasi bo'lgan nuqta koordinatalari topiladi.

Uchburchak yuzini topish formulasi

Uchlari A(x₁;u₁), V(x₂;u₂) va S(x₃;u₃) nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

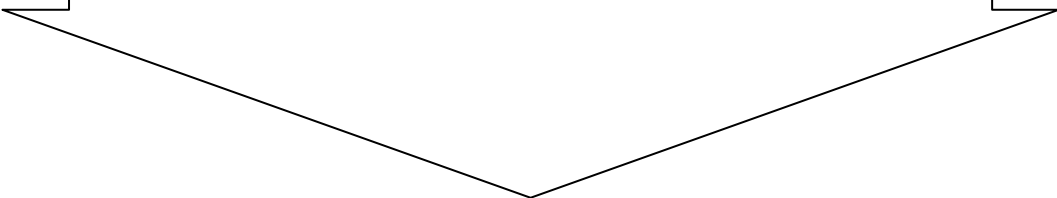
$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formula bilan topiladi.



5-,6- mavzular

**Vektorlar. Vektorlar ustida amallar.
Vektor ko'paytma. Aralash ko'paytma.**

- Skalyar va vektor miqdorlar. Vektor tushunchasi.
 - Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, qarama-qarshi vektorlar.
 - Vektorlar ustida chizikli amallar.
 - Bazis. Vektorni bazis buyicha yoyish.
 - Vektorni o'kdagi proeksiyasi, yo'naltiruvchi kosinuslar
- 

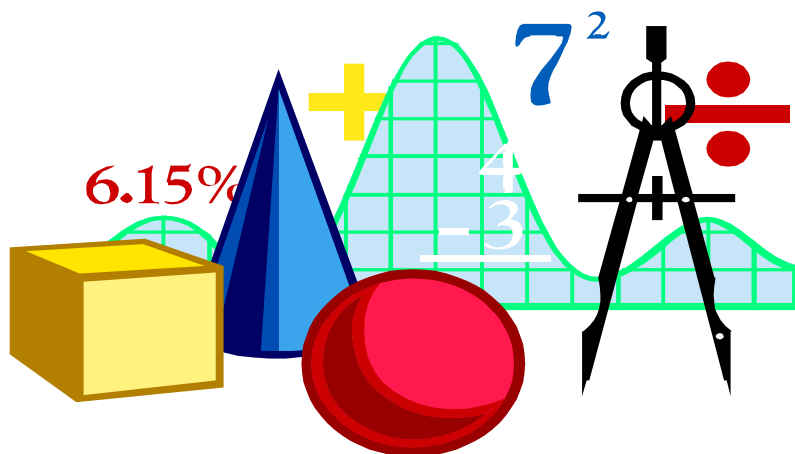
5.1. Ma'ruza mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Skalyar va vektor mikdorlar. Vektor tushunchasi. 2. Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, karama-karshi vektorlar. 3. Vektorlar ustida chizikli amallar. 4. Bazis. Vektorni bazis buyicha yoyish. 5. Vektorni ukdagi proeksiyasi, yunaltiruvchi kosinuslar
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Skalyar va vektor mikdorlar. Vektor tushunchasi. Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, karama-karshi vektorlar. Vektorlar ustida chizikli amallar. Vektorni bazis buyicha yoyish masalalari bilan tanishish	
Pedagogik vazifalar: • Skalyar va vektor mikdorlar. Vektor tushunchasi. . Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, karama-karshi vektorlar. . Vektorlar ustida chizikli amallar. . Bazis. Vektorni bazis buyicha yoyish. . Vektorni ukdagi proeksiyasi, yunaltiruvchi kosinuslar Bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: - Skalyar va vektor mikdorlar. Vektor tushunchasi biladi - Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, karama-karshi vektorlar tuza oladi - Vektorlar ustida chizikli amallar bajaradi - Bazis. Vektorni bazis buyicha yoya oladi - Vektorni ukdagi proeksiyasi, yunaltiruvchi kosinuslar kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Skalyar va vektor miqdorlar. Vektor tushunchasi. 2. Vektorlarning tengligi, birlik, nol vektor, kolleniyar vektorlar, karama-karshi vektorlar. 3. Vektorlar ustida chizikli amallar. 4. Bazis. Vektorni bazis buyicha yoyish. 5. Vektorni o'kdagi proeksiyasi, yunaltiruvchi kosinuslar	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar extiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: “Vektorlarga ” ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

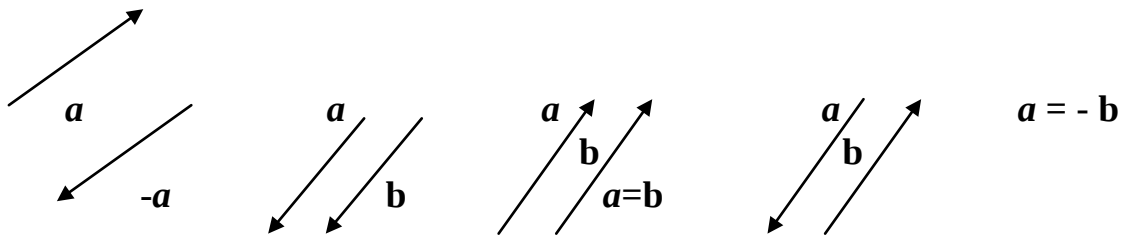
Ilovalar



Fizik, kimyoviy va boshka xodisalarni urganishda uchraydigan qiymatlarni ikki sinfga bulish mumkin.

Skalyar qiymatlar deb ataladigan qiymatlar sinfi mavjudki, ularni xarakterlash uchun bu qiymatlarning son kiymatlarini kursatish etarlidir. Bular masalan, xajm, massa, zichlik, xarorat va boshkalardir. Lekin shunday qiymatlar mavjudki, ular fakat son kiymatlari bilangina emas, balki yunalishi bilan xam xarakterlanadi.

Ular **yunaltilgan qiymatlar** yoki **vektor qiymatlar** deb ataladi. Masalan, xarakatlanayotgan nuktnaning bir vaziyatdan ikkinchi vaziyatga kuchishida taxsir etayotgan kuchni xarakterlash uchun kuchning ulchamlarini kursatish kifoya kilmasdan, balki bu kuchning yunalishini xam kursatish zarurdir. Xarakat tezligi magnit yoki elektr maydonning kuchlanganligi va boshka qiymatlar xam shunga uxshash xarakterlanadi. Bularning xammasi vektor qiymatlarga oid misoldir. Ularni tasvirlash uchun vektor tushunchasi kiritilgan bulib, u matematikaning uzi uchun xam foydali bulib chikdi. Biz yukorida yunalgan kesma xakida gapirganimizda, unda yunalish aniklangan, yaxni uning chetki nuktalaridan kaysi biri boshi, kaysi biri oxiri ekanligi kursatilgan kesma ekanligi xakida aytgan edik.



Ta'rif: Yunalgan kesma vektor deyiladi.

Vektorni $\overline{AB} = a$ ko'rinishida belgilaymiz.

$|a| = |\overline{AB}|$ — vektor uzunligi.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va 0 kurinishida belgilanadi.

$$|0| = 0$$

Nol vektor yunalishga ega emas.

2- ta'rif Parallel to'g'ri chizikda yotgan vektorlar **kolleniyar vektorlar** deyiladi.

3-ta'rif a va v vektorlar kolleniyar bir xil yunalgan va uzunliklari teng bulsa, ular **teng vektorlar** deb ataladi.

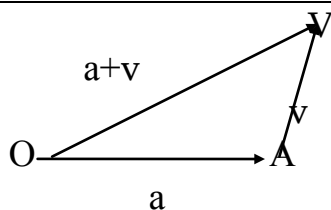
$$a = v$$

4-ta'rif Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplenar vektorlar** deb ataladi.

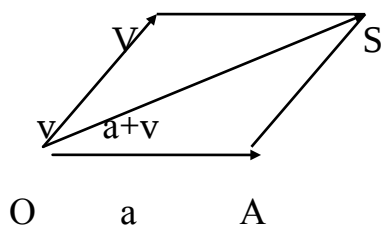
AV va VA vektorlar **karama-karshi** vektorlar deyiladi. $AV = a$; u xolda $VA = -a$

Vektorlar ustida chizikli amallar deb, kushish, ayirish, songa kupaytirishga aytiladi.

a va v vektorlar berilgan bulsin. Ixtiyoriy O nuktani olamiz va OA ni yasaymiz, keyin $AV = v$ ni yasaymiz. OV ni $a+v$ vektor xosil buladi. Bu usulni vektorlarni kushishni uchburchak usuli deb ataladi.



Boshkacha usuli



O nuktaga OAqa va $OV=v$ ni yasaymiz.

SHu vektorlar yordamida OVSA parallelogramm yasaymiz. $OS = a+v$ vektor xosil buladi.

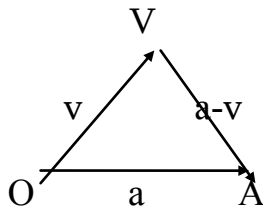
Bu usul parallelogramm usuli deb ataladi.

$$1^0 a+v = v+a$$

$$2^0 (a+v)+s = a+(v+s)$$

$a-v$ vektorni xosil kilish uchun, ixtiyoriy O nuktani olib, OAqa va $OV=v$ vektorlarini yasaymiz. $VA = a - v$ ni xosil kilamiz:

$a \neq 0$ vektorni $m \neq 0$ songa **kupaytmasi** deb, a vektorga kolleniyar, uzunligi $|m| \cdot |a|$ ga teng bulgan, agar $m > 0$ bulsa, a vektor bilan bir xil yunalgan; $m < 0$ bulsa, a vektorga karama-karshi yunalgan ma vektorga aytiladi.



Asosiy xossalari:

$$1^0 \quad ma = a m \quad (\text{urinish almashtirish})$$

$$2^0 \quad m(na) = (mn) a \quad (\text{gruppalarlashlar})$$

$$3^0 \quad (m+n)a = ma+na \quad \text{Sonlarni kushishga nisbatan taksimot konuni}$$

$$4^0 \quad m(a+v) = ma+mv \quad \text{Kushishga nisbatan taksimot konuni.}$$

Uzunligi 1 ga teng bulgan vektorga **birlik vektor** deyiladi va kuyidagicha belgilalanadi:

$$|a^0|=1$$

Ixtiyoriy vektorni $a = |a| \cdot a^0$ shakilda yozish mumkin.

Ta'rif: $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi 0 dan farkli shunday n ta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar mavjud bulsaki, vektorlarning chizikli kombinatsiyasi 0 ga teng. YAxni

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (1)$$

bulsa, u sistema **chizikli boglik sistema** deyiladi. Aks xolda $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar **chizikli erkli** deb ataladi, ular uchun tenglik fakat

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ bulganda urinishli buladi.}$$

1-misol: a va v vektorlar kolleniyar bulganda va fakat shundagina chizikli boglik bulishini isbotlang.

Echish: a va v vektorlar chizikli boglik bulsa, u xolda kuyidagi tenglik urinishli buladi:

$$v = \alpha a \quad (\alpha \neq 0)$$

a va v vektorlarni kolleniyar ekanligi kelib chikadi. Teskari daxvo xam urinishlidir, yaxni a va v uzaro kolleniyar bulsa, $v = \alpha a$ tenglik urinishlidir, u xolda α -a va v vektorlar uzaro chizikli boglikligi kelib chikadi.

2-misol: a, v va s vektorlar komplanar bulganda va fakat shundagina chizikli boglik bulishini kursating:

Echish: Xakikatan xam, ular chizikli boglik bulsa, u xolda

$$s = \alpha a + \beta v \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0) \text{ tenglik tugri.}$$

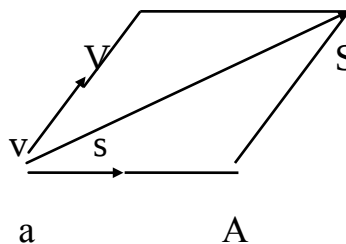
αa vektor va a uzaro kolleniyar,

βv vektor va v uzaro kolleniyar, u xolda $\alpha a + \beta v$ vektor a va v vektorlar bilan **komplanar** bulgan vektordir. Demak, a, v va s vektorlar komplanardir. Teskarisi xam urinishlidir.

