

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI ALISHER NAVOIY
NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA - MATEMATIKA FAKULTETI

“ Algebra va geometriya “ kafedrası

Rahmonova Nafisa

”SIRTDAGI SOHALAR YUZALARINI HISOBLASH”

“5130100 –matematika“ ta'lim yo'nalishi bo'yicha

bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar : G'.A. Xasanov

2014 yil “__” _____

Bitiruv malakaviy ishi “ Algebra va geometriya “ kafedrasida bajarildi .

Kafedraning 2014 yil “__” maydagi majlisida muhokama qilindi va
himoyaga tavsiya etildi (10 – bayonnoma).

Fakultet dekani : dots. X. X. Ro'zimurodov

Kafedra mudiri: dots.G'.A.Xasanov

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2014 yil “__” iyundagi majlisida himoya
qilindi va ____ ball bilan baholandi . (__ - bayonnoma).

YaDAK raisi:_____

A'zolari: _____

SAMARQAND 2014

KIRISH

Masalaning qo'yilishi: Matematikaning ko'pgina masalalarida tekislikda yoki fazoda ko'pgina geometrik shakllarning yuzalarini hisoblashga to'g'ri keladi. Albatta o'rta maktabda tekislikda qandaydir chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzalarini aniq (bir karrali) integrallar yordamida hisoblangan. Bundan tashqari fazodagi uch o'lchovli dekart koordinatalar sistemasida qandaydir chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzalari matematik analiz kursida ikki karrali hamda uch karrali integrallar yordamida hisoblanadi.

Mavzuning dolzarbligi: Umuman olganda geometrik shakllar to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilmasdan qandaydir egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham berilgan bo'lishi mumkin yani biror sirtida yotuvchi sohalarni yuzalarini ham aniqlashga to'g'ri keladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, aniq integrallarda integrallash oralig'i to'g'ri chiziq (R –fazo) dagi kesmadan iborat bo'lsa, karrali integrallarda mos fazodagi sohalar bo'ladi. Bunday sohalarning turlicha bo'lishi karrali integrallarni o'rganishni birmuncha murakkablashtiradi va hatto, qiyinroq ko'ramizki, integral tushunchasini ham turlicha kiritishni taqazo qiladi.

Ishning maqsad va vazifalari: Biz mazkur malakaviy bitiruv ishida sirtida yotuvchi sohalarning yuzalarini sirtning birinchi kvadratik formulalaridan foydalanib ikki karrali integrallar yordamida hisoblash masalalarini ko'rib chiqamiz. Bundan tashqari soha yuzalarini xozirgi zamon texnologiyalaridan foydalangan xolda MAPLE dasturi yordamida misollarni yechib ko'rsatamiz.

Ishning tuzilishi: Ushbu malakaviy bitiruv ishi ikki bobdan iborat bo'lib u 9 ta paragrafni va adabiyotlar royxatini o'z ichiga oladi.

Ishning ilmiy ahamiyati: Malakaviy bitiruv ishi referatif harakterga ega.

Ishning amaliy ahamiyati: Matematik analiz, differensial geometriya va

matematikaning boshqa fanlarining amaliyot darslarini o'tishda uch o'lchovli fazodagi soha yuzalarini hisoblashda qo'llash mumkin.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni:Malakaviy bitiruv ishining I bobi ikki paragrafdan tashkil topgan bo'lib, uning birinchi paragrafida ikki karrali integralning ikki xil ta'rifi keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda esa ikki karrali integrallarni hisoblash usullari yani ikki karrali integrallarni takroriy integrallarga keltirish usullari keltirilgan.

Malakaviy bitiruv ishining II bobi sirtlar nazariyasiga bag'ishlangan bo'lib, 7 ta paragrafni o'z ichiga oladi.

Bu bobning birinchi va ikkinchi paragraflarida sirt tushunchasi, lokal soda sirt sirt tushunchalari sirt silliqqligining yetarlilik shartlari keltirilgan. Bundan tashqari har xil ko'rinishda berilgan sirtlarning urinma tekisligi va normal tenglamalari keltirilgan.

Ikkinchi bobning 3 – chi paragrafida sirtning egri chiziqli koordinatalar sistemasi haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Malakaviy bitiruv ishining to'rtinchi paragrafida sirtning birinchi kvadratik formasi tushunchasi va har xil ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan sirtning birinchi kvadratik formasining koeffisientlarini hisoblash formulalari keltirilgan.

Ikkinchi bobning beshinchi paragrafida sirt yotuvchi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini hisoblash masalasi qaralgan bo'lib, uni birinchi kvadratik formaning koeffisientlaridan tashkil topgan ikki karrali integral yordamida hisoblash mumkinligi, bundan tashqari har xil ko'rinishda tenglamalar bilan berilgan sirt yotuvchi yopiq chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzalari uchun formulalar olingan.

Malakaviy bitiruv ishining II bobining oltinchi paragrafida sirtidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuziga doir bir nechta misollar birinchi kvadratik forma koeffisientlari yordamida ikki karrali integrallar yordamida yechib ko'rsatilgan.

Bu bobning yettinchi paragrafida esa ikkinchi bobning oltinchi paragrafida yechilgan masalalar xozirgi zamon texnologiyasi kompyuterning MAPLE dasturi yordamida yechilib ular yordamida bir nechta natijalar olingan.

I BOB.

KARRALI INTEGRAL

1.1 §.

Ikki karrali integral ta'rifi

Ma'lumki, matematikaning ko'pgina masalalarida qandaydir chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzalarini xisoblashga to'g'ri keladi. Albatta bunday masalalar yechimi bir karrali, ikki karrali va uch karrali integrallar yordamida amalga oshiriladi.

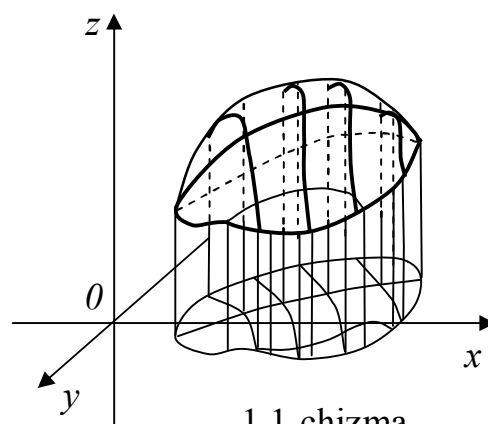
Biz bu bobda ikki karrali integral tushunchasi bilan tanishib, ikki karrali integralning ikki xil ta'rifini va ikki karrali integrallarni takroriy integrallarga keltirish masalalarini ko'rib chiqamiz.

Ikki karrali integralni ta'riflashdan avval ba'zi bir tushunchalar, jumladan D sohaning bo'linishiva funksiyaning integral yig'indi tushunchalari bilan qisman tanishib chiqamiz.

Bizga R^2 tekislikda biror chegaralangan D soha berilgan bo'lsin. D sohaning chegarasidagi ixtiyoriy ikki nuqtani birlashtiruvchi va butunlay shu sohada yotuvchi chiziqni (egri chiziqni) l chiziq deb ataymiz. Ravshanki, bunday chiziqlar D sohani bo'laklarga ajratadi.

Shuningdek, D sohada butunlayyotuvchi yopiq chiziqni ham l chiziq deb qaraymiz. Bunday chiziqlar ham D sohani bo'laklarga ajratadi. Bu sohani bo'laklarga ajratuvchi chekli sondagi l chiziqlarsistemasi $\{l: l \subset D\}$, D sohaning bo'linishi deb ataladiva $P = \{l: l \subset D\}$ kabi belgilanadi. D sohani bo'laklarga ajratuvchi har

bir l chiziq P bo'linishning bo'luvchi chizig'i, D sohaning bo'lagi esa P bo'linishning bo'lagi deyiladi. P bo'linish bo'laklari diametrining eng kattasi P bo'linishning diametri deb ataladi va uni λ_P orqali belgilaymiz.



Shunday qilib, D soha berilgan bo'lsa, bu sohani turli usullar bilan bo'linishlarini tuzish mumkin ekan. Natijada D sohaning bo'linishlari to'plamini hosil qilamiz. Uni Ω kabi belgilaylik.

1. INTEGRAL YIG'INDI.

$f(x, y)$ funksiya $D \subset R^2$ sohada berilgan bo'lsin. Bu sohaning $P \in \Omega$ bo'linishini va bu bo'linishning har bir D_k , $k = \overline{1, n}$ bo'lagida ixtiyoriy (ξ_k, η_k) , $k = \overline{1, n}$ nuqtani olaylik. Berilgan funksiyaning (ξ_k, η_k) nuqtadagi qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni D_k ga ko'paytirib, quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

yig'indini tuzamiz.

Ta'rif 1.1. Ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k \quad (1.1)$$

yig'indi $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi yoki Riman yig'indisi deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi σ qarayotgan $f(x, y)$ funksiya, D sohaning bo'linish usuliga hamda har bir D_k dan olingan (ξ_k, η_k) nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

$f(x, y)$ funksiya chegaralangan $D \subset R^2$ sohada berilgan bo'lsin. Bu D sohani shunday

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (1.2)$$

Bo'linishlarini qaraymizki, ularning diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

ketma-ketlik nolga intilsin: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Bunday P_m ($m = 1, 2, \dots$) bo'linishlarga nisbatan $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisini tuzamiz.

