

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI**

**“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrası
NAZAROV OTABEK UMARALIYEVICH
“ BOG‘LIQ BO‘LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI”
“5130100-matematika” ta‘lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: _____ k.o‘q. K.D. Kuliyeu

2016 yil “____” _____

**Bitiruv malakaviy ish “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”
kafedrasida bajarildi.**

**Kafedraning 2016 yil 26-maydagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga
tavsiya etildi (10-bayonnoma)**

Fakultet dekani: _____ dots. H.X. Ro‘zimuradov

Kafedra mudiri: _____ prof. J.I. Abdullayev

**Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2016 yil “____” iyundagi majlisida
himoya qilindi va _____ ball bilan baholandi (____ bayonnoma)**

YaDAK raisi: _____

A‘zolari: _____

Samarqand -2016

SamDU mexanika- matematika fakulteti
4- kurs talabasi Nazarov Otabek Umaraliyevichning
«Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma - ketligi»
mavzusida yozgan malakaviy bitiruv ishiga

TAQRIZ

Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi o‘rganish ehtimollar nazariyasining muhim masalalaridan biri bo‘lib, ehtimollar nazariyasi fanining asosini tashkil etadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligi haqida yetarlicha ma’lumotlar keltirilgan. Ba’zi muhim tushunchalar misollar yordamida boyitilgan.

Bitiruv malakaviy ishi kirish, 7 ta paragrafdan, xulosa va foydalangan adabiyotlardan tashkil topgan.

Bitiruvchi Nazarov Otabek Umaraliyevich bakalavr akademik darajasini olish uchun taqdim etilayotgan ushbu bitiruv malakaviy ishi bitiruv ishiga qo‘yiladigan barcha talablarga javob beradi deb hisoblayman.

Agar bitiruv ishi muvaffaqiyatli himoya qilinsa, unga ____ ball qo‘yish mumkin.

Taqrizchi:

dots. S.I. Xoliqulov

SamDU mexanika- matematika fakulteti
4- kurs talabasi Nazarov Otabek Umaraliyevichning
«Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma - ketligi »
mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishiga
ilmiy rahbar
BAHOSI

Ma'lumki, ehtimolar nazariyasining asosiy teoremlari va natijalari bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi uchun keltirilgan. Dastlab bunday tajribalar ketma-ketligi Bernulli tomonidan o‘rganilgan. Ushbu malakaviy bitiruv ishining birinchi paragrafida n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarda aynan k tasi ro‘y berishi ehtimoli qaralgan. Agar tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lsa u holda Bernulli formulasidan foydalanish ba’zi qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun asimptotik formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bitiruv ishining ikkinchi paragrafida shu to‘g‘risida gap boradi. Uchinchi paragrafda bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga oid malumotlar keltirilgan.

Bundan tashqari bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligiga oid misollar bilan boyitilgan.

Agar bitiruv malakaviy ish muvaffaqiyatli himoya qilinsa, unga ____ ball qo‘yish mumkin.

Ilmiy rahbar:

k.o‘q. K.D. Kuliyeu

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1-§. Bog‘liqmas tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi.....	4
2-§. Muavr-Laplasning lokal limit va integral limit teoremlari.....	8
3-§. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi.....	15
4-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Ba’zi muhim taqsimotlar.....	20
5-§. Tasodifiy miqdor dispersiyasi.....	26
6-§. Yuqori tartibli momentlar va ular uchun tengsizliklar.....	31
7-§. Katta sonlar qonuni.....	36
XULOSA.....	43
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.....	44

KIRISH

1. Masalaning qo'yilishi. Ma'lumki, bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy o'rganish obyekti hisoblanadi. Ushbu malakaviy bitiruv ishida talabadan bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligiga oid muhim tushunchalar va natijalar to'plash va keltirish talab qilinadi.

2. Mavzuning dolzarbligi. Kundalik hayotda bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligiga oid juda ko'p jarayonlar uchray turadi. Iqtisodiy muommolarni to'g'ri muhokama qilishda yaxshi talqin qilishda yordam beradi.

3. Ishning maqsadi. Ehtimollar nazariyasi bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligini o'rganish va unga oid yetarlicha ma'lumotlar to'plash.

4. Ilmiy tadqiqot usullari. Matematik analiz va funksional analizning sonlar va funksiyalar ketma-ketligining yaqinlashish xarakterini bilish usullari.

5. Ishning ilmiy ahamiyati. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining limitik taqsimotlarini o'rganish haqidagi teoremlarni isbotlashda qo'llaniladi.

6. Ishning amaliy ahamiyati. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadagi katta sonlar qonuni, Bernulli formulasi va limitik teoremlarning amaliyotga tadbirlarida foydalaniladi.

7. Ishning tuzilishi. Ushbu malakaviy bitiruv ishining birinchi paragrafida n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarda aynan k tasi ro'y berishi ehtimoli keltirilgan. Agar tajribalar soni katta bo'lsa u holda Bernulli formulasidan foydalanish qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun asimptotik formulalardan foydalaniladi. Bitiruv ishining ikkinchi paragrafida shu to'g'risida gap boradi. Hodisalarni tasodifiy miqdorlar yordamida ham o'rganish mumkin. Uchinchi paragrafda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga oid malumotlar keltirilgan.

Xuddi shunday bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligiga oid boshqa tushunchalar ham keltirilgan.

1-§. Bog'liqmas tajribalar. Bernulli formulasi

Tajriba deganda, ma'lum shartlar to'plamining hozirlanishini tushunamiz, natija Ω elementar hodisalar fazosining u yoki bu hodisasi ro'y berishi mumkin.

n ta tajribalar ketma-ketligining matematik modeli yangi Ω_n fazo bo'lib, uning elementlarini $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ko'rinishdagi elementlardan iborat bo'ladi. Bu erda

ω_i - tajribaga mos Ω fazoning ixtiyoriy nuqtasi. $\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{n \text{ ta}}$ ga elementar hodisalar fazosining to'g'ri ko'paytmasi deyiladi.

Agar tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lsa, elementar hodisalar fazosi Ω 6 ta elementdan iborat bo'ladi. Uchta tajribaga mos elementar hodisalar fazosi Ω_3 216 ta (e_1, e_2, e_3) ko'rinishdagi nuqtalardan iborat bo'ladi.

Faraz qilaylik, s -tajribada Ω elementar hodisalar fazosi k ta $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_k^{(s)}$ birgalikda bo'lmagan tasodifiy hodisalarga bo'lingan bo'lsin, ya'ni $A_1^{(s)} \cup A_2^{(s)} \cup \dots \cup A_k^{(s)} = \Omega$, $A_i^{(s)} \cap A_j^{(s)} = \emptyset$, $(i \neq j, i, j = \overline{1, n}, s = \overline{1, n})$. s -tajribaning i -holini $A_i^{(s)}$ hodisasi bilan belgilaymiz.

Bu hodisaning ehtimolligini $p_i^{(s)} = P(A_i^{(s)})$ bilan belgilaymiz.

$A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \dots A_{i_n}^{(n)}$ bilan Ω_n elementar hodisalar fazosining $\omega_1 \in A_{i_1}^{(1)}, \omega_2 \in A_{i_2}^{(2)}, \dots, \omega_n \in A_{i_n}^{(n)}$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ nuqtalari to'plamini belgilaymiz.

1.1-ta'rif. Agar Ω_n da har qanday $i_1, i_2, \dots, i_n (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k)$ lar uchun $P\{A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \dots A_{i_n}^{(n)}\} = p_{i_1}^{(1)} p_{i_2}^{(2)} \dots p_{i_n}^{(n)}$ tengligi bajarilsa, tajribalar ketma-ketligi bog'liqmas deyiladi.

Biz bundan keyin $A_i^{(s)}$ hodisaning ehtimolligi tajribaning tartib raqami s ga bog'liq emas deb faraz qilamiz.

Bu holda $p_i = P(A_i^{(s)})$ deb belgilaymiz. Mumkin bo'lgan hollar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil qilganligi uchun $\sum_n p_n = 1$. bo'ladi.

Bunday sxema $k=2$ bo'lganda birinchi marta Ya.Bernulli tomonidan qaralganligi uchun, unga Bernulli sxemasi deyiladi.

Bernulli sxemasida odatda $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p = q$ deb olinadi.

Bog'liqmas tajribalar ketma-ketligi ta'rifidan quyidagi kelib chiqadi.

1.1-teorema. *Agar berilgan n ta tajribalar bog'liqmas bo'lsalar ulardan m tasi ham bog'liqmas bo'ladi.*

Isbot. $m = n - 1$ deb olamiz. U holda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi

$$A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \dots A_{i_{n-1}}^{(n-1)} \sum_{j=1}^k A_j^{(n)} = A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \dots A_{i_{n-1}}^{(n-1)}$$

Bundan esa n ta tajribalar bog'liqmas bo'lgani uchun

$$P\{A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \dots A_{i_{n-1}}^{(n-1)}\} = \prod_{s=1}^{n-1} P\{A_{i_s}^{(s)}\} \sum_{j=1}^{k_1} P\{A_j^{(j)}\} = \prod_{i=1}^{n-1} P\{A_{i_s}^{(s)}\}$$

Bu esa $n-1$ ta tajribaning bog'liqmasligini ko'rsatadi.