Aytaylik, a, v va s vektorlar komplanar bulsin. Bu vektorlarni umumiy O boshiga keltiramiz va OASV parallelogram yasaymiz.

$$OS = OA + OV$$

OA vektor a ga OV vektor v ga kolleniyar. SHuning uchun $OA = \alpha a, OV = \beta v$. Bu erda $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$



U xolda $S = OA + OV = \alpha a + \beta v$. Bu esa a , v va s vektorlarni chizikli bog'likligini kursatadi.

Ta'rif: Istalgan a vektorni n ta chizikli erkli $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlarning chizikli kombinatsiyasi orkali ifodalash mumkin bulsa, u xolda bu vektorlar **fazoning bazisi** deb ataladi.

Bazisni xosil kiladigan vektorlar soni fazoning **ulchami** deyiladi. Bazisga kiruvchi vektorlar **bazis vektorlar** deb ataladi. Tugri chizikning ulchami 1 ga teng:

$$a = \alpha e \quad (\alpha \neq 0) \quad (2)$$

Tekislikning ulchami 2 ga tengdir:

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad (\alpha, \beta \neq 0) \quad (3)$$

Fazoning ulchami 3 ga tengdir, chunki fazoda uchta vektor komplanardir:

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0) \quad (4)$$

Bularda e_1, e_2, e_3 — chizikli erkli vektorlar bulib, bazis tashkil kiladi.

Fazoda biror l uk va biror fazoda joylashgan AV vektor berilgan bulsin. A_1 va V_1 nuktalar A va V nuktalarning l ukdagi proeksiyasi bulsin. Aytaylik $A_1(x_1)$ va $V_1(x_2)$ l ukdagi koordinatasi bulsin. A_1V_1 vektor AV vektorning l ukdagi tashkil etuvchisi yki **komponentasi** deyiladi.

Agar AV vektor l uk bilan utkir burchak xosil kilsa, u xolda $x_2 - x_1 > 0$ buladi;

AV vektor l uki bilan utmas burchak xosil kilsa, u xolda $x_2 - x_1 < 0$ buladi;

$AV \perp l$ buladi, agar $x_2 - x_1 = 0$ bulsa.

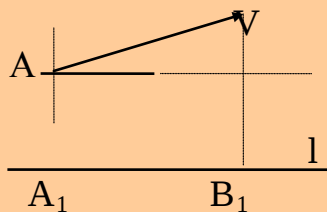
Vektorni l ukdagi proeksiyasini $Pr_l AV$ shaklida belgilanadi.

$$Pr_l AV = \pm |A_1V_1|$$

Proeksiyaning asosiy xossalari:

1⁰. a vektorning l ukka proeksiyasi a vektor modulining bu vektor bilan uk orasidagi burchak kosinusiga kupaytmasiga teng

$$\text{Pr}_l a = |a| \cos \varphi \quad (5)$$



2⁰. Ikki vektor yigindisining ukka proeksiyasi kushiluvchi vektorlarning shu ukka proeksiyalari yigindisiga teng, yaxni

$$\text{Pr}_l (a+v) = \text{Pr}_l a + \text{Pr}_l v \quad (6)$$

3⁰. λ sonining a vektorga kupaytmasining l ukka proeksiyasi λ sonni a ning shu ukka proeksiyasiga kupaytmasiga teng, yaxni uzgarmas sonni proeksiyadan tashkariga chikarish mumkin:

$$\text{Pr}_l \lambda a = \lambda \text{Pr}_l a \quad (7)$$

a = OA vektorni koordinata uklaridagi proeksiyasi ax, ay, az orkali belgilanadi va

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad (8)$$

formula a ning i, j, k bazis vektorlari yoki koordinata uklari buyicha yoyilmasini beradi.

OA= r bulib, uni **radius vektor** deb ataladi.

Agar $a = a_x i + a_y j + a_z k$ va $v = v_x i + v_y j + v_z k$ berilgan bulsa, u xolda

$$a \pm v = (a_x \pm v_x) i + (a_y \pm v_y) j + (a_z \pm v_z) k \quad (9)$$

$$\lambda a = (\lambda a_x) i + (\lambda a_y) j + (\lambda a_z) k \quad (10)$$

MISOLLAR.

1

1) $A(6; -1; 2)$, $V(-3; 1; 4)$; bulsa, $AV = -9i + 2j + 2k$.

2) $a = 2i - 4j + 5k$; $v = -4i + 3j + 8k$.

$a + v = (2 - 4)i + (-4 + 3)j + (5 + 8)k = -2i - j + 13k$.

$a - v = (2 - (-4))i + (-4 - 3)j + (5 - 8)k = 6i - 7j - 3k$.

$5a = 5 \cdot 2i - 5 \cdot 4j + 5 \cdot 5k = 10i - 20j + 25k$

Uz-uzini tekshirish uchun savollar:

1. Kanday vektorlar kolleniar vektorlar, komplanar, teng deb ataladi?
 2. Vektorning moduli nima?
 3. Vektorlar ustidagi kaysi amallar chizikli amallar deb ataladi?
 4. Kanday vektorlar chizikli boglik va kanday vektorlar chizikli erkli deb ataladi?
 5. Fazoning bazisi va o'lchami nima?
 6. Vektorning o'qdagi tashkil etuvchisi nima?
 7. Vektorning o'qqa proeksiyasi nima?
- Vektorlar ustida chizikli amallarga ularning koordinatalari ustida shunday amallar mos kelishini isbotlang.

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J..X,Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston» , 2001y
- 2.Kurosh A.G. Oliy algebra kursi , Toshkent «O'qituvchi», 1967y
- 3.Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

9. Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta maktab», 1963
- 10.g'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G FunkSIONAL analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
- 11.g'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
- 12.Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi»,1977.

Internet saytlari

9. <http://WWW.mcce.zu>
- 10.<http://lib.mexmat.zu>, Gel'fand
11. <http://WWW.mecceG'zu>, <http://G'G'lip.mexmet.zu>,Kostrikan A.I.
- 12.<http://WWW.mecce.zu>, <http://lib.mexmat.zu>,Kurosh A.G.

Vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmalari hamda ularning asosiy xossalari

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uzunliklarining ko'paytmasini shu vektor orasidagi burchakning kosinusi bilan ko'paytmasiga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* deyiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Ta'rifga va bunday belgilanishga ko'ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ bo'lib, bunda $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$ burchak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ formula bo'yicha topiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor o'zaro perpendikulyar bo'lsa, u holda ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro parallel bo'lsa, u holda $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ bo'ladi.

Ikkita vektorning vektor ko'paytmasi.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga *vektor ko'paytmasi* deb, quyidagicha aniqlangan uchinchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1. $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchakning sinusi bilan ko'patmasiga teng: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

2. $\vec{c}$ vektorning yo'nalishi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning tekisligiga perpendikulyar. $\vec{c}$ ning uchidan qaraganda $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ga burilish soat mili yo'nalishiga teskari bo'ladi.

vektor ko'paytma $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ yoki $\vec{a} \times \vec{b}$ ko'rinishlarda belgilanadi. Xossalari.

1. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \vec{a}]$.
2. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lsa, $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = 0$.
3. $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar vektor ko'paytmasining uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasi, uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning *aralash ko'paytmasi* deyiladi va u $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c}$ ko'rinishda belgilanadi.

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi haqiqiy son bo'ladi.

Xossalari.

1. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c} = [\vec{b} \cdot \vec{a}] \vec{c}$;
2. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c} = [\vec{b} \cdot \vec{c}] \vec{a} = [\vec{c} \cdot \vec{a}] \vec{b}$;
3. $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ vektor $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar bo'lsa, $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c} = 0$ bo'ladi.
4. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan ixtiyoriy ikkitasi o'zaro teng bo'lsa, u holda $[\vec{a} \cdot \vec{a}] \vec{b} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{a} = [\vec{b} \cdot \vec{a}] \vec{a} = 0$ bo'ladi.

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c}$ aralash ko'paytmaga teng.

Vektor ko'paytmaning koordinatalar orqali ifodalanishi.

$\vec{a}=(x_1;u_1;z_1)$ va $\vec{b}=(x_2;u_2;z_2)$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Misollar. 1. $\vec{a}=(2;0;-1)$ va $\vec{b}=(2;-3;2)$ vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmalarini toping.

Echish. Vektorlar koordinatalari orqali berilgani uchun ularning skalyar ko'paytmasini hamda vektor ko'paytmasini yuqoridagi formulalar orqali topamiz.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 4 + 0 - 2 = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2;$$

$$\begin{aligned} [\vec{a} \cdot \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 6\vec{k} - 2\vec{j} - 0 - 4\vec{j} - 3\vec{i} = \\ &= -3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} = (-3; -6; -6) = \vec{c} \end{aligned}$$

bo'ladi.

2. $\vec{a}=(2;0;-1)$, $\vec{b}=(2;-3;2)$ va $\vec{c}=(-3;-6;-6)$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

$$\begin{aligned} \text{Echish. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] \vec{c} &= \vec{c} \cdot \vec{c} = (-3; -6; -6)(-3; -6; -6) = (-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2 = \\ &= 9 + 36 + 36 = 81. \end{aligned}$$



**Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari: burchak koeffisientli,
ikki nuqtadan o'tuvchi va boshqa
to'g'ri chiziq tenglamalari.**

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi.
2. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

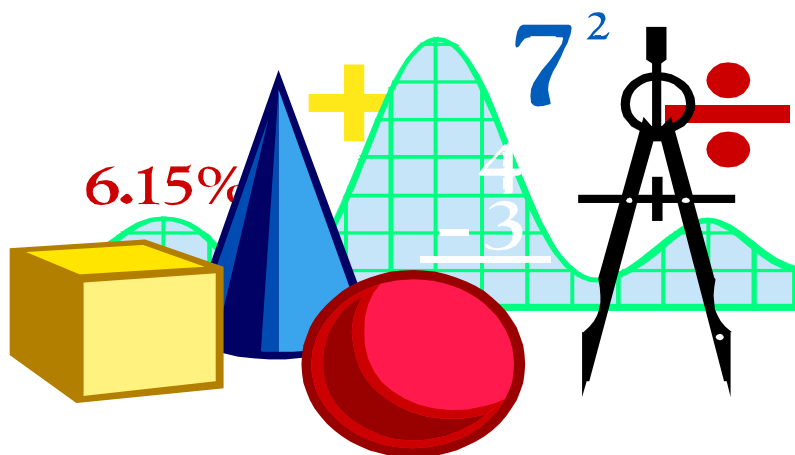
5.1. Ma'ruza mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi. 2. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. 3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. 4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. 5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
6. O'quv mashg'ulotining maqsadi: To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalarni o'rgatish.	
Pedagogik vazifalar: 1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi. 2. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. 3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. 4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. 5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.	O'quv faoliyati natijalari: 1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi. 2. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. 3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. 4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. 5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblaydi.
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi. 2. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. 3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. 4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. 5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar extiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "To'g'ri chiziqlar" ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



1. **Kirish.** Ko'pincha amaliy masalalarni echishda turli chiziqlar bilan chegaralangan figuralar bilan ishlashga tq'ri keladi, bu esa chiziqlarning algebraik tenglamalarini bilishni ta'ozta etadi.

Aslida biz chiziq turlari va uning tenglamalari bilan maktab matematikasidan tanishmiz. Masalan uqax koordinatalar boshidan qtuvchi tq'ri chiziq tenglamasini, $uqax^2+bx+s$ parabola chizi'ining tenglamasini, $x^2+u^2=R^2$ tenglama esa markazi koordinatalar boshida radiusi R ga teng bqlgan aylanani ifoda etadi. Bu erdagi a, v, s va R lar chiziqning parametrlari deyiladi.

Tq'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida chiziqning tenglamasi $u=f(x)$ yoki $F(x,y)=0$ (1)

kqrinishida bqladi. Bu erda x va u qzgaruvchan (miqdorlar) koordinatalar deyiladi.

1-ta'rif. CHiziqning tenglamasi deb, x va u qzgaruvchilarga nisbatan tuzilgan shunday tenglamaga aytiladiki, uni shu chiziqda yotgan o'ar qanday nuqtaning koordinatalari va faqat ulargina qanoatlantiradi. Analitik geometriyada asosan ikkita masala bilan shug'ullaniladi:

a) CHiziq nuqtalarning geometrik o'rni sifatida berilgan uning tenglamasini tuzish talab qilinadi.

b) CHiziq tenglama bilan berilgan uning grafigini yasash talab qilinadi.

Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari.

To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi.

Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) burchak tashkil qilib,

Oy o'qidan b kesma ajratib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. To'g'ri chiziq tenglamasini tuzish deganda undagi ixtiyoriy N(x;y) nuqta koordinatalarini o'zaro bog'lovchi tenglamani topish tushuniladi.

SHakldan

$$OB = b, AN = y - b, AB = x \quad \text{va} \quad \triangle ABN$$

$$\text{dan} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y-b}{x} \quad \text{yoki} \quad u = x \operatorname{tg} \varphi + b. \quad \text{Agar}$$

$\operatorname{tg} \varphi = k$ belgilash kiritsak hosil bo'lgan

$$u = kx + b$$

tenglama to'g'ri chiziqning *burchak koeffisientli tenglamasi* deyiladi.

$k = \operatorname{tg} \varphi$ son to'g'ri chiziqning *burchak koeffisienti* deyiladi.

Agar $k=0$ bo'lsa, u holda $u=b$, agar $b=0$ bo'lsa, u holda $u=kx$ bo'lishi tushunarli.

Misol. Agar $b=-2$, $k=45^\circ$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq tenglamasi $y=x-2$ bo'ladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

$Ax + Vu + S = 0$ ko'rinishdagi birinchi darajali tenglamaga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar $S=0$ bo'lsa, $Ax + Vu = 0$ bo'lib u koordinata boshidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

2. Agar $A=0$ bo'lsa, u holda $Vy + S = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ bo'lib bu to'g'ri chiziq $(0; -\frac{C}{B})$ nuqtadan o'tuvchi va Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

3. Agar $V=0$ bo'lsa, u holda $x = -\frac{C}{A}$ bo'lib bu $(-\frac{C}{A}; 0)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.

4. Agar $S=0$, $V=0$ bo'lsa, u holda $Ax=0$, ya'ni $x=0$ va bu Oy o'qining tenglamasidir.

5. Agar $S=0$ va $A=0$ bo'lsa, u holda $Vy=0$, ya'ni $y=0$ va bu Ox o'qining tenglamasidir.

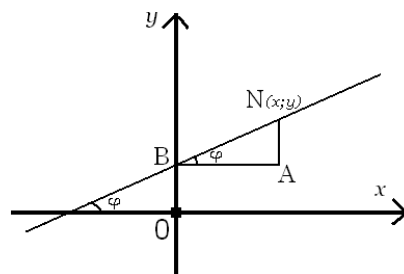
Misol. Umumiy tenglamasi $2x + 3u + 7 = 0$ bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasini toping.

$$2x + 3u + 7 = 0, \quad 3y = -2x - 7, \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}, \quad k = -\frac{2}{3}, \quad b = -\frac{7}{3}.$$

Bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi.

Biror $M(x_0; u_0)$ nuqta berilgan bo'lsa, undan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi $u = k(x - x_0) + u_0$ ko'rinishda bo'ladi.

Haqiqatan, ixtiyoriy to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz $u = kx + b$. Bu to'g'ri chiziq M nuqtadan o'tgani uchun $u_0 = kx_0 + b$ bo'ladi. Uni avvalgi tenglamadan ayirib $u - u_0 = k(x - x_0)$ bo'lishini topamiz.



Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ bo'ladi.

Misol. $M_1(1; 2)$, $M_2(-2; 3)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish. Berilgan nuqtalar koordinatalaridan foydalanib $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{3-2}$ munosabatni, bundan esa $x+3y-7=0$ tenglamani topamiz.

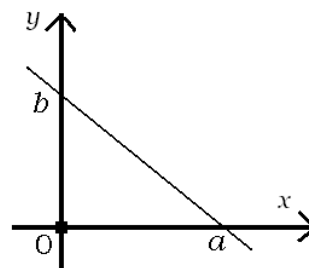
To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Koordinata o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalarni ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaraylik. Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini $Ax + By + C = 0$ ko'rinishda olamiz. Agar $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, u holda berilgan tenglamani

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \text{ yoki } \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

ko'rinishda yozamiz. Endi $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ belgilash

kiritib, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasini keltirib chiqaramiz.



To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ko'rinishda olaylik. Koordinata boshidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani $|OC|=p$ deylik. Agar p masofa va α burchaklar berilgan bo'lsa, u holda AOS uchburchakdan, $a = \frac{p}{\cos \alpha}$, VOS uchburchakdan $\frac{p}{OB} = \cos(90^\circ - \alpha)$, ya'ni,

$b = \frac{p}{\sin \alpha}$ bo'ladi. Topilgan a , b larni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak hosil bo'lgan

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

tenglama to'g'ri chiziqning *normal tenglamasi* deyiladi.

Agar to'g'ri chiziqning tenglamasi $Ax + By + C = 0$ umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni normal ko'rinishga keltirish uchun bu tenglamani har ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ga ko'paytirish kifoya:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglamani yuqoridagi tenglama bilan solishtirsak

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Misol. $4x-3y-10=0$ to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltiring.

Echish. Avval normallovchi ko'paytuvchini topamiz: $\mu = \frac{1}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$.

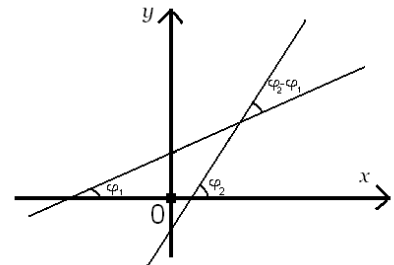
Natijada $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$ tenglama berilgan to'g'ri chiziqlar normal tenglamasi hosil qilinadi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Bir-biri bilan kesishadigan ikki to'g'ri chiziq, mos ravishda $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Ular orasidagi φ burchak topilsin.

Echish. SHakldan $\varphi_2=\varphi+\varphi_1$ yoki $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.
Ma'lumki

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$



Masala shartiga ko'ra $\operatorname{tg} \varphi_1=k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2=k_2$.
Bularni yuqoridagiga qo'yib, ikki to'g'ri chiziq

orasidagi burchak uchun $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ formulani hosil qilamiz. Agar φ uchun

$0 < \varphi < 90^\circ$ bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} \varphi > 0$ bo'ladi.

Agar φ uchun $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} \varphi < 0$ bo'ladi.

Agar berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa $\varphi=0$ bo'lib $\operatorname{tg} \varphi=0$ bo'ladi. Bu holda formuladan $k_2-k_1=0$, ya'ni $k_2=k_1$ kelib chiqadi. Demak, **ikki to'g'ri chiziqlar parallellik sharti** $k_2=k_1$.

Agar bu ikki to'g'ri chiziq o'zaro perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=90$ bo'lib $\varphi_2=\varphi+\varphi_1=90+\varphi_1$ bo'ladi. Bundan

$\operatorname{tg} \varphi_2=\operatorname{tg}(90+\varphi_1)=-\operatorname{ctg} \varphi_1=-\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$, ya'ni, $\operatorname{tg} \varphi_2=-\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$ kelib chiqadi. Demak,

ikki to'g'ri chiziqlar perpendikulyarlik sharti

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ yoki } k_1 k_2 = -1 \text{ bo'ladi.}$$

Misollar. 1. $3x+y-6=0$ va $x+2y+1=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Echish. To'g'ri chiziqlar tenglamalaridan $k_1=-3$, $k_2=-\frac{1}{2}$ larni topib, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak formulasiga qo'yamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1. \quad \text{Demak, } \operatorname{tg} \varphi = 1, \text{ ya'ni, } \varphi = 45^\circ.$$

2. $M(-3;1)$ nuqtadan o'tib $2x+u-3=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Echish. Berilgan to'g'ri chiziq burchak koeffisientini aniqlaymiz: $k_1 = -2$. Unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq burchak koeffisienti $k_2 = \frac{1}{2}$ va tenglamasi $u = \frac{1}{2}x + b$ bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $M(-3;1)$ nuqtadan o'tadi. SHuning uchun $1 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + b$ munosabatdan $b = \frac{5}{2}$ topiladi. Demak, javob $x - 2u + 5 = 0$ bo'ladi.

3. $M(2;-1)$ nuqtadan o'tib Ox o'qi bilan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Echish. Masala shartiga ko'ra $k = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ bo'ladi va izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi $u = \sqrt{3}x + b$ ko'rinishda bo'lib u $M(2;-1)$ nuqtadan o'tadi. Bundan $b = -(1 + 2\sqrt{3})$ topiladi. Javob: $\sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

Tenglamasi $Ax + Vy + S = 0$ bo'lgan to'g'ri chiziq va $M_0(x_0, y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu holda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad \text{formula bilan hisoblanadi.}$$

Misollar. 1. $A(5;1)$ nuqtadan $5x + 12y - 50 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

$$\textbf{Echish.} \quad d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{5 \cdot 5 + 12 \cdot 1 - 50}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = \frac{13}{13} = 1.$$

2. Uchlari $A(1;2)$, $V(-2;1)$, $S(2;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning A uchidan tushirilgan balandlik uzunligini toping.

Echish. Avval VS tomon tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow x-2u+4=0.$$

Endi A nuqtadan VS to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblaymiz:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{1 - 2 \cdot 2 + 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3. Ushbu $3x+4u-5=0$ va $6x+8u-25=0$ tenglamalar bilan berilgan parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Echish. Bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lgani uchun, biridan olingan ixtiyoriy nuqtadan ikkinchisigacha masofa biz topishimiz kerak bo'lgan masofa bo'ladi.

Agar $3x+4u-5=0$ to'g'ri chiziqda $x=-1$ desak, u holda $u=2$ kelib chiqadi. Demak, $A(-1;2)$ nuqtadan $6x+8u-25=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz:

$$d = \left| \frac{6 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 - 25}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = \left| \frac{-6 + 16 - 25}{\sqrt{100}} \right| = \frac{15}{10} = 1,5$$

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

1. Qanday tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi?
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidan burchak koeffisientli tenglamasini keltirib chiqaring.
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidan kesmalar bo'yicha tenglamasini keltirib chiqaring.
4. $u=2x-3$ va $u=2x+10$ to'g'ri chiziqlar qanday joylashgan.
5. $y = \frac{1}{2}x+1$ va $u=-2x+3$ to'g'ri chiziqlar joylashgan.
6. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini yozish.
7. $A(-1,2)$ nuqtadan $x-3u=11$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.
8. Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish shartini ifodalang.
9. Ikki to'g'ri chiziqning parallel shartini ayting.
10. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartini ifodalang.

Mustaqil echish uchun misollar

1. $y = 1/2 \cdot x + 4$ to'g'ri chiziq berilgan. Uning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.
2. Boshlang'ich ordinatasi $b = -3$ bo'lgan va $y = 2x + 3$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.
3. $y = \sqrt{3}x - 2$ va $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning abssissa o'qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.
4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
6. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$,
4) $30x + 6y + 7 = 0$
to'g'ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.
7. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad y = 2/3 \cdot x - 7 & 2) \quad 2x - 4y + 9 = 0 \\
 \quad y = 5x + 9 & \quad 6x - 2y - 3 = 0 \\
 3) \quad y = 3/7 \cdot x - 2 & 4) \quad x/4 - y/5 = 1 \\
 \quad 7x + 3y + 5 = 0 & \quad x/2 + y/18 = 1
 \end{array}$$

8. Tomonlari $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ to'g'ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

9. $A(4; 5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing va ulardan $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo'lganlarini ajrating.

10. Uchburchak tomonlari

$$7x - 6y + 9 = 0; \quad 5x + 2y - 25 = 0; \quad 3x + 10y + 29 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini va balandliklarining tenglamalarini toping.