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

Natijada D sohaning (1.2) bo'linishlariga mos $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indilari qiymatlaridan iborat quyidagi

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning har bir hadi (ξ_k, η_k) nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

Ta'rif 1.2. Agar D sohaning har qanday (1.2) bo'linishlar ketma-ketligi $\{P_m\}$ olinganda ham, unga mos integral yig'indi qiymatlaridan iborat $\{\sigma_m\}$ ketma-ketlik (ξ_k, η_k) nuqtalarni tanlab olinishga bog'liq bo'lmagan holda hamma vaqt bitta I songa intilsa, bu I ga σ yig'indining limiti deb ataladi va u

$$\lim_{\lambda_{P_m} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_m} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = I$$

kabi belgilanadi.

Integral yig'indining limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif 1.3. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topilsaki, D sohaning diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'linishi hamda har bir D_k bo'lakdagi ixtiyoriy (ξ_k, η_k) lar uchun

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I ga σ yig'indining limiti deb ataladi va u

$$\lim_{\lambda_{P_m} \rightarrow 0} \sigma = I$$

kabi belgilanadi.

Endi $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha ikki karrali integralining ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif 1.4. Agar $\lambda_P \rightarrow 0$ da $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi σ chekli limitga ega bo'lsa, $f(x, y)$ funksiyaning D sohada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Bu σ yig'indining chekli limiti I esa $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha ikki karrali integrali deyiladi va u

$$\iint_D f(x, y) dD$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint_D f(x, y) dD = \lim_{\lambda_{P_m} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_m} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k.$$

Eslatma 1.5. $f(x, y)$ funksiyaning D sohada chegaralanmagan bo'lsa, u shu sohada integrallanmaydi.

2. DARBU YIG'INDILARI.

$f(x, y)$ funksiya $D \subset R^2$ sohada berilgan bo'lib, u shu sohada chegaralangan bo'lsin. Demak, shunday o'zgarma m va M sonlar mavjudki, $\forall (x, y) \in D$ da

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

bo'ladi.

D sohaning biror P bo'linishini olaylik. Bu bo'linishning har bir $D_k, k = \overline{1, n}$ bo'lagida $f(x, y)$ funksiya chegaralangan bo'lib, uning aniq chegaralari

$$m_k = \inf\{f(x, y): (x, y) \in D_k\}, \quad M_k = \sup\{f(x, y): (x, y) \in D_k\}$$

mavjud bo'ladi. Ravshanki, $\forall (x, y) \in D_k$ uchun

$$m_k \leq f(x, y) \leq M_k. \quad (1.3)$$

Ta'rif 1.6. Ushbu

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad S = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

yig'indilar mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilari deb ataladi.

Bu ta'rifdan Darbu yig'indilarining $f(x, y)$ funksiyaga hamda D sohaning bo'linishiga bog'liq ekanligi ko'rinadi:

$$s = s_p(f), \quad S = S_p(f).$$

Shuningdek, har doim $s \leq S$ bo'ladi.

Yuqoridagi (1.3) tengsizlikdan foydalanib quyidagini topamiz:

$$\sum_{k=1}^n m_k D_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k \leq \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

Shunday qilib, $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi har doim uning Darbu yig'indilari orasida bo'lar ekan.

Aniq chegaraning xossasiga ko'ra

$$m \leq m_k, M_k \leq M \quad (k = \overline{1, n})$$

bo'ladi. Natijada ushbu

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k \geq m \sum_{k=1}^n D_k = m \cdot D,$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k D_k \geq M \sum_{k=1}^n D_k = M \cdot D$$

tengsizliklarga kelamiz. Demak, $\forall P$ bo'linish uchun

$$m \cdot D \leq s \leq S \leq M \cdot D \quad (1.4)$$

bo'ladi. Bu esa Darbu yig'indilarining chegaralanganligini bildiradi.

$f(x, y)$ funksiya $D \subset R^2$ sohada berilgan bo'lib, u shu sohada chegaralangan bo'lsin. D sohaning bo'linishlari to'plami $\{P\}$ ning har bir P bo'linishiga nisbatan $f(x, y)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s_P(f)$, $S_P(f)$ ni tuzib $\{s_P(f)\}$, $\{S_P(f)\}$ to'plamlarni qaraymiz. Bu to'plamlar (1.4) ga ko'ra chegaralangan bo'ladi.

Ta'rif 1.7. $\{s_P(f)\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi $f(x, y)$ funksiya D sohadagi quyi ikki karrali integrali deb ataladi va u

$$\underline{I} = \iint_{\bar{D}} f(x, y) dD$$

kabi belgilanadi.

$\{S_P(f)\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi $f(x, y)$ funksiya D sohadagi yuqori ikki karrali integrali deb ataladi va u

$$\bar{I} = \iint_D f(x, y) dD$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\underline{I} = \iint_{\bar{D}} f(x, y) dD = \sup\{s\}, \quad \bar{I} = \iint_D f(x, y) dD = \inf\{S\}.$$

Ta’rif 1.8. Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada quyi hamda yuqori ikki karrali integrallari bir – biriga teng bo’lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi deb ataladi, ularning umumiy qiymati

$$I = \iint_{\bar{D}} f(x, y) dD = \iint_D f(x, y) dD$$

$f(x, y)$ funksiya D sohadagi ikki karrali integrali deyiladi va u

$$\iint_D f(x, y) dD$$

kabi belgilanadi.

1.2 §.

Ikki karrali integrallarni hisoblash

$f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi ikki karrali integrali tegishli integral yig'indining ma'lum ma'nodagi limiti sifatida ta'riflandi. Bu limit tushunchasi murakkab xarakterga ega bo'lib, uni shu ta'rif bo'yicha hisoblash hatto soda hollarda ham ancha qiyin bo'ladi.

Umuman, ko'p hollarda funksiylarning karrali integrallarni ta'rifga ko'ra hisoblash qiyin bo'ladi. Shuning uchun ikki karrali integrallarni hisoblashning amaliy jihatdan qulay bo'lgan yo'llarni topish zaruriyati tug'iladi.

Yuqorida aytib o'tganimizdek, $f(x, y)$ funksiyaning ikki karrali integrali va uni hisoblash D sohaga bog'liq.

Avval, sodda holda ya'ni D soha to'g'ri to'rtburchak sohadan iborat bo'lgan holda funksiyaning ikki karrali integralini hisoblaymiz.

Teorema 1.9. $f(x, y)$ funksiya $D = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar $x(x \in [a, b])$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

integral mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

integral ham mavjud bo'ladi va

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

bo'ladi.

Isbot. Avvalo D sohani quyidagicha bo'laklarga ajratamiz;

$$D_{ik} = \{(x, y) \in R^2; x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1}\},$$

$$\{i = \overline{0, n-1}; k = \overline{0, m-1}\}.$$

bu yerda

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Bu bo'linishlarni P_{nm} deb belgilaymiz. Uning diametri

$$\lambda_{P_{nm}} = \max \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i).$$

bo'lsin. Modomiki $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi ekan, u shu sohada chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun, $f(x, y)$ funksiya har bir D_{ik} sohada ham chegaralangan bo'ladi va demak, u shu sohada aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga ega bo'ladi:

$$m_{ik} = \inf\{f(x, y): (x, y) \in D_{ik}\}, \quad M_{ik} = \sup\{f(x, y): (x, y) \in D_{ik}\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1; k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Ravshanki, $\forall (x, y) \in D_{ik}$ uchun $m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}$ xususan, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ uchun ham $m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$ bo'ladi. Teoremaning shartidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik} dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik} dy,$$

ya'ni

$$m_{ik}\Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ik}\Delta y_k.$$

Agar keying tengsizliklarni k ning $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ qiymatlarida yozib, ularni hadlab qo'shsak, u holda

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k,$$

ya'ni

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y)dy = I(\xi_i) \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k$$

bu erda $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ bo'ladi.

Endi keyingi tengsizliklarni Δx_i ga ko'paytirib, so'ng hadlab qo'shamiz.

Natijada

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \right) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k \right) \Delta x_i$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}D_{ik} = s$$

$f(x, y)$ funksiya uchun Darbuning quyi yig'indisi,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}D_{ik} = S$$

esa Darbuning yuqori yig'indisidir. Demak,

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S. \quad (1.5)$$

Shartga ko'ra $f(x, y)$ funksiya D da integrallanuvchi. U holda $\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0$ da

$$s \rightarrow \iint_D f(x, y) dD, \quad S \rightarrow \iint_D f(x, y) dD$$

bo'ladi.

(1.5) munosabatdan esa

$$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i$$

yig'indining limitga ega bo'lishi va bu limit

$$\iint_D f(x, y) dD$$

ga teng bo'lishi kelib chiqadi:

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) dD.$$

Agar

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

va

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

bo'lishini topamiz. Teorema 1.9 isbot bo'ldi.

Teorema 1.10. $f(x, y)$ funksiya $D = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar $y(y \in [a, b])$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

integral ham mavjud bo'ladi va

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

bo'ladi.

Bu teorema ham xuddi teorema 1.9 yuqoridagidek isbotlanadi.

Teorema 1.11. Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada berilgan va uzliksiz bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x, y) dD, \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

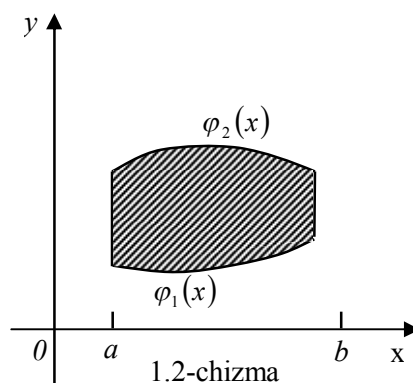
integrallarning har biri mavjud va ular bir – biriga teng bo'ladi.