1.2-teorema n ta tajribalarning bog'liqmas bo'lishlari uchun, har qanday $i, i_1, i_2, \dots, i_m$ ($1 \leq i; i_1, i_2, \dots, i_m \leq k$) va har qanday $m, q, q_1, q_2, \dots, q_m$ ($1 \leq m \leq n, 1 \leq q, q_1, \dots, q_m \leq k$) lar uchun $P\{A_q^{(i)} | A_{q_1}^{(i_1)} \dots A_{q_m}^{(i_m)}\} = P\{A_q^{(i)}\}$ bo'lishi zarur va yetarli.

Bog'liqmas va bog'liq tajribalarga misollar keltiramiz.

1.1-misol. Tanga tashlanganda gerb tamoni yuqoriga qarab tushish hodisasini G , gerb tamoni yuqoriga qarab tushmaslik hodisasini P desak, tangani tashlash tajribalari o'zaro bog'liq bo'lmaydi;

1.2-misol. Yashikda m ta oq va n ta qora shar bor. Yashikdan olingan shar yana qaytarib yashikga solinsa, bu holda yashikdan olingan har bir sharining oq chiqish ehtimoli $p = \frac{m}{n+m}$ ga va qora chiqish ehtimoli $q = \frac{n}{n+m}$ ga teng. Har bir tajribadan so'ng olingan shar yashikka qaytarib solinsa, tajribalar ketma-ketligi bir-biriga bog'liq bo'lmaydi. Agar yashikdan olingan shar yashikka qaytarib tashlanmasa, bu holda o'tkazilgan tajribalar o'zaro bog'liq bo'ladi. Haqiqatan ham, agar yashikdan olingan shar oq bo'lsa, u holda olingan ikkinchi sharining oq chiqish ehtimoli $\frac{m-1}{n+m-1}$ ga teng bo'ladi.

Faraz qilyalik n ta bog'liqmas tajribalar o'tkazilayotgan bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ga teng, ro'y bermaslik ehtimolligi ham o'zgarmas bo'lib q ga teng ($p + q = 1$).

Bu bog'liqmas n ta tajribalarda A hodisasining rosa m marta, qolgan $n-m$ ta tajribalarda $\overline{A}$ hodisaning ro'y berish ehtimolligini $P_n(m)$ bilan belgilaymiz.

$P_n(m)$ ehtimollik uchun formula keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik A hodisasi birinchi m ta tajribada ro'y bersin, qolgan $n-m$ ta tajribada $\overline{A}$ hodisasi ro'y bersin, ya'ni $\underbrace{AA\dots A}_m \quad \underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-m}$

Ko'paytirish teoremasiga asosan, bu holning ehtimolligi $p^m q^{n-m}$ ga teng bo'ladi.

n ta tajribalarda A hodisaning rosa m marta ro'y berishiga imkon tug'diruvchi hollar soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ga teng. Qo'shish teoremasiga asosan

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (1.1)$$

bu formulaga Bernulli formulasi deyiladi.

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

$P_n(m)$ ehtimollar $(q+px)^n$ ning binom yoyilmasidagi x^m lar oldidagi koeffitsientlarga teng bo'lganligi uchun $P_n(m)$ ehtimollarga ehtimollikning binomial taqsimot qonuni deyiladi.

Faraz qilaylik, har bir tajribada k ta birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalarning bittasi ro'y berishi mumkin, har bir tajribada A_i hodisasining ro'y berish ehtimolligi p_i ga teng bo'lsin.

n ta tajribalarda A_1 hodisaning m_1 , A_2 hodisaning m_2 , ..., A_k hodisaning m_k marta ro'y berish ehtimolligini $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ bilan belgilaymiz. U holda bu ehtimollik quyidagiga

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad (1.2)$$

teng bo'ladi. Bu ehtimollik $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k)^k$ polinomial yoyilmada $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ oldidagi koeffitsientga teng ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$) bo'ladi.

Endi $P_n(m)$ ehtimollikni o'zgaras n da, m ning funksiyasi sifatida o'rganamiz. $0 \leq m < n$ uchun Bernulli formulasiga asosan

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} p}{\frac{n!}{m!(n-m)!} q} = \frac{(n-m)}{(m+1)} \frac{p}{q}.$$

Oxiri tenglikdan ko'rinadiki,

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$$

ya'ni

$$(n-m)p > (m+1)q, \quad np - pm > mq + q, \quad (n-m)p > (m+1)q, \quad np - q > m$$

bo'lsa, $P_n(m+1) > P_n(m)$ bo'ladi. Agar $m = np - q$ bo'lsa $P_n(m+1) = P_n(m)$ bo'ladi. Agar $m > np - q$ bo'lsa $P_n(m+1) < P_n(m)$ bo'ladi. Bulardan ko'rinadiki $P_n(m)$ ehtimollik m o'sishi bilan oldin o'sadi, maksimumga erishadi, m ning keying o'sishida kamayib boradi. Agar $np - q$ butun son bo'lsa, $P_n(m)$ ning maksimal qiymati ikkita bo'ladi, $m_o^1 = np - q$ va $m_o^{11} = np - q + 1 = np + p$.

Agar $np - q$ butun son bo'lmasa, $P_n(m)$ m_o^1 dan katta eng kichik butun sonda m maksimumga erishadi. Agar qaralayotgan hodisaning eng katta ehtimoli yuz berishlari sonini μ bilan belgilasak, umumiy holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$np - q \leq \mu \leq np + p.$$

2-§. Muavr-Laplasning lokal limit va integral limit teoremlari

Oldingi paragraf oxirda keltirilgan masalada ko'rinadiki, m va n sonlari yetarlicha katta bo'lsa $P_n(m)$ ehtimolni Bernulli formulasidan foydalanib topish

ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi. Shu sababli $n \rightarrow \infty$ da $P_n(m)$ ehtimol uchun asimptotik formula topish zaruriyati tug'iladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x_m = x_{m,n,p} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2.1-teorema (Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi). Agar n ta bog'liqmas tajribalarning har bir A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) bo'lsa u holda $|x_m| < c_1$ bo'ladigan hamma n va m lar uchun

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x_m)(1 + \alpha_n(m))}{\sqrt{npq}} \quad (2.1)$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerda $|\alpha_n(m)| < \frac{C_2}{\sqrt{n}}$.

Izoh. Bu teoremani Muavr 1730 yilda $p = q = \frac{1}{2}$ bo'lgan hol uchun, so'ngra Laplas ixtiyoriy $p \in (0,1)$ uchun isbotlagan.

Isbot. Teorema isbotida bizga matematik analiz fanidan ma'lum bo'lgan Stirling formulasidan foydalanamiz.

$$s! = \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\theta_s}, \quad |\theta_s| \leq \frac{1}{12s}.$$

$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ bo'lgani uchun

$$m - np = x_m \cdot \sqrt{npq}, \quad m = np + x_m \sqrt{npq} = np \left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right) \quad (2.2)$$

Shunga o'xshash $m - np = x_m \cdot \sqrt{npq}$ dan $m - n(1 - q) = x_m \cdot \sqrt{npq}$

$$m - n + nq = x_m \cdot \sqrt{npq}, \quad n - m = nq - x_m \cdot \sqrt{npq} = nq \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \quad (2.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(1.2) va (1.3) tengliklardan ko'rinadiki, $n \rightarrow \infty$ da $n - m$ va m lar ham cheksizlikka intiladi.

Bernulli formulasiga asosan:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Stirling formulasiga asosan:

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta_n}}{\sqrt{2\pi m} \cdot m^m \cdot e^m e^{\theta_m} \cdot \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot (n-m)^{n-m} \cdot e^{-(n-m)} \cdot e^{\theta_{n-m}}} \cdot p^m q^{n-m}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \frac{n^n}{m^m \cdot (n-m)^{n-m}} p^m q^{n-m} e^{\theta} \quad (2.4)$$

bu yerda $\theta = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}$, $|\theta| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} \right)$. (2.2) va (2.3) larga asosan

$$|\theta| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{np \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right)} + \frac{1}{nq \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{p \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right)} + \frac{1}{q \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)} \right) \quad (2.5)$$

Bundan ko'rinadiki $n \rightarrow \infty$ da

$$e^{\theta} \rightarrow 1 \quad (2.6).$$

Belgilash kiritamiz:

$$A_n = \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}$$

deb belgilaymiz. U holda (2.2) va (2.3) ga asosan:

$$\ln A_n = \ln \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}$$

$$= \ln \left(\frac{np}{m} \right)^m \left(\frac{nq}{n-m} \right)^{n-m}$$

$$= \ln \left(\frac{np}{m} \right)^m + \ln \left(\frac{nq}{n-m} \right)^{n-m}$$

$$\begin{aligned}
&= -m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} \\
&= -(np + x_m \sqrt{npq}) \ln \frac{np + x_m \sqrt{npq}}{np} - (nq - x_m \sqrt{npq}) \ln \frac{nq - x_m \sqrt{npq}}{nq} \\
&= -(np + x_m \sqrt{npq}) \ln \left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right) - (nq - x_m \sqrt{npq}) \ln \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

n yetarlicha katta bo'lganda $x_m \sqrt{\frac{q}{np}}$ va $x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}$ larni yetarlicha kichik qilish mumkin? Shuning uchun $\ln \left(1 + x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)$ va $\ln \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)$ larni darajali qatarga yoyish mumkin:

$$\ln \left(1 + x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) = x_m \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x_m^2 \cdot q}{2np} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.8}$$

$$\ln \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) = x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x_m^2 \cdot p}{2nq} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.9}$$

