

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI

“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrası
ABDUVOHIDOV VALIJON G‘AYBULLAYEVICH
«METRIK FAZODA AKSLANTIRISHLAR»
“5130100-matematika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: _____ prof. J.I. Abdullayev

2016 yil “ ____ ” _____

Bitiruv malakaviy ish “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”
kafedrasida bajarildi.

Kafedraning 2016 yil 26-maydagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga
tavsiya etildi (10-bayonnoma)

Fakultet dekani: _____ dots. H.X. Ro‘zimuradov

Kafedra mudiri: _____ prof. J.I. Abdullayev

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2016 yil 2 iyundagi majlisida himoya
qilindi va _____ ball bilan baholandi (____ bayonnoma)

YaDAK raisi: _____

A’zolari: _____

SAMARQAND-2016

M U N D A R I J A

K I R I S H	3
Masalaning dolzarbligi	3
I bob. METRIK FAZOLAR..	38
1-§. Metrik fazolar va ularga misollar	6
2-§. To‘la metrik fazolar.....	15
II bob. AKSLANTIRISHLAR.....	18
3-§. Funksiya tushunchasini umumlashtirish.	18
4-§. Uzlüksizlik va tekis uzluksizlik	22
5-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tadbiqlari.	27
Xulosa.....	38
Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati	40

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Respublikamiz prezidenti I.A. Karimov o'zining "Barkamol avlod - O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" deb nomlangan asarida ta'kidlaganidek "Bugungi kunda oldimizga qo'yilgan buyuk maqsadlarimizga, ezgu niyatlarimizga erishishimiz, jamiyatimizning yangilanishi, hayotimizning taraqqiyoti va istiqboli amalga oshirilayotgan islohotlarimiz, rejalarimizning samarasi, taqdiri - bularning barchasi, avvalambor, zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali, ongli mutaxassis kadrlar tayyorlash muammosi bilan chamabarchas bog'liqligini barchamiz anglab yetmoqdamiz. Shu bilan birga, hammamiz yana bir haqiqatni anglab yetmoqdamizki, faqatgina chinakam ma'rifatli kishi, inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash, erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o'ziga mos obro'li o'rin egallashi uchun fidoyilik bilan hissa qo'shishi mumkin".

Matematika fani yoshlarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini o'stiruvchi vosita sifatida maktablarda qadimgi Yunonistonda o'qita boshlangan. Yangi era boshlarida Xitoyda sonlar nazariyasi, Hindistonda o'nli sanoq sistemasi, O'rta Yer dengiz sohillarida trigonometriya yaratila boshlagan. VII –VIII asrlardan boshlab ilm-fan taraqqiyotining markazi O'rta Osiyoga ko'chdi. O'z ilmiy ishlari bilan butun dunyoga tanilgan Muhammad Muso al-Xorazmiy, Ahmad Farg'oniy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abu Nasr Forobiy, Ismoil Buxoriy, Umar Hayyom, Ulug'bek va boshqalar shu O'rta Osiyoda yashab ijod qilganlar.

Sharq mamlakatlari olimlarining qilgan ishlari XIV – XVI asrlar Yevropadagi ilm-fan rivojiga asos bo'ldi desak, hech ham mubolag'a bo'lmaydi. Keyingi yillarda bu olimlarning davomchilari sifatida Respublikamizdan ko'plab matematiklar yetishib chiqdi. Ular matematika fanining asosiy yo'nalishlari bo'yicha maktablar yaratdilar. Masalan, ehtimollar nazariyasi maktabi – S.X.Sirojiddinov, T.A.Sarim-soqov, T.A.Azlarov, matematik fizika

va differensial tenglamalar maktabi – Sh.A.Alimov, M.S.Salohiddinov, N.Yu.Satimov, S.N.Lakayev, algebra va analiz maktabi – T.A.Sarimsoqov, J. Xojiyev, Sh. Ayupov, A. Sa’dullayev, I.A.Ikromov, matematika tarixi – G.P.Matviyevskaya, S.A.Ahmedov maktablariga asos solindi.

Masalaning qo‘yilishi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi metric fazolar, to‘la metric fazolarda akslantirishlar, jumladan stoxastik va qisuvchi akslantirishlar ularning xossalari va tadbirlari hamda ular yordamida masalalar yechishga bag‘ishlangan.

Ishning maqsadi va vazifalari. O‘quvchilar yoki talabalarda metrik fazolar, to‘la metrik fazolarda akslantirishlar to‘g‘risida umumiy tushuncha paydo qilish. Stoxastik akslantirishlar yordamida ehtimoliy masalalarni yechish, qisuvchi akslantirishlar yordamida esa yechimning mavjudligi va yagonaligini ko‘rsatish. Shu maqsadda har xil tipdagi misollarni keltirish va ularni yechish (hisoblash) namunalarini berishdan iborat.

Ilmiy tadqiqot metodlari. Bitiruv malakaviy ishini bajarishda cheksiz kichik miqdorlar, akslantirishlar nazariyasi, qisuvchi akslantirishlar prinsipi stoxastik analiz nazariyasi elementlari va hisoblash usullaridan foydalanildi.

Ishning ilmiy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega. Ishni bajarish jarayonida akslantirishlar nazariyasi, qisuvchi akslantirishlar prinsipi, stoxastik analiz nazariyasi elementlari va ularning xossalariidan foydalanildi. Keltirilgan ma'lumotlardan ilmiy maqolalarni bayon qilishda hamda ularning isbot usullaridan foydalanish mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishida to‘plangan materiallardan akademik letseylarda qiziqarli matematika fanini o‘qitish jarayonida, tugaraklarda, matematik kechalarda va vektorinalarda foydalanish

mumkin Stoxastik akslantirishlar xossalariidan ehtimoliy masalalarni yechishda foydalanish mumkin, qisuvchi akslantirishlar prinsipidan esa qo'yilgan masala yechimining mavjudligi, yechim mavjud bo'lsa uning yagonaligini ko'rsatish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, II bob, 5 paragraf, xulosa hamda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. I bobda asosiy metrik fazolar, to'la metrik fazolar va ularning xossalari hamda ular bilan bog'liq masalalar keltirilgan. II bobda uzluksiz (tekis uzluksiz), gomeomorf, izometrik hamda qisuvchi, stoxastik akslantirishlar qaralgan. Bu bobda akslantirishlar asosiy xossalari va ularga doir ko'plab misollar qaralgan. Belgilashlar ikki sonli bo'lib, ular orasi nuqta bilan ajratilgan. Birinchi raqam paragraf nomerini bildiradi, ikkinchi son esa tartib nomerini bildiradi. Masalan, 1.2-teorema yozuvi - birinchi paragrafning 2-teoremasi ekanligini bildiradi, yoki (2.3) belgilash 2-paragrafdagi 3-formula ekanligini anglatadi.