Endi D soha ushbu

$$D = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ lar $[a, b]$ da berilgan va uzluksiz funksiyalar. (1.2 chizma)

Teorema 1.12. $f(x, y)$ funksiya D sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar x ($x \in [a, b]$) o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida



$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

integral mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

integral ham mavjud bo'ladi va

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

bo'ladi.

Isbot. $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgani uchun matematik analiz kursidagi Veyershtass teoremasiga ko'ra bu funksiyalar $[a, b]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Ularni

$$\min_{a \leq x \leq b} \varphi_1(x) = c, \quad \max_{a \leq x \leq b} \varphi_2(x) = d$$

deb belgilaylik.

Endi

$$D_1 = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

sohada ushbu

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{agar } (x, y) \in D \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } (x, y) \in D_1 \setminus D \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik.

Ravshanki, teorema 1.12 shartlarida bu funksiya D_1 sohada integrallanuvchi va integral xossasiga ko'ra

$$\iint_{D_1} f^*(x, y) dD = \iint_{D_1} f^*(x, y) dD + \iint_{D_1 \setminus D} f^*(x, y) dD = \iint_{D_1} f(x, y) dD \quad (1.6)$$

bo'ladi. Shuningdek, $x(x \in [a, b])$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$I_1 = \int_c^d f^*(x, y) dy$$

integral mavjud va

$$I_1 = \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d f^*(x, y) dy =$$

$$= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (1.7)$$

bo'ladi. Unda teorema 1.9 ga ko'ra

$$\int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

integral ham mavjud bo'ladi va

$$\iint_{D_1} f^*(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

(1.6) va (1.7) munosabatlardan

$$\iint_{D_1} f^*(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema 1.12 to'liq isbot bo'ldi.

Endi D soha ushbu

$$D = \{(x, y) \in R^2: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda $\psi_1(y)$ va $\psi_2(y)$ lar $[c, d]$ da berilgan va uzluksiz funksiyalar. (1.3 chizma)

Teorema 1.13. $f(x, y)$ funksiya $D = \{(x, y) \in R^2: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$

$c \leq y \leq d\}$ sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar $y (y \in [c, d])$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

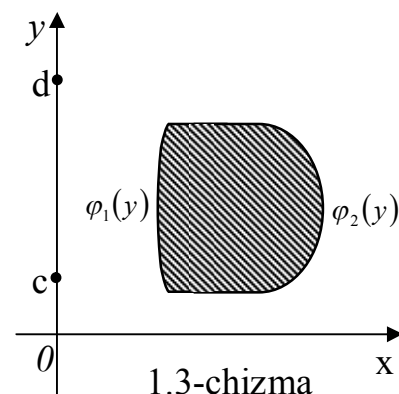
$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

integral ham mavjud bo'ladi va

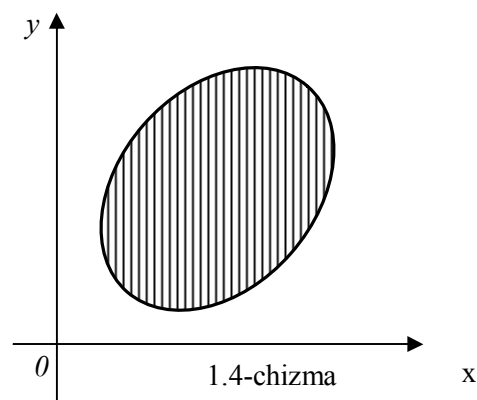
$$\iint_D f(x, y) dD = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



bo'ladi.

Bu teorema ham xuddi yuqoridagidek teorema 1.12 kabi isbotlanadi.

Faraz qilaylik, (D) soha yuqorida qaralgan sohalarning har birining xususiyatiga ega bo'lsin. (1.4 chizma)



Natija 1.14. $f(x, y)$ funksiya (D) sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar $x \in [a, b]$ o'zgaruvchining

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

integral mavjud bo'lsa, $y \in [c, d]$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

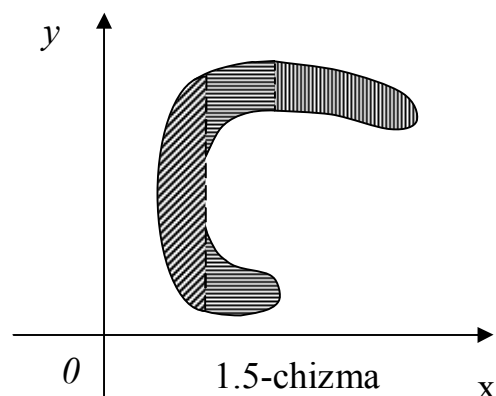
integral ham mavjud va

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

bo'ladi.

Bu natijaning isboti bevosita teorema 1.10 va teorema 1.12 lardan kelib chiqadi.

Agar (D) soha 1.5 chizmada tasvirlangan sohadan iborat bo'lsa, u holda bu sohalar yuqorida o'rganilgan sohalar ko'rinishiga keladigan qilib bo'laklarga ajratiladi, natijada (D) soha bo'yicha ikki karrali integral ajratilgan sohalar bo'yicha ikki karrali integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Shunday qilib, biz integrallash sohasi (D) ning yetarli keng sinfi uchun karrali integrallarni takroriy integrallarga keltirib hisoblash mumkinligini ko'ramiz.



II BOB.

SIRTLAR NAZARIYASI

2.1 §. Sirt haqida tushuncha. Lokal sodda sirt tushunchasi

Tekislikda ochiq va bog'liq D to'plamga soha deyiladi. Biz odatda chiziqli bog'langan sohalarni qaraymiz. Agar P nuqtaning ixtiyoriy atrofida D ga tegishli bo'lgan va D ning to'ldiruvchisiga tegishli bo'lgan nuqtalar bo'lsa, P nuqta D ning chegaraviy nuqtasi deyiladi. Barcha chegaraviy nuqtalar to'plami ∂D kabi belgilanadi. Topologiyada biz $\bar{D}$ to'plamni D ning yopig'i deb atagan edik.

Tekislikdagi yopiq sodda L chiziq tekislikni ikkita qismga ajratadi va bu qismlardan biri chegaralangan bo'ladi. Chegaralangan qismning chegarasi L chiziqdan iboratdir. Bu qism L chiziq bilan chegaralangan soha deyiladi. Agar D sohada yotuvchi ixtiyoriy chiziq bilan chegaralangan soha ham D da yotsa, D ga bir bog'lamli soha deyiladi.

Masalan, birlik ochiq doira bir bog'lamli soha, lekin soha sifatida birlik doiradan markazi chiqarib tashlangan qismini qarasak, u bir bog'lamli bo'lmaydi.

S – fazodagi to'plam bo'lsin. Agar S to'plam tekislikdagi biror bir bog'lamli D sohaning gomeomorfizmi bo'lsa, S ga sodda sirt deyiladi, ya'ni shunday gomeomorfizm F mavjud b'lib,

$$F: D \rightarrow S, \quad F(D) = S,$$

bo'ladi.

D – bir bog'lamli sohaning F gomeomorfizmdagi obrazi S bo'lsin, (ya'ni S sodda sirt). u va v – D sohaga qarashli ixtiyoriy nuqtaning Dekart koordinatalari, x, y, z – esa (u, v) nuqtaga mos sirt nuqtasining koordinatasi bo'lsin. U holda x, y, z –lar u va v o'zgaruvchilarning funksiyasidir:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = g(u, v), \quad (u, v) \in D \quad (2.1)$$

D sohadagi F akslantirishni aniqlovchi (2.1) tenglamalar sistemasini S sirtning parametrik shakldagi tenglamasi deyiladi. u va v lar esa sirdagi egri chiziqli koordinatalar deyiladi. Sirtida koordinat chiziqlari haqida keyingi paragrafda batafsilroq gaplashamiz.

S sirt (2.1) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Agar φ, ψ, g funksiyalar $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa,

$$\partial S = \{(x, y, z) \in R^3: x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \\ z = g(u, v), (u, v) \in \partial D\}$$

to'plam S sirtning chegarasi deyiladi.

Agar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ –koordinata o'qlarining birlik vektorlari bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasini bitta vektor tenglama bilan almashtirish mumkin:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + g(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D \quad (2.2)$$

Bu holda S sirt vektor tenglama bilan berilgan deyiladi, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ esa sirtning radiusi vektori yoki qisqacha sirtning vektori deb ham ataladi.

Such o'lchamli R^3 Evklid fazosidagi biror to'plam, P undagi biror nuqta bo'lsin. P nuqtaning S dagi atrofi deb, S dagi R^3 dan indutsirlangan topologiyaga nisbatan P nuqtani saqlovchi ochiq to'plamga aytiladi, ya'ni S to'plam bilan R^3 dagi P nuqtani saqlovchi ochiq to'plamning kesishmasiga aytiladi.

Ta'rif 2.1. Agar R^3 dagi bog'liq to'plam S ning har bir nuqtasining S da shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrof sodda sirt bo'lsa, S to'plam lokal sodda sirt deyiladi.

Sfera - lokal sodda sirt, chunki uning har bir nuqtasining kichik atrofini ko'rsatish mumkinki, bu atrof mos ravishda kiritilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan uzluksiz funksiya grafigi bo'ladi. Lekin, sfera sodda sirt emas.

Aylananing aylana tekisligida yotuvchi va u bilan kesishmaydigan o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirt tor deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, torni o'zaro perpendikulyar tekisliklarda yotuvchi aylanalarning Dekart ko'paytmasi shaklida tasavvur qilish mumkin. Torning har bir nuqtasining kichik atrofi mavjud bo'lib, bu atrofda torni maxsus tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan uzluksiz funksiya grafigi shaklida tasvirlash mumkin, shuning uchun tor lokal sodda sirt.