11. Uchlari $P(-4; 0)$, $Q(0; 4)$ va $R(2; 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.

12. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

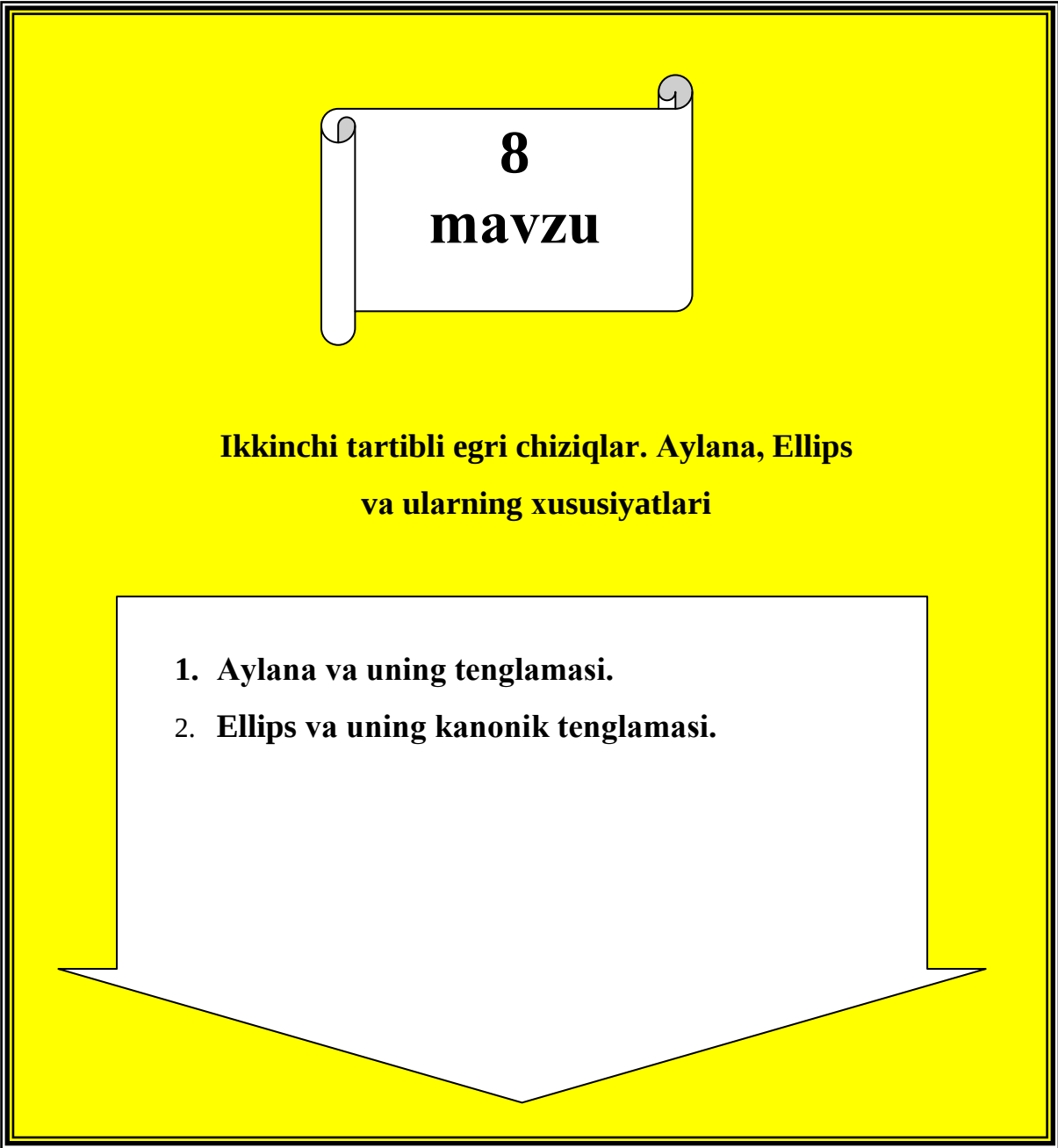
13. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

14. Uchlari $P(0; 5)$, $Q(-3; 1)$ va $R(-1; -2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning R nuqtasidan o'tkazilgan balandligining uzunligini toping.

15. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

16. Trapesiya asoslarining tenglamalari $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ berilgan. Trapesiyaning balandligini toping.

17. Uchlari $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ va $C(4; 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining, AE medianasining, AD balandligining tenglamalarini hamda AE mediananing uzunligini toping.



8 mavzu

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, Ellips va ularning xususiyatlari

- 1. Aylana va uning tenglamasi.**
- 2. Ellips va uning kanonik tenglamasi.**

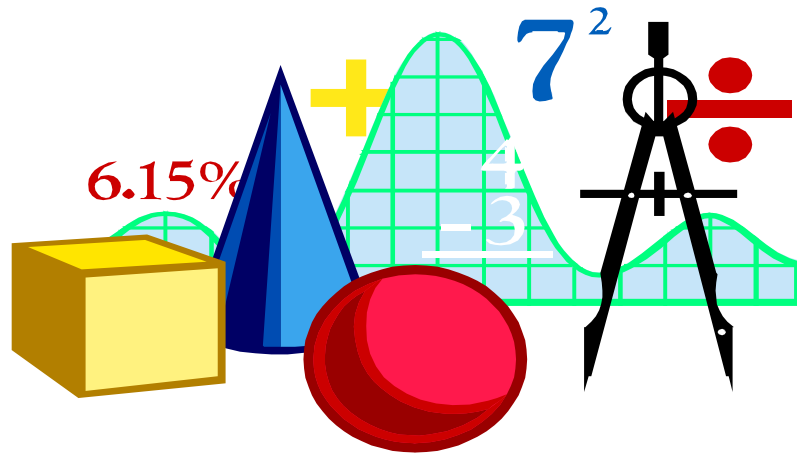
5.1. Ma'ruza mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. Aylana 2. Ellips tenglamasini keltirib chikarish 3. Ellips xossalarini ko'rsatish 4. Ellips grafigi
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. Aylana, ellips tenglamasini keltirib chikarish, ellips xossalarini ko'rsatish, ellips grafigini chizib ko'rsatish.	
Pedagogik vazifalar: • Aylana tenglamasi • Ellips tenglamasini keltirib chikarish • Ellips xossalarini ko'rsatish • Ellips grafigini chizish.	O'quv faoliyati natijalari: - Aylana tenglamasini va shaklini chizishni bilib oladi. - Ellips tenglamasini keltirib chikarishni o'rganadi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Aylana, ellips tenglamasini keltirib chikarish 2. Ellips xossalarni ko'rsatish 3. Aylana, Ellips grafigini chizib ko'rsatvdi.	Tinglaydilar, YOzadilar. Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar extiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi" ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



Aylana.

Markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga **aylana** deyiladi.

Berilgan $S(a,b)$ nuqtadan R masofada turgan $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ bo'ladi. Bundan, markazi $S(a,b)$ nuqtada radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ kelib chiqadi. Agar $S(0,0)$ bo'lsa, $x^2 + y^2 = R^2$ bo'ladi.

Misollar. 1. Tenglamasi

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$$

bo'lgan aylananing markazi va radiusini toping.

Echish. Har bir o'zgaruvchi bo'yicha to'la kvadrat ajratamiz:

$$x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2, \quad (x-2)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = 2 + 4 + \frac{25}{16}, \quad (x-2)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \frac{121}{16}.$$

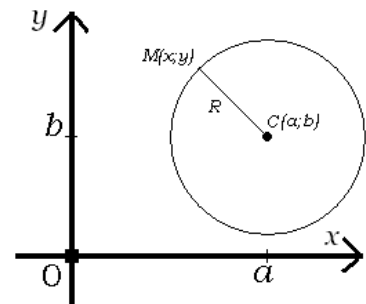
Demak, $R = \frac{11}{4}$, $C(2; -\frac{5}{4})$.

2. Agar $A(-2;3)$ va $V(4;-8)$ bo'lsa, u holda diametri AV bo'lgan aylana tenglamasi topilsin.

Echish. Masala shartiga ko'ra, aylana markazi AV kesmaning o'rtasi, $S(1;-1)$ nuqta bo'ladi va radiusi ushbu munosabatdan topiladi:

$$2R = |AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Demak, $R=5$ va aylana tenglamasi $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ bo'ladi.

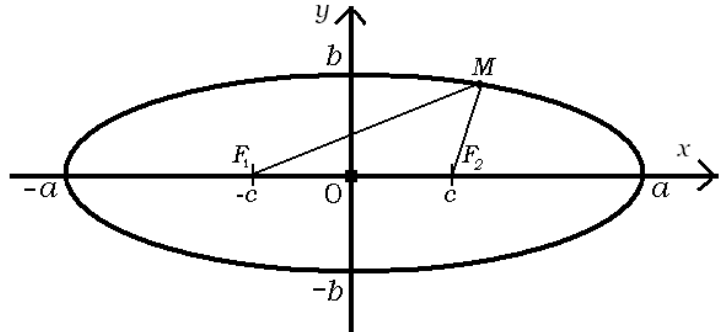


Ellips va uning tenglamasi.

Har bir nuqtasidan, fokuslar deb ataluvchi ikki nuqttagacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni **ellips** deyiladi.

Xuddi aylananiki kabi ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Agar ellips fokuslari orasidagi masofani $2c$ desak, u holda $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ bo'ladi. Ta'rifdagi o'zgarmas masofani $2a$ deb belgilaymiz.

SHartga ko'ra, ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi uchun $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ bo'ladi. Demak,



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Buni soddalashtirib $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ munosabatni va bu erda $a^2 - c^2 = b^2$

belgilash kiritib $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ yoki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamani hosil qilamiz. Bu ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ellipsning Ox o'qidagi $2a$ masofasi uning katta o'qi, Oy o'qidagi $2b$ masofasi kichik o'qi deyiladi, a va b miqdorlar esa mos ravishda katta va kichik yarim o'qlar deyiladi.

Ellips fokuslari orasidagi masofaning katta o'qiga nisbati ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va odatda ε harfi orqali belgilanadi.

Ellipsda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \quad c < a, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Ellipsning biror nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofa shu nuqtaning **radius vektori** deyiladi.

Demak, $r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ yoki $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ ko'rinishda bo'ladi.

SHuningdek, $x = \pm \frac{a^2}{c}$ to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deyiladi.

Ellipsning biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, normal tenglamasi $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$ ko'rinishlarda bo'ladi.

Misollar. 1. Agar $2a=6$, $2b=8$ bo'lsa, u holda ellips tenglamasini tuzing.

Echish. Masala shartiga ko'ra $c=3$, $b=4$. Demak, $a^2 = b^2 + c^2 = 25$, $a=5$.

Javob: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2. Tenglamasi $3x^2+5y^2-16=0$ ko'rinishda bo'lgan ellips o'qlari va fokuslari topilsin.

Echish. Tenglamani $\frac{3x^2}{16} + \frac{5y^2}{16} = 1$ kabi yozib olamiz. SHuning uchun $a^2 = \frac{16}{3}$, $b^2 = \frac{16}{5}$, $c^2 = \frac{32}{15}$, $F_1(-\sqrt{\frac{32}{15}}; 0)$, $F_2(\sqrt{\frac{32}{15}}; 0)$ bo'ladi.

3-misol. $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsning yarim o'qlarini, fokuslarini va ekscentrisitetini toping.

Echish. Berilgan tenglamani 400 ga bo'lib,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ bo'lib, yarim o'qlari mos ravishda $a = 5$, $b = 4$ bo'ladi. Ma'lumki, $b^2 = a^2 - c^2$, bo'lib,

$c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ bo'ladi. Demak, fokuslari $F_1(3,0)$ va $F_2(-3,0)$

nuqtalarda bo'ladi. Ekscentrisiteti esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

9 mavzu

**Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Giperbola, parabola
va ularning xususiyatlari**

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

**Giperbola,
Parabola
ularning xususiyatlari**

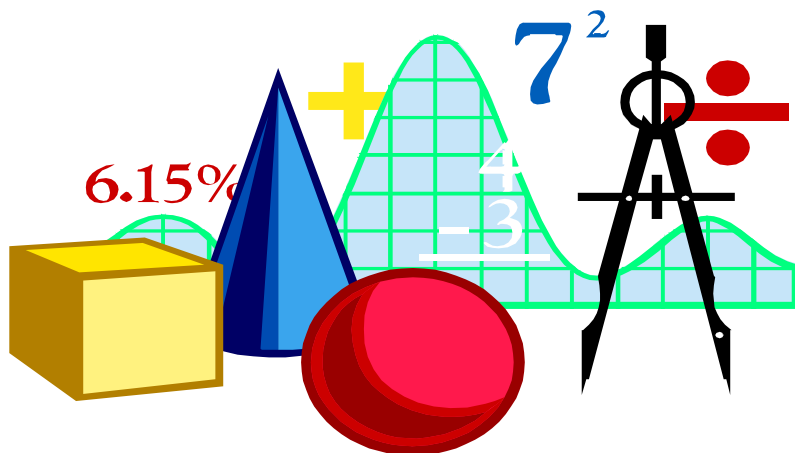
5.1. mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. 2. Giperbola, Parabola tenglamalari va ularning xususiyatlari
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. Ellips tenglamasini keltirib chikarish. Ellips xossalarini kursatish. Ellips grafigi	
Pedagogik vazifalar: • Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. Giperbola tenglamasini keltirib chikarish Parabola tenglamasini keltirib chikarish Ularning xossalarini ko'rsatish, grafigi bilan tanishtirish.	O'quv faoliyati natijalari: 1. Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi. 2. Giperbola tenglamasini keltirib chikarish 3. Parabola tenglamasini keltirib chikarish 4. Ularning xossalarini ko'rsatish, grafigi bilan tanishtirish
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza, suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi 2. Giperbola tenglamasini keltirib chikarish 3. Parabola tenglamasini keltirib chikarish 4. Ularning xossalarini ko'rsatish, grafigi bilan tanishtirish	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar extiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Parabola" ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



Ilovalar

• Tekislikdagi Dekart koordinatalar sistemasida ixtiyoriy o'zgaruvchili 1 - tartibli tenglama quyidagi ko'rinishda berilar edi:

$$Ax + By + C = 0$$

A , B , C lar bir vaqtda nolga teng bula olmaydi. Bu tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi va aksincha ixtiyoriy to'g'ri chiziq ikki o'zgaruvchili birinchi tartibli tenglama yordamida beriladi. SHuning uchun to'g'ri chiziq birinchi tartibli chiziq deb ataladi.