Olingan natijalarning qisqacha bayoni. Bitiruv malakaviy ishida asosiy metrik fazolar, separabel va to'la metrik fazolar qaralgan. To'la bo'lmagan metrik fazoga misol keltirilgan. Uzluksiz, lekin teris uzluksiz bo'lmagan akslantirishga misollar qaralgan. Izometrik akslantirishlar yordamida metrik fazolarning izometrik ekanligi ko'rsatilgan. Stoxastik akslantirishlarning ehtimoliy masalalarga tatbiqiga misollar keltirilgan. Qisqartirib aks ettirish prinsipining integral tenglamalar va differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligini tatbiqi qaralgan. Bu prinsipning chiziqli bo'lmagan integral tenglamalarga ham qo'llash mumkinligi haqida natija keltirilgan. Turli tipdagi akslantirishlarni tekshirishga oid 60 dan ortiq misollar keltirilgan va ulardan 35 tasi yechib ko'rsatilgan.

I bob. METRIK FAZOLAR

Birinchi paragrafda metrik fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. R^n to'plamda har xil metrikalar kiritilgan. Metrikaning uchburchak tengsizligini isbotlashda Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklaridan foydalanilgan. O'z navbatida bu tengsizliklar ham o'z isbotlarini topgan. Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasi ham keltirilgan ([1], [2], [5], [6]).

2-paragraf to'la metrik fazolarga bag'ishlangan. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar orasidagi bog'lanish ochib berilgan. R^n , R_1^n , R_∞^n , $C[a, b]$, ℓ_2 metrik fazolarning to'laligi isbotlangan. To'la bo'lmagan metrik fazoga misol sifatida $C_1[a, b]$ keltirilgan. Metrik fazoning to'la bo'lishligi haqidagi ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema keltirilgan.

1-§. Metrik fazolar va ularga misollar

Analizdagi eng muhim amallardan biri bu limitga o'tish amalidir. Bu amalning asosida sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi yotadi. Analizda kiritilgan ko'pgina fundamental tushunchalar sonlar o'qining algebraik xususiyatlariga bog'liq emas. Haqiqiy sonlar haqidagi tasavvurimizni to'plam ma'nosida umumlashtirib, metrik fazo tushunchasiga kelimiz. Metrik fazo tushunchasi hozirgi zamon matematikasida muhim o'rinni egallaydi. X bo'sh bo'lmagan to'plam va $X \times X$ bilan X ni o'zini-o'ziga dekart ko'paytmasini belgilaymiz.

1.1-ta'rif. Agar $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $x, y \in X$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $x, y \in X$ (simmetriklik aksiomasi),

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $x, y, z \in X$ (uchburchak aksiomasi)

shartlarni qanoatlantirsa unga X dagi masofa yoki metrika deb ataladi. (X, ρ) juftlik metrik fazo deyiladi.

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda (X, ρ_1) , (X, ρ_2) , ..., (X, ρ_n) metrik fazolar mos ravishda $X_1, X_2, \dots, X_n$ harflari bilan belgilanadi.

Endi metrik fazoga bir nechta misollar keltiramiz.

1.1. X biror bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsin va har bir x, y elementlar juftiga

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y, \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$$

qonuniyat bo'yicha son mos qo'yilsin. Ravshanki, ρ akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metrika diskret metrika deb ataladi. Hosil bo'lgan metrik fazo *yakkalangan nuqtalar fazosi* deb ataladi.

1.2. Haqiqiy sonlar to'plami $X = R = (-\infty, \infty)$ da $\rho: X \times X \rightarrow R$, $\rho(x, y) = |x - y|$ akslantirish masofa shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

Yechish. 1) Barcha $x, y \in R$ uchun $\rho(x, y) \geq 0$ ekanligi modulning xossasidan kelib chiqadi.

2) $\rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x)$ tenglik analizdan ma'lum.

3) Yig'indining moduli modullar yig'indisidan oshmaydi, ya'ni $\rho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Bu metrik fazo R harfi bilan belgilanadi.

1.3. Ixtiyoriy n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ guruhlaridan tashkil bo'lgan R^n to'plamda har bir x va y lar jufti (x, y) ga

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \quad (1.1)$$

sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirishning masofa shartlarini qanoatlantirishini tekshiring.

Yechish. Endi (1.1) formula bilan aniqlangan ρ moslik metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

$$1) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

dan 1 aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi.

$$2) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} = \rho(y, x).$$

Endi 3-aksiomaning bajarilishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy uchta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalar uchun uchburchak aksiomasi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2} \quad (1.2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo'ladi va (1.2) tengsizlik

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (1.3)$$

ko'rinishni oladi. Ushbu

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

ayniyatni e'tiborga olsak,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (1.4)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. (1.4) *Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi. U holda biz

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \\ &+ 2\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2\end{aligned}$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bu munosabatdan (1.3) tengsizlik bevosita kelib chiqadi. Demak, uchburchak aksiomasi o‘rinli ekan.

Hosil bo‘lgan metrik fazo n - o‘lchamli arifmetik Evklid fazo deb ataladi. U R^n simvol bilan belgilanadi. Endi $R^n \times R^n$ to‘plamda quyidagi akslantirishlarni aniqlaymiz:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad (1.5)$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|. \quad (1.6)$$

Modulning xossalariidan foydalanib ko‘rsatish mumkinki (1.5) tenglik vositasida aniqlangan $\rho_1 : R^n \times R^n \rightarrow R$ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. Hosil bo‘lgan metrik fazo R_1^n simvol bilan belgilanadi. Maximum va modulning xossalariidan foydalanib ko‘rsatish mumkinki (1.6) tenglik vositasida aniqlangan $\rho_\infty : R^n \times R^n \rightarrow R$ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. Hosil bo‘lgan metrik fazo R_∞^n simvol bilan belgilanadi.

1.4. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va barcha uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan to‘plamni $C[a, b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to‘plamda

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.7)$$

akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi.

Yechish. Masofaning 1-2 aksiomalarining bajarilishi modulning ta’rifidan bevosita kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi, yig‘indining moduli modullar yig‘indisidan, yig‘indining maksimumi esa maksimumlar yig‘indisidan oshmaydi degan qoidadan kelib chiqadi.