Lokal sodda sirtlar sinfi amaliyotda uchraydigan barcha sirtlarni qamrab olmaydi. Bu jumlaning quyidagi misol tasdiqlaydi.

Lokal sodda bo'lmagan sirtga misol. (u, v) tekislikdagi ushbu

$$D = \{(u, v) \in R^2: -2 < u < 2, \quad 0 < v < 2\}$$

to'rtburchakda aniqlangan quyidagi

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad y = u \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad z = u \quad (2.3)$$

funksiyalarni qaraymiz.

Koordinatalari (2.3) tenglamalar yordamida aniqlangan barcha $M(x, y, z)$ nuqtalar to'plami S – yo'naltiruvchisi strofidaning kesmasi

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad y = u \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$$

yasovchilari OZ o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirtidan iboratdir.

D to'rtburchakning $M_-(-1, v)$ va $M_+(-1, v)$ nuqtalariga mos (2.3) formulalar yordamida silindrik sirtning bitta nuqtasi $(0, 0, v)$ mos keladi.

Shunday qilib, qaralayotgan sirt o'z-o'zini kesishish chizig'iga ega:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = v, \quad |v| < 2$$

M_- nuqtaning shunday kichik atrofi U_- ni ajratamiz (1 chizmada vertikal shitrixlangan to'rtburchak), bu atrofga (2.3) formulalar yordamida S_- to'plam mos kelsin.

U_- atrofning turli (u', v') va (u'', v'') nuqtalariga S_- ning turli nuqtalari mos keladi, ya'ni S_- lokal sodda sirt (2-chizma).

Xuddi shunday usul bilan M_+ nuqtaning U_+ atrofini ko'rsatib, unga mos S_+ ning sodda sirt ekanligini ko'rsatish mumkin. Lekin, shunga qaramasdan X nuqtaning S dagi hech qanday atrofi sodda sirt bo'lmaydi (3-chizma).

Shunday qilib, (2.3) formula bilan aniqlangan ushbu S sirt lokal sodda sirt bo'lmas ekan. Bunday sirtlar umumiy sirtlardir.

Ta'rif 2.2. S – lokal sodda sirt da aniqlangan ushbu $h: S \rightarrow R^3$ akslantirish quyidagi xossaga ega bo'lsin: har bir $X \in S$ nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, $h: U \rightarrow h(U)$ gomeomorfizm bo'lsin (ya'ni, h – lokal gomeomorfizmdir). Lokal sodda sirtning lokal gomeomorfizmdagi obrazi umumiy sirt deyiladi.

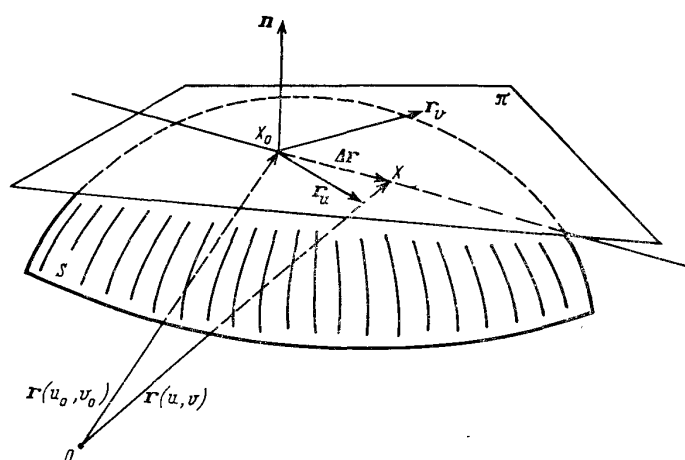
2.2§. Silliqlikning yetarli shartlari, regulyar sirt va sirtning urinma tekisligi va normali.

Bizga S sodda sirt berilgan bo'lib, X_0 va X_1 sirtning tayinlanga nuqtalari bo'lsin.

Ta'rif 2.3. Sodda sirt, X_0 va X_1 uning turli nuqtalari, $\pi - X_0$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik bo'lsin. Agar X nuqta X_0 ga intilganda XX_0 to'g'ri chiziq va π tekislik orasidagi burchak nolga intilsa, π tekislik S sirtning X_0 nuqtasidagi urinma tekisligi deyiladi va $T_{X_0}(S)$ kabi belgilanadi.

Ta'rif 2.4. Agar S sirtning X_0 nuqtasida urinma tekislik T_{X_0} mavjud bo'lib, X_0 nuqtaning S sirdagi biror atrofi urinma tekislikga bir qiymatli proeksiyalansa, S sirt X_0 nuqtada silliq deyiladi. Silliq bo'lmagan nuqtalar sirtning maxsus nuqtalari deyiladi. Agar sodda sirt o'zining har bir nuqtasida silliq bo'lib, urinma tekisliklar silliq o'zgarsa, sirt silliq deb aytiladi.

Sirtning urinma tekisligi o'zgarishini quyidagicha tushunish kerak: agar X va Y lar sirtning ixtiyoriy nuqtalari bo'lsa, X nuqta Y ga intilganda $T_X(S)$ tekislik $T_Y(S)$ likga intiladi, ya'ni $T_X(S)$ va $T_Y(S)$ tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchak nolga intiladi.



Ssilliq sirtning X_0 nuqtasidan $T_{X_0}(S)$ urinma tekislikga perpendikulyar holda o'tuvchi to'g'ri chiziq sirtning X_0 nuqtasidagi normal to'g'ri chizig'i deyiladi.

Endi S sodda sirtning silliqligining yetarli shartlarini ko'rib chiqamiz.

Ssodda sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi va bu nuqtaga sirtning X_0 nuqtasi mos kelsin.

Agar $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ va $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ – vektorlar kollinear bo'lmasa, X_0 nuqtadan $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ va $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ vektorlarga parallel holda o'tuvchi π tekislik sirtning X_0 nuqtasidagi urinma tekislik bo'lishini ko'rsatamiz. (u, v) nuqtaga sirtning X nuqtasi mos kelsin. $\vec{r}(u, v)$ funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\overrightarrow{XX_0} = \Delta \vec{r}(u_0, v_0) = \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)\Delta u + \vec{r}_v(u_0, v_0)\Delta v + \bar{o}(\rho)$$

va $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$, $\rho \rightarrow 0$ va $\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$ bo'ladi.

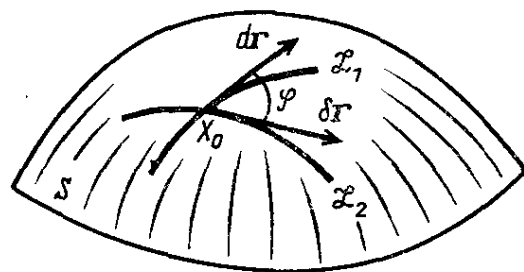
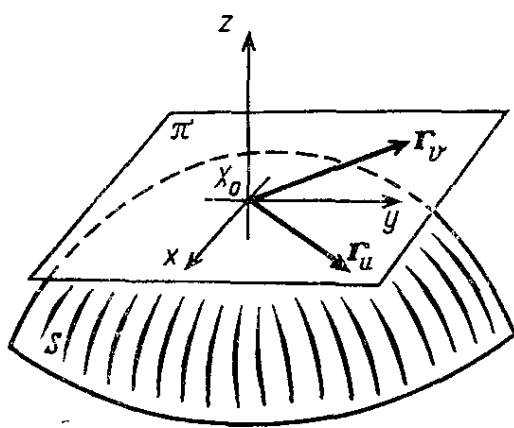
$\vec{r}_u(u_0, v_0)$ va $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ vektorlarni X_0 nuqtaga qo'yamiz va X_0 nuqtadan bu vektorlar orqali π tekislik o'tkazamiz. Agar $X \rightarrow X_0$ bo'lganda XX_0 to'g'ri chiziq va π tekislik orasidagi burchak 90° ga intilsa, π tekislikning urinma tekislik ekanligini ko'rsatgan bo'lamiz. Buning uchun $\frac{\Delta \vec{r}}{\rho}$ vektor va π tekislikning birlik normal vektori $\vec{n}$ ning skalyar ko'paytmasini qaraymiz. Oxirgi tenglikga asosan $\rho \rightarrow 0$ da

$$\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\rho}, \vec{n}\right) = (\vec{r}_u, \vec{n}) \frac{\Delta u}{\rho} + (\vec{r}_v, \vec{n}) \frac{\Delta v}{\rho} + \left(\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}, \vec{n}\right) = \left(\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}, \vec{n}\right) \leq \left|\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\right| \rightarrow 0$$

bo'ladi, ya'ni π tekislik urinma tekislik ekan.

Shunday qilib, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglama bilan berilgan funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, sirtning $X_0(u_0, v_0)$ nuqtasida urinma tekislik mavjud bo'lar ekan. Endi silliqlikning yetarli shartlarini keltiramiz.