Bundan buyon biz 2 o'zgaruvchili 2 - tartibli tenglama bilan shuullanamiz. Bu tenglamalar bilan berilgan chiziqlarni 2 - tartibli chiziqlar deb ataymiz.

4-misol.. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3; 6)$ nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofani aniqlang.

Echish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12$, bundan $p = 6$, $p/2 = 3$. SHunday qilib, fokus $F(3; 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M(3; 6)$ nuqta uchun $x = 3$, bo'lib, fakol radius $r = 3 + 3 = 6$, $r = 6$ bo'ladi.

1. Giperbola

Giperbola deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqttagacha (fokuslargacha) masofalarning ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lgan tekislik nuqtalarining o'rniga aytiladi.

Berilgan nuqtaning giperbolaning fokuslari, ular orasidagi masofa esa fokal masofa deb ataladi. Giperbola tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun koordinatalar sistemasini shunday joylashtiramizki, absissa o'qi giperbolaning fokuslaridan o'tsin, $F_1 F_2$ fokal masofani ya'ni $F_1 F_2 = 2c$ deymiz. Ordinatalar o'qini F_1 va F_2 ni o'rtasidan perpendikulyar qilib o'tkazamiz. $F_1 M$ va $F_2 M$ lar orasidagi ayirma modulini $2a$ bilan belgilaymiz. U xolda giperbola quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

yoki

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = \pm 2a$$

Tenglamaning chap tomoni musbat bo'lsa (+), manfiy bo'lsa (-) olinadi.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\frac{cx}{a} - a = \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

taorifga ko'ra $a < c$, $c^2 - a^2 = b^2$ musbat bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

giperbolaning kanonik tenglamasi.

MISOL: $M(8\sqrt{5}; 12)$ nuqtadan o'tuvchi giperbolani kanonik tenglamasi tuzilsin, agar fokal oralik 20 ga teng bo'lsa.

SHartga ko'ra $2s = 20$ $s = 10$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(8\sqrt{5})^2}{a^2} - \frac{12^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1 \\ b^2 = 100 - a^2 \end{array} \right.$$

$$a^2 = 64 \quad b^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

MISOL: $21x^2 - 43y^2 = 903$ giperbola tenglamasi berilgan. Fokuslarning koordinatasi topilsin.

$$\frac{21x^2}{903} - \frac{43y^2}{903} = 1$$

$$\frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1$$

$$a^2 = 43 \quad b^2 = 21 \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad c^2 = 64 \quad c = 8$$

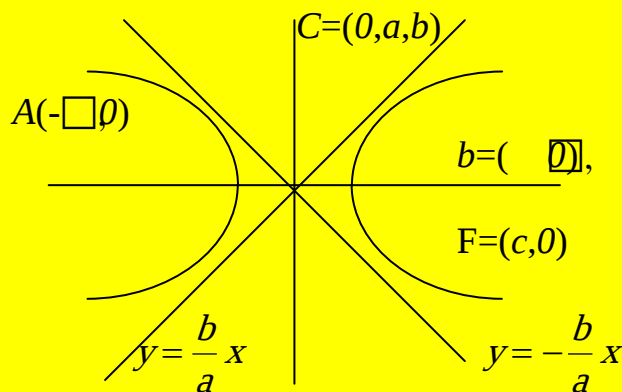
Demak, $F_1 = (-8; 0)$ $F_2 = (8; 0)$ ekan.

/3/ tenglamadan maolunki, giperbola Ox , Oy o'qlariga nisbatan va koordinatalarning boshi O ga nisbatan simmetrikdir.

Agar $M_0(x_0; y_0)$ nuqta giperbolaga tegishli bo'lsa, u xolda $M_1(-x_0; y_0)$ $M_2(x_0; -y_0)$ $M_3(-x_0; -y_0)$ nuqtalarning ham giperbolaga tegishlidir.

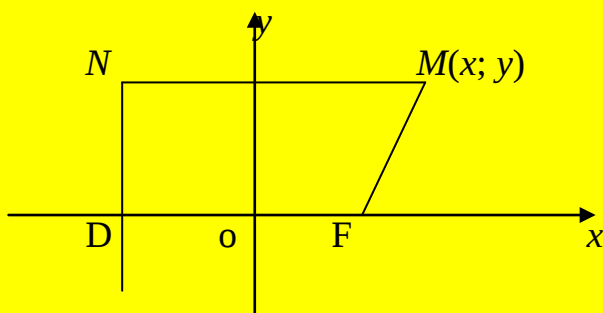
Giperbola absissalar o'qini $A(-a; 0)$ $B(a; 0)$ nuqtada kesib o'tadi. A va B nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. AB kesma giperbolaning xaqiqiy o'qi deyiladi. Uning uzunligi $2a$ ga teng.

$y = \frac{bx}{a}$ va $y = -\frac{bx}{a}$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.



2 Parabola

Parabola deb, xar bir nuqtasidan berilgan bir nuqttagacha (fokusgacha) va berilgan bir to'g'ri chiziqqacha (direktrissagacha) masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.



Fokusdan direktrissagacha bo'lgan masofa focal parametri deyiladi va p bilan belgilanadi. Koordinatalar sistemasini shunday joylashtiramizki, Ox uk F fokusdan o'tib direktrissaga perpendikulyar bo'lsin. Direktrissasi bo'lgan O o'q kesishish nuqtasini D bilan, koordinatalarning boshini O nuqta bilan belgilaymiz. DF ni o'rtasi O nuqta bo'ladi. U xolda $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ bo'ladi. Direktrissa

esa $x = -\frac{p}{2}$ $x + \frac{p}{2} = 0$ tenglamaga ega bo'ladi. $M(x; y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin
Parabolaning taorifiga ko'ra

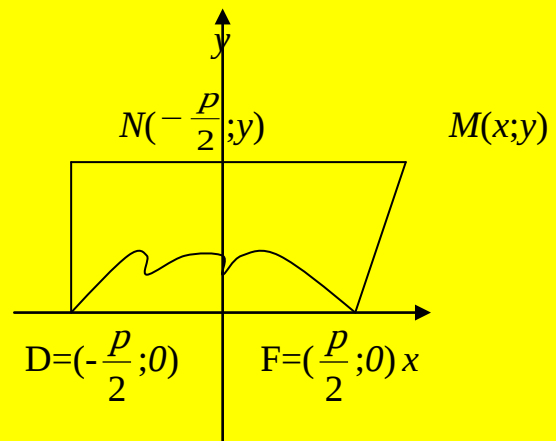
$$FM = MN \quad FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$



$$y^2 = 2px \quad (4)$$

parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

MISOL: $y^2 = 3x$ parabola berilgan. Parabolaning shunday nuqtasini topaylikki, shu nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofa 1 ga teng bo'lsin.

Echish:

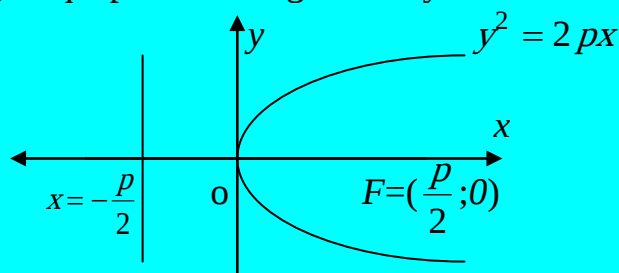
SHartga ko'ra $2r = 3$ $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ $M(x, y)$ noma'lum

$$\begin{cases} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + 3x = 1 \\ x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 \\ x + \frac{3}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y^2 = 3x = 3 \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tenglamadan ko'rinadiki parabola $x \geq 0$ soxada yotadi va Ox o'qiga nisbatan simmetrik $M(x_0, y_0)$ bo'lsa, u xolda $M_1(x_0, -y_0)$ bo'ladi.

Parabola koordinatalarning o'qini O(0; 0) nuqtada kesadi. Bu O(0; 0) nuqta parabolaning uchi deyiladi.



Parabolaning $x^2 = 2py$ tenglamasi ham mavjud.

Nazorat uchun savollar

- 1) Aylana tenglamasini yozing
- 2) Ellips tenglamasini yozing
- 3) Giperbola tenglamasini yozing
- 4) Parabola tenglamasini yozing
- 5) Ellipsning qanday qilib aylanaga keltirish mumkin?
- 6) Giperbolaning xaqiqiy o'qi nimadan iborat.

10 mavzu

To'plamlar va ular ustida amallar.

Sonli ketma -ketlik va unig limiti.

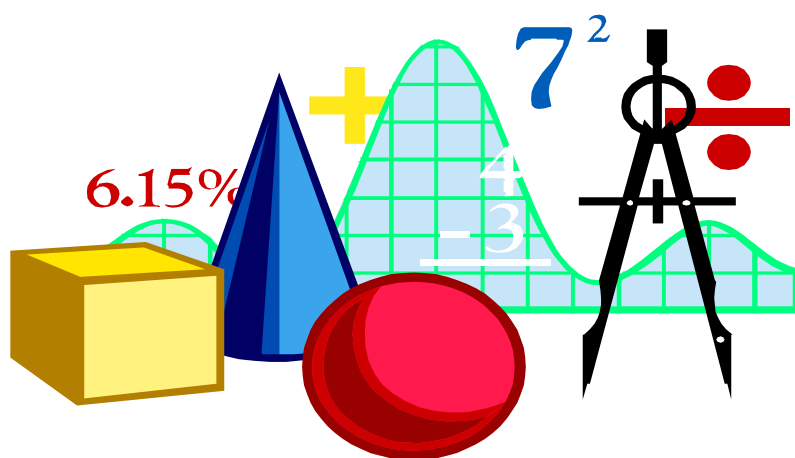
- *To'plamlarning turlari.*
- *Rasional sonlar to'plami.*
- *Sonli ketma -ketlik va uning limiti.*

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. To'plam tushunchasi. 2. Sonli to'plamlar. 3. Sonli ketma -ketlik va unig limiti.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Son, natural sonlar, butun sonlar, irrasional sonlar, ketma-ketlik, kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, nuqta atrofi, absolyut kiymati, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar o'qi tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: • Son, natural sonlar, butun sonlar, irrasional sonlar, ketma-ketlik, kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, nuqta atrofi, absolyut kiymati, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar o'qi tushunchalarini kiritish	O'quv faoliyati natijalari: Son, natural sonlar, butun sonlar, irrasional sonlar, ketma-ketlik, kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, nuqta atrofi, absolyut kiymati, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar o'qi tushunchalarini o'rganish.
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza, suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Son, natural sonlar, butun sonlar. 2. irrasional sonlar, 3. ketma-ketlik, 4. kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, n 5. nuqta atrofi, absolyut kiymati, 6. ordinatalar o'qi, koordinatalar boshi, 7. absissalar o'qi tushunchalarini beradi.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Funksiya grafigiga"ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



SONLI KETMA-KETLIK VA UNING LIMITI.

