

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI

MEXANIKA - MATEMATIKA FAKULTETI

“Algebra va geometriya” kafedrası

Raximov Umid

“Kompakt ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflash”

“5460100 – matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha

bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar : G'.A.Xasanov

2016 yil “__” _____

Bitiruv malakaviy ishi “Algebra va geometriya” kafedrasida bajarildi.

Kafedraning 2016 yil “__” maydagi majlisida muhokama qilindi va
himoyaga tavsiya etildi (10 – bayonnoma).

Fakultet dekani : prof.H.H.Ro'zimurodov

Kafedra mudiri: dots.G'.A.Xasanov

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2016 yil “__” iyundagi majlisida himoya
qilindi va ____ ball bilan baholandi. (__ - bayonnoma).

YaDAK raisi: _____

A'zolari: _____

Samarqand - 2016

MUNDARIJA

Kirish	3
I – bob. METRIK VA TOPOLOGIK FAZO	5
1 - §. Metrik fazotushunchasi.	5
2 - §. Topologikfazo	10
3 - §. Uzliksiz akslantirishlar va gomeomorfizm.	14
4 - §. Ajraluvchanlik. Kompaktlik. Bog'lamlilik	15
I bob uchun Xulosa.	17
II – bob. KO'PXILLIKLARNI SINFLASH	18
1 - §. Asosiy tushunchalar.	18
2 - §. Ko'pxilliklarga doir oddiy misollar	32
3 - §. Koordinatalarni almashtirish funksiyasi	34
4 - §. Silliqlik ko'pxillik ta'rifi	35
5 - §. Silliqlik akslantirishlar. Diffeomorfizm	37
6 - §. k – o'lchovli chegarali ko'pxillik	39
7-§. Xonali ajratish haqidagi tushuncha. Ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi. . 41	
8 - §. Yo'nalishli va yo'nalishsiz k o'lchovli ko'pxilliklar.	43
9- §. Kompakt ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflash.	45
II bob uchun Xulosa.	47
Adabiyotlar ro'yxati	49

KIRISH

Masalaning qo'yilishi: Ushbu malakaviy bitiruv ishi differensial geometriyaning ko'pxilliklar nazariyasiga bag'ishlangan bo'lib, unda asosan ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflash masalasi qaralgan.

Mavzuning dolzarbligi: Bizga ma'lumki differensial geometriya va topologiya matematikaning muhim bo'limlaridan biridir. XX – asrda fizika va mexanikaning taraqqiyoti bu fanlardagi geometrik tassavurning naqadar muhimligini ko'rsatdi.

Koordinatalar sistemasi yordamida differensial va integral hisob usullarini yechishda qo'llashimiz mumkin. Shuning uchun geometriyada differensiallanuvchi yoki silliq funksiyalar tushunchasi differensiallash va integrallash amallari o'rinli bo'ladigan fazolar alohida bo'lim qilib o'rganiladi.

Qaralayotgan fazonong barcha nuqtalari uchun yagona bo'lgan koordinatalar sistemasini yasashda harakat qilishdan voz kechish va fazoning turli qismlari uchun o'z koordinata sistemasi bo'lishiga erishish lozim. Bu konstruksiyaning qat'iy bayoni geometriyada maxsus tushuncha bo'lgan ko'pxillikka olib keladi. Shu sababli malakaviy bitiruv ishida ko'pxillik tushunchasi o'ranilib, shu asosda ikki o'lchovli kompakt ko'pxilliklarni sinflash masalasi qaralgan.

Ishning maqsad va vazifalari: Topologiyada ixtiyoriy ikki o'lchovli kompakt ko'pxillik va ixtiyoriy ikki o'lchovli chekkali kompakt ko'pxillikni xonalar chekli to'plamiga yoyish mumkin va bunday yoyilmani ko'pgina usullar bilan bajarish mumkin. Ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi uning xonali yoyilmasi tanlanishiga bog'liq emasligini isbotlangan.

Berilgan ko'pxillik yo'nalishli yoki yo'nalishsiz ekanligini qanday bilish mumkin? degan savolga javob axtaramiz. Ma'lumki, ko'pxillikning yo'nalishli bo'lish xossasi gomeomorfizmlarda saqlanadi.

Ko'pxillikning yo'naltirishga tekshirganda uning ixtiyoriy xonali yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ko'pxilliklarning Eyler xarakteristikalarini aniqlash bilan kompakt ko'pxilliklar gomeomorflikgi masalalari o'rganiladi.

Ishning tuzilishi: Ushbu malakaviy bitiruv ishi ikkita bobdan iborat bo'lib u 13 ta paragraf, xulosa va adabiyotlar royxatini o'z ichiga oladi.

Ishning ilmiy ahamiyati: Malakaviy bitiruv ishi referatif harakterga ega.

Ishning amaliy ahamiyati: Hozirda differensial geometriya fani nisbiylik nazariyasi, mexanika, elektrodinamika matematikaning ko'pgina bo'limlari va boshqa fanlardagi asosiy ish qurolidir.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni: I bob differensial geometriya va topologiyaning asoslariga bag'ishlangan. U metrika va umumiy topologiyaning elementlarini asosiy tushunchalarini o'z ichiga oladi [2,3,4,7].

I bobning birinchi paragrafida metrik fazo ta'riflari, ochiq va yopiq to'plamlar tushunchalari va xossalari keltirilgan.

Bu bobning qolgan uchta paragrafi umumiy topologiyaning elementlarini asosiy tushunchalarini qamrab olgan.

Ma'lumki matematik analizda son argumentli uzliksiz funksiyalar katta rol o'ynaydi. Ularning umumlashmasi bo'lib uzliksiz akslantirishlar hisoblanadi, ular geometriyada muhim ahamiyatga ega [2,7].

I bobning uchinchi paragrafida uzliksiz akslantirish va gomeomorfim va ularning xossalari o'rganilgan.

Bu bobning to'rtinchi paragrafida biz matematikada eng muhim bo'lgan uchta topologik fazolar sinflari o'rganiladi ya'ni topologiyaning ajraluvchanlik, kompaktlik va bog'lamlilik tushunchalariga bag'ishlangan [6].

Malakaviy bitiruv ishining II bobida ko'pxillik tushunchasi, silliq ko'pxillik va koordinatalarni almashtirish funksiyasi hamda ko'pxilliklarni tenglamalar bilan berilishi masalalari qaralgan va u to'qqista paragrafni o'z ichiga oladi. [1,5,6].

Bu bobning birinchi va ikkinchi paragraflarida asosiy tushunchalar va har xil ko'pxilliklarga doir misollar ya'ni cherali, chegarasiz va kompakt ko'pxilliklarga doir misollar ko'rib chiqilgan.

Oltinchi va ettinchi paragraflar k – o'lchovli chegarali ko'pxillik va xonali ajratish haqida tushinchasi hamda ko'pxillikning Eyler xarakteristikasiga bag'ishlangan [6].

Bu bobning to'qqizinchi paragrafi esa kompakt ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflashga bag'ishlangan [5,6].

I BOB.

METRIK VA TOPOLOGIK FAZO

Differensial geometriya va topologiya matematikaning muhim bo'limlaridan biridir. XX – asrda nazariy fizika va mexikaning taraqqiyoti bu fanlardagi geometrik tassavurning naqadar muhimligini ko'rsatdi. Hozirda bu fan nisbiylik nazariyasi, mexanika, elektrodinamika, va boshqa fanlardagi asosiy ish qurolidir.

Hozirgi nuqtai nazardan differensial geometriya va topologiya fani quyidagi asosiy g'oyalarga asoslangandir:

umumiy topologiya – geometriyaning bu bo'limida yaqinlashish va akslantirishlarning barcha umumiy xossalari o'rganiladi;

egri chiziqli koordinatalar sistemasi g'oyasi pirovard natijada tenzorlar analizi va invariantlar nazariyasiga olib keladi;

agar matematik analiz va differensial tenglamalar fanlarida funksiyalar asosan, «kichik» (lokal) atrofda o'rganilsa, geometriyada esa «katta» (global) atroflarda o'rganiladi, bu g'oya yevklid fazosidagi sohaning umumlashmasi «ko'p xillik» (mnogoobraziya) tushunchasiga olib keladi.

Ushbu bob differensial geometriya va topologiyaning asoslariga bag'ishlangan. U metrika va umumiy topologiyaning elementlarini asosiy tushunchalarini o'z ichiga oladi.

1 §.

METRIK FAZO TUSHUNCHASI

Bizga M – ixtiyoriy to'plam bo'lsin.

Ta'rif 1.1. Agar ushbu funksiya $\rho: M \times M \rightarrow R_+ = [0, +\infty)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in M$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y \in M$

qanoatlantirsa, ρ funksiyaga M da aniqlangan metrika (masofa) deyiladi, $\rho(x, y)$ son x va y nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.

(M, ρ) juftlik esa metrik fazo deyiladi.

Yuqoridagi 2 va 3 aksiomalar mos ravishda simmetriklik va uchburchak aksiomasi deyiladi [1,2,3].

Agar $M = R$ deb olsak $\rho(x, y) = |x - y|$ formula $R = (-\infty, +\infty)$ da masofani aniqlaydi. Umuman $M = R^n$ da ushbu formula masofani aniqlaydi.