Teorema 2.5. *Ssodda sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi va bu nuqtaga sirtning X_0 nuqtasi mos kelsin. Agar $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ va $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ – vektorlar chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektor funksiyalar (u_0, v_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, S sirt $X_0(u_0, v_0)$ nuqtada silliq bo'ladi. Agar $\vec{r}(u, v)$ vektor funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz hususiy hosilalari $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ mavjud bo'lib, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ bo'lsa, S sirt silliq bo'ladi.*



Endi regulyar sirt tushunchasini korib chiqamiz. Bizga S sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif 2.6. *Agar S sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ tenglama bilan berilgan bo'lib, D sohada $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ funksiya C^k , $k \geq 2$ sinfga qarashli (ya'ni $\vec{r}(u, v)$ funksiya k – tartibli uzluksiz hususiy hosilalarga ega) hamda $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ bo'lsa, S sirt C^k sinfga qarashli regulyar sirt deyiladi.*

Regulyar sirt

$$S = \{(x, y, z) \in R^3: F(x, y, z) = 0, \text{ grad}F(x, y, z) \neq 0\}$$

shaklida ham berilishi mumkin. Har bir $M \in S$ nuqtaning biror atrofida $F(x, y, z) = 0$ tenglama $\text{grad}F(M) \neq 0$ shartga asosan, bironta o'zgaruvchiga nisbatan yechilgan holda yozilishi mumkin. Haqiqatan,

$$\text{grad}F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \neq 0,$$

masalan, $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ bo'lsin. U holda $F(x, y, z) = 0$ tenglamani $z = f(x, y)$ shaklida yozish mumkin.

Shunday qilib, regulyar sirt quyidagi uch xil shaklda berilishi mumkin ekan:

1) funksiya grafigi sifatida:

$$z = f(x, y), \quad f \in C^k;$$

2) oshkormas shaklda:

$$S = \{(x, y, z) \in R^3: F(x, y, z) = 0, \quad \text{grad}F(x, y, z) \neq 0\}$$

3) parametrik shaklda:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad \vec{r} \in C^k, \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v,$$

$$\text{ya'ni } x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

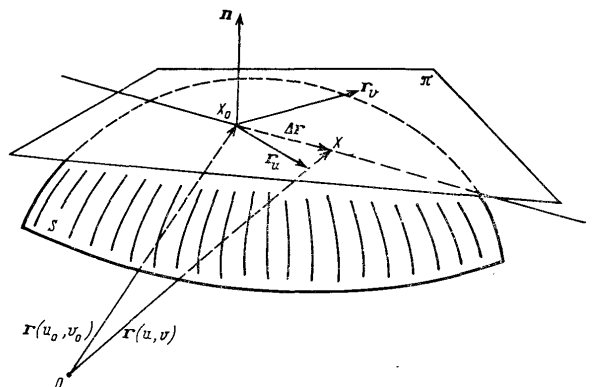
Quyida yuqorida berilgan regulyar sirtning urinma tekislik va normal to'g'ri chiziq tenglamalarini keltirib chiqamiz.

Regulyar sirtning urinma tekisligi tenglamalari sirtning berilish usullariga mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

1) sirt funksiya grafigi sifatida berilganda:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

2) sirt oshkormas shaklda berilganda:



$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

3) sirt parametrik shaklda berilganda:

$$(\bar{R} - \bar{r})\bar{r}_u\bar{r}_v = 0$$

yoki

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x''_u(u_0, v_0) & y''_u(u_0, v_0) & z''_u(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Sirtning berilgan nuqtasidan

$$\bar{m} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

vektor yo'nalishida o'tuvchi normal to'g'ri chiziqlarning tenglamalari esa mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

1) Oshkor ko'rinishda berilgan sirtning normal tenglamasi quyidagicha hisoblanadi;

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = z - z_0;$$

2) Oshkormas ko'rinishda berilgan sirtning normal tenglamasi quyidagicha topiladi;

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

3) Parametrik ko'rinishda berilgan sirtning normal tenglamasi quyidagicha hisoblanadi;

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

bu yerda barcha hususiy hosilalar(u_0, v_0) nuqtada hisoblanadi.

2.3 §. Sirtga egri chiziqli koordinatalar

Bizga S sirtning regulyar qismi ushbu

$$z = f(x, y) \quad (2.4)$$

ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsin. (2.4) da x va y lar biror D sohada o'zgaruvchiz – esa shu sohada ularning bir qiymatli funksiyasi bo'lsin.

Bizga ma'lumki, x va y lar D sohada erkli o'zgaruvchi bo'lgani uchun ularni biror D' sohada u va v larning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyasi sifatida qarashimiz mumkin ya'ni

$$x = \varphi_1(u; v), \quad y = \varphi_2(u; v) \quad (2.5)$$

Endi bu φ_1 va φ_2 larni (2.4) ga qo'ysak, z ham u va v larning bir qiymatli funksiyasi bo'ladi;

$$z = f(\varphi_1(u; v), \varphi_2(u; v)) = \varphi_3(u; v)$$

Shunday qilib, sirt ustidagi nuqtalarning Dekart koordinatalari biror D' sohada o'zgaradigan uv parametrning funksiyalari bo'ladi:

$$x = \varphi_1(u; v), \quad y = \varphi_2(u; v), \quad z = \varphi_3(u; v) \quad (2.6)$$

Demak, (2.4) ko'rinishdagi sirtga qarashli har qanday regulyar qismni (2.6) ko'rinishdagi parametrik ko'rinishga keltirish mumkin ekan. (2.6) dan foydalanib sirt regulyar qismining vektor ko'rinishdagi tenglamasini ham berish mumkin

$$r = r(u; v) = \varphi_1(u; v)i + \varphi_2(u; v)j + \varphi_3(u; v)k \quad (2.7)$$

Farazimizga ko'ra (2.5) dagi φ_i , $i = 1, 2, 3$ funksiyalar D' sohada differensiallanuvchi va bir qiymatli bo'lgani uchun uni u va v o'zgaruvchilar bo'yicha yechish mumkin ya'ni ular teskarilantuvchan

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

bo'ladi.

Algebra kursidan malumki yuqoridagi tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

matrisa rangiikkiga teng bo'lishi kerak. Bu esa $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ va $r_v = (x_v, y_v, z_v)$ larning proporsional emasligini bildiradi. Shuning uchun,

$$[r_u \times r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, $r_u \nparallel r_v$ ekan.

Shunday qilib, (2.4) ko'rinishdagi sirtning hamisha (2.6) yoki (2.7) ko'rinishga keltirish mumkin ekan va unda $r_u \nparallel r_v$ yoki $\text{rang } A = 2$ shart bajarilar ekan.

Agar (2.6) yoki (2.7) ko'rinishdagi sirt tenglamalari uchun $\text{rang } A = 2$ yoki $r_u \nparallel r_v$ bajarilsa u albatta regulyar sirtning aniq qaydi.

Haqiqatan ham. $\text{rang } A = 2$ bo'lgani uchun biror (u_0, v_0) qiymatda

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi, shuning uchun oshkormas funksiyaning mavjudlik haqidagi teoremasiga ko'ra, (u_0, v_0) nuqta atrofida

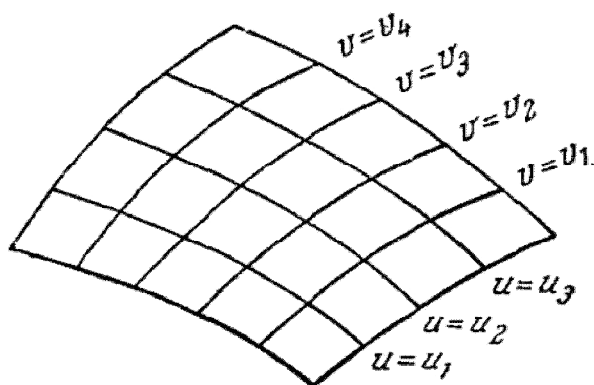
$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v)$$

funksiyalar bir qiymatli ravishda teskarilanadi:

bularni ga qo'ysak

kelib chiqadi. Bu regulyar sirtni aniqlaydi.

sohadagi va parametrlarning har bir qiymatiga sirtning biror nuqtasi mos keladi, bu sonlar sirtidagi nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deyiladi.



Agar tenglamada desak bitta parametrlilik chiziqlar oilasini tashkil qiladi, xuddi shunday desak yana bitta ga mos chiziqlar oilasini tashkil qiladi. Chiziqlarning bu ikki oilasiga sirtning koordinat chiziqlari deyiladi. Ularning birinchisini bundan keyin chiziqlar ($u = \text{const}$), ikkinchisini esa chiziqlar ($v = \text{const}$) deb ataymiz. Koordinat chiziqlarning ikkala oilasi koordinat to'ri deyiladi. Regulyar sirtning har bir nuqtasidan to'rga tegishli ikki chiziq o'tadi.

2.4 §. Sirtning birinchi kvadratik formasi

Bizga $(u, v) \in D$ sohada $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ tenglama bilan S silliq sirt berilgan bo'lib, $r_u \nparallel r_v$ yani $[r_u \times r_v] \neq 0$ shart bajarilsin.

Sirtning birinchi kvadratik formasi deb ushbu

$$I = d\vec{r}^2 \quad (2.8)$$

ifodaga aytiladi. Bizga ma'lumki, $\vec{r}(u, v)$ vektorning differentsiali quyidagicha bo'ladi,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Endi uning skalyar kvadratini topamiz:

$$d\vec{r}^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) du dv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

Bu ifoda S sirtning har bir nuqtasida du va dv differentsiallarning kvadratik formasidir.

Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangandir.

Haqiqatdan ham. $\vec{r}^2 > 0$ va birinchi kvadratik formaning determinanti ham musbat chunki,

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_u^2 & (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \\ (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) & \vec{r}_v^2 \end{vmatrix} = \vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]^2 > 0.$$

Bundan esa I ning ya'ni (2.8) kvadratik formaning musbatligi kelib chiqadi.

Odatda, birinchi kvadratik forma koeffitsientlari uchun quyidagicha belgilashlar ishlatiladi:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) \\ F &= (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \\ G &= \vec{r}_v^2 = (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bu belgilashlardan foydalanib (2.8) ni quyidagicha yozish mumkin,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad EG - F^2 > 0.$$

Endi (2.9) koeffitsientlarning koordinatalarga nisbatan ifodalarini keltiramiz.