Bu metrik fazo analizda muhim ahamiyatga ega bo'lib, u ham to'plam kabi $C[a,b]$ simvol bilan belgilanadi. R^n fazo holidagidek $C[a,b]$ to'plamda ham turli metrikalar kiritish mumkin. Masalan:

$$\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \quad (1.8)$$

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}. \quad (1.9)$$

Hosil bo'lgan metrik fazolarni mos ravishda $(C[a,b], \rho_1) = C_1[a,b]$ va $(C[a,b], \rho_2) = C_2[a,b]$ simvollar bilan belgilaymiz.

1.5. Haqiqiy sonlardan tuzilgan va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan to'plamni ℓ_2 simvol bilan belgilaymiz. $\ell_2 \times \ell_2$ to'plamda

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} \quad (1.10)$$

formula bilan aniqlangan $\rho: \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow R$ masofa shartlarini qanoatlantiradi.

Yechish. Har bir $x, y \in \ell_2$ elementlar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun va $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ elementar tengsizlikdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Endi (1.8) formula bilan aniqlangan ρ moslikning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Ravshanki, 1 va 2-aksiomalar bajariladi. Uchburchak aksiomasi esa

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - z_k)^2} \quad (1.11)$$

ko‘rinishga ega. Yuqorida zikr etilganlarga ko‘ra (1.11) tengsizlikdagi qatorlarning hammasi yaqinlashadi. Ikkinchi tomondan esa 1.3-misolda isbotlanganiga ko‘ra har bir n da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2}$$

tengsizlik o‘rinli. Oxirgi tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o‘tsak, (1.11) tengsizlikning to‘g‘riligi isbotlanadi, ya’ni uchburchak aksiomasi o‘rinli.

1.6. R^n to‘plamda har bir $p \geq 1$ son uchun

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (x, y) \in R^n \times R^n \quad (1.12)$$

formula bilan aniqlangan ρ_p akslantirish masofa shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsating.

Yechish. Bu misolda ham 1 va 2 aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas. Shuning uchun 3 aksiomaning bajarilishini tekshirish yetarli. Qaralayotgan to‘plamdan ixtiyoriy uchta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalarni olib $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo‘ladi va natijada $\rho_p(x, z) \leq \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$ uchburchak tengsizligi

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.13)$$

ko‘rinishni oladi. Hosil bo‘lgan (1.13) tengsizlik *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Agar $p = 1$ bo‘lsa, Minkovskiy tengsizligining bajarilishi ko‘rinib turibdi (chunki, yig‘indining moduli modullar yig‘indisidan oshmaydi), shuning uchun $p > 1$ deb hisoblaymiz. Minkovskiy tengsizligining isboti *Gyolder tengsizligi* deb nomlanuvchi

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.14)$$

tengsizlikka asoslangan. Bu yerda $p > 1$ va $q > 1$ sonlar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.15)$$

shart bilan bog'langan. (1.16) dan quyidagi tengliklar kelib chiqadi

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad p = \frac{q}{q-1}.$$

Ta'kidlash lozimki, (1.14) tengsizlik $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nuqtalar uchun bajarilsa, u ixtiyoriy λ va μ sonlarda $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ va $\mu b = (\mu b_1, \mu b_2, \dots, \mu b_n)$ nuqtalar uchun ham bajariladi va aksincha. Ya'ni (1.14) bir jinsli tengsizlikdir. Shunday ekan, (1.14) tengsizlikni

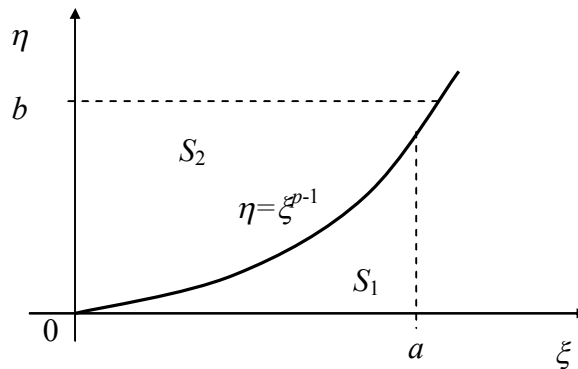
$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1 \quad (1.16)$$

shartni qanoatlantiruvchi a va b nuqtalar uchun isbotlash yetarli. U holda (1.14) tengsizlik (1.16) shart bajarilganda

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot b_k| \leq 1 \quad (1.17)$$

ko'rinishni oladi. (1.16) shartda (1.17) tengsizlikni isbotlash uchun (ξ, η) tekislikda $\eta = \xi^{p-1}$ ($\xi > 0$) yoki $\xi = \eta^{q-1}$ ($\eta > 0$) tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziqli (1.1 - chizma) trapetsiya yuzini hisoblaymiz. Chizmadan ko'rinib turibdiki, musbat a va b sonlarni qanday tanlamaylik, $ab \leq S_1 + S_2$ tengsizlik o'rinli. S_1 va S_2 yuzalarni hisoblaymiz:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$



1.1 – chizma

Shunday qilib, quyidagi sonli tengsizlik o‘rinli:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Agar a ni a_k ga, b ni b_k ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o‘zgartirib yig‘indi tuzsak, (1.15) va (1.16) shartlar bajarilganda (1.17) tengsizlik hosil bo‘ladi. Shunday qilib, (1.17) tengsizlik isbotlandi. Shunday ekan, umumiy (1.14) tengsizlik ham isbotlandi.

Agar $p = 2$ bo‘lsa (1.14) Gyolder tengsizligidan (1.4) Koshi - Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Endi Minkovskiy tengsizligining isbotiga o‘tamiz. Buning uchun

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatda $|a|$ ni $|a_k|$ ga, $|b|$ ni $|b_k|$ ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o‘zgartirib yig‘indi tuzsak, quyidagi ayniyatga ega bo‘lamiz

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k|.$$

Tenglikning o‘ng tomonidagi har ikkala yig‘indiga ham Gyolder tengsizligini qo‘llasak va $(p-1)q = p$ ekanligini e‘tiborga olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right).$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

ga bo‘lib, isbotlanishi kerak bo‘lgan (1.13) Minkovskiy tengsizligiga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, uchburchak aksiomasi o‘rinli ekan. Hosil bo‘lgan metrik fazo R_p^n simvol bilan belgilanadi.