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (1.1)$$

bu erda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Bu metrika odatdagi metrika yoki yevklid metrikasi deb aytiladi.

R^n da boshqa metrikalarni quyidagi formulalar

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad (1.2)$$

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| \quad (1.3)$$

orqali ham aniqlash mumkin.

Umuman, ixtiyoriy M to'plamda

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases} \quad (1.4)$$

formula metrikani aniqlaydi va hosil bo'lgan metrika diskret metrika deyiladi.

Ochiq va yopiq to'plamlar, ularning xossalari.

(M, ρ) –metrik fazo bo'lsin.

Ushbu $B(x, r) = \{x \in M: \rho(x, x_0) < r\}$ to'plamga markazi x_0 nuqtada va radiusi r teng ochiq shar deyiladi.

$G \subset M$ to'plamning ixtiyoriy $y \in G$ nuqtasi uchun shunday $r > 0$ soni mavjud bo'lib, $B(y, r) \subset G$ bo'lsa, G to'plam ochiq to'plam deyiladi.

Agar $y \in N$ nuqta uchun shunday $r > 0$ soni topilib, $B(y, r) \subset N$ bo'lsa, N to'plam y nuqtaning atrofi deyiladi.

$E \subset M$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $r > 0$ soni uchun $B(x, r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ bo'lsa, x nuqta E to'plamning limitik nuqtasi deyiladi.

Agar $F \subset M$ to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa u yopiq to'plam deyiladi.

Agar $x \in E$ nuqta uchun E to'plam atrof bo'lsa, x nuqta E ning ichki nuqtasi deyiladi.

Teorema 1.1. (M, ρ) metrik fazo bo'lsin, u holda quyidagi tasdiqlar o'rinli;

1. $U \subset M$ to'plamning ochiq bo'lishi uchun $M \setminus U$ ning yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. $x_n \rightarrow x$ bo'lishi uchun x nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, barcha $n > n_0$ uchun $x_n \in V$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

3. Ixtiyoriy to'plamning ichki nuqtalari to'plami ochiq to'plamdir.

4. E to'plamning barcha limitik nuqtalarini qo'shishdan hosil bo'lgan to'plam yopiqdir. Bu E to'plamning yopig'i deyiladi va $\bar{E}$ kabi belgilanadi.

5. $V \subset M$ to'plamning ochiq bo'lishi uchun V ning har bir nuqtasi ichki nuqta bo'lishi zarur va yetarlidir.

6. Metrik fazodagi ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlarning yigindisi yana ochiq to'plam, chekli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi yana ochiq to'plam

7. Metrik fazodagi ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yana yopiq to'plamdir.

Isboti. (1) $V \subset M$ ochiq to'plam bo'lsin. U holda $\forall x \in U$ uchun $\exists r > 0, B(x, r) \subset U$ bo'ladi. Demak, $B(x, r) \cap (M \setminus U) = \emptyset$ ya'ni x nuqta $M \setminus U$ to'plam uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Shu sababli $M \setminus U$ ning barcha limitik nuqtalari o'ziga tegishlidir, ya'ni $M \setminus U$ to'plam yopiq to'plamdir.

Endi $M \setminus U$ to'plam yopiq bo'lsin, ya'ni $M \setminus U$ o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlaydi ya'ni $\forall x \in U$ nuqta $M \setminus U$ uchun limitik nuqta emas, demak $\exists r > 0$ uchun $B(x, r) \cap (M \setminus U) = \emptyset$ bo'ladi, bu yerdan esa $B(x, r) \subset U$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni U ochiq to'plam ekan [2,3].

Bizga biror X to'plam va uning qism to'plamlaridan tuzilgan τ sistema berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.2. Agar X to'plamning qism to'plamlaridan tuzilgan τ sistema quyidagi:

- 1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
- 2) τ dan olingan ixtiyoriy sondagi to'plamlarning yigindisi yana τ ga tegishli:

$$G_\alpha \in \tau, \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$$

- 3) τ dan olingan chekli sondagi to'plamlarning kesishmasi yana τ ga tegishli:

$$G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \in \tau$$

shartlarni qanoatlantirsa, τ ga X dagi topologiya deyiladi, τ ning elementlari ochiq to'plamlar deyiladi, (X, τ) esa topologik fazo deyiladi.

Ochiq to'plamlarning to'ldiruvchilari yopiq to'plamlar deyiladi.

Quyidagi ikkilik munosabatlari:

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (X \setminus G_{\alpha}), \quad X \setminus \left(\bigcap_{\alpha} G_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (X \setminus G_{\alpha})$$

dan yopiq to'plamlarning ushbu xossalari kelib chiqadi:

- 1) $\emptyset$ va X yopiq to'plam.
- 2) Yopiq to'plamlarning ixtiyoriy sondagi kesishmasi yopiq to'plamdir.
- 3) Yopiq to'plamlarning chekli sondagi yig'indisi yana yopiq to'plamdir.

Atroflar. To'plamning yopig'i.

Topologik fazoda ham metrik fazodagi kabi ba'zi asosiy tushunchalar kiritiladi. X topologik fazo bo'lsin. $x \in X$ nuqtaning atrofi deb x nuqtani saqlovchi ixtiyoriy ochiq to'plamga aytiladi.

To'plamni saqlovchi ochiq to'plam esa to'plamning atrofi deyiladi. Agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofi Y to'plam bilan bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsa, x nuqta Y to'plamning urinish nuqtasi deyiladi. Y to'plamning barcha urinish nuqtalari to'plami $\bar{Y}$ kabi belgilanib, Y to'plamning yopig'i deb aytiladi.

Agar nuqta Y to'plamda o'zining biror atrofi bilan yotsa, bu nuqta Y to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Y to'plamning barcha ichki nuqtalari to'plami $Int(Y)$ bilan belgilanadi [2,4].

Teorema 1.2. $Y \subset X$ to'plam yopiq (ya'ni ochiq to'plam to'ldiruvchisi) bo'lishi uchun $Y = \bar{Y}$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Y yopiq, ya'ni $X \setminus Y$ ochiq bo'lsin. U holda $X \setminus Y$ to'plam o'zining har bir nuqtasi uchun atrof bo'ladi. Shu sababli $X \setminus Y$ to'plamning hech bir nuqtasi Y to'plam uchun urinish nuqtasi bo'la olmaydi. Ya'ni $\bar{Y} \subset Y$ ikkinchi tomondan $Y \subset \bar{Y}$ bo'lganligi uchun $Y = \bar{Y}$ bo'ladi.

Aksincha, $Y = \bar{Y}$ bo'lsin, u holda agar $x \notin Y$ bo'lsa, x nuqta Y to'plam uchun urinish nuqtasi emas, ya'ni $V(x)$ atrof mavjud bo'lib, $V(x) \cap Y = \emptyset$, bu yerdan esa $V(x) \subset X \setminus Y$, ya'ni x nuqta $X \setminus Y$ to'plamning ichki nuqtasi ekanligi kelib chiqadi. Endi

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} V(x)$$

bo'lgani uchun $X \setminus Y$ ochiq to'plamdir.

Teorema 1.3. Ixtiyoriy Y to'plamning yopig'i $\bar{Y}$ yopiq to'plamdir.

Isboti. Oldingi teoreмага ko'ra $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$ ekanligini isbot qilish kerak. $\bar{Y} \subset \bar{\bar{Y}}$ ekanligi ravshandir. $\bar{\bar{Y}} \subset \bar{Y}$ ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy nuqta $x \in \bar{\bar{Y}}$ olamiz, ya'ni x nuqtaning ixtiyoriy atrofi $V(x)$ to'plam $\bar{Y}$ bilan bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega: $y \in \bar{Y} \cap V(x)$ bo'lsin, u holda $V(x)$ to'plam y nuqtaning atrofi bo'ladi. $y \in \bar{Y}$ bo'lganligi uchun $V(x)$ bilan Y ni ham kesishmasi bo'sh to'plamdan farqli bo'ladi. Demak x nuqta Y to'plam uchun ham urinish nuqta ekan, ya'ni $\bar{\bar{Y}} \subset \bar{Y}$.

Qism topologik fazo. Zich to'plamlar.

X topologik fazo, $Y \subset X$ qism to'plam, τ_X — X dagi topologiya bo'lsin. U holda $\tau_Y = \{G : G = G^1 \cap Y, G^1 \in \tau_X\}$, Y da topologiyani tashkil etadi va (Y, τ_Y) qism topologik fazo deyiladi, τ_Y esa τ_X topologiyaning Y dagi izi yoki Y dagi

indusirlangan topologiya deyiladi. Agar $Y \subset X$ to'plamning yopig'i $\bar{Y} = X$ bo'lsa, Y to'plam X da zich deyiladi [2].

Teorema 1.4. Y_1 va $Y_2 - X$ dagi ochiq va zich to'plamlar bo'lsin. U holda ularning kesishmasi $Y = Y_1 \cap Y_2$ ham X dagi zich va ochiq to'plam bo'ladi.