(2.8) va (2.9) larga asosan (2.7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
\ln A_n &= -(np + x_m \sqrt{npq}) \left[x_m \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x_m^2}{2} \cdot \frac{q}{np} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= -(nq - x_m \sqrt{npq}) \left[x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x_m^2}{2} \cdot \frac{p}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= -np x_m \sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{x_m^2}{2} \cdot \frac{q}{np} np - nq O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) - x_m^2 \sqrt{npq} \sqrt{\frac{q}{np}} \\
&\quad + \frac{x_m^2}{2} \sqrt{npq} \cdot \frac{q}{np} - x_m \sqrt{npq} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) + nq x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \\
&\quad + nq \frac{x_m^2}{2} \frac{p}{nq} - nq O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) - x_m^2 \sqrt{npq} \sqrt{\frac{p}{nq}} - x_m^3 \sqrt{npq} \frac{p}{nq} + x_m \sqrt{npq} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= -x_m \sqrt{npq} + \frac{x_m^2}{2} q - np O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

$$-x_m^2(q+p) + \frac{x_m^3}{2\sqrt{n}} \left(\sqrt{\frac{q}{np}}q - \sqrt{\frac{p}{nq}}p \right) = -\frac{x_m^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$a \leq x_m \leq b$ bo'lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$A_n : e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1. \quad (2.10)$$

(2.2) va (2.3) larni hisobga olsak,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} &= \sqrt{\frac{n}{2\pi np \left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}}\right) np \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq}} \sqrt{\frac{1}{\left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}} \end{aligned}, \quad (2.11)$$

va $n \rightarrow \infty$ da

$$\sqrt{\frac{1}{\left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}} \rightarrow 1. \quad (2.12)$$

(2.6), (2.10), (2.11), (2.12) larni hisobga olsak (2.4) dan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Masalalar yechishda qulaylik tug'dirish uchun

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiya uchun jadval tuzilgan.

Bu jadval faqat argumentning manfiy bo'lmagan qiymatlari uchun tuzilgan.

$\varphi(x)$ juft bo'lgani uchun x ning manfiy qiymatlari uchun ham shu jadvaldan foydalanish mumkin.

Masalalar yechishda quyidagi taqribiy formuladan foydalaniladi:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \quad (2.13)$$

Faraz qilaylik, bizdan n ta bog'liqmas tajribalarda biror A hodisasining kami bilan m_1 ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimolligini $P_n(m_1, m_2)$ ni topish talab qilinsin. Bernulli formulasiga asosan:

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} c_n^m p^m q^{n-m}. \quad (2.14)$$

Agar n, m_1, m_2 lar yetarlicha katta bo'lsa, (2.14) ifodaning qiymatini hisoblash texnik qiyinchiliklarga olib keladi.

Shuning uchun ham $P_n(m_1, m_2)$ ehtimollik uchun asimptotik formula izlash zaruriyati tug'iladi.

2.2-teorema (Muavr-Laplasning integral limit teoremasi). Agar n ta bog'liqmas tajribalarning har birida biror A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) bo'lsa, $n \rightarrow \infty$ da

$$P_n(m_1, m_2) \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx$$

munosabat a va b larda ($-\infty < a \leq b < \infty$) nisabatan tekis bajariladi.

Bu yerda

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Isbot. Muavr-Laplasning lokal limit teoremasiga asosan a va b lar chekli bo'lganda

$$P_n(m_1, m_2) = P_n\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \sum_{x_m \in [a, b]} P_n(m) = \sum_{x_m \in [a, b]} \frac{\varphi(x_m)(1 + \alpha_n(m))}{\sqrt{npq}} = R_n + T_n,$$

bu yerda

$$R_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}, T_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \frac{\varphi(x_m)\alpha_n(m)}{\sqrt{npq}}.$$

Quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Bunga asosan

$$R_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \varphi(x_m) \Delta x_m$$

va $n \rightarrow \infty$ da

$$R_n \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2.15)$$

Endi T_n ni baholaymiz.

$$T_n \leq \sum \varphi(x_m) |\alpha_n(m)| \Delta x_m \leq R_n \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Bunda

$$n \rightarrow \infty \text{ da } T_n \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

ekanligi kelib chiqadi. (2.15) va (2.16) dan teoremaning isbotiga ega bo'lamiz.

Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanib maslalar yechishda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

funksiyaning qiymatini hisoblashga to'g'ri keladi. $\Phi(x)$ funksiya qiymatlari uchun jadval tuzilgan. Jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning nol va musbat x larga mos qiymatlari keltirilgan. $\Phi(x)$ da funksiyaning toqligidan foydalanib, jadvaldan $x < 0$ bo'lgan holda ham foydalanish mumkin. Jadvalda $\Phi(x)$ ning $x \in [0, 5]$ kesmadagi qiymatlari berilgan, agar $x > 5$ bo'lsa, u holda $\Phi(x) \approx 0,5$ deb olinadi.

$\Phi(x)$ funksiya orqali $P_n(m_1, m_2)$ ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_n(m_1, m_2) = \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Endi quyidagi masalani yechamiz: faraz qilaylik Muavr-Laplasning integral limit teoremasidagi barcha shartlar bajarilgan bo'lsin. Biz $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas p ehtimoldan chetlanishning absolyut qiymati bo'yicha oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ sonidan katta bo'lmalik ehtimolini topish masalasini qaraymiz, ya'ni $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ tengsizlikni bajarilish baholaymiz.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon < \frac{m - np}{n} < \varepsilon\right\} = P\left\{-p\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

Muavr-Laplas integral limit teoremasiga asosan quydagiga ega bo‘lamiz.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Shunday qilib

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (2.17)$$

(2.17) ning ikkala tomonidan $n \rightarrow \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \text{ya'ni}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

bu munosabatga Bernulli sxemasi uchun ***katta sonlar qonuni*** yoki ***Bernulli teoremasi*** deyiladi.

3-§. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri bo‘lib, u elementar hodisalar fazosida aniqlangan sonli funksiya sifatida qaraladi.

3.1-misol. Tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Bu tajribaga mos elementar hodisalar $\omega_1 = \{RR\}$, $\omega_2 = \{RG\}$, $\omega_3 = \{GR\}$, $\omega_4 = \{GG\}$ va elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Agar ξ bilan gerb tushishlari sonini belgilasak,

$$\xi(RR) = 0, \quad \xi(RG) = 1, \quad \xi(GR) = 1, \quad \xi(GG) = 2$$

ya'ni $\xi = \xi(\omega)$ ya'ni Ω da aniqlangan funksiya bo‘ladi.

Tanga simmetrik bo'lganligi uchun $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{4}$ deb olib, $\xi = \xi(\omega)$ ning ma'lum qiymat qabul qilish ehtimolligini ham topish mumkin. Masalan. $P\{\xi = 1\} = P\{\omega = \omega_2\} + P\{\omega = \omega_3\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

3.2-misol. Biror qurilmaning $[0, T]$ vaqt oralig'ida buzilmasdan ishlash vaqtini qaraymiz. Biz elementar hodisalarni $\omega_t = \{\text{qurilma } t \text{ momentgacha ishladi va } t \text{ momentda ishdan chiqdi}\}$, $(0 \leq t \leq T)$ kabi aniqlaymiz. Bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_t, t \in [0, T]\}$ ko'rinishida bo'lib, kontinuum quvvatga ega bo'ladi.

Agar ξ bilan qurilmaning $[0, T]$ vaqt oralig'ida buzilmasdan ishlash vaqtini belgilasak, $\xi = \xi(\omega) = t$ bo'ladi.

3.1-ta'rif. (Ω, F, P) ehtimollik fazosi, $(R, B(R))$ o'lchovlifazo (buyesda $R = (-\infty, \infty)$, $B(R)$ esa R dagi Borel to'plamlar σ -algebrasi) bo'lib $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, F -o'lchovli funksiya bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $A \in B(R)$ uchun

$$\xi^{-1}(A) = \{\omega: \xi(\omega) \in A\} \in F \quad (3.1)$$

bo'lsa, $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Agar Ω chekli bo'lsa, $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni uning barcha elementar hodisalaridagi qiymatlarini keltirish bilan berish mumkin.

Masalan 3.1-misoldagi $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor

ω_i	RR	GR	RG	GG
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\xi(\omega_i)$	0	1	1	2

yoki

$\xi(\omega_i)$	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3.2-ta'rif. Agar $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarnigina qabul qilsa, unga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor diskret deyiladi, agar $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib, $p_n = P(\omega: \xi(\omega) = x_n)$, $p_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ va $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ bo'lsa.