Agar bu misolda $p=2$ desak, ρ_p metrika 1.3-misoldagi metrikaga aylanadi. Ko'rsatish mumkinki, 1.5-misolda kiritilgan

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

metrika ρ_p metrikaning $p \rightarrow \infty$ dagi limitik holati boladi, ya'ni

$$\rho_\infty(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.18)$$

1.7. Hadlari $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, $p \geq 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat va ikki nuqtasi orasidagi masofa

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.19)$$

formula bilan aniqlangan to'plamni qaraymiz. Bu to'plamni ℓ_p deb belgilaymiz.

Ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun har bir n da

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.20)$$

Minkovskiy tengsizligi o'rinli bo'lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun (1.20) da $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun (1.19) qator yaqinlashishiga ega bo'lamiz. (1.19) tenglik bilan aniqlangan ρ funksiya metrikaning 1 va 2-aksiomalarini qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. Uchburchak aksiomasi (1.13) Minkovskiy tengsizligidan foydalanib isbotlanadi.

Endi biz Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasini beramiz.

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (1.21)$$

Bu *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Minkovskiy tengsizligi, ya'ni (1.21) tengsizlik $[a,b]$ kesmada $p(p > 1)$ - chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ixtiyoriy x va y funksiyalar uchun o'rinli. Quyidagi tengsizlik

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.22)$$

Gyolder tengsizligi deb ataladi. Gyolder tengsizligi $[a,b]$ kesmada $p(p > 1)$ -chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi x va $q(q > 1)$ -chi darajasi bilan integrallanuvchi ixtiyoriy y funksiyalar uchun o'rinli. (1.10) tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining integral formasidir.

1.1-eslatma. (X, ρ) - metrik fazo va M uning ixtiyoriy qism to'plami bo'lsin. U holda X da aniqlangan ρ masofa, uning qismi bo'lgan M da ham masofa aniqlaydi. Shuning uchun (M, ρ) metrik fazo bo'ladi. (M, ρ) metrik fazo (X, ρ) metrik fazoning qism fazosi deb ataladi.

2-§. To'la metrik fazolar

Matematik analizdan ma'lumki, har qanday fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Bu tasdiq sonlar o'qining to'laligini ifodalaydi. Quyida ko'rsatiladiki, ixtiyoriy metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

2.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo'lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Uchburchak aksiomasidan bevosita kelib chiqadiki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-

ketlik x ga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε son mavjudki, barcha $n > N_\varepsilon$ nomerlarda $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ tengsizlik bajariladi. U holda ixtiyoriy $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

2.2-ta'rif. Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo deyiladi.

Ma'lumki, analizda ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma keng qo'llaniladi. Metrik fazolar nazariyasida esa «ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema» deb ataluvchi quyidagi teorema shunga o'xshash muhim ahamiyatga ega.

2.1-teorema. X metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

Misollar. 2.1. Yakkalangan nuqtalar fazosida faqatgina statsionar (ya'ni biror nomerdan boshlab hamma nomerlarda birgina nuqta takrorlanadigan) ketma-ketliklar fundamental va shuning uchun yaqinlashadi, ya'ni bu fazo - to'la.

2.2. $R = (-\infty; \infty)$ fazoning to'laligi matematik analiz kursidan ma'lum.

2.3. R^n fazoning to'laligi R fazoning to'laligidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$ - R^n dagi biror fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε nomer mavjud bo'lib, barcha $p > N_\varepsilon$ va $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2. \quad (2.1)$$

Natijada har bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun $\{x_k^{(p)}\}$ ketma-ketlik barcha $p > N_\varepsilon$ va $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni

$\{x_k^{(p)}\}_{p=1}^\infty$ fundamental sonli ketma-ketlikdir va R fazo to'la bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning limitini

$$x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

orqali belgilaymiz. U holda, (2.1) tengsizlikda $p > N_\varepsilon$ deb $q \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x. \quad \Delta$$

2.4.-2.5. R_∞^n va R_p^n fazolarning to'laligi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2.6. $C[a, b]$ fazoning to'laligini ko'rsatamiz. $\{x_n\}$ - $C[a, b]$ da fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo'lganda

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad (2.2)$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ funksional ketma-ketlikning $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashish shartidir. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada aniqlangan qandaydir x uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashadi. Agar (2.2) tengsizlikda $n > N_\varepsilon$ bo'lganda $m \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, barcha $t \in [a, b]$ larda

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik $C[a, b]$ fazo metrikasida x funksiyaga yaqinlashadi. Δ

2.7. ℓ_2 ham to'la fazodir (isboti [1] da keltirilgan).

To'la bo'lmagan metrik fazoga misol sifatida $C_1[-1, 1]$ ni keltirish mumkin.

2.8. $C_1[-1, 1]$, $\rho(f, g) = \int_{-1}^1 |f(t) - g(t)| dt$ metrik fazo to'la emas ([2] ga qarang).

2.9. ℓ_p , $p \geq 1$ va m, c, c_0 fazolar to'la metrik fazolardir ([1], [10]).

II bob. Akslantirishlar

3-§. Funksiya tushunchasini umumlashtirish

Ma'lumki, matematik analizda funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to'plam bo'lsin. Agar har bir $x \in X$ songa f qoida bo'yicha aniq bir $y = f(x)$ son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya aniqlangan deyiladi. Bunda X to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil bo'lgan $E(f)$ to'plam f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi, ya'ni $E(f) = \{y : y = f(x), x \in X\}$.

Agar sonli to'plamlar o'rnida ixtiyoriy to'plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya'ni akslantirish ta'rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y metrik fazolar berilgan bo'lsin. Agar har bir $x \in X$ elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdan yagona y element mos qo'yilsa, u holda X to'plamda aniqlangan va Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish* berilgan deyiladi. X to'plamda aniqlangan va Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish* $f : X \rightarrow Y$ kabi belgilanadi.

Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: N – natural sonlar to'plami, Z – butun sonlar to'plami, Q – ratsional sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami, $R_+ = [0, \infty)$, $Z_+ = \{0\} \cup N$ hamda R^n sifatida n – o'chamli arifmetik Evklid fazosi.

Har bir $a \in X$ uchun unga mos qo'yilgan $b = f(a) \in Y$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi. Umuman, X to'plamning biror A qism to'plami berilgan bo'lsa, A to'plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat bo'lgan to'plam, A to'plamning f akslantirishdagi tasviri yoki aksi deyiladi va $f(A)$ kabi belgilanadi. $b \in Y$ ixtiyoriy element bo'lsin. X to'plamning b ga akslanuvchi barcha elementlari

b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(b)$ kabi belgilanadi. $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda $B \subset Y$ to'plam uchun X ning B ga o'tuvchi (akslanuvchi) qism to'plami B to'plamning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ kabi belgilanadi. Agar barcha $b \in B$ elementlar uchun ularning $f^{-1}(b)$ aslilari bo'sh bo'lsa, u holda B to'plamning *asli* ham bo'sh to'plam bo'ladi.