Isboti. Kesishmaning ochiqligi topologiya aksiomalaridan kelib chiqadi. Zichligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi $V(x)$ bo'lsin. Y_1 to'plam X da zich bo'lgani uchun $V(x) \cap Y_1 = \emptyset$ ya'ni $\exists y \in V(x) \cap Y_1$, $V(x) \cap Y_1 -$ ochiq to'plam va y nuqtani atrofi, $Y_2 -$ to'plam esa zich bo'lganligi sababli $(V(x) \cap Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$ yani Y to'plam X da zich ekan.

Agar X topologik fazo, Y esa uning qism topologik fazosi (indusirlangan topologiyaga nisbatan) bo'lsin. Agar $F \subset Y$ to'plam Y da yopiq ya'ni $Y \setminus F \in \tau_Y$ va $\bar{Y} = Y$ ya'ni Y to'plam esa X da yopiq (yani $X \setminus Y \in \tau_X$) bo'lsa, F to'plamning X da yopiq to'plam (yani $X \setminus F \in \tau_X$) ekanligini ko'rsatish mumkin.

3 §.UZLIKSIZAKSLANTIRISHLAR VAGOMEOMORFIZM

Ma'lumki matematik analizda son argumentli uzliksiz funksiyalar katta rol o'ynaydi. Ularning umumlashmasi bo'lib uzliksiz akslantirishlar hisoblanadi, ular geometriyada muhim ahamiyatga ega.

1. (X, τ) va (Y, τ) — topologik fazolar bo'lsin. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish $x \in X$ nuqtada uzliksiz deb ataladi, agar Y fazodagi $f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun X fazoda x nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, $f(U) \subset V$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Akslantirish uzliksiz deb ataladi, agar u x dagi har bir nuqtada uzliksiz bo'lsa.

Agar X va Y fazolar R son o'qi bo'lsa, bu ta'rif analizdan ma'lum bo'lgan uzliksiz $f(x)$ funksiya ta'rifiga o'tadi.

Quyidagi teorema akslantirishning uzliksizligi alomatini ifodalaydi.

Teorema 1.5. (X, τ) topologik fazoni (Y, τ) topologik fazoga f akslantirish uzliksiz bo'ladi faqat va faqat Y dagi ixtiyoriy ochiq to'plam proobrazi X da ochiq to'plam bo'lsa.

$f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzliksiz va $V \subset Y$ dagi qandaydir ochiq to'plam, ya'ni $V \in \tau$ bo'lsin. $f(x) \in V$ bo'lgan barcha $x \in X$ nuqtalar to'plami X fazoda ochiq bo'lishini, ya'ni $U \in \tau$ ekanligini isbotlaymiz.

Qandaydir $x_0 \in U$ nuqtani olamiz. $f(x_0) \in V$ bo'lgani uchun V to'plam $f(x_0)$ nuqtaning atrofi bo'ladi. Shartga ko'ra f akslantirish x_0 nuqtada uzliksiz. Shuning uchun x_0 nuqtaning shunday U_{x_0} atrofi mavjudki, $f(U_{x_0}) \subset V$ bo'ladi, lekin u holda $U_{x_0} \subset U$. Demak, U to'plam o'zining har bir nuqtasi bilan uning biror atrofini o'z ichiga oladi. Biz bilamizki, bunday xossaga faqat ochiq to'plamlar ega bo'ladi, va shuning uchun $U \in \tau$.

Aksincha: f akslantirishlarda ixtiyoriy ochiq to'plam proobrazi ochiq to'plam bo'lsin. f akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzliksiz bo'lishini isbotlaymiz. Qandaydir $x_0 \in X$ nuqtani va $f(x_0)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofini olamiz. Shartga ko'ra V to'plamning U proobrazi X da ochiq $x_0 \in U$ va $f(U) \subset V$ ga ega bo'lamiz. Demak, $f(x_0)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun shunday x_0 nuqtaning U atrofi topildiki, $f(U) \subset V$ o'rinli bo'ladi. Ta'rifga ko'ra bu akslantirish x_0 nuqtada uzliksiz ekanligini bildiradi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

2. Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirish o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzliksiz bo'lsa u holda f akslantirishga gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (yoki topologik akslantirishlar) deyiladi.

Demak, f gomeomorf akslantirish bo'lishi uchun u ikkita shartni qanoatlantirishi kerak:

- 1) f —biyeksiya,
- 2) f va f^{-1} — uzliksiz akslantirishlar.

Agar $f: X \rightarrow Y$ gomeomorfizm mavjud bo'lsa, u holda X va Y fazolar gomeomorf deb ataladi va u $X \sim Y$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, M topologik fazolar sinfinda $\sim$ munosabatga ega bo'lamiz. Bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivlik shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u M sinfdan ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

$M/\sim$ faktor to'plam elementlari topologik tiplar deb ataladi.

Ikki gomeomorf fazolar haqida ular topologik ekvivalent deb gapiramiz (ya'ni bitta topologik tipga tegishli bo'ladi). Gomeomorfizmlarda o'zgarmaydigan (X, τ) fazoning xossalari, topologik xossalari (yoki topologik invariantlar) deb ataladi. Bunday xossalar matematikaning topologiya bo'limida o'rganiladi [1,2,4].

Misol 1. ρ metrika bilan hosil qilingan topologiyaga ega E_3 uch o'lchovli Evklid fazosi va tabiiy topologiyali sonli uch o'lchovli R_3 fazoni qaraymiz. Agar E_3 fazoda $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda biyektiv $f: E_3 \rightarrow R^3$ akslantirish $f(M) = m$ qonun bo'yicha o'rnatiladi. Bu holda $M \in E_3, m \in R^3$, bunda $m = (x^1, x^2, x^3)$ bu yerda x^1, x^2, x^3 — M nuqtaning $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ sistemadagi koordinatalari. Bu akslantirish gomeomorfizm ekanligini isbotlaymiz.

$M_0 - E_3$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi, $m_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ uning obrazi bo'lsin. R^3 fazoda m_0 nuqtaning ixtiyoriy V_0 atrofini olamiz va m_0 nuqtani o'z ichiga olgan va V_0 atrofda joylashgan $V(a^i < x_0^i < b^i, i = 1, 2, 3)$ ochiq koordinat parallelopipedni qaraymiz. $\varepsilon = |a^i - x_0^i|, |b^i - x_0^i|, i = 1, 2, 3$ sonlaridan eng kichigi bo'lsin. U holda ravshanki, M_0 nuqtaning $U\varepsilon$ — atrofi uchun $f(u) \subset V \subset V_0$ ga ega bo'lamiz. Demak, f akslantirish M_0 nuqtada uzliksiz. $M_0 - E_3$ dagi ixtiyoriy nuqta bo'lganligi uchun f akslantirish uzliksiz bo'ladi.

Bayon etilgan tavsifdan ko'rinadiki, $f^{-1}: R^3 \rightarrow E_3$ ham uzliksiz bo'ladi, ya'ni f — gomeomorfizm. Shunday qilib, $E_3 \sim R^3$. Xuddi shunday usul bilan $E_2 \sim R^2$ va $E_1 \sim R^1$ munosabatlar ham isbotlanadi. Shunga o'xshash A_3 affin fazo R^3 son fazosiga gomeomorf, A_2 affin tekislik R^2 son fazosiga gomeomorf ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Misol 2. E_2 evklid tekisligida uchlari A va B nuqtalarda bo'lgan γ yarim aylana va $I = A_0B_0$ kesmani qaraymiz, bu yerda A_0 va B_0 — A va B nuqtalarning AB to'g'ri chiziqqa parallel γ yarim aylana d urinmasiga ortogonal proyeksiyalari.

E_2 yevklid tekislik topologiyasi γ to'plamda biror τ topologiyani, I to'plamda T topologiyani hosil qiladi va biz (γ, τ) va (I, T) topologik fazolarga ega bo'lamiz. Ular gomeomorf ekanligini isbotlaymiz.

$f - \gamma$ yarim aylananing A_0B_0 kesmaga ortogonal proyeksiyalash bo'lsin. Ravshanki, $f - o'$ zaro bir qiymatli akslantirish. Bu akslantirish uzliksiz bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun ixtiyoriy $M_0 \in \gamma$ nuqtani va uning $N_0 = f(M_0)$ obrazini qaraymiz. Oson ko'rish mumkinki, N_0 nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun M_0 nuqtaning shunday U atrofini ko'rsatish mumkinki, $f(U) \subset V$ o'rinli bo'ladi. Demak, f akslantirish M_0 nuqtada uzliksiz va $M_0 - \gamma$ dagi ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun, f akslantirish uzliksiz. f akslantirish holdagi kabi teskari f^{-1} akslantirish uzliksiz ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, uchlari bilan yarim aylana kesmaga gomeomorf. Shunga o'xshash uchlarsiz γ' yarim aylana uchlarsiz I' kesmaga gomeomorf ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

$O - \gamma$ yarim aylana markazi bo'lsin uchlarsiz γ' yarim aylanani d to'g'ri chiziqqa $g(P) = P_0$ qonun bo'yicha $g: \gamma' \rightarrow d$ akslantirishni qaraymiz, bu yerda $P_0 - OP$ nurning d to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi. Osongina ko'rish mumkinki, bu akslantirish gomeomorfizm bo'ladi. Ikkita $f^{-1}: I' \rightarrow \gamma'$ va $g: \gamma' \rightarrow d$ gomeomorfizmlarda f^{-1} kompozitsiyasi gomeomorfizm. Shunday qilib, uchlarsiz kesma to'g'ri chiziqqa gomeomorf.