Agar barcha x_n qiymatlar va $P\{\xi = x_n\}$ ehtimolliklar ma'lum bo'lsa, ξ ning taqsimot qonuni aniqlangan bo'ladi. Jadvalning birinchi qatorida diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini, ikkinchi qatorga ularga mos ehtimolliklarni yozsak,

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

biz diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini qatoriga ega bo'lamiz.

Ixtiyoriy Ω uchun masalan, yuqorida keltirilgan 3.2-misoldagi $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni bunday aniqlab bo'lmaydi. Bunday tasodifiy miqdorlarni aniqlash uchun $\{\omega : \xi(\omega) \in A\}$ ($A \in B(R)$) hodisaning ehtimolligini bilish kerak, uning uchun esa $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, $x \in R$ hodisa ehtimolligini bilish yetarli.

3.3-ta'rif. $F(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, $x \in R$ funksiyaga $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Endi taqsimot funksiyaning xossalari bilan tanishib chiqamiz.

1°. $0 \leq F(x) \leq 1$. Bu xossa isboti $F(x)$ ta'rifidan kelib chiqadi.

2°. Agar $a < b$ bo'lsa $P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a)$ (3.2)

Isbot. $a < b$ bo'lsa $\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = \{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\}$
va $\{\omega : \xi(\omega) < a\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < b\}$.

Bundan

$$P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = P[\{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\}] = \\ P\{\omega : \xi(\omega) < b\} - P\{\omega : \xi(\omega) < a\} = F(b) - F(a)$$

3°. Agar $a < b$ bo'lsa $F(b) \leq F(a)$ ya'ni $F(x)$ kamaymaydigan funksiya.

Isbot. Agar $a < b$ bo'lsa $F(b) - F(a) = P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} \geq 0$, bundan $F(b) - F(a)$.

$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Isbot. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarni $x_{n+1} < x_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ va $y_n < y_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$ o'rinli ekanligini ko'rsatish yetarli.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} = \emptyset \quad \text{va} \quad \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \supset \{\omega : \xi(\omega) < x_{n+1}\}$$

bo'lganligi uchun uzluksizlik teoremasiga asosan

$$0 = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \xi(\omega) < x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

Bundan tashqari $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < y_n\} = \Omega$ va $\{\omega : \xi(\omega) < y_n\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < y_{n+1}\}$ bo'lganligi uchun uzluksizlik aksiomasiga asosan

$$1 = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < y_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \xi(\omega) < y_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$$

xossa isbotlandi.

5°. $F(x)$ chapdan uzluksiz.

Isbot. $\{x_n\}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n \rightarrow x$, $x_n < x$ ketma-ketlik bo'lsin $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$

bo'lishligini ko'rsatamiz. Quyidagi o'rinli bo'ladi.

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \quad \text{va} \quad \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_{n+1}\}$$

bo'lgani uchun uzluksizlik aksiomasiga asosan

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}\right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \xi(\omega) < x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \end{aligned}$$

Xossa isbotlandi.

Agar $F(x_0 - 0) - F(x_0 + 0) > c$ bo'lsa, $x = x_0$ da sakrashga ega deyiladi.

6°. Taqsimot funksiyaning sakrashlari soni sanoqlidan ko'p emas.

Isbot. Taqsimot funksiyaning $\frac{1}{2}$ dan katta sakrashlari bittadan ko'p bo'la olmaydi, $\frac{1}{4}$ dan $\frac{1}{2}$ gacha bo'lgan sakrashlari $\left(\frac{1}{4} < c_0 \leq \frac{1}{2}\right)$ 3 tadan ko'p emas, $\frac{1}{2^n}$ dan $\frac{1}{2^{n-1}}$ gacha $\left(\frac{1}{2^n} < c_0 \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ sakrashlari $2^n - 1$ dan ko'p bo'lmaydi.

Bunday ko'rinishdagi taqsimot funksiyaning barcha sakrashlari tartiblab (nomerlab) chiqish mumkin.

Endi diskret tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi uchun formula keltirib chiqaramiz.

Agar $x \leq x_1$ bo'lsa, $F(x) = P\{\xi < x\} = 0$, chunki bu holda $\{\xi < x\}$ hodisasi mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi.

Agar $x_1 < x \leq x_2$ bo'lsa, $\{\xi < x\}$ hodisa faqat va faqat $\{\xi = x_1\}$ bo'lgandagina ro'y beradi, shuning uchun ham

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = x_1\} = p_1.$$

Agar $x_1 < \xi \leq x_2$ bo'lsa, $\{\xi < x\}$ hodisa $\{\xi = x_1\}$ va $\{\xi = x_2\}$ birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisiga teng bo'ladi va

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = x_1\} + P\{\xi = x_2\} = p_1 + p_2.$$

Xuddi shunday $x_i < \xi \leq x_{i+1}$ bo'lsa,

$$F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i.$$

Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$$

formula bilan aniqlanadi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $(-\infty, x_1], (x_1, x_2], \dots, (x_i, x_{i+1}), \dots$ oraliqlarda o'zgarmas qiymatlar qabul qiladi va $x_1, x_2, x_3, \dots$ nuqtalarda mos ravishda $p_1, p_2, p_3, \dots$ ehtimollarga teng sakrashlarga ega bo'ladi.

Endi 3.1-misoldagi $\xi = \xi(\omega)$ gerb tushishlari soni tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz.

ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qatori

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $x \leq 0$ bo'lsa, $F(x) = P\{\xi < x\} = P(\emptyset) = 0$; $0 < x \leq 1$ bo'lsa,

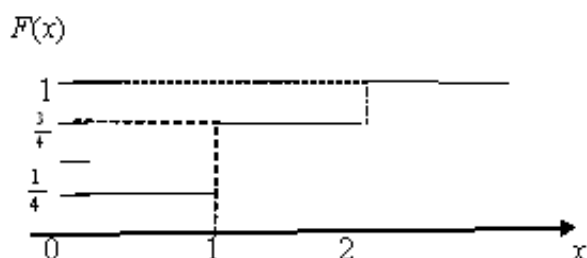
$$F(x) = P\{\xi = 0\} = \frac{1}{4}; \quad 1 < x \leq 2 \text{ bo'lsa, } F(x) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x > 2 \text{ bo'lsa, } F(x) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} x \leq 0 \text{ bo'lsa, } 0 \\ 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa, } \frac{1}{4} \\ 1 < x \leq 2 \text{ bo'lsa, } \frac{3}{4} \\ x > 2 \text{ bo'lsa, } 1 \end{cases}$$

$F(x)$ ning grafigi



4-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Ba'zi muhim taqsimotlar

Agar elementar hodisalar fazosi Ω diskret bo'lsa, unda aniqlangan tasodifiy miqdor ham diskret bo'ladi.

Endi diskret tasodifiy miqdorlarning eng muhim bir necha misollarini qarab chiqamiz.

1. Binomial taqsimot. Faraz qilaylik n ta bog'liqmas tajribalar o'tkazilayotgan bo'lsin, har bir tajribada ikki hol bo'lishi mumkin, har qanday A hodisasi p ehtimollik bilan ro'y beradi, $q = 1 - p$ ehtimol bilan ro'y bermaydi.

$\xi(\omega)$ bilan n ta bog'liqmas tajribalarda hodisa ro'y berishlar sonini belgilaymiz $\{\omega : \xi(\omega) = m\}$ hodisasining ehtimoli bizga ma'lumki

$$P_n(m) = P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} (m=1,2,\dots) \quad (4.1)$$

Bunday tasodifiy miqdorlarga binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

2. Geometrik taqsimot. Faraz qilaylik bog'liqmas tajribalar o'tkazilayotgan bo'lsin, bu tajribalarning har birda qandaydir A hodisasi ro'y bersin p ehtimol bilan yoki ro'y bermasin q ehtimol bilan $q = 1 - p$. Tajribalar toki A hodisasi birinchi marta ro'y berguncha o'tkazilsin. U holda tajribalar sonini $\xi(\omega)$ deb, uning taqsimotini topamiz. Bu holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \left\{ A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \dots, \underbrace{\bar{A}\bar{A}\dots\bar{A}}_{n-1}A, \dots \right\}$$

bo'ladi.

Agar $\xi(\omega) = n$ bo'lsa, tajribaning bog'liqmasligiga asosan

$$P \left\{ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\dots\bar{A}}_{n-1}A, \dots \right\} = q^{n-1} p$$

bo'ladi.

Shunday qilib

$$P\{\xi(\omega) = n\} = q^n p, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

$p, pq, pq^2p, \dots, q^n p, \dots$ ketma-ketlik geometrik progressiyani tashkil qilganligi uchun (4.2) ehtimollarga ehtimollikning **geometrik taqsimot** qonuni deyiladi.

3. Gipergeometrik taqsimot. Faraz qilaylik idishda N ta shar boʻlib, undan n tasi oq, $N-n$ tasi qora boʻlsin. Tasodifiy ravishda k ta shar olindi. ξ -olingan k ta sharlar orasida oq sharlar soni boʻlsin u holda bizga maʼlumki

$$P\{\xi = r\} = \frac{C_n^r C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k} \quad (0 \leq r \leq \min(n, k)) \quad (4.3)$$

(4.3) ehtimollarga ehtimollikning ***gipergeometrik taqsimot*** qonuni deyiladi.