Agar $\vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, $(u, v) \in D$, bo'lsa, u holda $\vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}$ va $\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\}$ bo'lgani uchun yuqoridagi koeffitsientlarushbu

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= \vec{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{aligned}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Quyida biz har xil ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan sirtlarning birinchi kvadratik formasini va uning E, F, G koeffitsientlarini qanday xisoblash masalalarini ko'rib chiqamiz.

1. Bizga biror S sirt differentsiallanuvchi $z = f(x, y)$ funksiya grafigi shaklida berilgan bo'lsin. O'zgaruvchi nuqtaning radius vektorini quyidagicha yozamiz:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{x, y, f(x, y)\}.$$

U holda

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = \{1; 0; f_x\}, \quad \vec{r}_v = \vec{r}_y = \{0; 1; f_y\}$$

ekanligidan

$$E = \vec{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = f_x \cdot f_y, \quad G = \vec{r}_v^2 = 1 + f_y^2$$

kelib chiqadi va birinchi kvadratik forma ushbu

$$I = (1 + f_x^2) du^2 + f_x \cdot f_y dudv + (1 + f_y^2) dv^2 \quad (2.10)$$

shaklga ega bo'ladi.

2. Endi aylanma sirtlar, XOZ tekisligida joylashgan L chiziqning Oz o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirtni qaraylik.

Faraz qilaylik L chiziq

$$x = f(u) > 0; \quad z = g(u)$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin. ($f(u) > 0$ shart chiziqning aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni qaraylik). Sirtidagi biror P nuqtaning holatini aniqlash uchun u parametrning qiymatini, ya'ni berilgan L chiziqdagi P_0 nuqta va L chiziqning Oz o'qi atrofida aylanish burchagi v ni bilish yetarlidir. P nuqtaning x, y, z koordinatalari u va v orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u).$$

Endi aylanma sirtning birinchi kvadratik formasini topamiz. Buning uchun quyidagilarni topamiz;

$$\vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\} = \{f'(u) \cos v; f'(u) \sin v; g'(u)\}$$

$$\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\} = \{-f(u) \sin v; f(u) \cos v; 0\}$$

Endi bulardan foydalanib birinchi kvadratik forma koeffitsientlarini hisoblaymiz:

$$E = f'^2 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = f'^2.$$

Shunday qilib, aylanma sirtning birinchi kvadratik formasi quyidagicha bo'ladi.

$$I = (f'^2 + g'^2)du^2 + f'^2 dv^2. \quad (2.11)$$

3. Nihoyat, endi sirt $F(x, y, z) = 0$ oshkormas ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning birinchi kvadratik formasini xisoblash masalasini ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, sirta Riman metrikasi (birinchi kvadratik formasi) – bu oddiy $dx^2 + dy^2 + dz^2$ kvadratik formadir. Shuning uchun, avvalo $F(x, y, z) = 0$ to'la differensialini topsak,

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

bo'ladi.

Agar qarayotgan sirtning barcha nuqtalarida $F_z \neq 0$ bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglikdan quyidagi

$$dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $F(x, y, z) = 0$ sirtida $x = u, y = v$ desak,

$$dx^2 + dy^2 + \left(-\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy\right)^2$$

hosil bo'ladi. Endi uni soddalashtirsak

$$\left(1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2\right) dx^2 + 2 \frac{F_x F_y}{F_z^2} dx dy + \left(1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2\right) dy^2$$

tenglikga ega bo'lamiz.

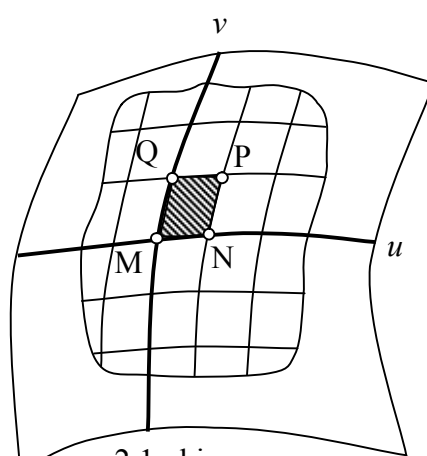
Shunday qilib, birinchi kvadratik forma koeffitsientlari quyidagicha ekan,

$$E = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2, \quad F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad G = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2. \quad (2.12)$$

2.5 §. SIRTDAGI SOHA YUZI

Sirt ustidagi yopiq chiziqli bilan chegaralangan D soha berilgan bo'lsin. D sohadagi nuqtalardan soni chekli koordinat chiziqlarni o'tkazamiz. Bu soha egri chiziqli ikki xil to'rtburchakka ajraladi:

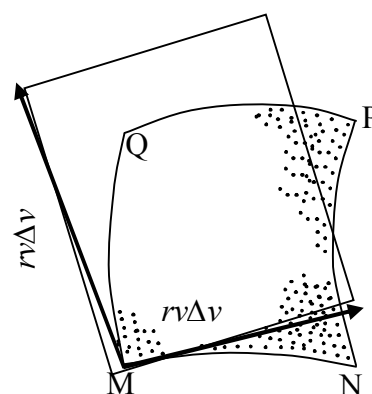
1) To'liq to'rtburchaklar (bunday to'rtburchaklarning ikki tomoni u chiziqlar bilan va qolgan ikki tomoni v chiziqlar bilan chegaralangan). 2.1 – chizmada bunday to'rtburchaklardan biri $MNPQ$ katta qilib ko'rsatilgan;



2.1-chizma

2) To'liqsiz to'rtburchaklar. Bu ko'rinishdagi to'rtburchaklarning har biri sirt ustidagi sohani chegaralaydigan chiziqni ham qisman qoplaydi. To'rtburchaklarning har biri kichrayib borganda, to'liqsiz to'rtburchaklarning sohani chegaralaydigan chiziqqa yaqinlashadi va bu to'rtburchaklarning hammasini eni nolga intiladigan yopiq tasma ichiga joylashtirish mumkin bo'ladi. Shu sababli ikkinchi ko'rinishdagi to'rtburchaklarni e'tiborsiz qoldiramiz.

2.2 – chizmadagi egri chiziqli to'rtburchaklarni tekshiraylik. Bunda MN va PQ tomonlari u chiziqlarga qarashli. NP va MQ tomonlar esa v chiziqlarga qarashlidir. To'rtburchak uchlarining koordinatalari: $(u; v)$, $N(u + \Delta u, v)$, $Q(u, v + \Delta v)$, $P(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Shuning



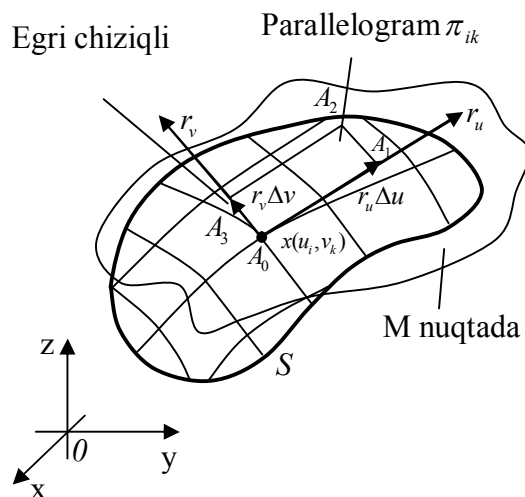
2.2-chizma

uchun $\overrightarrow{OM} = r(u, v), \overrightarrow{ON} = r(u + \Delta u, v), \overrightarrow{OP} = r(u + \Delta u, v + \Delta v), \overrightarrow{OQ} = r(u, v + \Delta v)$ bo'lib,

$$\overrightarrow{MN} = r(u + \Delta u, v) - r(u, v).$$

Chekli orttirmalar teoremasiga asosan, $\overrightarrow{MN} = \Delta u \cdot r_u(u + \Delta u, v)$.

Agar birinchi tartibidan yuqori cheksiz kichiklarni e'tiborga olmasak, $\overrightarrow{MN} \cong r_u \cdot \Delta u$ bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $\overrightarrow{MQ} \cong r_v \cdot \Delta v$, $\overrightarrow{MN} \cong |\overrightarrow{MN}| \cong |r_u| \cdot \Delta u$ va $\overrightarrow{MQ} \cong |\overrightarrow{MQ}| \cong |r_v| \cdot \Delta v$ bo'lgani uchun egri chiziqli to'rtburchakning yuzi o'rniga tomonlari $r_u \cdot \Delta u$ va $r_v \cdot \Delta v$ vektorlardan iborat to'g'ri chiziqli parallelogrammning yuzini



2.3-chizma

olamiz, ya'ni egri chiziqli $MNPQ$ to'rtburchakning yuzi deb $r_u \cdot \Delta u$ va $r_v \cdot \Delta v$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini qabul qilamiz. Bu parallelogram sirtning M nuqtasidagi urinma tekislikda bo'lib, uning yuzi ushbuga teng;

$$\Delta\sigma = |[r_u \times r_v]| \Delta u \Delta v$$

yoki

$$\Delta\sigma = \sqrt{(r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)(r_v \cdot r_u)} \Delta u \Delta v = \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v.$$

Demak, $\Delta\sigma$ yuz sirtning birinchi kvadratik formasining E, G, F koeffitsiyentlari orqali ifodalanadi.

$\sqrt{EG - F^2}$ qiymat $|[r_u \times r_v]|$ qiymatga teng bo'lgani uchun, u hamma vaqt noldan kattadir (oddiy nuqtada u noldan farqli).