Bundan $[a, b[$ son oralig'i R son o'qiga gomeomorf ekanligi kelib chiqadi. Shunga o'xshash quyidagi tasdiqlarni osongina asoslash mumkin:

- 1°. Chegarali yarimsfera yopiq doiraga gomeomorf.
- 2°. Chegarasiz yarim sfera ochiq doiraga gomeomorf.
- 3°. Ochiq doira tekislikka gomeomorf.
- 4°. Qavariq ko'p burchak yopiq doiraga gomeomorf.
- 5°. Nur $[a, b[$ yarim oraliqqa gomeomorf.

3. $f: X \rightarrow Y -$ gomeomorfizm bo'lsin. Agar X va Y fazolar ustma-ust tushsa, u holda $f: X \rightarrow X$ topologik akslantirish X fazoning gomeomorfizmi deb ataladi.

Gomeomorfizmga misol bo'lib, E_2 Evklid tekislikdagi ixtiyoriy o'xshashlik hisoblanadi, agar bu tekislikni E_2 tekislik metrikasi bilan hosil qilingan topologiyaga ega topologik fazo deb qarasak.

4 §. AJRALUVCHANLIK. KOMPAKTLIK.

1. Ajraluvchanlik.

Bu paragrafda biz matematikada eng muhim bo'lgan uchta topologik fazolar sinflari o'rganamiz.

Ta'rif 1.3. X topologik fazoning ixtiyoriy turli ikkita x va y nuqtalarining o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud bo'lsa, bunday topologik fazo Xausdorf fazosi deyiladi, uning topologiyasi esa ajratishning T_2 aksiomasini qanoatlantiruvchi topologiya deyiladi.

Har qanday metrik fazo Xausdorf fazosidir, chunki ixtiyoriy ikkita $x, y \in X$, $x \neq y$ nuqta uchun $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$ deb olsak, $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ va $B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ to'plamlar x va y nuqtalarning kesishmaydigan atroflari bo'ladi.

Elementlari ikkitadan ko'p antidiskret topologik fazo Xausdorf bo'lmagan fazoga misol bo'ladi.

Ta'rif 1.4. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikkita x, y nuqtalari uchun shunday G_x va G_y ochiq to'plamlar mavjud bo'lib, $x \in G_x$, $y \notin G_x$ va $y \in G_y$, $x \notin G_y$ bo'lsa, X dagi topologiya T_1 aksiomani qanoatlantiradi deyiladi.

Agar X topologik fazo T_1 aksiomani qanoatlantirib, ixtiyoriy x nuqta va uni saqlamaydigan ixtiyoriy F yopiq to'plamni ajratish mumkin bo'lsa, ya'ni G_x , G_F — ochiq to'plamlar mavjud bo'lib, $x \in G_x$, $F \subset G_F$ va $G_x \cap G_F = \emptyset$ bo'lsa, X topologik fazo topologiyasi T_3 aksiomani qanoatlantiradi deyiladi.

Agar X topologik fazo T_1 aksiomani qanoatlantirib, undagi ixtiyoriy ikkita kesishmaydigan yopiq to'plamni saqlovchi kesishmaydigan ochiq to'plamlar mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_4 aksiomani qanoatlantiradi deyiladi. Odatda bunday topologik fazolar normal fazo ham deb ataladi [2,4].

Teorema 1.6. X topologik fazo T_1 fazo bo'lishi uchun undagi har qanday bir elementli to'plamning yopiq bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti.(zarurligi) Faraz qilaylik $X - T_1$ fazo va $x \in X$ va $y \in X \setminus \{x\}$ bo'lsin. U holda y nuqtani saqllovchi va x nuqtani saqlamaydigan U_y to'plam mavjud. Demak

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

ochiq to'plamlarning yig'indisi sifatida ochiq to'plamdir, yani $\{x\}$ yopiq to'plam ekan.

Etarliligi. Aksincha, $\{x\}$ va $\{y\}$ yopiq to'plam bo'lsa, $X \setminus \{x\}$ va $X \setminus \{y\}$ to'plamlar ochiq va $x \in G_x = X \setminus \{y\}$, $y \notin G_y$, $y \in G_y = X \setminus \{x\}$, $x \notin G_y$ ya'ni $X - T_1$ fazo ekan.

Xausdorf fazosining har qanday qism fazosi ham Xausdorf fazosi bo'ladi.

Masalan, son fazosi, Evklid fazosi, barcha metrik, affin va proyektiv fazolar ajraluvchan hisoblanadi. Nuqtalari ikkitadan kam bo'lmagan antidiskret fazo, ravshanki, ajraluvchan emas.

2. Kompaktlik.

Ta'rif 1.5. X to'plamning qoplamasi deb uning shunday (X_α) qism to'plamlar oilasiga aytiladiki, X to'plam bu qism to'plamlar birlashmasidan iborat bo'ladi.

(X, τ) topologik fazoning qoplamasi ochiq deyiladi, agar har X_λ ochiq bo'lsa. (X_λ) qoplamaning qism qoplamasi deb uning shunday qism oilasiga aytiladiki, uning o'zi qoplama bo'lsa.

Ta'rif 1.6. (X, τ) topologik fazo kompakt deyiladi, agar u Borel-Lebeg aksiomasini qanoatlantirsa, ya'ni har bir ochiq qoplama chekli qism qoplamani o'z ichiga olsa.

Masalan, $[a, b]$ son kesmasi R son fazosida kompakt fazo Evklid fazodagi aylana, uchburchak, sfera – kompakt qismfazolar.

Butun Evklid fazosi (Evklid tekisligi, Evklid to'g'ri chizig'i) kompakt emas. E_n Evklid fazosida qism to'plam faqat va faqat u yopiq va chegaralangan bo'lganda kompakt.

Kompakt to'plamlar uchun ushbu teoremlar o'rinli.

Teorema 1.7. (R^n da to'plamning kompaktlik kriteriyasi) $F \subset R^n$ to'plamning kompakt bo'lishi uchun uning yopiq va chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Masalan, $B(a, r)$ ochiq shar – nokompakt to'plam chunki u chegaralangan, lekin yopiq emas. Chegarasi bilan birga yarim fazo – nokompakt to'plam bo'ladi chunki u yopiq, lekin chegaralanmagan. Yopiq $B(a, r)$ shar va $S(a, r)$ sfera kompakt to'plam bo'ladi.

Teorema 1.8. X va Y kompakt fazolar bo'lsa, $X \times Y$ ham kompakt fazo bo'ladi.

Kompakt to'plamlar ushbu xossalarga ega

1. Chekli sondagi kompakt to'plamlarning yig'indisi yana kompakt bo'ladi.
2. X kompakt metrik fazo, $A, B \subset X$ kesishmaydigan yopiq to'plamlar bo'lsa, u holda $\rho(A, B) > 0$ bo'ladi.
3. $\tau = \{\emptyset, X\}$ – antidiskret topologiyaga nisbatan ixtiyoriy X to'plam kompakt to'plam bo'ladi.
4. X diskret topologik fazo kompakt bo'lishi uchun X chekli bo'lishi zarur va yetarlidir.

I BOB UCHUN X U L O S A

Ushbu bobda metrik va topologik fazo tushunchalari va ularning xossalari keltirilgan.

Bu bobning birinchi paragrafida metrik fazo ta'rifi va R^n , $C_{[a,b]}$ fazoda har xil metrikalar kiritilgan. Shu bilan birgalikda bu paragrafda ochiq va yopiq to'plam tushunchalari va ularning xossalari keltirilgan bu xossalar 1.1 teoremda o'z aksini topgan.

Ikkinchi paragrafda topologik fazo va topologik fazoda atrof tushunchasi, to'plamning yopig'i, qism topologik fazo va zich to'plam tushunchalari va xossalari keltirilgan.

Ma'lumki matematik analizda son argumentli uzliksiz funksiyalar katta rol o'ynaydi. Ularning umumlashmasi bo'lib uzliksiz akslantirishlar hisoblanadi, ular geometriyada ham muhim ahamiyatga ega.

3-§ da uzliksiz akslantirish va gomeomorfizm ta'riflari va ularning xossalari keltirilgan. Bundan tashqari bir nechta misollar ko'rsatilgan.

To'rtinchi paragrafda topologik fazoning muhim sinflari o'rganilgan. Bular ajraluvchanlik va kompaktilik tushunchalari. Bundan tashqari ularning xossalari jumladan ba'zi fazolarning kompaktilik kriteriyalari keltirilgan.

II BOB.

KO'PXILIKLARNI SINFLASH

1§.Asosiy tushunchalar.

Bizga n -o'lchovli M metrik fazo berilgan bo'lsin.

M metrik fazo n -o'lchovli ko'pxillik (yoki oddiygina ko'pxillik) deyiladi, agar uning har bir P nuqtasini saqllovchi $U(U \subset M)$ atrofi, R^n Evklid fazosining biror V sohasiga gomeomorf bo'lsa.