3.1-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

3.2-teorema. *To'plamlar kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar birlashmasi va kesishmasi uchun ham 3.1 va 3.2-teoremlar o'rinli, ya'ni

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha}), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha})$$

3.3-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining tasviri ular tasvirlarining birlashmasiga teng*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

3.3-teorema ham ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar uchun o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$f\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha})$$

tenglik o'rinli.

3.1-eslatma. Umuman olganda, ikkita to'plam kesishmasining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng emas. Bunga quyida keltirilgan 3.12-misolda ishonch hosil qilamiz.

$f: X \rightarrow Y$ akslantirishga misollar keltiramiz.

3.1-misol. $f: R \rightarrow R, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

3.2-misol. $g: R \rightarrow R$, $g(x) = [x]$. Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi.

3.3-misol. Dirixle funksiyasi $D: R \rightarrow R$,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in Q, \\ 0, & \text{agar } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

3.4-misol. Riman funksiyasi $R_0: R \rightarrow R$,

$$R_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in Q - \text{qisqarmas kasr} \\ 0, & x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

3.5-misol. Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi

$$P: R^2 \rightarrow R, \quad P(x, y) = x.$$

3.6-misol. Sferik akslantirish $S: R^3 \rightarrow R$, $S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

3.7-misol. Yuqorida, 3.1-3.6 misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohaslarini toping.

Yechish. 3.1-misolda keltirilgan $f: R \rightarrow R$ akslantirishlarning qiymatlar sohasi $E(f) = [1, \infty)$ dan iborat. Chunki barcha $x \in R$ lar uchun $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ va ixtiyoriy $y \in [1, \infty)$ uchun $f(\sqrt{y-1}) = \sqrt{y}$ tenglik o‘rinli.

3.2-misolda keltirilgan $g: R \rightarrow R$, $g(x) = [x]$ akslantirishlarning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko‘ra $E(g) = Z$ dan iborat.

Dirixle funksiyasi $D: R \rightarrow R$ ning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko‘ra $E(D) = \{0, 1\}$ ikki nuqtali to‘plamdan iborat.

Riman funksiyasi $R_0: R \rightarrow R$ ning qiymatlar sohasi,

$$E(R_0) = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Ortogonal proyeksiyalovchi akslantirish $P: R^2 \rightarrow R$, $P(x, y) = x$ ning qiymatlar sohasi $E(P) = R$ dan iborat.

Sferik akslantirish $S: R^3 \rightarrow R$, $S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ning qiymatlar sohasi $E(S) = R_+$ dan iborat.

3.8-misol. 3.1 va 3.2 akslantirishlarda $A = [0;3)$ to‘plamning tasviri va $B = (1;4)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. f akslantirish $[0;\infty)$ da o‘svuchi va uzluksiz funksiya bo‘lganligi uchun $f([0;3)) = [1, \sqrt{10})$ bo‘ladi. $g([0;3))$ esa $[0;3)$ dagi butun sonlardan, ya’ni $g([0;3)) = \{0;1;2\}$ dan iborat. Endi $B = (1;4)$ to‘plamning aslini topamiz: $f^{-1}(B) = (-\sqrt{15}, 0) \cup (0, \sqrt{15})$, $g^{-1}(B) = [2;4)$.

3.9-misol. 3.3 va 3.4 akslantirishlarda $A = R \setminus Q$ to‘plamning aksini (tasvirini) va $B = (1;\infty)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. D va R_0 akslantirishlar $R \setminus Q$ to‘plamning barcha elementlariga nolni mos qo‘yadi, shuning uchun $D(R \setminus Q) = R_0(R \setminus Q) = \{0\}$. Dirixle va Riman funksiylarining 1 dan katta qiymatlari mavjud emas, shuning uchun $D^{-1}(B) = R_0^{-1}(B) = \emptyset$.

Aniqlanish sohasi X bo‘lgan $f : X \rightarrow Y$ akslantirishda $f(X) = Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to‘plamni Y to‘plamning *ustiga* yoki *syuryektiv akslantirish* deyiladi. Umumiy holda, ya’ni $f(X) \subset Y$ bo‘lsa, u holda f akslantirish X to‘plamni Y to‘plamning *ichiga akslantiradi* deyiladi.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f *inyektiv akslantirish* yoki *inyeksiya* deyiladi.

Bir vaqtda ham syuryektiv ham inyektiv bo‘lgan $f : X \rightarrow Y$ akslantirish *biyeksiya*, yoki X va Y to‘plamlar orasida *o‘zaro bir qiymatli moslik* deb ataladi.

3.10-misol. $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ akslantirishning biyeksiya ekanligini isbotlang.

Yechish. Chiziqli $f : R \rightarrow R$ akslantirishning biyeksiya ekanligini ko‘rsatish uchun ixtiyoriy $c \in R$ da $ax + b = c$ tenglamaning yagona yechimga ega ekanligini ko‘rsatish yetarli. Yechimning mavjudligi $f : R \rightarrow R$

akslantirishning syuryektivligini, yechimning yagonaligi esa uning inyektivligini ta'minlaydi. Bu tenglamaning yechimi yagona bo'lib u $x = \frac{c-b}{a}$ dir.

3.11-misol. Agar $f : X \rightarrow Y$ biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f : A \rightarrow B$ ($B = f(A)$) ham biyeksiya bo'lishini isbotlang.

Yechish. $f(A) = B$ ekanligidan uning syuryektiv akslantirish ekanligi kelib chiqadi, inyektivligi esa $f : X \rightarrow Y$ ning inyektivligidan kelib chiqadi.

3.12-misol. 3.5-misolda keltirilgan proyeksiyalash akslantirishi

$P(x, y) = x$ va $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$ to'plamlar berilgan. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ tenglik o'rinli emasligini ko'rsating.

Yechish. A va B kesmalar o'zaro kesishmaydi, ya'ni $A \cap B = \emptyset$. Ammo ularning P akslantirishdagi tasvirlari ustma-ust tushadi, ya'ni $P(A) = [0; 1]$, $P(B) = [0; 1]$ va $P(A) \cap P(B) = [0; 1]$. Biroq $P(A \cap B) = \emptyset$.