4. Puasson taqsimoti. Agar ξ tasodifiy $0, 1, 2, 3, \dots$ qiymatlarni

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

ehtimollar bilan qabul qilsa ($\lambda > 0$), unga λ parametr bilan ***Puasson taqsimotiga ega*** deyiladi.

5. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ qiymatlarni $P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}$, $k = \overline{1, N}$

ehtimollar bilan qabul qilsa, bunday tasodifiy miqdorga ***tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor*** deyiladi.

Agar Ω sanoqsiz boʻlsa, unda aniqlangan har qanday tasodifiy miqdor diskret emas, uzluksiz boʻladi.

Faraz qilaylik $F(x)$ ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi boʻlsin.

4.1-taʼrif. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (4.4)$$

koʻrinishda yozish mumkin boʻlsa, bu tasodifiy miqdorni ***absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor*** deyiladi.

$p(u)$ funksiya esa ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (zichlik taqsimoti) deyiladi.

Uzluksiz nuqtalarida (4.4) dan

$$F'(x) = p(x) \quad (4.5)$$

kelib chiqadi.

Zichlik funksiyasining xossalari bilan tanishib chiqamiz.

1°. Zichlik funksiya manfiy emas, ya'ni $p(x) \geq 0$.

Isbot. Taqsimot funksiya kamaymaydigan funksiya bo'lganligidan, uning hosilasi deyarli barcha nuqtalarda musbat bo'ladi.

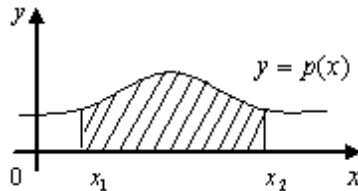
2°. Har qanday $x_1 < x_2$ uchun

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

Isbot. Taqsimot funksiyaning xossasi va (4.4) munosabatga asosan, $x_1 < x_2$ bo'lganligi uchun:

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi < x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \end{aligned}$$

$P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$ ehtimollik $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ va $y = p(x)$ chiziqlari bilan chegaralangan figuraning yuziga teng bo'ladi.



Umumiy holda har qanday $B \in B(R)$ uchun $P\{\xi \in B\} = \int_B p(x)dx$ bo'ladi.

3°. Zichlik funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Isbot. (4.4) va taqsimot funksiyaning xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x p(u)du = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

1°, 3° xossalarni qanoatlantiruvchi har qanday $p(x)$ funksiya qandaydir tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'ladi.

Absolyut uzluksiz taqsimot funksiyalar deb $p(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyalarga aytiladi. Bunday taqsimot funksiyalar (4.4) ko'rinishda tasvirlanadi. Uzluksiz taqsimot funksiyalar orasida zichlik funksiyaga ega bo'lmaganlari ham mavjud. Bunday funksiyaga quyidagicha aniqlangan Kontor funksiyasi misol bo'ladi. $x \leq 0$ bo'lsa $F(x) = 0$, $x \geq 1$ bo'lsa $F(x) = 1$ va

$$F(x) = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} & \text{bo'lsa } \frac{1}{2}F(3x) \\ \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} & \text{bo'lsa } \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} < x \leq 1 & \text{bo'lsa } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x) \end{cases}$$

Zichlik funksiyaga ega bo'lmagan uzluksiz taqsimot funksiyaga singulyar deyiladi. A. Lebegga tegishli bo'lgan quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

4.1-teorema. Har qanday $F(x)$ taqsimot funksiyagana usul bilan $F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$, ($a_i \geq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$) ko'rinishda tasvirlanishi mumkin, bu yerda $F_1(x)$ – diskret taqsimot funksiya $F_2(x)$ – absolyut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ – singulyar taqsimot funksiya.

Endi ba'zi muhim absolyut uzluksiz taqsimotlarni qarab chiqamiz.

Tekis taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} x \in (a, b), & \text{bo'lsa } \frac{1}{b-a} \\ x \notin [a, b], & \text{bo'lsa } 0 \end{cases}$$

ko'rinishida bo'lsa, ξ tasodifiy miqdor $[a, b]$ kesmada tekis taqsimotga ega deyiladi.

Normal taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

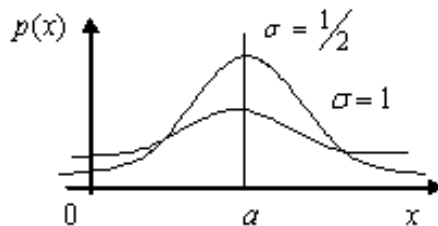
$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishida bo'lsa, u $N(a, \sigma)$ normal taqsimotga ega deyiladi.

Haqiqatdan ham $p(x)$ zichlik funksiyadir, chunki $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$.

Bunga $\frac{x-a}{\sigma} = t$ almashtirish va matematik analiz kursidagi Puasson

integrali orqali ishonch hosil qilish mumkin $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$.



$N(a, \sigma)$ normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigi $x=a$ chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi va σ ning turli qiymatlarida quyidagicha bo'ladi. ξ $N(0,1)$ normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin, bu holda ξ standart normal taqsimotga ega deyiladi. U holda ξ ning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

zichlik funksiyasi esa

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ko'rinishida bo'ladi $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Ko'rsatkichli taqsimot. ξ tasodifiy miqdor ν parametr bilan ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimotga ega deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa,

$$F(x) = \begin{cases} x > 0 \text{ bo'lsa} & 1 - e^{-\nu x} \\ x \leq 0 \text{ bo'lsa} & 0 \end{cases}.$$

Biz bundan keyin ξ tasodifiy miqdor a, σ parametrli normal taqsimotga ega bo'lsa, $\xi \sim N(a, \sigma)$ ko'rinishda yozamiz.

Bunday tasodifiy miqdorning zichlik taqsimoti

$$p(x) = \begin{cases} x > 0 \text{ bo'lsa} & ve^{-vx} \\ x \leq 0 \text{ bo'lsa} & 0 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik taqsimoti $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{(x-\mu)^2 + a^2}$ ($a > 0$)

bo'lsa, u Koshi qonuni bilan taqsimlangan deyiladi.

Endi normal taqsimot orqali aniqlanadigan ayrim taqsimotlarni qaraymiz.

χ^2 -taqsimot. $\xi_i \sim N(a, \sigma)$ va bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsin ($i = \overline{1, \nu}$).

$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_\nu^2$ tasodifiy miqdorlarni aniqlaymiz. χ^2 tasodifiy miqdorning taqsimotiga ν erkinlik (ozodlik) darajali χ^2 taqsimoti deyiladi.

ν erkinlik darajali χ^2 taqsimotning zichlik funksiya $x > 0$ uchun

$p_\nu(x) = k_\nu e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ ko'rinishiga ega, bu yerda k_ν ko'paytuvchi $\int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(x) dx = 1$

shartni qanoatlantiradi.

Student taqsimoti. $\xi_i \sim N(a, \sigma), i = \overline{1, \nu}$ va ξ_i lar bog'liqmas tasodifiy miqdorlar. U holda

$$t_t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2}}$$

tasodifiy miqdor ν erkinlik darajali Student taqsimotga ega deyiladi.

Student taqsimotining zichlik funksiyasi

$$P_{t_\nu}(x) = b_\nu \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Fisher taqsimoti (F -taqsimot). $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1}, \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}$ bog'liqmas normal

tasodifiy miqdorlar bo'lsin. $\xi_i \sim N(0, \sigma), i = \overline{1, n_1 + n_2}$. U holda

$$F_{n_1, n_2} = \frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i^2}{\frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \xi_i^2}$$

tasodifiy miqdor n_1 va n_2 erkinlik darajali Fisher taqsimotiga ega bo'ladi.

5-§. Tasodifiy miqdor dispersiyasi

Qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari turlicha bo'lgan tasodifiy miqdorlarlar bir xil matematik kutilmalarga ega bo'lishi mumkin. Masalan

ξ	-0,05	0,05
p	1/2	1/2

η	-10	10
p	1/2	1/2

taqsimot qonunlari bilan berilgan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari teng

$$M\xi = M\eta = 0.$$

Shuning uchun ham yangi sonli xarakteristikalarga ehtiyoj tug'iladi.

5.1-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb,

$$(\xi - M\xi)^2$$

tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi va $D\xi$ kabi belgilanadi.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (5.1)$$

Agar ξ diskret tasodifiy miqdor $\{x_k\}$ qiymatlarni $\{p_k\}$ ehtimollar bilan qabul qilsa, $(\xi - M\xi)^2$ tasodifiy miqdor $\{(x_k - M\xi)^2\}$ qiymatlarni ham $\{p_k\}$ ehtimollar bilan qabul qiladi, matematik kutilma ta'rifiga asosan:

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k \quad (5.2)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblashda quyidagi teoremadan foydalanish qulay.

5.1-teorema. ξ tasodifiy miqdor dispersiyasi uchun

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (5.3.)$$

o'rinli.