Boshqacha aytganda, n - o'lchovli M ko'pxillik, R^n Evklid fazosidagi biror sohasiga lokal gomeomorf. Bu holda M ko'pxillik o'lchovi n ga teng deyiladi va $\dim M = n$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, agar M n -o'lchovli ko'pxillik bo'lsa, u holda M da chekli yoki cheksiz sondagi i indekslar bilan nomerlangan $\{U_i\}$ ochiq to'plamlar sistemasini va ushbu shartni qanoatlantiruvchi gomeomorfizmlarni tuzish mumkin

$$\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$$

bu yerda $V_i \subset R^n$ bo'lib, $\{U_i\}$ ochiq to'plamlar sistemasi M ni qoplashi kerak ya'ni $M = \bigcup_i U_i$. V_i sohalar esa o'zaro kesishishi ham mumkin.

Faraz qilaylik, R^n Evklid fazosida biror $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ dekart koordinatalar sistemasi tayinlangan bo'lsin. U holda U_i ning har bir P nuqtasining dekart koordinatalardagi $\varphi_i(P)$ nuqtasini $(\varphi_i(P) \in V_i)$, P nuqtaning sonli parametrizasiyasi deb qarash mumkin.

Shuning uchun φ_i gomeomorfizmni koordinat gomomorfizm deb, $\varphi_i(P)$ nuqtaning $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ dekart koordinatalari esa $P \in U_i$ nuqtaning lokal koordinatalari deb ataymiz va uni $x^k = x^k(P)$, $k = 1, 2, \dots, n$ kabi belgilaymiz.

U_i ochiq to'plamda aniqlangan, $x^k = x^k(P)$ funksiyalar sistemasi lokal koordinatalar sistemasi deyiladi.

Ochiq U_i to'plamlarning o'zi esa, shu tayinlangan lokal koordinatalar sistemasi bilan birgalikda M ko'pxillikdagi xarita deyiladi [1].

Shunday qilib, karta – bu (U_i, φ_i) juftlikdan iborat ekan, bundan keyin biz uni qisqacha U_i orqali belgilaymiz.

M ko'pxillikni qoplab oluvchi $\{U_i\}$ xaritalar jamlanmasiga xaritalar atlası deyiladi.

Bundan keyin qulaylik uchun $P \in M$ nuqtaning lokal koordinatalariga qo'shimcha i indeksi ya'ni U_i xaritaning indeksini kiritamiz shunday qilib lokal koordinatalarni $x_i^k = x_i^k(P)$ belgilaymiz.

Bizga ma'limki P nuqta bir vaqtning o'ziga bir nechta kartaga tegishli bo'lishi mumkin, u holda bir nechta lokal koordinatalar nabori hosil bo'ladi.

Umuman olganda har qanday M ko'pxillikda bir nechta har xil xaritalar atlasini tayinlash mumkin (2-§ ga qarang).

Lemma 2.1. M – no'lchovli ko'pxillik bo'lib U uning biror φ koordinatli gomeomorfizmli va $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ lokal koordinatalar sistemali xaritasi bo'lsin. Agar $U' \subset U$ kartaning ochiq qismi to'plami ya'ni $U' \in U$ bo'lsa, u holda U' da ham shunday φ' koordinatli gomeomorfizm va $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ lokal koordinatalar sistemasini aniqlash mumkinki ular uchun.

$$\varphi'(P) = \varphi(P)$$

$$y^k(P) = x^k(P), \quad \forall P \in U'$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Lemma 2.1 ning isboti $\varphi: U \rightarrow V$ gomeomorfizm, har qanday $U'(U' \subset U)$ ochiq qism to'plamini gomeomorf akslantirishidan kelib chiqadi. Shuning uchun φ' sifatida U' qism to'plamdagi φ gomeomorfizm cheklovini,

y^k sifatida esa shu U' qism to'plamdagi x^k koordinat funksiyalarining cheklovini olish etarli.

Lemma 2.1 shuni ko'rsatadiki, berilga $\{U_i\}$ xaritalar atlasidan, yangi kichikroq xaritalardan tuzilgan atlas tuzish mumkin. Ikkinchi tomondan, agar $\{U_i\}$ va $\{U_j\}$ ikkita xaritalar atlas bo'lsa, u holda bu atlaslarning birlashmasi yana ko'pxillikning xaritalar atlas bo'ladi. Shuning uchun berilgan ko'pxillikdagi barcha xaritalarning maksimal xaritalar atlas mavjud bo'ladi. Umuman olganda maksimal xaritalar atlasini, ko'pxillikdagi barcha xaritalar atlasining birlashmasi sifatida qarash mumkin [1].

Lemma 2.2. Agar $\{U_i\}$ va $\{U_j'\}$ lar M ko'pxillikdagi ikkita xaritalar atlas bo'lsa, u holda $\{U_i\}$ va $\{U_j'\}$ larni maydalovchi uchinchi xaritalar atlas mavjud.

Isbot. Bu lemmani isbotlash uchun $\{U_i\}$ va $\{U_j'\}$ atlas kartalarning kesishmasidan tuzilgan ushbu $W_{ij} = \{U_i\} \cap \{U_j'\}$ to'plamlar sistemasini qaraymiz. Bizga ma'lumki lemma 2.1 ga ko'ra har bir ochiq W_{ij} ochiq to'plamda lokal koordinatalar sistemasini kiritishimiz mumkin. Ikkinchi tomondan $W_{ij} \subset U$, $W_{ij} \subset U_j$ va W_{ij} to'plamlar sistemasi M ko'pxillikni qoplaydi. Demak $\{W_{ij}\}$ sistema ikkita $\{U_i\}$ va $\{U_j'\}$ atlaslarni maydalovchi xaritalar atlas bo'lar ekan. Lemma 2.2 to'liq isbot bo'ldi.

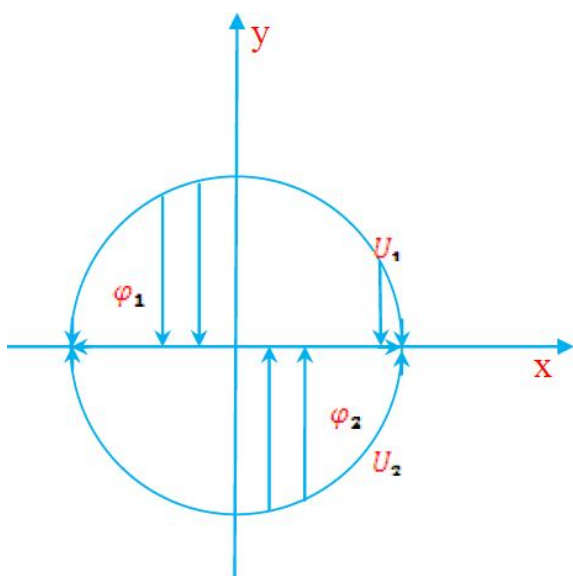
2 §. Ko'pxilliklarga doir oddiy misollar

1 – misol. Bizga R^2 da $S^1 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ to'plam berilgan bo'lsin. S^1 ni ushbu

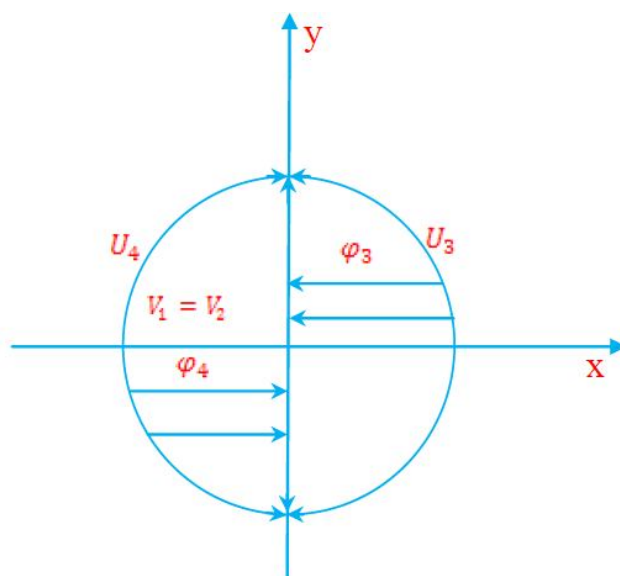
$$U_1 = \{(x, y) \in S^1: y > 0\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in S^1: y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1: x > 0\}, \quad U_4 = \{(x, y) \in S^1: x < 0\}$$

4 ta xaritadan iborat atlas bilan qoplaymiz (1-2-chizma).