4-§. Uzlüksizlik va tekis uzlüksizlik

$X = (X, \rho)$ va $Y = (Y, d)$ – metrik fazolar, f – esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Shunday qilib, har bir $x \in X$ elementga yagona $y = f(x) \in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsin.

4.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ nuqtalar uchun $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0 \in X$ nuqtada uzlüksiz deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzlüksiz bo'lsa, u holda f ni X da uzlüksiz deb ataymiz.

4.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, y) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ va $y \in X$ nuqtalar uchun

$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda f akslantirish tekis uzluksiz deyiladi.

Ta’kidlash lozimki, agar X metrik fazodagi ρ masofani $X \times X$ metrik fazoni $R_+ := [0, \infty)$ metrik fazoga akslantirish deb qarasak, ρ - uzluksiz akslantirish bo‘ladi. Bu yerda $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ to‘plamda (x_1, x_2) va (y_1, y_2) juftliklar orasidagi masofa $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2)$ formula yordamida aniqlanadi. Endi ρ akslantirishning uzluksizligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in X \times X$ nuqtani olamiz va uni tayinlaymiz. Keyin ixtiyoriy $(x, y) \in X \times X$ nuqta olib, metrikaning uchburchak aksiomasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &\leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y), \\ \rho(x_0, y_0) &\leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_0).\end{aligned}$$

Bu ikki tengsizlikdan

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x, x_0) + \rho(y_0, y)$$

ga kelamiz. Agar

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0) < \varepsilon$$

desak, u holda $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$ bo‘ladi, ya’ni ρ uzluksiz akslantirish ekan.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirish X va Y metrik fazolar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli (biyektiv) moslik o‘rnatsa, u holda Y ni X ga akslantiruvchi $x = f^{-1}(y)$ teskari akslantirish mavjud bo‘ladi. Agar f o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo‘lsa, u holda f *gomeomorf* akslantirish yoki *gomeomorfizm* deb ataladi, X va Y fazolar esa *gomeomorf fazolar* deb ataladi. Gomeomorf metrik fazolarga $R = (-\infty; \infty)$ sonlar o‘qi va

$(-1,1)$ intervallarni misol sifatida qarash mumkin. Bu holda gomeomorfizm $y = \frac{2}{\pi} \arctg x$ formula yordamida oʻrnatiladi.

Agar $X = (X, \rho)$ va $Y = (Y, d)$ metrik fazolar oʻrtasida oʻzaro bir qiymatli (biyektiv) moslik oʻrnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, f akslantirish *izometriya* deyiladi, X va Y fazolar esa *izometrik fazolar* deb ataladi.

X va Y metrik fazolarning izometrikligi, ular elementlari orasidagi metrik bogʻlanishlar bir xil boʻlib, faqatgina ular elementlarining tabiatiga koʻra bir - biridan farq qilinishini bildiradi. Ular orasidagi bu farq metrik fazolar nazariyasi nuqtai - nazaridan muhim emas. Bundan keyin oʻzaro izometrik fazolarni aynan bitta fazo deb qaraymiz.

4.1. $(-\infty; +\infty)$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz boʻlmagan funksiyaga misol keltiring.

$$f(x) = x^2.$$

4.2. Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz akslantirish boʻlishini isbotlang.

4.3. $K(t, s)$ funksiya $[a; b] \times [a; b]$ kvadratda ikkala argumenti boʻyicha uzluksiz boʻlsa,

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirishini isbotlang.

4.4. $[0; 1]$ kesmada tekis uzluksiz, ammo Lipshits shartini qanoatlantirmaydigan funksiyaga misol keltiring.

4.5. (X, ρ) metrik fazo boʻlsin. $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish
a) uzluksiz; b) tekis uzluksiz boʻladimi?

4.6. (X, ρ) metrik fazo, $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ biror to'plam bo'lsin. $d : X \rightarrow R$ funksiya $d(x) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ tenglik bilan aniqlangan. Shu akslantirishning tekis uzluksiz ekanligini isbotlang.

4.7. R^2 to'plamda $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ metrika, C – kompleks sonlar to'plamida $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ metrika kiritilgan. Bu fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

4.8. X va Y lar metrik fazolar bo'lsin. $X \times Y$ va $Y \times X$ metrik fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

4.9. $x = \frac{1}{3} \cos x - 2$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

Tenglama yechimini 0,001 aniqlik bilan toping.

4.10. Agar $f : R \rightarrow R$ va $|f'(x)| \leq q < 1$ bo'lsa, $x = f(x)$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

4.11. Agar $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ uzluksiz funksiya akslantirish bo'lsa, $x = f(x)$ tenglamaning yechimi mavjudligini isbotlang.

4.12. Agar $f : R \rightarrow R$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, ushbu $0 < \alpha \leq |f'(x)| \leq \beta$, $x \in R$ shart o'rinli bo'lsa, $f(x) = 0$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

4.13. R^n fazoda

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \right\}$$

qism to'plam simpleks deb ataladi. Agar $P = (p_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ matritsa

elementlari $p_{ij} \geq 0$ va $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ shartlarni qanoatlantirsa, P stoxastik

matritsa deyiladi. $x \mapsto Px$ akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantirishini ko'rsating. S^{n-1} to'plamda

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x, y \in S^{n-1}$$

metrika kiritilgan bo'lsin. Agar P matritsaning biror satri musbat elementlardan iborat bo'lsa ($p_{i1} > 0, p_{i2} > 0, \dots, p_{in} > 0$), $Px = x$ tenglama S^{n-1} simpleksda yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

5-§. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbirlari

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bogʻliq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qoʻzgʻalmas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala koʻrinishida ifodalash mumkin. Qoʻzgʻalmas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu «qisuvchi akslantirishlar prinsipi» deb nomlanuvchi belgidir.

5.1-taʼrif. X metrik fazo va uni oʻzini-oʻziga akslantiruvchi A akslantirish berilgan boʻlsin. Agar shunday $\alpha \in (0;1)$ son mavjud boʻlib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (5.1)$$

tengsizlik bajarilsa, A qisuvchi akslantirish deb ataladi.

Har bir qisuvchi akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$ ($\rho(x_n, x) \rightarrow 0$) boʻlsa, u holda

$$\rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha \rho(x_n, x)$$

boʻlgani uchun $Ax_n \rightarrow Ax$.

Agar $A: X \rightarrow X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud boʻlib $Ax = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning qoʻzgʻalmas nuqtasi deyiladi.

5.1-teorema. (Qisuvchi akslantirishlar prinsipi). Toʻla metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qoʻzgʻalmas nuqtaga ega.