Isbot. Dispersiya ta'rifi va matematik kutilmaning xossalariidan foydalansak,

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M(M\xi)^2 = \\ &= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2. \end{aligned}$$

Endi diskret tasodifiy miqdorlar dispersiyalariga doir misollar qaraymiz.

5.1-misol. A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, bitta tajribada hodisa ro'y berish sonining dispersiyasi topilsin.

Yechish: Agar ξ bilan bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonini belgilasak,

ξ	0	1
p	$q = 1 - p$	p

$M\xi = p$ ekanini e'tiborga olsak, (5.2) ga asosan

$$D\xi = (0 - M\xi)^2 \cdot q + (1 - M\xi)^2 p = p^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq$$

Demak, $D\xi = np$.

Endi uzluksiztasodifiy miqdor dispersiyasining ta'rifini beramiz.

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo'lsin.

5.2. -ta'rif. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb quyidagi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx \quad (5.4)$$

integralning qiymatiga aytiladi.

5. 2-misol. $\xi \sim (a, \sigma)$ normal tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish: $M\xi = a$ ekanini e'tiborga olsak (5.4) dan:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma} = z$ almashtirishniolsak. $x-a = \sigma z$, $dx = \sigma dz$ bo'lgani uchun

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Bu integralni:

$$D\xi = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z d\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

ko'rinishida yozib, bo'laklab integrallasak

$$D\xi = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, $\xi \sim N(a, \sigma)$ - normal tasodifiy miqdorning dispersiyasi ikkinchi parametrning kvadratiga teng ekan.

5.3-misol. ν parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish: $p(x) = \begin{cases} x < 0, & \text{bo'lsa, } 0 \\ x \geq 0, & \text{bo'lsa, } \nu e^{-\nu x} \end{cases}$ va $M\xi = \int_0^{\infty} x \nu \cdot e^{-\nu x} dx = \frac{1}{\nu}$ bo'lganligi uchun

$$D\xi = \nu \int_0^{\infty} x^2 e^{-\nu x} dx - \frac{1}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2}$$

bo'ladi.

1-xossa. O'zgarma sonning dispersiyasi nolga teng.

Isbot. Dispersiyaning ta'rifi va matematik kutilmaning xossasiga asosan,

$$Dc = M(c - M\xi)^2 = M(c - c)^2 = M(0) = 0.$$

2-xossa. O'zgarma sonni kvadratga oshirib, dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(c\xi) = c^2 D\xi.$$

Isbot. Ta'rifga asosan

$$D(c\xi) = M(c\xi - M c\xi)^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 = c^2 M(\xi - M\xi)^2 = c^2 D\xi.$$

3-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispyersiyalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Isbot. Dispersiya ta’rifi va matematik kutilmaning xossasidan foydalansak:

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = M(\xi - M\xi)^2 + M(2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) + M(\eta - M\eta)^2 = \\ &= D\xi + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + D\eta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

ξ va η lar o‘zaro bog‘liq bo‘lmaganligidan $\xi - M\xi$ va $\eta - M\eta$ lar o‘zaro bog‘liq emasligi kelib chiqadi:

$$M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi) \cdot M(\eta - M\eta) = 0$$

bo‘ladi. Buni e’tiborga olsak, (5.5) dan xossanig isboti kelib chiqadi.

1-natija. Chekli sondagi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi ular dispyersiyalarining yig‘indisiga teng ya’ni

$$D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

Isbot. Ta’rifga asosan

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) &= M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k - M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)\right)^2 = M\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right)^2 = M\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + \sum_{k \neq j}^n M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ixtiyoriy ξ_k va ξ_j ($k \neq j$) larning o‘zaro bog‘liq emasligidan $\xi_k - M\xi_k$ va $\xi_j - M\xi_j$ ($k \neq j$) bog‘liqmasligi kelib chiqadi va

$$M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) = 0.$$

(1.8.6) da buni e’tiborga olsak, natijaning isboti kelib chiqadi.

ξ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin. Odatda $\eta = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ tasodifiy miqdorni

normallashtirilgan va markazlashtirilgan tasodifiy miqdor deyiladi.

5.4-misol. $M\eta = 0$, $D\eta = 1$ ekanini isbotlang.

Yechish:

$$M\eta = M \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{1}{\sqrt{D\xi}} \cdot (M\xi - M(M\xi)) = \frac{1}{\sqrt{D\xi}} \cdot (M\xi - M\xi) = 0.$$

ξ va $M\xi$ lar o‘zaro bog‘liq emasligidan dispyersiyaning 2,3-xossalriga ko‘ra

$$D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{D\xi + D(-M\xi)}{D\xi} = \frac{D\xi}{D\xi} = 1.$$

2-natija. ξ va η tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa,

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$$

bo‘ladi.

Yechish. 2,3-xossalarga asosan

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D(-\eta) = D\xi + (-1)^2 D\eta = D\xi + D\eta.$$

3-natija. Agar C -o‘zgarmas bo‘lsa,

$$D(c + \xi) = D\xi.$$

Haqiqatan ham,

$$D(c + \xi) = M(c + \xi - M(c + \xi))^2 = M(c + \xi - c - M\xi)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

Dispersiya xossaligidan foydalanish ayrim taqsimotlar dispersiyalarini topishni osonlashtiradi.

Masalan, binomial taqsimotga ega bo‘lgan ξ tasodifiy miqdor dispersiyasini qaraylik.

ξ_k bilan k -tajribada hodisa ro‘y berishlar sonini belgilasak,

ξ	0	1
p	q	p

$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ bo‘ladi.

1-natijaga asosan

$$D\sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n D\xi_k = n \cdot D\xi_k$$

$D\xi_k = pq$ ekanligini hisobga olsak,

$$D \sum_{k=1}^n \xi_k = npq.$$

$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ ga ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi (og'ishi) deyiladi. Dispersiyaning xossaligidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1°. $\sigma_c = 0$.

2°. Agar c -o'zgarmas son bo'lsa,

$$\sigma_{c\xi} = \sqrt{D(c\xi)} = \sqrt{c^2 D\xi} = |c| \sqrt{D\xi} = |c| \sigma_\xi.$$

3°. Agar ξ va η lar o'zaro bog'liqmas bo'lsalar,

$$\sigma_{\xi+\eta} = \sqrt{D(\xi + \eta)} = \sqrt{D\xi + D\eta} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

5.5-misol. O'zaro bog'liq bo'lmagan va har biri

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & q \\ 1, & p \end{cases} \quad (5.7)$$

Qonun bilan taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan, $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ yig'indining dispersiyasini toping.

Yechish: 2-natijaga asosan

$D \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n D\xi_k = n \cdot D\xi_k$. 5.1-misolda $D\xi_k = pq$ ekani topilgan edi. Shuning uchun.

$$D \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) = npq.$$

6-§. Yuqori tartibli momentlar va ular uchun tengsizliklar

6.1-ta'rif. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$\alpha_k = M_\xi^k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k P\{\xi = x_i\}$$

ga, uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$\alpha_k = M_\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x) dx$$

ga uning ***k-tartibli boshlang'ich momenti*** deyiladi.

Ta'rifga asosan $\alpha_1 = M\xi$ ya'ni matematik kutilma bu birinchi tartibli boshlang'ich moment ekan.

6.2-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning ***k-tartibli absalyut boshlang'ich momenti*** deb, diskret tasodifiy miqdorlar uchun

$$m_k = M|\xi|^k = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^k P\{\xi = x_i\}$$

ifodaga, uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$m_k = M|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k p_{\xi}(x) dx$$

ifodaga aytiladi.

6.3-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning ***k-tartibli markaziy momenti*** deb, diskret tasodifiy miqdorlar uchun

$$\nu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^k P(\xi = x_i)$$

ifodaga, uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$\nu_k = M(\xi - M\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k p_{\xi}(x) dx$$

ifodaga aytiladi.

Agar $M\xi = 0$ bo'lsa, $\nu_k = a_k$, ya'ni markaziy moment boshlang'ich momentga teng bo'ladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, ν_2 moment ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi bo'ladi.

6.4-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning ***k-tartibli markaziy absalyut momenti*** deb, diskret tasodifiy miqdorlar uchun

$$\mu_k = M|\xi - M\xi|^k = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - M\xi|^k \cdot P\{\xi = x_i\}$$

ifodaga, uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$\mu_k = M|\xi - M\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M\xi|^k p_{\xi}(x) dx$$

ifodaga aytiladi.

Xususan, agar $M\xi = 0$ bo'lsa, μ_k k – tartibli boshlang'ich absolyut moment bilan ustma-ust tushadi.

Markaziy momentlarni mos boshlang'ich momentlar orqali ifodalash mumkin:

$$\nu_2 = a_2 - a_1^2, \nu_3 = a_3 - 3a_2a_1 + 2a_1^3, \nu_4 = a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 2a_1^4.$$

Endi momentlaruchun tengsizliklarni ko'rib chiqamiz.