REJA

1. Sonli ketma-ketlik.
2. Sonli ketma-ketlik limiti taorifi.
3. Limit xossalari, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

Tayanch iboralar.

Sonli ketma-ketlik, sonli ketma-ketlik limiti, limit xossalari, cheksiz kichik va katta miqdorlar.

Agar biror sonlar to'plami har bir elementlarini nomerlash mumkin bo'lsa, bunday sonlar to'plami ketma-ketlik deb ataladi. Boshqacha aytganda natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya sonli ketma-ketlik deb ataladi.

Umumiy holda sonli ketma-ketlik quyidagicha belgilanadi:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad \text{ëku} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Masalan.

$$\text{a)} 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$\text{d)} a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$\text{b)} \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

$$\text{k)} a_n = \frac{2n}{3n-1}$$

$$\text{c)} 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{n\sqrt{n}}, \dots$$

$$\text{e)} a_n = n^n$$

Agar biror o'zgaruvchi x miqdor o'zining butun o'zgaruvchi davomida eng kichik qiymati m dan kichik, eng katta qiymati M dan katta bo'la olmasi, ya'ni $m < x < M$ bo'lsa, bunday miqdor chegaralangan miqdor deyiladi.

Agar ketma-ketlik tashkil qiluvchi x miqdorning qiymatli absolyut qiymati jixatidan tinimsiz kamaya borsa, ya'ni oldindan berilgan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun $|a_n| < \varepsilon$ bo'lsa, a_n miqdor cheksiz kichik miqdor deb ataladi.

Agar x o'zgaruvchi miqdorning qiymatlari tinimsiz orta borsa, ya'ni ixtiyoriy katta $M > 0$ son uchun ixtiyoriy x ning qiymatlari ketma-ketligida shunday element topilsaki, undan boshlab 'amma elementlar absolyut qiymatlari ji'atidan M dan katta bo'lsa, x ni cheksiz katta miqdor deb ataladi.

Taorif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $n > N(\varepsilon)$ qiymatlari uchun $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a soni $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ kabi belgilanadi. Limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklar yaqinlashuvchi deyiladi. Limitlar 'aqida bir necha teoremlar kiritamiz.

Teorema. Agar ketma-ketlik limiti mavjud bo'lsa u yagonadir.

Teorema. Agar ketma-ketlik chegaralangan va monoton bo'lsa, ketma-ketlik limiti mavjud bo'ladi.

Teorema. A soni $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning limiti bo'lishi uchun zarur va etarli shart shunday α_n cheksiz kichik miqdor mavjud bo'lsaki, ketma-ket 'adlari $a_n + \alpha_n$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa.

Bunday tashqari limitlar uchun quyidagi umumiy xossalarni keltirish mumkin:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar uchun ham limit xossalarni keltirish mumkin.

Agar α_n va β_n chekiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $\frac{1}{\alpha_n}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi va aksincha.

Quyidagi ketma-ketlikni ko'raylik: $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Veyersstrass teoremasiga ko'ra har qanday monoton va chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjud. Shunga asosan

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^n} = \frac{(n^2)^{n+1}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + (n+1) \frac{1}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Demak, ketma-ketlik chegaralangan. Bu ketma-ketlik limiti

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kabi belgilanib, Neper soni deyiladi, $e=2,7828182\dots$

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

1. Qanday ketma-ketlikka sonli ketma-ketlik deb ataladi?
2. Sonli ketma-ketlik ta'rifini ayting.
3. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi?
4. Qanday ketma-ketliklar monoton ketma-ketlik deb ataladi?
5. Ketma-ketlik limitining ta'rifini ayting.
6. Ketma-ketlik limitining asosiy xossalarini aytib bering.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$ limitni hisoblang.

11-,12- mavzular

Funksiya va uning berilish usullari.

Funksiya limiti va xossalari

- *Funksiya tushunchasi.*
- *Funksiya limiti va xossalari*

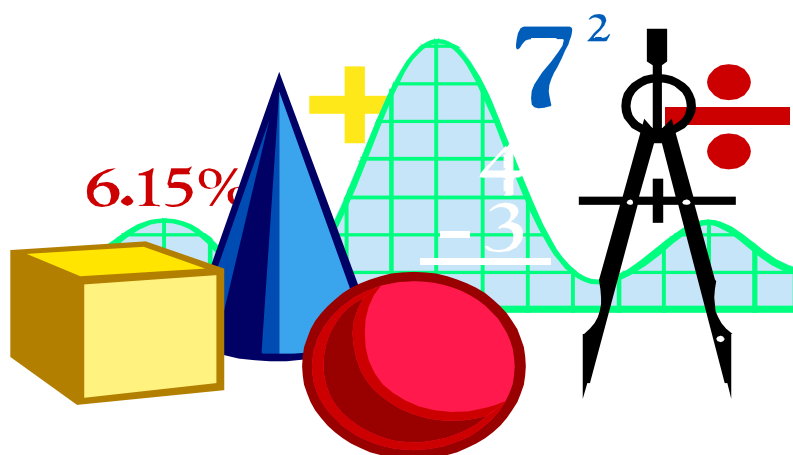
5.1. Ma'ruza mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Funksiya tushunchasi. 2. Sonli ketma -ketlik va unig limiti. 3. Funksiya limiti va xossalari
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Son, natural sonlar, butun sonlar, irrasional sonlar, kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, nukta atrofi, absolyut kiymati, uzgaruvchi, argument funksiya, aniklanish soxasi, kiymatlar soxasi, jadval usuli, analitik usuli, grafik usuli, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar o'qi, murakkab funksiya tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: • Uzgaruvchili mikdorlar, funksiya tushunchasi.. Funksiyani berilish usullar Juft va toq funksiyalar. Funksiyaning davriyligi bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: uzgaruvchi, argument funksiya, aniklanish sohasi, qiymatlar sohasi, jadval usuli, analitik usuli, grafik usuli, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar o'ki, murakkab funksiya tushunchalarini kiritish qura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Uzgaruvchili mikdorlar, funksiya tushunchasi. 2. Funksiyani berilish ususllari. 3. Juft va tok funksiyalar. 4. Funksiyaning davriyligi.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Funksiya grafigiga"ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

Ilovalar



5. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ëku} \quad x \rightarrow a \quad \partial a \quad f(x) \rightarrow A \quad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning etarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning **chap yoki o'nq limit** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

bilan belgilanadi.

3-ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiya **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (4)$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) **yig'indining limiti**. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiylarning $x \rightarrow a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) **chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti** funksiylar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) **Ikkita funksiya nisbatining limiti**, maxrajning limiti noldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda **birinchi** va **ikkinchi** ajoyib limitlar deyiladi.

6. Aniqmasliklar va ularni ochish

1. Aniqmasliklar. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$

funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da **(0/0)** **ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da (∞/∞) **ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. Xuddi shunga o'xshash $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofida hamma nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ularning $x \rightarrow a$ dagi limiti ham teng bo'ladi.

Masalan, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)}$ va $\varphi(x) = \frac{x + 3}{2}$ funksiyalar x ning

$x = 3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 3)} = \frac{x + 3}{2}$$

YUqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo'lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{6x} = \frac{5}{6}$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Echish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x + 6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A = 5/6$ o'zgarmas miqdor orasidagi farq $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x + 6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x + 6 - 5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya iborat. SHunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 6)/6x = 5/6.$$

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2 - 5x + 4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Echish. $x \rightarrow 3$ bo'lganligi uchun $x - 3 = \alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x = 3 + \alpha$ ni $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ ayirmaga qo'yib,

$$\begin{aligned} 2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4 - 7 &= 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = \\ &= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha \end{aligned}$$

natijaga ega bo'lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun $2\alpha^2 + 7\alpha$ ham cheksiz kichik

bo'ladi. SHunday qilib, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$ isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2 - 5x + 4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko'rsataylik. Ma'lumki $x \rightarrow 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\rightarrow 7$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya'ni $x - 3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2 - 5x + 4 - 7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to'g'ri keladi. YUqoridagi jadvalda $x < 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni qaradik. $x > 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni o'quvchiga mustaqil ko'rsatishni tavsiya qilamiz.

13 mavzu

Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.
Funksiya uzluksizligi. Uzluksizlik xossalari.

- *Ajoyib limitlar.*
- *Funksiya uzluksizligi.*
- *Uzluksizlik xossalari.*

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Funksiya uzluksizligi. 2. Ajoyib limitlar. 3. Uzluksizlik xossalari.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Funksiya uzluksizligi. Uzluksizligi. Uzluksizlik xossalari tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: • Funksiya uzluksizligi. Uzluksizligi. Uzluksizlik xossalari bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: Funksiya uzluksizligi. Uzluksizligi. Uzluksizlik xossalari kiritish kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Funksiya uzluksizligi. zlüksizligi. Uzluksizlik xossalari.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAKuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: " Funksiya grafigiga"ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

REJA

1. Funksiya limitining taorifi.
2. Funksiya limiti xossalari.
3. Uzluksizlik taorifi.
4. Uzluksizlik xossalari.

Tayanch iboralar

Funksiya limiti, funksiya limiti xossalari, ikkinchi ajoyib limit, funksiya uzluksizligi, uzluksizligi xossalari.

Bu mavzuda x argumentning b limitga yoki cheksizlikka intilganda funksiya o'zgarishining baosi nuqtalaridan aniqlangan bo'lsin. Agar ϵ bir musbat son uchun u qanchalik kichik bo'lmasin, shunday δ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, x ning a dan farqli $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $|f(x)-b| < \epsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, x argument a ga intilganda $u=f(x)$ funksiya b limitga intiladi. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya limiti f bo'lsa, u 'olda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

Agar x argumentning a soniga intilishini chegaralab, faqat a sonning chap tarafi yoki o'ng tarafidagi sonlarni qabul qilishini belgilasak, aniqlangan limit chap yoki o'ng limit deb ataladi.

Funksiya limitining xossalari umumiy 'olda quyidagicha keltirish mumkin:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$e) \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Ushbu limit ikkinchi ajoyib limit deb ataladi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Funksiya limiti orqali, funksiya uzluksizligi xususiyatini ko'rsatish mumkin.

Taorif. Agar $u=f(x)$ funksiya $x=x_0$ dagi kichik orttirmasiga funksiyaning 'am cheksiz kichikorttirmasi mos kelsa, ya'ni x_0 da $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ bo'lsa, u 'olda $u=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. $x=x_0$ nuqta funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deyiladi.

Uzluksizlik taorifini quyidagi uchta shart bilan 'am almashtirish mumkin.

1. Funksiyaning shu nuqtda aniqlangan bo'lishi.
2. Funksiyaning shu nuqtada mavjud bo'lishi.
3. Funksiya qiymati funksiya limiti qiymatiga teng bo'lishi.

YUqorida uchta shartdan birortasi bajarilmasa funksiya uzilishga ega deyiladi.

Uzluksizlik xossalari.

1⁰. Uzluksiz funksiyalar yiindisi (ayirmasi) yana uzluksiz funksiya bo'ladi.

2⁰. CHekli sondagi uzluksiz funksiyalar ko'paytmasi 'am uzluksiz funksiya bo'ladi.

3⁰. Agar funksiya uzluksiz bo'lib, $[a, b]$ intervalning o'irida 'ar xil ishora qabul qilsa, 'ech bo'lmaganda bitta nuqta intervalda topiladiki, funksiya shu nuqtada 0 qiymat qabul qiladi.

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

1. $u=f(x)$ $x \rightarrow a$ dagi limiti nimaga teng?
2. $u=f(x)$ $x \rightarrow \infty$ dagi limiti taorifini aytib bering.
3. Bir tomonlama limitlar nima?
4. Qanday funksiya chegaralangan funksiya deb ataladi?
5. Qanday funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi?

6. Qanday funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funksiya deb ataladi?
7. $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{2x - 7x + 4}{x^3 - 8}$ limitni hisoblang.
8. $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{2 + x - x^2}{x^3 - 3x^2 - 2}$ limitni hisoblang.
9. $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 15}$ limitni hisoblang.
10. $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$ limitni hisoblang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. YO.U. Soatov «Oliy matematika» T. 1992,1994,1996y.

14 mavzu

Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Hosilaning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nosi. Hosila jadvali.

Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida.