1-chizma



2- chizma

Ko'rinib turibdiki, haqiqiy R^1 to'g'ri chiziqda ularga mos keluvchi V_1, V_2, V_3, V_4 sohalar ustma-ust tushadi va $(-1, 1)$ ochiq oraliqqa teng bo'ladi. Endi φ_1 va φ_2 gomeomorfizmlarni aylananing absissalar o'qiga proeksiyalovchi akslantirish sifatida yani $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = x$ tenglik bilan aniqlaymiz, φ_3, φ_4 gomeomorfizmlarni esa aylanani ordinatalar o'qiga proeksiyalar sifatida aniqlaymiz: $\varphi_3(x, y) = \varphi_4(x, y) = y$. Bu $\varphi_k, k = 1, 2, \dots, 4$ akslantirishlarni gomeomorfizm ekanligini ko'rsatish uchun, ularning teskari akslantirishlarini oshkor ko'rinishda tasvirlab ularni uzliksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. Bizga ma'limki, $\varphi_k (k = \overline{1, 4})$ larning aniqlanishiga ko'ra bu akslantirishlar mos ravishda $U_k (k = \overline{1, 4})$ to'plamlarni $V_k = (-1; 1) (k = \overline{1, 4})$ to'plamga uzliksiz va bir

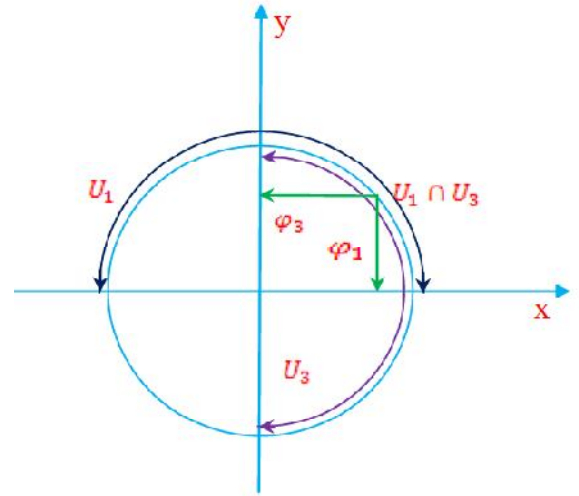
qiymatli akslantiradi. Shuning uchun quyidagicha $\varphi_k^{-1} (k = \overline{1,4})$ uzliksiz akslantirishlar mavjud

$$\begin{cases} \varphi_2^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2}) \in S^1 \\ \varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}) \in S^1 \\ \varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y) \in S^1 \\ \varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y) \in S^1 \end{cases}$$

Shunday qilib, bu aylanada har biri bitta koordinatalardan iborat

$$x_1 = \varphi_1(x, y) = x, \quad x_2 = \varphi_2(x, y) = x,$$

$$x_3 = \varphi_3(x, y) = y, \quad x_4 = \varphi_4(x, y) = y$$



to'rtta lokal koordinatalar sistemasini hosil

3- chizma

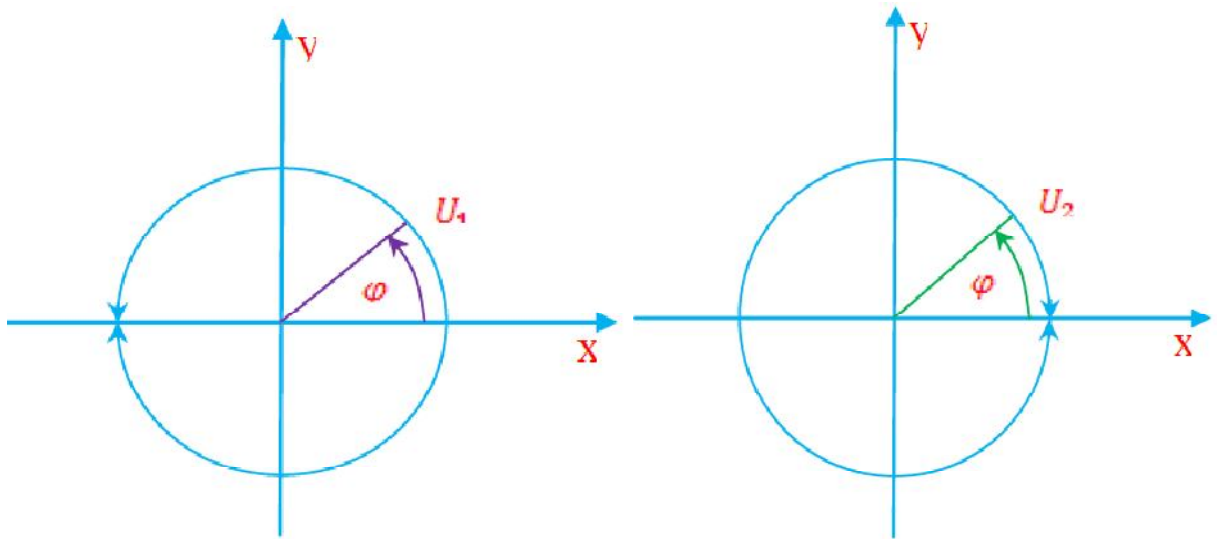
bo'ladi. Ba'zi nuqtalar birdaniga ikkita lokal koordinatalar sistemasini bilan ta'minlanadi. Masalan $U_1 \cap U_3$ kesishmadagi P nuqtalar uchun ikkita $x_1(P)$ va $x_2(P)$ koordinatalar aniqlangan (chizma 3). Aylanada xaritalar atlasini kiritishning boshqa usullari ham mavjud [1].

Bizga ma'lumki, (r, φ) qutb koordinatalar sistemasida aylana tenglamasi $r = 1$ tenglik bilan aniqlanadi. Shuni aytish mumkinki tenglikdagi qutb koordinatalar, koordinatalar sistemasini bo'la olmaydi.

Shuning uchun S^1 aylanada quyidagicha ikkita

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1: x \neq -1\} \text{ va } U_2 = \{(x, y) \in S^1: x \neq 1\}$$

xaritalarni kiritamiz (4 – chizma)



4-chizma

Faraz qilaylik, $\varphi_1(P) = \varphi_1(x, P)$ ni $(-\pi, \pi)$ oraliqda yotuvchi φ burchak qiymatiga teng $\varphi_2(P) = \varphi_2(x, P)$ ni $(0, 2\pi)$ oraliqda yotuvchi φ burchak qiymatiga deb olamiz, ya'ni $V_1 = (-\pi, \pi)$, $V_2 = (0, 2\pi)$. Ko'rinib turibdiki aylananing yuqori yarim qismidagi nuqtalari uchun $\varphi_1 = \varphi_1(P)$ va $\varphi_2 = \varphi_2(P)$ lokal koordinatalar ustma – ust tushadi, ammo aylananing quyi yarim qismidagi nuqtalari uchun ustma – ust tushmaydi, ya'ni

$$y > 0 \text{ da } \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y),$$

$$y < 0 \text{ da } \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) - 2\pi$$

bo'ladi (rasmda qarang)

2 – misol. Bizga $f: R^n \rightarrow R^1$ - uzliksiz funksiya berilgan bo'lib, G_f ($G_f \subset R^{n+1}$) to'plam esa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning grafigi bo'lsin, ya'ni

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x^{n+1}): x^{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

Osongina anglash mumkinki G_f fazo, bitta $U = G_f$ xarita atlasidan tashkil topgan n – o'lchovli ko'pxillik bo'ladi. Bunda koordinatali $\varphi: U \rightarrow V = R^n$ gomeomorfizmni oxirgi koordinatagacha proeksiya sifatida aniqlaymiz, ya'ni

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x^{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

U holda φ^{-1} teskari akslantirish quyidagicha aniqlanadi.

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Ko'rinib turibdiki bu akslantirish uzliksiz bo'ladi.

3 §.Koordinatalarni almashtirish funksiyasi.

Ko'pincha ixtiyoriy metrik fazolar yoki bundan umumiyroq topologik fazolar ichida ko'pxilliklarni ajratish ancha qulayliklarga olib keladi. Masalan, n – o'lchovli M ko'pxillikning har bir $P(P \in M)$ nuqtasining atrofida aninqlangan har qanday $f (f: M \rightarrow R^1)$ uzliksiz funksiya, qandaydir $(x_1, x_2, \dots, x_n) - n$ erkli haqiqiy o'zgaruvchili oddiy $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya orqali ifodalanishi mumkin, bunda $h - R^n$ yevklid fazosining biror sohasida aniqlangan funksiya bo'ladi.

Faraz qilaylik, $U - P$ nuqtani o'zida saqllovchi xarita, $\varphi: U - V \subset R^n$ esa uning koordinatali gomeomorfizmi bo'lib, $(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P))$ - esa U xaritadagi lokal koordinatalar sistemasi bo'lsin. Agar $\bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ vektor bo'lsa, u holda h ni quyidagiga aniqlaymiz:

$$h(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(\varphi^{-1}(x))$$

Aksincha, agar $h - V (V \subset R^n)$ sohada aniqlangan n o'zgaruvchili haqiqiy funksiya bo'lsa, u holda uni $M: f(P) = h(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P))$ ko'pxillikning U ochiq to'plamida aniqlangan f uzliksiz funksiya aniqlaydi.

Bizga n o'lchovli M_1 va n o'lchovli M_2 ko'pxilliklar berilgan bo'lib, $f: M_1 \rightarrow M_2$ uzliksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $P_0 \in M_1$ va $Q_0 \in M_2$ uchun $Q_0 = f(P_0)$ bo'lsin. U holda P_0 nuqtaning yetarli kichik $U(P_0 \in U)$ atrofida bu akslantirishni, n erkli o'zgaruvchili h uzliksiz vektor funksiya yordamida ifodalash mumkin [1].