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, $x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \dots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \dots$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy m, n ($n < m$) natural sonlar uchun

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha}$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \rho(x_0, x_1) = 0.$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir. X to'la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bo'lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko'ra

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo'zg'almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

desak, (5.1) tengsizlikka ko'ra

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Bundan $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun

$$\rho(x, y)(1 - \alpha) \leq 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$$

ya'ni $x = y$ bo'lishi kelib chiqadi. Qo'zg'almas nuqta yagona ekan. Δ

5.1. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbirlari

Qisuvchi akslantirishlar prinsipini har xil turdagi tenglamalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlashda qo'llash mumkin. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi $Ax = x$ tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchungina qo'llanib qolmay, bu tenglama yechimini topish usulini ham beradi.

Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbiriga doir misollar qaraymiz.

5.1. R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.

Yechish. Qanday shartlarda A qisuvchi akslantirish bo‘ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog‘liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) R_∞^n fazo, ya’ni

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

bo‘lsin.

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \max_{1 \leq i \leq n} |y'_i - y''_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A qisuvchi akslantirish bo‘lishi uchun

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1 \quad (5.2)$$

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun R_∞^n fazoda (5.2) shartni A akslantirishning qisuvchilik sharti sifatida qabul qilamiz.

b) R_1^n fazo, ya’ni

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

bo‘lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, A akslantirish uchun qisuvchilik sharti R_1^n fazoda

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1 \quad (5.3)$$

ko‘rinishga ega.

c) R^n fazo, ya’ni

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho^2(y', y'') &= \sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n (x'_j - x''_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \rho^2(x', x''). \end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko'ra R^n fazoda A akslantirishning qisuvchilik sharti

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \leq \alpha < 1 \quad (5.4)$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar (5.2)-(5.4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta mavjud bo'lib,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo'ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bu yerda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sifatida R^n dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun (5.2)-(5.4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (5.2) va (5.3) shartlar mos ravishda R_∞^n va R_1^n fazolarda $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun zarur ham bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, (5.2) - (5.4) shartlarning birortasi ham ketma-ket yaqinlashishlar usulining tadbig'i uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo'lsa, u holda (5.2) - (5.4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo'lsa, u holda (5.2) - (5.4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi.

5.2. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqu

Fredholm tenglamasi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (5.5)$$

ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo'llaymiz. Bu yerda K integral tenglama yadrosi va φ - berilgan funksiyalar, f - izlanayotgan (noma'lum) funksiya, λ esa - haqiqiy parametr.

Ko'rsatamizki, qisuvchi akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x, y)$ - $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda, $\varphi(x)$ - $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in [a, b]$ uchun $|K(x, y)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. To'la $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (5.6)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

yoki

$$\rho(Af_1, Af_2) \leq |\lambda| M (b - a) \cdot \rho(f_1, f_2).$$

Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{M \cdot (b - a)} \quad (5.7)$$

bo'lganda A qisuvchi akslantirish bo'ladi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipiga asoslanib xulosa qilamizki, (5.7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (5.5) Fredholm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x)$$

ko'rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Chiziqlimas integral tenglamalar. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

ko'rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbqiqini qaraymiz. Bu yerda K va φ funksiyalar uzluksiz bo'lib, bundan tashqari K o'zining 3- chi funksional argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $L > 0$ mavjud bo'lib,

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq L |z_1 - z_2|$$

tengsizlik barcha $x, y \in [a, b]$ va z_1, z_2 lar uchun o'rinli bo'lsin. Bu holda $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| L(b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{L \cdot (b-a)}$$

shartda A akslantirish qisuvchi bo'ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (5.8)$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y > x$ da $K(x, y) = 0$ desak, (5.8) Volterra tenglamasi (5.5) ko‘rinishdagi ikkinchi tur Fredholm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredholm integral tenglamasi holida biz λ parametrlarning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburiy. Volterra tenglamasi holida qisuvchi akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo‘llash mumkin. Aniqrog‘i, qisuvchi akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o‘rinli.

5.2-teorema. X metrik fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n$ - qisuvchi akslantirish bo‘lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘lsin, ya’ni $Bx = x$. U holda B qisuvchi akslantirishga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo‘llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax = B^k Ax = B^k x_0 \rightarrow x, k \rightarrow \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiyl holida $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2x_0, \dots, B^kx_0, \dots$ ketma-ketlik x qo‘zg‘almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$. Bu x nuqta yagona, chunki A uchun qo‘zg‘almas bo‘lgan x nuqta $B = A^n$ uchun ham qo‘zg‘almas nuqtadir, B esa yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega. Δ

5.2. $C[a, b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (5.9)$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi qisuvchi ekanligini ko‘rsating.

Yechish. $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz.

U holda

$$\begin{aligned} |(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| &= \left| \lambda \int_a^x K(x, y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \cdot M(x-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Bu yerda

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|.$$

Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$|(A^2 f_1)(x) - (A^2 f_2)(x)| = |\lambda|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Umuman,

$$\begin{aligned} |(A^n f_1)(x) - (A^n f_2)(x)| &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)| = \\ &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \rho(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B = A^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Δ

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (5.8) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

- 5.3. Diskret metrik fazoda qanday akslantirish qisqartirib akslantirish bo'ladi?
- 5.4. $S = \{z : |z| = 1\}$ aylana bo'lsin. $f : S \rightarrow S$ qisqartirib akslantirish mavjudmi?
- 5.5. X metrik fazo, $f : X \rightarrow X$ qisqartirib akslantirish bo'lsin. U holda f akslantirish uzluksiz va hatto tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.
- 5.6. X to'la metrik fazo va $f_i : X \rightarrow X$ ($i=1,2$) akslantirishlar berilgan bo'lsin. Agar f_1 qisqartirib akslantirish bo'lsa, hamda $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ tenglik o'rinli bo'lsa, f_2 akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligini isbotlang.
- 5.7. R^2 metrik fazoda (Evklid tekisligi) yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan izometriya – shu nuqta atrofida burishdan iborat ekanligini isbotlang.
- 5.8. $C[-a; a]$ metrik fazo va $f_i : C[-a; a] \rightarrow C[-a; a]$ ($i=1,2$)

akslantirishlar $f_1(x(t)) = x(-t)$ va $f_2(x(t)) = -x(-t)$ tengliklar bilan aniqlangan. Shu akslantirishlarning qo‘zg‘almas nuqtalarini toping.