- 2. Funksiya hosilasining ta'rifi.**
- 3. Hosilaning geometrik ma'nosi.**
- 4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali**

5.1. mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 80 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida. 2. Funksiya hosilasining ta'rifi. 3. Hosilaning geometrik ma'nosi. 4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Son, natural sonlar, butun sonlar, irrasional sonlar, kesma, segment, interval, yarim ochik oralik, nukta atrofi, absolyut kiymati, uzgaruvchi, argument funksiya, aniklanish soxasi, kiymatlar soxasi, jadval usuli, analitik usuli, grafik usuli, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar uki, murakkab funksiya tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: Uzgaruvchili mikdorlar, funksiya tushunchasi.. Funksiyani berilish ususllar Juft va tok funksiyalar. Funksiyaning davriyligi bilan tanishtirish Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida. 2. Funksiya hosilasining ta'rifi. 3. Hosilaning geometrik ma'nosi. 4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali	O'quv faoliyati natijalari: uzgaruvchi, argument funksiya, aniklanish soxasi, kiymatlar soxasi, jadval usuli, analitik usuli, grafik usuli, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar uki, murakkab funksiya tushunchalarini kiritish kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida. 2. Funksiya hosilasining ta'rifi. 3. Hosilaning geometrik ma'nosi. 4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: "Funksiya grafigiga"ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

1-mavzu. Funksiya hosilasi va differensial. Hosilalar jadvali.

Reja

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Funksiya hosilasining ta'rifi.
3. Hosilaning geometrik ma'nosi.
4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali.
5. YUqori tartibli hosilalar.
6. Oshkormas va parametrik berilgan funktsiyalarning hosilalari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funktsiyalar hosilalari.

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo'ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma'lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o'zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lning shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushishi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu erda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Bu harakat notekis bo'lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo'lsin. OA yo'lining miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya'ni $t + \Delta t$, Δt orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo'ladi. AB , vaqt Δt orttirma olgandagi yo'l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo'yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{yoki} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \quad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma'lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog'liq. Masalan: $\Delta t = 0,1$ sek, $t = 1$ sek bo'lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g \text{ bo'lib, } t = 3 \text{ sek bo'lganda}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g \text{ bo'ladi.}$$

SHuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. SHunday qilib, vaqtning har bir momentidagi **oniy tezlik** haqida gapirish kerak bo'ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma'lumki, t o'zgarmas bo'lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o'rtacha tezlik bo'lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma'lumki, Δt qancha kichik bo'lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

SHunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo'yidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga ko'p sondagi amaliy masalalarni echishda to'g'ri keladi.

Umuman, o'zgaruvchi miqdor o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

SHuning uchun (3) ko'rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo'ladi.

2. Funksiya hosilasining ta'rifi. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

SHunday qilib, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni **differensiallash** deb ataladi.

Biz o'rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflanmasin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

CHunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo'lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo'ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o'tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o'tayotgan elektr miqdori bo'lsa, Q hosila tok kuchining o'zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o'zgaruvchi temperaturasi tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta'rifiga asosan toping.

Echish. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

SHunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan, toping.

Echish. argument x , Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \Delta x / 2) \sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)};$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = 1.$$

SHunday qilib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, $y' = (\sin x)' = \cos x$ bo'adi.

Umuman, x va y o'zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma'nolaridan voz kechsak, y dan x bo'yicha olingan hosila, y ning x ga bog'liq bo'lib o'zgarishining tezligini ifodalaydi.

3. Hosilaning geometrik ma'nosi. Hosila muhim geometrik ma'noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo'ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o'tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

bo'ladi.

3-misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa absissasi $x_0 = 2$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

$$\text{Echish. } y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$$

yoki

$3y - 20 = 12(x - 2)$, $12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2, 20/3)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffitsienti

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{demak, } y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

yoki

$$12y - 80 = -3(x - 2), \quad 3x + 12y - 86 = 0$$

hўli, bu M_0 nuqtadan o'tkazilgan normalning tenglamasi bo'ladi.

2). Differensiallash qoidalarini eslatib o'tamiz:

x erkli o'zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin.

1., $C' = 0$ C - o'zgarmas miqdor.

2. $x' = 1$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = x \ln x$; 2) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; 5) $y = \frac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1 + \cos x)$; 8) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x + 3)$.

12) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; 13) $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax}}$; 14) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$.

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$.

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \arcsin \frac{x}{a}$.

5) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$; 6) $y = \arccos(1 - 2x)$.

7) $y = x\sqrt{1 - x^2} + \arccos x$; 8) $y = \arcsin(e^{3x})$.

9) $y = x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 10) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$.

11) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 12) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$.

13). $y = x \arccos(1 - x^2)$; 14) $y = \arctg x - \frac{1}{x}$.

15) $y = \arccos \sqrt{1 - 3x} + \sqrt{2x - 4x^2}$;

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \tg x$; 3) $y = \sqrt{1 + x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = x \sin x$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x \ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = \arctg \frac{x}{a}$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n - tartibli hosilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n - tartibli hosilalari topilsin.

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J.X, Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston», 2001y
2. Kurosh A.G. Oliy algebra kursi, Toshkent «O'qituvchi», 1967y
3. Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

13. Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta maktab», 1963
14. G'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G Funksional analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
15. G'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
16. Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi», 1977.

Internet saytlari

13. <http://WWW.mcce.Zu>

14. <http://lib.mexmat.zu>, Gel'fand

15. <http://WWW.meceG'zu>, <http://G'G'lip.mexmet.zu>, Kostrikan A.I.

16. <http://WWW.mece.zu>, <http://lip.mexmat.zu>, Kurosh A.G.

15
mavzu

***YIG'INDINING, KO'PAYTMANING, BO'LINMANING
HOSILASI.***

MURAKKAB FUNKSIYA HOSILASI.

- **Yig'indining, ko'paytmaning hosilasi.**
- **Bo'linmaning hosilasi.**
- **Murakkab funksiya hosilasi.**

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. <i>Murakkab funksiya hosilasi.</i>
O'quv mashg'ulotining maqsadi: <i>Murakkab funksiya hosilasi tushunchalarini kiritish</i>	
Pedagogik vazifalar: • <i>Murakkab funksiya hosilasi.</i> bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: <i>Murakkab funksiya hosilasi.</i> murakkab funksiya tushunchalarini kiritish kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. <i>Murakkab funksiya hosilasi.</i>	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: “Funksiya grafigiga”ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

REJA

1. Murakkab funksiya va uning hosilasi.
2. Teskari funksiya hosilasi.
3. YUqori tartibli hosilalar.

Tayanch iboralar

Murakkab funksiya, murakkab funksiya hosilasini topish formulasi, teskari funksiya, teskari funksiya hosilasini topish formulasi, ikkinchi tartibli hosila, yuqori tartibli hosila.

Murakkab funksiya tushunchasini kiritamiz. Agar u biror u ning funksiyasi bo'lib u esa o'z navbatida x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, u holda u ham x ga bog'liq bo'ladi. Faraz qilaylik

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

bo'lsin. U holda x ning funksiyasini hosil qilamiz.

$$y = f(\varphi(x))$$

Oxirgi funksiya funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deyiladi. Masalan: $y = \sin x^2, y_1 = \sin u, y_2 = x^{-2}$.

Aytaylik bizga $u=F, y = F\varphi(u)$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya biror x nuqtada $u'_x = \varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, $y'_u = F'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda ko'rsatilgan x nuqtada $y = F(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham

$$y = F(u)\varphi(x)$$

ga teng hosilaga ega bo'ladi. Bu erda x o'rniga $u = \varphi(x)$ iroda qo'yilishi zarur. Qisqacha

$$y'_x = y'_u u'_x$$

ya'ni murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiya oraliqdagi argument x bo'yicha hosilasi bilan ko'paytmasiga teng.

Agar $u=f(x)$ funksiya

$$y = F(u), u = f(x), x = \varphi(y)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u'_x

$$u'_x = u'_u u'_v v'_x$$

formula orqali topiladi.

u ning qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni u ning funksiyasi sifatida olamiz: $x = \varphi(y)$. Bu funksiya $u=f(x)$ funksiya teskari funksiya deyiladi.

Teorema. Agar $u=f(x)$ funksiya uchun tekshiriladigan u nuqtada 0 dan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lgan $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo'lsa, u holda tegishli x nuqtada $u=f(x)$ funksiya $\frac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo'lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo'lamiz, ya'ni $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ munosabat o'rinli.

SHunday qilib ikkita o'zaro teskari funksiyalardan birining hosilasi mavjud bo'lsa ikkinchisini topish mumkin.

Yuqori tartibli hosila tushunchasini kiritamiz. Aytaylik $u=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. $f'(x)$ hosilaning qiymatlari umuman aytganda x ga bo'liq, ya'ni $f'(x)$ hosila ham x ning funksiyasidan iborat. Bu funksiya differensiallab, $f'(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataluvchi hosilani topamiz.

Birinchi hosiladan olingan hosila ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi va u'' yoki $f''(x)$ simvollar bilan belgilanadi.

$$y'' = f''(x) = y^{(2)}$$

$$\text{Masalan, } u=x^5, u'=5x^4, u''=(5x^4)'=20x^3$$

Ikkinchi hosilaning hosilasi uchinchi tartibli hosila deyiladi va u''' yoki $f'''(x)$ kabi belgilanadi.

Umuman olganda $n-1$ tartibli hosiladan olingan hosila bo'lib, $u^{(n)}$ kabi belgilanadi.

Misol keltiramiz: $u=\sin x, u'=\cos x, u''=-\sin x, u'''=-\cos x, y^{IV}=\sin x, y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$

Funksiyaning ikkinchi hosilasi u'' ni ham birinchi tartibli hosila u' kabi fizik ja'atdan izohlash mumkin. Mexanika tilidan foydalanib, bu funksiyaning ikkinchi hosilasi u'' ni argument qiymatlarining o'zgarishida $u=f(x)$ funksiya o'z qiymatlarini o'zgartirish tezlanishi deyiladi.

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

1. Murakkab funksiya deganda nimani tushunasiz?
2. Murakkab funksiya hosilasini topish formulasini keltiring.
3. Teskari funksiya taorif bering.
4. Teskari funksiya hosilasini topish formulasini yozing.
5. YUqori tartibli, hosila tushunchasini izo'lang.
6. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ funksiyasi berilgan. $u''' = ?$
7. $u = x - \ln(x+1)$ funksiya berilgan. $u'' = ?$
8. $u = \ln(x^2 - 2x + 16)$ murakkab funksiyaning birinchi tartibli hosilasini toping.
9. $u = x^2 + 1$ funksiya teskari funksiyaning toping.
10. $y = e^{-\frac{1}{x-3}}$ funksiya teskari funksiyaning toping va uning birinchi tartibli hosilasini toping.

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J..X, Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston», 2001y
2. Kurosh A.G. Oliy algebra kursi, Toshkent «O'qituvchi», 1967y
3. Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

17. Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta maktab», 1963
18. G'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G Funksional analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
19. G'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
20. Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi», 1977.

16

mavzu

Teskari funksiya hosilasi. YUqori tartibli hosila.

- *Teskari funksiya hosilasi.*
- *YUqori tartibli hosila.*

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Teskari funksiya hosilasi. 2. YUqori tartibli hosila.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Teskari funksiya hosilasi. YUqori tartibli hosila. tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: • Teskari funksiya hosilasi. YUqori tartibli hosila. bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: Teskari funksiya hosilasi. YUqori tartibli hosila. tushunchalarini kiritish kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Teskari funksiya hosilasi. 2. YUqori tartibli hosila.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: “Funksiya grafigiga”ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

4. Teskari funksiya hosilasi.
5. YUqori tartibli hosilalar.

Tayanch iboralar

Murakkab funksiya, murakkab funksiya hosilasini topish formulasi, teskari funksiya, teskari funksiya hosilasini topish formulasi, ikkinchi tartibli hosila, yuqori tartibli hosila.

Murakkab funksiya tushunchasini kiritamiz. Agar u miqdor u ning funksiyasi bo'lib u esa o'z navbatida x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, u holda u ham x ga bog'liq bo'ladi. Faraz qilaylik

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

bo'lsin. x ning funksiyasini hosil qilamiz.

$$y = f(\varphi(x))$$

Oxirgi funksiya funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deyiladi. Masalan: $y = \sin x^2, y_1 = \sin u, y_2 = x^{-2}$.