Faraz qilaylik, $U' \ni Q_0$ biror M_2 ko'pxillikdagi xarita bo'lib, $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ – lokal koordinatalar sistemasi bo'lsin. Modomoki, f akslantirish uzliksiz ekan shuning uchun lemma 2.1 ga ko'ra P_0 nuqtaning V xaritasi mavjud bo'lib $f(U) \subset U'$ bo'ladi. Faraz qilaylik $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – U xaritadagi koordinatlar sistemasi bo'lsin. Ma'lumki U xaritadagi P nuqtalar bir qiymatli ravishda uning $(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P))$ koordinatlar jamlanmasi, xuddi shunday U' xaritadagi Q nuqtalar bir qiymatli ravishda uning $(y^1(P), y^2(P), \dots, y^n(P))$ koordinatlar jamlanmasi yordamida topiladi.

Shunday qilib, M ko'pxillikdagi har qanday f uzliksiz funksiya lokal koordinatalar sistemasida erkli n o'zgaruvchili h haqiqiy qiymatli funktsiyani ifodalaydi. Agar biz lokal koordinatalar sistemasini o'zgartirsak, h funksiya ham o'zgaradi. Endi koordinatalar sistemasi o'zgarganda h funksiya qanday qonun bo'yicha o'zgarishini aniqlaymiz. Bizga $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ va $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ ikkita lokal koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Umumiylikka ziyor yetkazmaslik uchun biz bu koordinatalar sistemasi bitta U xaritada aniqlangan deb qaraymiz. Faraz qilaylik, h va h' lar f funktsiyaning ifodolovchi mos ravishda $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ va $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ koordinatli funktsiyalar bo'lsin.

U holda

$$f(P) = h(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)) = h^1(y^1(P), y^2(P), \dots, y^m(P)) \quad (2.1)$$

bo'ladi. Bizga ma'lumki, $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ lar ham U xaritadagi qandaydir uzliksiz funktsiyalar, shuning uchun ular ham n ta $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ erkli o'zgaruvchilarning funktsiyalari sifatida ifodalanadi ya'ni

$$\left. \begin{aligned} y^1(P) &= y^1(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)) \\ y^2(P) &= y^2(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)) \\ &\vdots \\ y^n(P) &= y^n(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

U holda (2.1) ga ko'ra quyidagi tenglikni hosil qilamiz

$$h(x^1, x^2, \dots, x^n) = h^1(y^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, x^2, \dots, x^n)) \quad (2.3)$$

Odatda (2.2) ning o'ng qismida turuvchi $y^k = y^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ funksiyalar U to'plam yevklid fazosidagi soha bo'lganda koordinatali almashtirish funksiyalari deb atalar edi. Biz bu atamani (terminni) ko'pxilliklar uchun ham saqlagan holda bu yerda ham shunday ta'rifni keltiramiz.

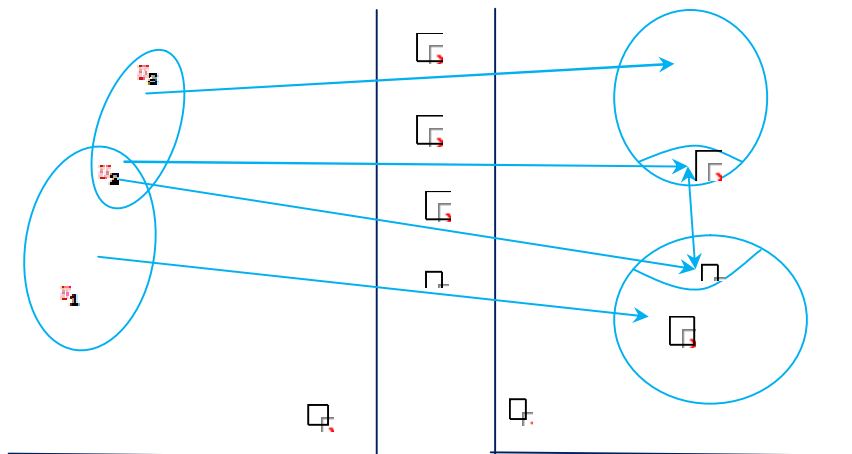
Ta'rif 2.1. Faraz qilaylik $M - n$ o'lchovli ko'pxillik, $\{U_i\}$ esa uning xaritalar atlasini bo'lib, φ_i —koordinatli gomeomorfizm bo'lsin. Bu yerdagi lokal koordinatlar sistemasi (to'plamni) jamlanmasini $\{x_i^k\}$ orqali belgilaymiz. Har bir ikkita xaritalar kesishmasi U_{ij} da ($U_{ij} = U_i \cap U_j$) ikkita $\{x_i^k\}$ va $\{x_j^k\}$ lokal koordinatalar sistemasi aniqlangan bo'lib $P \in U_{ij}$ uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$x_i^k(P) = x_i^k(x_j^1(P), x_j^2(P), \dots, x_j^n(P))$$

Ushbu $x_i^k = x_i^k(x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$ funksiyalarga koordinatalarni almashtirish funksiyasi yoki $\{x_i^k\}$ koordinatadan $\{x_j^k\}$ koordinataga o'tish funksiyasi deyiladi.

Koordinatalarni almashtirish funksiyalari butun V_j sohada aniqlanmagan, balki uning ikkala koordinatalar sistemasi haqida gapirish mumkin bo'lgan biror $V_{ji} = \varphi_j(U_{ij})$ qismida aniqlangan.

(5- chizma) da V_i va V_j sohalar evklid fazosida o'zaro kesishmaydigan to'plamlar sifatida ko'rsatilgan.



5- chizma

4 §.Silliq ko'pxillik ta'rifi.

Endi silliq ko'pxillik tushunchasini kiritamiz.

Bizga n o'lchovli M ko'pxillik berilgan bo'lib, unda $\{x_i^k\}$ lokal koordinatalar sistemali $\{U_i\}$ xaritalar atlasini aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 2.2. Agar U_i va U_j xaritalar juftligining butun sohasida aniqlangan $x_i^k = x_i^k(x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$ koordinatalarning almashtirish funksiyasi uzliksiz differensiallanuvchi bo'lsa, n o'lchovli M ko'pxillikga, n – o'lchovli silliq ko'pxillik deyiladi.

Silliq ko'pxillik tushunchasi, M ko'pxillikda aniqlangan funksiyalar ichida, uzliksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfini ajratib olishni ta'minlaydi.

Ta'rif 2.3. Silliq M ko'pxillikda aniqlangan $f(f: M \rightarrow R^1)$ funksiya $P_0 \in U_i$ (U_i tayinlangan xaritalar atlasidir) nuqtada uzliksiz differensiallanuvchi deyiladi, agar har qanday $(x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$ lokal koordinatalar sistemasida, f funksiya $(x_i^1(P_0), x_i^2(P_0), \dots, x_i^n(P_0))$ nuqta atrofida erkli n o'zgaruvchili uzliksiz differensiallanuvchi $h(x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$ funksiya ko'rinishida tasvirlansa.

Izoh 1. Agar M ko'pxillikning xaritalar atlasini bitta xaritadan tashkil topgan bo'lsa, u holda M silliq ko'pxillik bo'ladi.

Izoh 2. Agar M yevklid fazosidagi biror sohasiga gomeomorf bo'lsa, u holda M silliq ko'pxillik bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\{U_i\}$ va $\{U'_i\}$ lar M ko'pxillikda aniqlangan xaritalar atlasini bo'lsin va ularning har biriga nisbatan M silliq ko'pxillik bo'lsin.

Ta’rif 2.4. Agar $\{U_i\}$ xaritalar atlasidagi har bir local koordinat sistemasidan $\{U'_j\}$ xaritalar atlasining har bir lokal koordinatalar sistemasiga o'tish funksiyalari uzliksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda ikkita $\{U_i\}$ va $\{U'_i\}$ xaritalar atlaslari ekvivalent deyiladi.

Mko'pxillikdagi har qanday f funksiya $\{U_i\}$ xaritalar atlasida uzliksiz differensiallanuvchi bo'ladi faqat va faqatgina, agar u $\{U'_i\}$ atlasda uzliksiz differensiallanuvchi bo'lsa.

Yuqoridagi ta'rif 2.4 ni quyidagicha ham ifodalash mumkin. Ikkita $\{U_i\}$ va $\{U'_i\}$ xaritalar atlaslari ekvivalent bo'ladi, agar M ko'pxillik bu atlaslarning birlashmasi $\{U_i\} \cup \{U'_i\}$ da silliq ko'pxillik bo'lsa.

Agar haqiqiy o'zgaruvchili $h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqta atrofida r tartibgacha uzliksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda h ga C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty$) sillqlik sinfiga tegishli deyiladi.

Ta’rif 2.2'. $\{U_i\}$ tayinlangan xaritalar atlasiga ega bo'lgan M ko'pxillik C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty$) sinfli sillqlik ko'pxillik deyiladi, agar barcha koordinatalarni almashtirish funksiyalari o'zining aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarida C^r sinfga tegishli bo'lsa.

Biz bundan keyin C^∞ sinfli ko'pxilliklarni qaraymiz. Agar barcha koordinatalar almashtirish funksiyalari, haqiqiy - analitik funksiyalar bo'lsa, ya'ni bu funksiyalarni har bir nuqtada yaqinlashuvchi Teylor qatoriga yoyish mumkin bo'lsa, bunday ko'pxilliklarga haqiqiy – analitik ko'pxillik deyiladi [1,6].