Koshi –Bunyakovskiy tengsizligi. Ikkinchi tartibli momentga ega bo'lgan ixtiyoriy ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun:

$$M|\xi \cdot \eta| \leq \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}. \quad (6.1)$$

Isbot. $|\xi \cdot \eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ bo'lganligi, hamda va $M\eta^2$ momentlarning chekliligidan $M|\xi \cdot \eta| < \infty$ kelib chiqadi.

x va y o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan musbat aniqlangan ushbu

$$M(x|\xi| + y|\eta|)^2 = x^2 M\xi^2 + 2xyM(|\xi| \cdot |\eta|) + y^2 M\eta^2$$

kvadratik formaning diskriminanti

$$(2M(\xi\eta))^2 - 4M\xi^2 M\eta^2 \leq 0,$$

bo'lishi kerakligidan $(M(\xi \cdot \eta))^2 \leq M\xi^2 M\eta^2$ bundan $M|\xi \cdot \eta| \leq \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}$ kelib chiqadi.

Agar $\eta = 1$ bo'lsa, (6.1) dan

$$M|\xi| \leq \sqrt{M\xi^2}.$$

Shuningdek, (6.1) munosabatdan

$$M(\xi + \eta)^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 \leq (\sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2})^2$$

va

$$\sqrt{M(\xi + \eta)^2} \leq \sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2} \quad (6.2)$$

kelib chiqadi.

Yenson tengsizligi. Agar $M|\xi| < \infty$ va $g(x)$ funksiya botiq bo'lsa, u holda

$$g(M\xi) \leq Mg(\xi).$$

Isbot. Agar $g(x)$ funksiya botiq bo'lsa, u holda har bir y uchun shunday $g_1(y)$ funksiya topiladiki,

$$g(x) \geq g(y) + (x - y)g_1(y)$$

bo'ladi.

Agar $x = \xi$, $y = M\xi$ deb olsak va bu tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olsak, $Mg(\xi) \geq g(M\xi)$ kelib chiqadi.

Lyapunov tengsizligi. Agar ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli absolyut t momenti mavjud bo'lsa, ixtiyoriy t va τ ($0 < t < \tau < k$) uchun

$$\left(M|\xi|^t\right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(M|\xi|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \left(M|\xi|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Gyolder tengsizligi. $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ va p, q sonlar uchun $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

munosabatlar o'rinli bo'lsin.

Agar $M\xi^p < \infty$ va $M\eta^q < \infty$ bo'lsa,

$$M\xi\eta \leq (M\xi^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (M\eta^q)^{\frac{1}{q}} \quad (6.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot .

$$\xi_1 = \frac{\xi}{(M\xi^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{(M\eta^q)^{\frac{1}{q}}} \quad (6.4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

$\ln x$ funksiyaning qavariq bo'lganligi uchun ixtiyoriy x_1, x_2 uchun

$$\ln[x_1(1-y) + x_2y] \geq (1-y) \cdot \ln x_1 + y \ln x_2 = \ln(x_1^{1-y} \cdot x_2^y)$$

bo'ladi.

$\ln x$ o'suvchi funksiya bo'lganligi uchun

$$x_1(1-y) + x_2y \geq x_1^{1-y} \cdot x_2^y$$

tengsizlik o'rinli bo'laladi. Oxirgi tengsizlikda

$$x_1 = \xi_1^p, \quad x_2 = \eta_1^q, \quad y = \frac{1}{q}, \quad 1-y = \frac{1}{p}$$

deb olsak,

$$\xi_1 \eta_1 \leq \frac{1}{p} \xi_1^p + \frac{1}{q} \eta_1^q$$

ga ega bo‘lamiz. Oxirgi tengsizlikning ikkala tomonidan matematik kutilma olsak,

$$M\xi_1 \eta_1 \leq \frac{1}{p} M\xi_1^p + \frac{1}{q} M\eta_1^q \quad (6.5)$$

tengsizlik ega bo‘lamiz.

$$M\xi_1^p = M\eta_1^q = 1,$$

bo‘lganligi uchun $M\xi_1 \eta_1 \leq 1$. oxirgi tengsizlikdan (6.4) belgilashlarni hisobga olsak (6.3) ga ega bo‘lamiz.

Gyoldyer tengsizligidan $p = q = 2$ bo‘lganda, Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Ehtimollar nazariyasi va uning tadbiqlarida tasodifiy miqdorlarning quyidagi xarakteristikalar kerak bo‘ladi.

6.5-ta’rif. Uzluksiz taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning *modasi* deb, $p(x)$ zichlik funksiya maksimumga erishadigan nuqtalarga aytiladi va M kabi belgilanadi.

Agar maksimum nuqtasi bitta bo‘lsa, $p(x)$ funksiyani *unimodal*, ikkita bo‘lsa, *bimodal*, agar bittadan ko‘p bo‘lsa, *polimodal* deyiladi.

Agar $p(x)$ zichlik funksiya maksimumga ega bo‘lmasa uni *antimodal* deyiladi.

6.6-ta’rif. $F(x) = p$ tenglamaning yechimi ξ tasodifiy miqdorning *p - tartibli kvantili* deyiladi.

Agar $p = \frac{1}{2}$ bo‘lsa, bunday kvantil *taqsimotning medianasi* deyiladi va Me kabi belgilanadi. Demak, $F(x)$ taqsimotning medianasi x argumentning shunday $x = Me$ qiymatiki, uning uchun

$$F(Me-0) \leq 0,5 \leq F(Me+0)$$

bajariladi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo'lmasa ham uning medianasi doimo mavjud bo'lishi mumkin.

6.7-ta'rif. $\nu = \frac{\sigma}{\alpha_1}$ ga ξ tasodifiy miqdorning *variatsiya koeffitsiyenti* deyiladi.

Variatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorning o'zgaruvchanligini xarakterlaydi hamda prasentlarda ifodalanadi. Nosimmetrik tasodifiy miqdorlarni xarakterlash uchun o'lchamsiz miqdor –asimmetriya koeffitsiyenti tushunchasi kiritiladi.

6.8-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning asimmetriya koeffitsiyenti deb $\gamma_1 = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$

ga aytiladi, bu yerda

$$\nu_3 = M[(\xi - a_1)^3].$$

6.9-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning *ekssessiya koeffitsiyenti* deb

$$\gamma_2 = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3$$

ga aytiladi, bu yerda

$$\nu_4 = M[(\xi - a_1)^4]$$

Normal taqsimot uchun $\frac{\nu_4}{\sigma^4} = 3$, shuning uchun $\nu_4 = 0$.

7-§. Katta sonlar qonuni

Ma'lum shartlar bajarilganda katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xarakterini yo'qotadi. Shu shartlarni ifodalovchi teoremlar katta sonlar qonuni haqidagi teoremlar deyiladi.

Bu haqdagi 1-teorema Bernulli tomonidan isbotlangan. Katta sonlar qonuni haqida teoremani isbotlashda qo'llaniladigan Chebishev tengsizligini keltirib chiqaramiz. Dastlab, uning umumlashgani bo'lgan Markov tengsizligini isbotlaymiz .

Markov tengsizligi . Agar ξ tasodifiy miqdorining matematik kutilmasi mavjud bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va $r > 0$ uchun

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi|^r}{\varepsilon^r} \quad (7.1)$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. 1) Faraz qilaylik ξ diskret tasodifiy miqdor bo'lsin. Ya'ni ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymatlarni $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin ($\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$).

U holda

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} = \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} p_k \leq \left| \frac{|x_k|}{\varepsilon} \geq 1 \right| \leq \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} \frac{|x_k|^r}{\varepsilon^r} p_k \leq \frac{1}{\varepsilon^r} M|\xi|^r.$$

2) Endi faraz qilaylik ξ uzluksiz tasodif miqdor $p(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lgan uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsin.

U holda

$$\begin{aligned} P\{|\xi| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x_k| \geq \varepsilon} p(x) dx \leq \left| \frac{|x|}{\varepsilon} \geq 1 \right| \leq \int_{|x_k| \geq \varepsilon} \frac{|x|^r}{\varepsilon^r} p(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{-\infty}^{-t} |x|^r p(x) dx + \frac{1}{\varepsilon^r} \int_t^{+\infty} |x|^r p(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{-\infty}^{-t} |x|^r p(x) dx + \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{-t}^t |x|^r p(x) dx + \frac{1}{\varepsilon^r} \int_t^{+\infty} |x|^r p(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^r} M|\xi|^r. \end{aligned}$$

(7.1) tengsizlik isbotlandi.

$\{|\xi| \geq \varepsilon\}$ va $\{|\xi|^2 \geq \varepsilon^2\}$ hodisalar teng kuchli bo'lganligi uchun ularning ehtimolliklari teng bo'ladi, va

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} = P\{|\xi|^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

ξ ni $\xi - M\xi$ bilan almashtiramiz, u holda

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Demak,

$$P\{|\xi - M\xi| \leq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (7.2)$$

Bu tengsizlikka Chebishev tengsizligi deyiladi.

Agar (7.2) ga $\varepsilon = 3\sigma_\xi$ deb olsak, u holda

$$P\{|\xi - M\xi| \leq 3\sigma_\xi\} \leq \frac{D\xi}{9\sigma_\xi^2} = \frac{1}{9}$$

bo'ladi.

Agar ξ normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda

$$P\{|\xi - M\xi| \leq 3\sigma\} \leq 0,0027$$

bajarilishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Bunga 3σ -qoidasi deb ham ataladi.