Aytaylik bizga $u = F|\varphi(x)|, y = F\varphi(u)$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya biror x nuqtada $u_x = \varphi(x)$ hosilaga ega bo'lsa, $y^1_u = F(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u 'olda ko'rsatilgan x nuqtada $y = F|\varphi(x)|$ murakkab funksiya 'am

$$y = F_u(u)\varphi(x)$$

ga teng hosilaga ega bo'ladi. Bu erda x o'rniga $u = \varphi(x)$ iroda qo'yilishi zarur. Qisqacha

$$y'_x = y'_u u'_{x'}$$

yaoni murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiya oraliqdagi argument x bo'yicha hosilasi bilan ko'paytmasiga teng.

Agar $u=f(x)$ funksiyan

$$y = F(n), n = \varphi(v), v = \varphi(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u'_x

$$u'_x = u'_u u'_v v'_x$$

formula orqali topiladi.

u ning qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni u ning funksiyasi sifatida olamiz: $x = \varphi(y)$. Bu funksiya $u=f(x)$ funksiya teskari funksiya deyiladi.

Teorema. Agar $u=f(x)$ funksiya uchun tekshiriladigan u nuqtada 0 dan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lgan $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo'lsa, u 'olda tegishli x nuqtada $u=f(x)$ funksiya $\frac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo'lgan $f'(x)$ hosilaga ega

bo'lamiz, yaoni $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ munosabat o'rinli.

SHunday qilib ikkita o'zaro teskari funksiyalardan birining hosilasi mavjud bo'lsa ikkinchisini topish mumkin.

YUqori tartibli hosila tushunchasini kiritamiz. Aytaylik $u=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. $f'(x)$ hosilaning qiymatlari umuman aytganda x ga boliq, yaoni $f'(x)$ hosila 'am x ning funksiyasidan iborat. Bu funksiyan differensiallab, $f'(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataluvchi hosilani topamiz.

Birinchi hosiladan olingan hosila ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi va u' yoki $f'(x)$ simvollar bilan belgilanadi.

$$y'' = f'(x) = (y')$$

$$\text{Masalan, } u=x^5, u'=5x^4, u''=(5x^4)'=20x^3$$

Ikkinchi hosilaning hosilasi uchinchi tartibli hosila deyiladi va u''' yoki $f'''(x)$ kabi belgilanadi.

Umuman olganda $n-1$ tartibli hosiladan olingan hosila bo'lib, $u^{(n)}$ kabi belgilanadi.

Misol keltiramiz: $u=\sin x$, $u'=\cos x$, $u''=-\sin x$, $u'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x$,
 $y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$

Funksiyaning ikkinchi hosilasi u'' ni 'am birinchi tartibli hosila u kabi fizik ja'atdan izo'lash mumkin. Me'anika tilidan foydalanib, bu funksiyaning ikkinchi hosilasi u'' ni argument qiymatlarining o'zgarishida $u(x)$ funksiya o'z qiymatlarini o'zgartirish tezlanishi deyiladi.

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR.

11. Murakkab funksiya deganda nimani tushunasiz?
12. Murakkab funksiya hosilasini topish formulasini keltiring.
13. Teskari funksiya ta'rif bering.
14. Teskari funksiya hosilasini topish formulasini yozing.
15. YUqori tartibli, hosila tushunchasini izo'lang.
16. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ funksiyasi berilgan. $u'''=?$
17. $u=x-\ln(x+1)$ funksiya berilgan. $u''=?$
18. $u=\ln(x^2-2x+16)$ murakkab funksiyaning birinchi tartibli hosilasini toping.
19. $u=x^2+1$ funksiya teskari funksiyaning toping.
20. $y = e^{-\frac{1}{x-3}}$ funksiya teskari funksiyaning toping va uning birinchi tartibli hosilasini toping.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. YO.U. Soatov «Oliy matematika» T. 1992,1994,1996y.

18-, 19- mavzular

Rol, Lagranj, Koshi teoremalari.

Lopital qoidalari. Teylor formulasi.

- ***Lagranj formulasi.***
- ***Lopital qoidasi.***

5.1. Mashg'ulotining o'qitish texnologiyasi

Mashg'ulot vaqti-2 soat	Talabalar soni: 20 – 30 gacha
Mashg'ulot shakli	Kirish-axborotli ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Lagranj formulasi. Lopital qoidasi.
O'quv mashg'ulotining maqsadi: Lagranj formulasi. Lopital qoidasi.tushunchalarini kiritish	
Pedagogik vazifalar: Uzgaruvchili mikdorlar, funksiya tushunchasi.. Funksiyani berilish ususllar Juft va tok funksiylalar. Funksiyaning davriyligi bilan tanishtirish	O'quv faoliyati natijalari: uzgaruvchi, argument funksiya, aniklanish soxasi, kiymatlar soxasi, jadval usuli, analitik usuli, grafik usuli, ordinatalar uki, koordinatalar boshi, absissalar uki, murakkab funksiya tushunchalarini kiritish kura oladi
O'qitish uslubi va texnikasi	Ko'rgazmali ma'ruza , suhbat
O'qitish shakli	Ommaviy, jamoaviy
O'qitish vositalari	O'quv qo'llanma, proektor
O'qitish shart-sharoiti	O'TV bilan ishlashga moslashtirilgan Auditoriya

Mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat mazmuni	
	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Kirish (10 min.)	1.1. Mavzu, uning maqsadi, o'quv mashg'ulotidan kutilayotgan natijalar ma'lum qilinadi.	1.1. Eshitadi, yozib oladi.
2-bosqich Asosiy (60 min.)	1. Lagranj formulasi. 2. Lopital qoidasi.	Tinglaydilar, yozadilar Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
3- bosqich YAkuniy (10 min.)	3.1. Mavzuga yakun yasaydi va talabalar e'tiborini asosiy masalalarga qaratadi. Faol ishtirok etgan talabalarni rag'batlantiradi. Mustaqil ish uchun vazifa: “Funksiya grafigiga”ga doir misollar tuzishni vazifa qilib beradi, baholaydi.	3.1. Eshitadi, aniqlashtiradi. 3.2. Topshiriqni yozib oladi.

REJA

1. Hosilaning nolga tengligi ‘aqidagi Roll teoremasi.
2. Lagranj formulasi.
3. Lopital qoidasini aniqlashliklarini ochish uchun qo'llash.
4. Makleron formulasi.

Tayanch iboralar.

Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Lagranj teoremasining geometrik maonosi, lopital qoidasi, Makleron formulasi, Makleron formulasiga doir misollar.

Hosila tushunchasini tatbiqlarini tushuntirish uchun zarur bo'ladigan bir necha teoremlar bilan tanishib chiqamiz.

Roll teoremasi. Agar $u=f(x)$ funksiya $[a:b]$ kesmada uzluksiz va oraliq ichki nuqtalardan differensiallanuvchi (hosilaga ega) bo'lsa hamda $f(a)=f(b)$ bo'lsa: $[a:b]$ ning hech bo'lmaganda bitta shunday s ichki nuqtasi mavjudki, bu nuqtada

$$u'=f''(c)=0$$

bo'ladi.

Roll teoremasi quyidagicha geometrik tushuntirish mumkin: $u=f(x)$ funksiya $[a:b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, funksiya grafigiga hech bo'lmaganda bitta $x=s$ ($a<s<b$) nuqtadagi urinma $0x$ o'qida paralel bo'ladi.

Lagranj teoremasi. $u=f(x)$ $[a:b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz xamda oraliqning ichki nuqtalaridan differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu kesmaning hech bo'lmaganda bitta shunday ichki nuqtasi s mavjud bo'ladiki, unda $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ya'ni kesuvchining burchak koeffisientiga teng bo'ladi.

Lopital qoidasi. Biz yuqorida ko'rdikki, ikki cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorning nisbati turli miqdorlar bo'lishi mumkin, ularni topish esa etarlicha qiyinchiliklar tug'diradi. Hosila yordamida

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0-\infty, \infty-\infty$ kabi aniqmasliklarni ochish yo'llari bilan tanishib chiqamiz.

Lopital qoidasi deb ataluvchi teoremani ko'rib chiqamiz:

Teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida mavjud va differensialanuvchi bo'lib

$$1) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ëku} \quad 2) \varphi'(a) \neq 0$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ifoda o'rinli bo'ladi.

Agar $f'(x)/\varphi'(x)$ nisbatining $x \rightarrow a$ dagi limiti Lopital qoidasini qo'llash natijasida yana yuqorida aytib o'tilgan aniqmasliklarni biriga olib kelsa Lopital qoidasini bir necha marta qo'llash zarur.

Masalan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ kabi aniqmasliklardan tashqari $0 \cdot \infty$: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctgx}$; kabi aniqmasliklar ham

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirib olinadi.

Yuqorida aytilgan fikrga doir bir misol qo'ramiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] x^{-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

Ko'pgina tatbiqiy masalalarni hal qilishda funktsiyani birorta darajali qator yig'indisi ko'rinishida tasvirlash zaruriyati kelib chiqadi. Funktsiyani bunday tasvirlash qatorga yoyish deb ataladi va bunda funktsiyani birinchi va yuqori tartibli hosilalaridan foydalaniladi. Aytaylik, $f(x)$ funktsiyani ushbu yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyish mumkin bo'lsin:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + s_n x^n + \dots \quad (1)$$

oldimizga qo'yilgan vazifa $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ koefitsientlarni funksiya hosilasi orqali aniqlashdan iborat. Buning uchun yaqinlashuvchi darajali qatorlarni hadma-had differensiallash qoidasidan foydalanamiz.

Ushbu tengliklarga ega bo'lamiz.

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot nc_n + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)c_{n+1}x + \dots$$

Bu tengliklarda $x=0$ desak, u holda $c_0=f(0)$, $c_1=f'(0)$, $c_2=\frac{f''(0)}{2}$,

$c_3=\frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}$, $\dots$, $c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $\dots$ bo'ladi. Bularni (1) ga olib borib qo'ysak,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

formula kelib chiqadi. Oxirgi ifoda funksiyaning Maklerson qatoriga yoyilmasi deb yuritiladi.

Misollar. 1. $f(x) = e^x$ funksiyaning Maklerson qatoriga yoying.

Echish.

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1.$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1.$$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = 1. \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$\dots \dots \dots$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x) &= \sin x & f''(x) &= \sin x, \quad f''(0) = 0. \\ f'(x) &= \cos x, \quad f'(0) = 1. & f'''(x) &= -\cos x, \quad f'''(0) = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Demak,} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$3. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$4. \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots$$

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR

1. Lagranj formulasini yozing.
2. Lopital qoidasining ma'nosini izohlang.
3. Teylor formulasini yozing.
4. Maklerson formulasini yozing.
5. Teylor-Maklerson formulalarining ma'nolarini tushuntiring.

6. $[-1,2]$ kesmada $\frac{4}{x}$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llash mumkinmi?
7. $[-1,2]$ kesmada $1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llash mumkinmi?
8. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$ limiti Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang.
9. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{tgx - \sin x}{x - \sin x}$ ni Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang.
10. $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ ni $x=1$ da Teylor qatoriga yoying.

Asosiy adabiyotlar.

1. Xojiev J..X,Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent «O'zbekiston» , 2001y
- 2.Kurosh A.G. Oliy algebra kursi , Toshkent «O'qituvchi», 1967y
- 3.Gel'fand I.M. Sbornik zadach po lineynoy algebre

Qo'shimcha adabiyotlar.

- 21.Iskandarov R. Oliy algebra, II- qism Toshkent «Oliy va o'rta maktab», 1963
- 22.g'aymnazarov G, G'aymnazarov O.G FunkSIONAL analiz kursidan masalalar echish, Toshkent «Fan va texnologiya» 2006 y
- 23.g'aymnazarov G., Jomuratov K. chiziqli algebra elementlari, Guliston 1999y
- 24.Fadeev D.K., Sominskiy I.S. ,Sbornik zadach po vo'sshay algebra. M.»Nauchi»,1977.

Internet saytlari

- 17.<http://WWW.mcce.zu>
- 18.<http://lib>, mexmat. zu, Gel'fand
19. <http://WWW>. meceG' zu, <http://G'G'lip.mexmet.zu>,Kostrikan A.I.
- 20.<http://WWW>, mece.zu, <http://lip>. mexmat.zu,Kurosh A.G.