- 5.9. $K(t,s)$ funksiya $[a;b] \times [a;b]$ kvadratda uzluksiz bo‘lsin. U holda Veyershtass teoremasiga ko‘ra $K(t,s)$ funksiya chegaralangan, ya’ni barcha $a \leq t, s \leq b$ lar uchun

$$|K(t,s)| \leq M$$

tengsizlik o‘rinli. Ushbu

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

akslantirish $C[a;b]$ metrik fazoni o‘zini-o‘ziga akslantirishi va

barcha $x, y \in C[a;b]$ funksiyalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq M(b-a)\rho(x, y)$$

tengsizlikning bajarilishini isbotlang.

- 5.10. $K(t,s)$ funksiya $a \leq s \leq t \leq b$ uchburchakda (sohani chizib ko‘rsating) uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$Ax(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A:C[a;b] \rightarrow C[a;b]$ akslantirish uchun

shunday n natural son mavjudki, $A^n:C[a;b] \rightarrow C[a;b]$ qisqartirib

akslantirish bo‘ladi.

- 5.11. $K(t,s)$ funksiya $a \leq s \leq t \leq b$ uchburchakda, $y(t)$ funksiya esa $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa,

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + y(t)$$

integral tenglama ixtiyoriy $\lambda \in R$ uchun yagona uzluksiz yechimga ega.

5.12. $Ax(t) = \int_0^t x^2(s)ds$ tenglik bilan aniqlangan $A: C[0;a] \rightarrow C[0;a]$

akslantirish hech bir $a > 0$ uchun qisqartirib akslantirish emasligini isbotlang.

5.13. $a > 0$ sonning qanday qiymatlarida

$$x(t) = 1 + \int_0^t x^2(s)ds$$

integral tenglama $C[0;a]$ fazoda yechimga ega?

5.14. $K(t,s)$ funksiya $[0;1] \times [0;1]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin.

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |K(t,s)| ds = M$$

belgilash kiritaylik. Agar $4M |\lambda| < 1$ tengsizlik bajarilsa,

$$x(t) = 1 + \lambda \cdot x(t) \cdot \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

integral tenglama $C[0;1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

5.15. f biror uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$x(t) - \frac{1}{2} \sin x(t) + f(t) = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in C[0;1]$ funksiya mavjudligini isbotlang.

5.16. X to'la metrik fazo, $f: X \rightarrow X$ uzluksiz akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \alpha \cdot \rho(x, y), \quad \alpha > 1, \quad x, y \in X$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo'lishi shartmi?

5.17. $A = (a_{ij})$ cheksiz matritsa bo'lsin. $x = (x_1, x_2, \dots)$ uchun

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i, \dots \right)$$

belgilash kiritaylik. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) agar

$$\sup_{1 \leq j < \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

bo'lsa, $A: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ - qisqartiruvchi:

b) agar

$$\sup_{1 \leq i < \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

bo'lsa, $A: m \rightarrow m$ - qisqartiruvchi:

c) agar

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$$

bo'lsa, $A: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ - qisqartiruvchi.

XULOSA

Ushbu bitiruv malakaviy ishi metrik fazolar, to'la metrik fazolar va metrik fazolardagi akslantirishlarning xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. Ma'lumki, matematikaning barcha sohalarida metrik fazolar va akslantirishlar nazariyasi ularning xossalaridan keng foydalanib kelinmoqda. Jumladan matematik analiz, funksional analiz va ehtimollar nazariyasi fanlarida metrika (masofa) akslantirishlar (operatorlar) va stoxastik matritsalar ularning xossalaridan keng foydalaniladi.

Bitiruv malakaviy ishida keltirilgan nazariy ma'lumotlar [1], [4], [6], [7], [8], [10] adabiyotlardan olindi. Masalalar esa [2], [3], [5], [11] kitoblardan tanlab olingan. I bobda metrik fazolar, to'la metrik fazolarga misollar qaralgan. Metrik fazolarning asosiy xossalari o'rganilgan, metrik fazoning to'la bo'lishining zarur va yetarli sharti «ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema» isboti bilan keltirilgan. II bobda akslantirishlar, ularning sodda xossalari jumladan to'plamlar (chekli yoki cheksiz) birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga tengligi $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A)$, xuddi shunday to'plamlar kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga tengligi $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A)$, to'plamlar birlashmasining tasviri ular tasvirlarining birlashmasiga tengligi $f\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(A)$ ko'rsatilgan. Lekin ikkita to'plam kesishmasining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng bo'lavermasligi ya'ni $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ tenglik doim o'rinli bo'lmasligiga misol (3.12-misolga qarang) keltirilgan. Uzluksiz, tekis uzluksiz, Gyolder va Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirishlar bir-biriga bog'lab (qiyoslab) o'rganilgan. Gomeomorf va izomorf akslantirishlarga misollar qaralgan, ularning xossalaridan foydalanib izometrik metrik fazolar haqida ma'lumotlar olingan. Stoxastik va qisqartirib akslantirishlar ehtimollar nazariyasi va integral tenglamalarga oid masalalarini yechishga tadbiiq qilishga yo'naltirilib

o'rganilgan. Qisqartirib akslantirishlar prinsipini chiziqli bo'lmagan integral tenglamalarga nadbiiq qilish mumkinligi ko'rsatilgan.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusiga oid ko'plab misollar keltirilgan. Keltirilgan misollarning 40 % i yechib ko'rsatilgan.

Metrik fazoda akslantirishlar mavzusiga oid materiallar bir sistemaga solib o'rganildi. Ishni bajarish jarayonida metrik fazoda berilgan akslantirishlar xossalariidan samarali foydalanish usullari keltirildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev. «Funksional analiz». Darslik. Toshkent. LIGHT-GROUP. 2015.
2. J.I.Abdullayev, Y.Eshqobolov, R.N.G'anixo'jayev. Funksional analiz. Misol va masalalar yechish. O'quv qo'llanma. I qism. Toshkent. Tafakkur-Bo'stoni. 2015.
3. J.I. Abdullayev, Y.X. Eshqobolov, I.A. Ikromov, R.N. G'anixo'jayev. Funksional analiz. Misol va masalalar yechish. O'quv qo'llanma. II qism. Toshkent. Tafakkur-Bo'stoni. 2016.
4. A.Abdushukurov, T.Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik.Toshkent. Tafakkur-Bo'stoni. 2015.
5. A.Abdushukurov, N.Nurmuhamedova, K.Sagidullayev. Matematik statistika. O'quv qo'llanma. Toshkent. Universitet. 2013.
6. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funktsiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.
7. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
8. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
9. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
11. В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Москва: Наука. 1984.