Shunday qilib, har bir egri chiziqli to'rtburchakning yuzi o'rniga to'g'ri chiziqli parallelogrammning yuzini olamiz. Sohaga tegishli bo'lgan hamma parallelogrammlar yuzlarining yig'indisini tuzaylik:

$$\sum \Delta\sigma = \sum \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v. \quad (2.13)$$

Har bir Δu va Δv qiymatlarni nolga intiltiramiz. Bu holda egri chiziqli to'rtburchaklarning soni cheksizlikka intilib, har birining yuzi nolga intiladi. (2.13) dan limit olamiz. Sirt ustidagi D sohaning yuzi deb (2.13) yig'indining limitiga aytamiz:

$$S = \lim \sum \Delta\sigma = \lim \sum \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v.$$

Karrali integrallar nazariyasiga asosan, $\lim \sum \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v$ ning qiymati sirdagi egri chiziqli koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmasdan, faqat sohaning shakliga bog'liq bo'lib, $\sqrt{EG - F^2}$ dan olingan ikki o'lchovli integralga teng:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2.14)$$

Natija 2.7. Sirt ustidagi egri chiziqli koordinatalar sistemasiga nisbatan E, F va G qiymatlarini u, v orqali aniqlash kifoyadir. E, F va G qiymatlarni aniqlash uchun, sirtning shaklini bilish shart emas.

Endi sirtning har xil ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilganda uning yuzini hisoblash usullarini keltiramiz:

Teorema 2.8. Agar sirt uzluksiz funksiya $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ grafigi bo'lgan holda berilgan bo'lsa, bu holda sirt yuzi quyidagicha hisoblanadi;

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

Isbot. Sirt $z = f(x, y)$ ko'rinishda berilgani uchun unda quyidagiga almashtirish olamiz yani (u, v) koordinatalar sistemasiga o'tamiz;

$$u = x, \quad v = y, \quad \vec{r}(u, v) = (x, y, f(x, y))$$

bundan esa,

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = \{1, 0, f'_x\}$$

$$\vec{r}_v = \vec{r}_y = \{0, 1, f'_y\}$$

bo'ladi. Bulardan foydalanib birinchi kvadratik formaning koeffitsientlarini topamiz,

$$E = \vec{r}_x^2 = 1 + f_x'^2, \quad G = \vec{r}_y^2 = 1 + f_y'^2, \quad F = (\vec{r}_x \cdot \vec{r}_y) = f'_x f'_y$$

bo'ladi.

Shuning uchun (2.14) formulaga ko'ra

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy,$$

bo'ladi.

Teorema 2.9. Agar sirt $F(x, y, z) = 0$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lib, sirdagi U soha bir qiymatli ravishda (x, y) tekislikning D sohasiga proeksiyalangan bo'lsa, uholda

$$S = \iint_D \frac{|\text{grad} F|}{|F_z|} dx dy$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\text{grad} F = \{F_x; F_y; F_z\}$ va

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

bo'lib, u U sohadagi (x, y, z) nuqtalarda noldan farqli ya'ni $F_z \neq 0$.

Isbot. Oldingi paragrafdagi (3) formulaga ko'ra

$$E = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2, \quad F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad G = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2$$

bo'lgani uchun,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2\right) - \left(\frac{F_x F_y}{F_z^2}\right)^2}$$

bo'ladi. Endi uni soddalashtirib quyidagi tenglikni hosil qilamiz,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} = \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}$$

$\text{grad}F = \{F_x; F_y; F_z\}$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikni

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{|\text{grad}F|}{|F_z|}$$

yo'zish mumkin. Demak, sirt yuzi S uchun

$$S = \iint_D \frac{|\text{grad}F|}{|F_z|} dx dy$$

tenglik o'rinli ekan.

2.6 §.

SOHA YUZIGA DOIR MISOLLAR

Endi biz sirtidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzalarini sirtning birinchi kvadratik formasi yordamida xisoblaymiz.

Misol 1. Ushbu

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

to'g'ri gelikoidada $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak yuzini hisoblang

Echish. Biz avvalo $S: \{x = u \cos v, y = u \sin v, z = av\}$ sirtning birinchi kvadratik formasini topamiz. Buning uchun bizga birinchi tartibli xususiy hosillar kerak bo'ladi, shuning uchun

$$\begin{cases} x_u = \cos v \\ y_u = \sin v \\ z_u = 0 \end{cases} \begin{cases} x_v = -u \sin v \\ y_v = u \cos v \\ z_v = a \end{cases}$$

bo'ladi. Endi bulardan foydalanib birinchi kvadratik formaning koeffitsientlarini hisoblaymiz ya'ni,

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v + 0 = 0$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$$

Demak, berilgan sirtning birinchi kvadratik formasi

$$I = dr^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

ko'rinishda bo'lar ekan. Endi bulardan foydalanib, $EG - F^2$ ni hisoblaymiz

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

Masala shartiga ko'ra integrallash chegarasi $D = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 1\}$ bo'ladi. Endi oldingi paragrafdagi (2.14) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{\substack{0 \leq u \leq a \\ 0 \leq v \leq 1}} \sqrt{u^2 + a^2} du dv = \int_0^1 dv \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} du = \\ &= \left(\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 + \frac{a^2}{2} [\ln[(\sqrt{2} + 1)a] - \ln a] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 + \frac{a^2}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Shunday qilib, berilgan chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzi

$$S = [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \frac{a^2}{2}$$

bo'lar ekan.

Misol 2. Birinchi kvadratik formasi

$$dr^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

bo'lgan sirtida $u = \pm av$, $v = 1$ egri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak yuzini toping.

Echish. Sirt o'zining kvadratik formasi bilan berilgani uchun uning koeffitsientlari $E = 1$, $F = 0$ va $G = u^2 + a^2$ bo'lib,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

bo'ladi. Soha yuzidagi ikki karrali integralning integrallash sohasi $D = \{0 \leq v \leq 1, -av \leq u \leq av\}$ bo'lgani uchun;

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_{\substack{0 \leq v \leq 1 \\ -av \leq u \leq av}} \sqrt{u^2 + a^2} dudv = \int_0^1 dv \int_{-av}^{av} \sqrt{u^2 + a^2} du$$

bo'ladi. Bu integralni xisoblash ancha murakkab bo'lgani uchun unda integrallash chegarasini o'zgartiramiz. U holda

$$S = \iint_{\substack{0 \leq v \leq 1 \\ -av \leq u \leq av}} \sqrt{u^2 + a^2} dudv = \iint_{\substack{-a \leq u \leq a \\ \frac{1}{a}|u| \leq v \leq 1}} \sqrt{u^2 + a^2} dudv$$

hosil bo'ladi. Endi bu integralni karrali integralga keltiramiz:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a du \int_{\frac{1}{a}|u|}^1 \sqrt{u^2 + a^2} dv = \int_{-a}^a \sqrt{u^2 + a^2} du \int_{\frac{1}{a}|u|}^1 dv = \\ &= \int_{-a}^a \left(1 - \frac{1}{a}|u|\right) \sqrt{u^2 + a^2} du = 2 \int_0^a \left(1 - \frac{1}{a}u\right) \sqrt{u^2 + a^2} du = \\ &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{1}{a}u\right) \sqrt{u^2 + a^2} du = 2 \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} du - \frac{2}{a} \int_0^a u \sqrt{u^2 + a^2} du. \end{aligned}$$

Endi hosil bo'lgan bu integrallarni aloxida hisoblaymiz. Avvalo birinchi integralni hisoblaylik

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} du &= \left(\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 + \frac{a^2}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Endi ikkinchi integralni hisoblaymiz;

$$\begin{aligned}\int_0^a u\sqrt{u^2 + a^2} du &= \frac{1}{2} \int_0^a (u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} d(u^2 + a^2) = \frac{1}{3} (u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \right) a^3\end{aligned}$$

Bu hosil bo'lganlarni yuqoridagi S ga qo'yib, yuzani xisoblaymiz;

$$S = 2a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \right) - \frac{2}{a} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \right) a^3 = \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] a^2.$$

Misol 3. Ushbu $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$ sfera va uning ekvatori bilan chegaralangan sohaning yuzini aniqlang.

Echish. Sirtning tenglamasidan sohaning M nuqtasi uchun E, F va G qiymatlarni aniqlaymiz, buning uchun avvalo xususiy xosilalarni xisoblaymiz:

$$\begin{cases} x_u = -R \sin u \cos v \\ y_u = -R \sin u \sin v, \\ z_u = -R \cos u \end{cases} \quad \begin{cases} x_v = -R \cos u \sin v \\ y_v = R \cos u \cos v. \\ z_v = 0 \end{cases}$$

Endi E, F va G koeffitsientlarni xisoblaymiz:

$$E = R^2 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + R^2 \cos^2 u = R^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) = R^2$$

$$F = R^2 \cos u \sin u \cos v \sin v - R^2 \cos u \sin u \cos v \sin v + 0 = 0$$

$$G = R^2 \cos^2 u.$$

Bularni kvadratik formadagi (2.9) formulaga qo'yib, ikki karrali integralni hisoblaymiz. Birinchi integralning chegarasi 0 dan 2π gacha va ikkinchi integralning chegarasi esa 0 dan $\pi/2$ gacha bo'lgani uchun:

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_{\substack{0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq v \leq 2\pi}} \sqrt{R^2 \cdot R^2 \cos^2 u - 0} dudv = \\
&= \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos u du = 2\pi R^2 \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2.
\end{aligned}$$

Buning to'g'riligi bizga elementar geometriya kursidan ham ma'lum.