Natija. Agar ξ tasodifiy miqdorining dispersiyasi $D\xi$ mavjud bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (7.3)$$

(7.3) ga ham Chebishev tengsizligi deyiladi.

Isbot.

$$\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \text{ va } \{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\}$$

o'zaro qarama-qarshi hodisalar bo'lganliklari uchun

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} + P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = 1$$

va (7.2) ga asosan

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Bizga $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin,

$\eta_n = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ketma-ketlikni tuzib olamiz.

Tafsif. $\{a_n\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\eta_n - a_n| < \varepsilon\} = 1$$

o‘rinli bo‘lsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlari ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Amaliyotda ko‘p hollarda

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i$$

deb olinadi.

7.1-teorema (Chebishev teoremasi). Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ juft-jufti bilan bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning dispyerstiylari tekis chegaralangan bo‘lsin, ya‘ni $D\xi_i \leq C$, $C = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots$

U holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi, ya‘ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (7.4)$$

bo‘ladi.

Isbot. Isbotlashda Chebishev tengsizligi (7.3) dan foydalanamiz.

Unga asosan

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{D \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)}{\varepsilon^2} \quad (7.5)$$

tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas bo‘lganliklarini inobatga olsak,

$$\begin{aligned} D \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) &= \frac{1}{n^2} D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \\ &= \frac{1}{n^2} (D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n) \leq \frac{1}{n^2} n \cdot C = \frac{C}{n} \end{aligned} \quad (7.6)$$

(7.6) ni inobatga olsak, (7.5) quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| < \varepsilon \right\} \geq 1$$

Ehtimollik birdan katta bo'lishi mumkin bo'lmaganligi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M \xi_i \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

bo'ladi

Demak, katta sonlar qonuni haqidagi Chebishev teoremasiga asosan katta sonidagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi tasodifiylik xarakterini yo'qotishi uchun ular o'zaro bog'liqmas va dispersiyalar tekis chegaralan bo'lishi kerak ekan.

Endi bir xil taqsimlangan bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta son qonunini ifodalovchi **Xinchin** teoremasini ko'rib chiqamiz.

7.2-teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o'zaro bog'liqmas, bir xil taqsimlangan va $M \xi_i = a$ ($i = 1, 2, \dots$) bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (7.7)$$

o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysinadi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun «qirqib olish» usulidan foydalanamiz.

Tayinlangan $\delta > 0$ va $k = \overline{1, n}$ lar uchun quyidagi yangi tasodifiy miqdorlarni aniqlaymiz.

Agar $|\xi_k| \leq \delta n$ bo'lsa $\eta_k = \xi_k$ va $\zeta_k = 0$,

$|\xi_k| > \delta n$ bo'lsa, $\zeta_k = \xi_k$, $\eta_k = 0$

deb olaymiz.

U holda $\xi_k = \eta_k + \zeta_k$ va η_k uchun matematik kutilma va dispersiya mavjud

$$a_n = \int_{-\delta n}^{\delta n} x dF(x) \leq \int_{-\delta n}^{\delta n} |x| dF(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x), \quad b = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x)$$

deb olsak

$$D \eta_n = \int_{-\delta n}^{\delta n} x^2 dF(x) - a_n^2 \leq \delta b n$$

$n \rightarrow \infty$ da $a_n \rightarrow a$ uchun, $\varepsilon > 0$ qanday bo'lsin, yetarlicha katta n lar uchun

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (7.8)$$

bo'ladi.

Chebishev tengsizligiga asosan

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a_n\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\eta_k}{\varepsilon^2} \leq \frac{\frac{1}{n^2} n^2 \delta b}{\varepsilon^2} = \frac{b\delta}{\varepsilon^2}.$$

(7.8) ga asosan,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_k - a_n\right| \geq 2\varepsilon\right\} \leq \frac{b\delta}{n\varepsilon^2}$$

$$P\{\zeta_n \neq 0\} = \int_{|x| \geq \delta n} dF(x) < \int_{|x| > \delta n} \frac{|x|}{\delta n} dF(x) = \frac{1}{\delta n} \int_{|x| > \delta n} |x| dF(x) \quad \text{bo'lganligi va matematik}$$

kutilma mavjud bo'lganligi uchun yetarlicha katta n lar uchun

$$P\{\zeta_k \neq 0\} < \frac{\delta}{n}$$

bo'ladi.

Bundan,

$$P\left\{\sum_{k=1}^n \zeta_k \neq 0\right\} \leq \sum_{k=1}^n P\{\zeta_k \neq 0\} \leq \delta$$

kelib chiqadi.

Shuning uchun ham,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta_k - a\right| \geq \varepsilon\right\} \leq P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta_k - a\right| \geq 2\varepsilon\right\} + P\left\{\sum_{k=1}^n \zeta_k \neq 0\right\} \leq \frac{b\delta}{\varepsilon^2} + \delta$$

ε va δ lar ixtiyoriy bo'lganligi sababli oxirgi tengsizlikdan teorema isboti kelib chiqadi.

Chebishev teoremasi shartlarini tekshirish orqali quyidagi Bernulli teoremasini isbotlash mumkin.

7.3-teorema (Bernulliteoremasi). $\mu_n n$ ta bog'liqmas tajribalarda hodisa ro'y berishlari soni har bir tajribada hodisa ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib p ga teng bo'lsa, $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

bo'ladi.

Biz quyidagi Markov teoremasini isbotsiz keltiramiz.

7.4-teorema. $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $n \rightarrow \infty$ da $\frac{1}{n^2} D \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) \rightarrow 0$ bo'lsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdor ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi.

Endi katta sonlar qonuniga bo'ysunish uchun zarur va yetarli shartlarni ifodalovchi teoremani keltiramiz.

7.5-teorema. $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdor ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$M \frac{\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right)^2}{n^2 + \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right)^2} \rightarrow 0 \quad (7.9)$$

munosabatning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Biz (7.9) bajarilganda katta sonlar qonunli o'rinli bo'lishini

ko'rsatamiz. $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)$ belgilashni kiritamiz. $\Phi_n(x) = P\{\eta_n < x\}$

bo'lsin. $P\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ko'rsatish yetarli.

U holda

$$\begin{aligned} P\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} &= P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right\} = \int_{|x| \geq \varepsilon} d\Phi_n(x) \leq \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{1 + x^2} d\Phi_n(x) \leq \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} d\Phi_n(x) = \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} M \frac{\eta_n^2}{1 + \eta_n^2}. \end{aligned}$$

Bundan esa (7.9) ga asosan $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} = 0$. Teoremaning yetarli qismi isbotlandi.

Endi (7.9) ning zaruriyligini isbotlaymiz.

$$\begin{aligned} P\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x| \geq \varepsilon} d\Phi_n(x) \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} \geq \\ &\geq \int \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) - \varepsilon^2 = M \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ε ni yetalicha kichik, n ni yetarlicha katta tanlab (7.9) ga ega bo‘lamiz.

XULOSA

Ushbu malakaviy bitiruv ishida ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketlig to‘g‘risida so‘z boradi. Bunday tajribalar ketma-ketligi birinchilardan bo‘lib Bernulli tomonidan o‘rganilgan. Bernulli formulasi agar tajribalar soni unchalik katta bo‘lmagan holda “n” ta tajribalardan roppa rosa “k” tasi ro‘y berish hodisasining ehtimolini aniq hisoblaydi. Agar tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda Bernulli formulasi yordamida bunday ehtimolni hisoblash ancha qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun Bernulli formulasini asimptotik formulalar yordamida hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bu holda Muavr-Laplasning lokal va integral limit teoremlari ishlatiladi.

Bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligini tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari yordamida ham o‘rganish mumkin. Bu holda agar tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog‘liqsiz bo‘lsa u holda bir qator yaxshi natijalar

olingan. Bundan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi, dispersiyasi, yuqori tartibli momentlari kiritilib, ularning bir qator hossalari keltirilgan.

Ma'lum bir shartlar bajarilganda katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xarakterini yo'qotadi. Shu shartlarni ifodalovchi teoremlar katta sonlar qonuni deyiladi. Bu haqdagi 1-natija Bernulli tomonidan isbotlangan. Bundan tashqari Chebishev va Xinchin teoremlari keltirilgan.

Foydanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. S.X. Sirojiddinov, M. Mamatov, *Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika*. Toshkent, O'qituvchi, 1980.
2. A.A. Borovkov: *Kurs teorii veroyatnostey*, Mosva:Nauka, 1986.
3. B.V. Gnedenko: *Kurs teorii veroyatnostey*, Mosva: Nauka, 1980.
4. A.N. Shiryayev: *Veroyatnost*, Mosva: Nauka, 1980.
5. B.A. Sevastyanov: *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki*. Mosva: Nauka, 1982.
6. Sh.Q. Formanov: *Ehtimollar nazariyasi*, Toshkent, 2012.
7. Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev, L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva: *Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika*, Toshkent, 2010.
8. Л.Н. Фадеева. Математика для экономистов теория вероятностей и математическая статистика. –Москва: Высшее экономическое образование, 2006г.