Sirt ustidagi sohaning yuzi tushunchalari sofgeometrik xarakterga ega bo'lgani uchun ular sirt ustida egri chiziqli koordinatalarni tanlashga, chiziqqa qanday ichki siniq chizilishiga yoki sohani parallelogramlarga bo'lish usuliga bog'liq emas.

2.7 §. SOHA YUZI MAPLE DASTURI YORDAMIDA

Misol 1. Ushbu

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

to'g'ri gelikoidada $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak yuzini hisoblang.

Echish.

```
>restart;
>"BIRINCHI KVADRATIK FORMA";
      "BIRINCHI KVADRATIK FORMA
>x:=u*cos(v);
      x:=u*cos(v)
>y:=u*sin(v);
      y:=u*sin(v)
>z:=a*v;
      z:=a*v
>E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2, trig);
      E:=1
>F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
      F:=0
>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2, trig);
      G:=u^2+a^2
>I=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);
      I=du^2+(u^2+a^2)dv^2
>"Yuqoridagi birinchi kvadratik forma";
      "Yuqoridagi birinchi kvadratik forma
>"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan
berilgan bulsa)";
      "SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bul
```



```

>restart;
>a>0;

                                 $0 < a$ 

>E:=1;

                                 $E := 1$ 

>F:=0;

                                 $F := 0$ 

>G:=u^2+a^2;

                                 $G := u^2 + a^2$ 

>S:=simplify(int(int(sqrt(E*G-F*F),u=0..a),v=0..1),trig);

                                 $S := \frac{1}{2} a \sqrt{2} \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(a + \sqrt{2} \sqrt{a^2}) - \frac{1}{4} a^2 \ln(a^2)$ 

>"eslatma : oraliqni uzingiz quyig"yechim bir xil chiqmasa
soddalashtiring";
                                "eslatma : oraliqni uzingiz quyig"yechim bir xil chiqmasa soddalashtiri

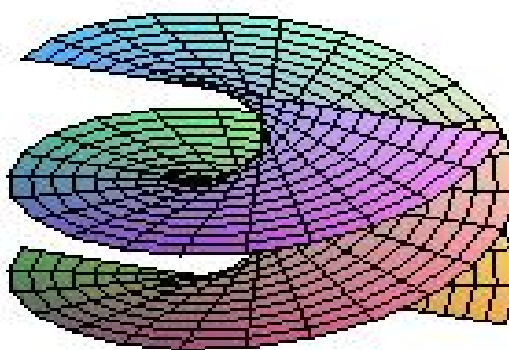
>restart;

>"GRAFIK KURINISHI";

                                "GRAFIK KURINISHI"

>plot3d([u*cos(v),u*sin(v),5*v],u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi);

```



Misol 2. Birinchi kvadratik formasi

$$dr^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

bo'lgan sirtida $u = \pm av$, $v = 1$ egri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak yuzini toping.

Echish.

```
>"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan
berilgan bulsa)";
```

```
"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bul
```

```
>restart;
```

```
>a>0;
```

$$0 < a$$

```
>E:=1;
```

$$E := 1$$

```
>F:=0;
```

$$F := 0$$

```
>G:=u^2+a^2;
```

$$G := u^2 + a^2$$

```
>S:=simplify(int(int(sqrt(E*G-F*F),u=-a*v..a*v),v=0..1),trig);
```

$$S := \frac{1}{6} \frac{4 \sqrt{2} (a^2)^{(3/2)} - 6 a^2 \sqrt{2} \sqrt{a^2} + 3 a^3 \ln(a + \sqrt{2} \sqrt{a^2}) - 3 a^3 \ln(-a + \sqrt{2} \sqrt{a^2}) + 4 a^2}{a}$$

```
>"eslatma : oraliqni izingiz quyding"yechim bir xil chiqmasa
soddalashtiring";
```

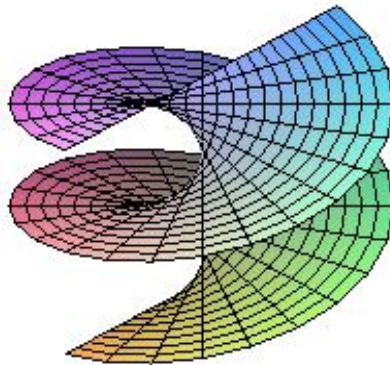
```
"eslatma : oraliqni izingiz quyding"yechim bir xil chiqmasa soddalashtiri
```

```
>restart;
```

```
>"GRAFIK KURINISHI";
```

```
"GRAFIK KURINISHI"
```

```
>plot3d([u*cos(v),u*sin(v),5*v],u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi);
```



Misol 3. Ushbu $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$ sfera va uning ekvatori bilan chegaralangan sohaning yuzini aniqlang.

Echish.

```
>restart;
```

```
>"BIRINCHI KVADRATIK FORMA";
```

```
"BIRINCHI KVADRATIK FORMA"
```

```
>x:=R*cos(v)*cos(u);
```

$$x := R \cos(v) \cos(u)$$

```
>y:=R*sin(v)*cos(u);
```

$$y := R \sin(v) \cos(u)$$

```
>z:=R*sin(u);
```

$$z := R \sin(u)$$

```
>
```

```
>E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2,trig);
```

$$E := R^2$$

```
>F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
```

$$F := 0$$

```
>
```

```
>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2,trig);
```

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

```
>I=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);
```

$$I = R^2 du^2 + R^2 \cos(u)^2 dv^2$$

>"Yuqoridagi birinchi kvadratik forma";

"Yuqoridagi birinchi kvadratik forma

>

>"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bulsa)";

"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bul

>restart;

>a>0;

$$0 < a$$

>E:=R^2;

$$E := R^2$$

>F:=0;

$$F := 0$$

>G:=R^2*cos(u)^2;

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

>S:=simplify(int(int(sqrt(E*G-F*F),u=0..Pi/2),v=0..2*Pi),trig);

$$S := 2 \frac{R^4 \pi}{\sqrt{R^4}}$$

>"eslatma : oraliqni uzingiz quyig"yechim bir xil chiqmasa soddallashtiring";

"eslatma : oraliqni uzingiz quyig\"yechim bir xil chiqmasa soddallashtiri

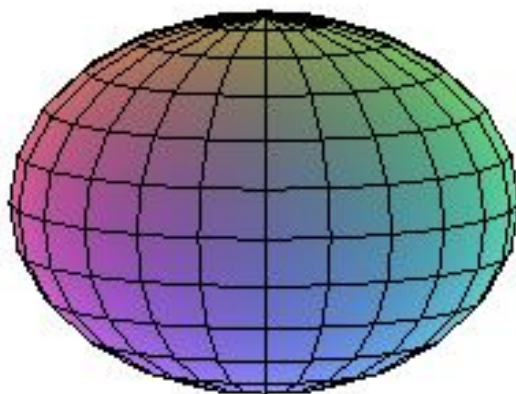
>

>restart;

>"GRAFIK KURINISHI";

"GRAFIK KURINISHI"

>plot3d([5*cos(v)*cos(u),5*sin(v)*cos(u),5*sin(u)],u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi);



X U L O S A

O'zbekiston Respublikasi 22 yil mustaqil rivojlanishi davomida xalq xo'jaligining barcha labxalarida chuqur isloxotlarni amalga oshirmoqda.

Jumladan, ta'lim, sohalarida tubdan isloxotlar amalga oshirilmoqda, fanlarning mazmun mohiyatiga, salohiyatiga, uzviy bog'lanishlarga, rejalarga va xususan darsliklarning saviyalariga juda katta e'tibor berilmoqda. Yaqin yillarda har bir fanlar bir necha variantlardagi darsliklar chop etiladi va chop qilinmoqda va o'qituvchilar dars saviyasini ko'tarish maqsadida turli xil darsliklardan va hozirgi zamon texnologiyalaridan foydalanishlariga to'g'ri keladi.

Ushbu malakaviy bitiruv ishidan shunday xulosa kelib chiqadi, oliy ta'lim yurtlarida differensial geometriya va matematik analiz fanlarini o'qitish jarayonida soha yuzalarini hisoblashda ikki karrali integrallardan foydalanib, soha yuzalari hisoblaniladi. Albatta ko'pgina (sirtidagi) soha yuzalarini hisoblashda bu sirtning tasvirlanishi va yundagi sohani ko'rinishini doskada chizib tasvirlab berish o'qituvchidan rassomlik qobiliyatini talab qiladi. Demak biz qolaversa yosh

o'qituvchilar bunday masalalarni yechishda hozirgi zamon texnologiyalaridan foydalanib dars o'tsalar bunday noqulayliklardan xolos bo'lishlari mumkin.

Shuning uchun ham biz ushbu malakaviy bitiruv ishida yuqoridagi masalalarni MAPLE dasturidan foydalangan holda sirdagi soha yuzalarini bu dasturdan foydalangan holda bir nechta misollar yechib ko'rsatdik.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Собиров М.А., Юсупов А.Ё. Дифференциал геометрия курси. «Ўқитувчи» нашриёти – 1965 й.
2. Позняк Э.Г., Шикин Е.Н. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. –М.: Изд-во МГУ, 1990. - 384 с.
3. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Изд-во МГУ, 1981–184 с.
4. Босс В. Лекции по математике: Анализ Москва УРСС, 2004. – 216 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика 3. – М.: ДРОФА 2004.
6. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003.

Internet resurslar:

1. <http://lib.mexmat.ru;>
2. [http://www.mcce.ru,](http://www.mcce.ru)

3. <http://lib.mexmat.ru>
4. www.ziyonet.uz
5. www.exponenta.ru