Ko'pxilliklarni muhim sinfi bu kompleks – analitik ko'pxilliklar hisoblanadi. Bizga $2n$ o'lchovli M ko'pxillik, $\{U_j\}$ - xaritalar atlaslari va $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j \subset R^{2n}$ uning koordinatli gomeomorfizmlari berilgan bo'lsin. Endi $2n$ o'lchovli R^{2n} yevklid fazosini, n o'lchovli kompleks C^n chiziqli fazo bilan ayniylashtiramiz, ya'ni $(z^1, z^2, \dots, z^n)$ nuqtaning kompleks koordinatalari $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n)$ - $2n$ ta haqiqiy koordinatalari bilan $z^k = x^k + iy^k$ tenglik bilan almashtiriladi. U

holda U_j xaritadagi $2n$ ta $x_j^1(P), \dots, x_j^n(P), y_j^1(P), \dots, y_j^n(P)$ koordinatli funksiyalar n ta $z_j^k(P) = x_j^k(P) + iy_j^k(P)$ kompleks o'zgaruvchili funksiyalar bilan almashadi. $z_j^n(P)$ funksiyalarni $\{U_j\}$ xaritadagi nuqtalarning kompleks deb ataymiz. Bizga ma'lumki ikkita xaratalar kesishmasi $U_j \cap U_i$ da bir koordinatadan ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tish funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega.

$$\begin{aligned} x_j^1 &= x_j^1(x_i^1, \dots, x_i^n, y_i^1, \dots, y_i^n) \\ &\vdots \\ x_j^n &= x_j^n(x_i^1, \dots, x_i^n, y_i^1, \dots, y_i^n) \\ &\vdots \\ y_j^1 &= y_j^1(x_i^1, \dots, x_i^n, y_i^1, \dots, y_i^n) \\ &\vdots \\ y_j^n &= y_j^n(x_i^1, \dots, x_i^n, y_i^1, \dots, y_i^n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) tenglikdagi funksiyalarni n ta erkli o'zgaruvchili kompleks qiymatli funksiyalar sifatida ifodalash mumkin.

$$\begin{aligned} z_j^1 &= z_j^1(z_i^1, \dots, z_i^n) \\ &\vdots \\ z_j^n &= z_j^n(z_i^1, \dots, z_i^n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5) dagi funksiyalarni kompleks koordinatalarni almashtirish funksiyalari yoki o'tish funksiyasi deb ataymiz.

Tayinlangan $\{U_j\}$ xaritalar atlasiga va $(z_j^1, z_j^2, \dots, z_j^n)$ kompleks lokal koordinatalar sistemasiga ega bo'lgan M ko'pxillikga kompleks – analitik ko'pxillik deyiladi, agar (2.5) dagi barcha kompleks koordinatalarni almashtirish funksiyalari kompleks – analitik funksiyalar bo'lsa, boshqaga aytganda (2.5) dagi funksiyalarni o'z aniqlanish sohasining barcha nuqtalari atrofida kompleks o'zgaruvchili yaqinlashuvchi Teylor qatoriga yoyish mumkin bo'lsa.

Endi kompleks-analitik ko'pxillikga doir misol ko'ramiz.

Bizga $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ikki o'lchovli sfera berilgan bo'lsin, unda maxsus yo'l bilan xaritalar atlasini tuzamiz.

Avvalo S^2 sferaning R^2 tekislikga stereografik proeksiyasini qaraymiz. Buning uchun R radiusli S^2 sfera markazini, R^2 tekisligidagi (x, y) koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga olib kelib ko'yamiz va S^2 sferada shimoliy qutb N va janubiy qutb S nuqtalarni belgilaymiz. Faraz qilaylik, P sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (shimoliy qutb N dan farqli), N va P nuqtalarni tutashtirib, NP kesmani tekislik bilan kesishguncha davom ettirib, uni $R^2(x, y)$ tekislik bilan kesishgan nuqtasini Q orqali belgilaymiz. Natijada biz S^2 sfera va R^2 tekislik o'rtasida moslik hosil qilamiz bu moslikni φ_0 ($\varphi_0: S^2 \rightarrow R^2$) orqali belgilaymiz. φ_0 akslantirishga sferaning tekislikga stereografik proeksiyasi deyiladi. Ko'rinib turibdiki, bu φ_0 akslantirish sferaning shimoliy qutb $N = (0, 0, 1)$ dan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan ya'ni $U_0 = S^2 \setminus \{N\}$ ochiq to'plam $V_0 = R^2$ tekislikga gomeomorf. Bu nuqtani tekislikni cheksiz uzoqlashgan nuqtasi deyishimiz mumkin. Dekart koordinatalar sistemasida φ_0 gomeomorfizm quyidagi ko'rinishga ega

$$\varphi_0(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Shuning uchun U_0 xaritada bitta $\omega_0 = \frac{x+iy}{1-z}$ kompleks koordinatani kiritamiz. Bundan tashqari sferaning janubiy qutibi $S = (0, 0, -1)$ va shu (x, y) koordinatalar sistemasiga φ_1 stereografik proeksiyasini qaraymiz. φ_1 akslantirish $U_1 = S^2 \setminus \{S\}$ ochiq to'plamni $V_1 = R^2$ tekislikga gomeomorf akslantiradi. Dekart koordinatalarda bu φ_1 gomeomorfizm quyidagi

$$\varphi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

ko'rinishiga ega. Endi U_1 xaritaga $\omega_1 = \frac{x-iy}{1+z}$ kompleks koordinatani kiritamiz. U holda $U_0 \cap U_1$ kesishmada

$$\omega_0 \omega_1 = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} \equiv 1$$

ni olamiz.

Shunday qilib,

$$\omega_0 = \omega_0(\omega_1) = \frac{1}{\omega_1}, \quad \omega_1 = \omega_1(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.6)$$

(2.6) funksiyalar kompleks qiymatli funksiyalar hisoblanadi.

Demak S^2 sfera kompleks analitik ko'pxillik bo'lar ekan. Har bir U_0 va U_1 xaritalar S^2 sferani bitta nuqtadan boshqa barcha joyini qoplaydi va φ_0, φ_1 koordinat gomeomorfizmlari yordamida $C^1 = R^2$ kompleks tekislikka o'tamiz. Boshqacha aytganda tekislikdagi hamma nuqtalar to'plami bilan S^2 sferadagi (P nuqtadan boshqa) nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi. Shuning uchun S^2 sfera kengaytirilgan kompleks tekislik bilan o'zaro ber qiymatli.

Umuman olganda ixtiyoriy silliq ko'pxillik, kompleks analitik bo'lishi shart emas. Agar ko'pxillikning o'lchovi toq bo'lsa u holda prinsipga ko'ra bunday ko'pxillik kompleks analitik ko'pxillik bo'lmaydi. Bundan tashqari juft o'lchovli ko'pxilliklarda kompleks analitik ko'pxilliklar strukturasi ega bo'lmaganlarga ham bir nechta misollar keltirish mumkin. Masalan, proektiv tekislik kompleks analitik ko'pxillik bo'lmaydi.

5 §. Silliq akslantirishlar. Diffeomorfizm.

Faraz qilaylik M_1 va M_2 silliq ko'pxilliklar berilgan bo'lsin. f esa M_1 ni M_2 akslantiruvchi ($f: M_1 \rightarrow M_2$) uzliksiz akslantirish bo'lsin. Bizga ma'lumki M_1 dagi

har bir P_0 nuqta atrofida f funksiyani quyidagi h vektor-funksiyalar ko'rinishda ifodalash mumkin,

$$y^k = h^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

bu yerda $(x^1, x^2, \dots, x^n)P_0$ nuqta atrofidagi lokal koordinatalar sistemasi, $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ esa $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ nuqta atrofidagi lokal koordinatalar sistemasi.

Ta'rif 2.5. Agar ixtiyoriy $P_0 \in M$ nuqta atrofidagi har bir $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ lokal koordinatalar sistemasi va $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ nuqta atrofidagi $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ lokal koordinatalar sistemasidagi f funksiyaning

$$\vec{y} = (y^k) = (h^k(x^1, x^2, \dots, x^n)) = h(\vec{x})$$

vektor – funksiyalar tasviri C^r silliq sinfiga tegishli bo'lsa, u holda f akslantirishga C^r sinfli akslantirish deyiladi. C^r sinfnining silliq akslantirish ta'rifi M_1 va M_2 ko'pxilliklarning silliq sharti r dan kichik bo'lmagan holda ma'noga ega.

Faraz qilaylik silliq $f(f: M_1 \rightarrow M_2) - M_1$ va M_2 ko'pxilliklarning gomeomorfizmi bo'lsin. Agar f funksiya C^r sinfli silliq akslantirish bo'lsa, u holda f^{-1} teskari akslantirish silliq akslantirish bo'lmasligi ham mumkin. Shuning uchun, agar $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ teskari akslantirish ham C^r sinfnining silliq akslantirishi bo'lsa, f ga C^r sinfnining silliq gomeomorfizmi yoki C^r sinfnining diffeomorfizmi deyiladi.

Agar $(f: M_1 \rightarrow M_2)$ akslantirish diffeomorfizm bo'lsa, u holda M_1 va M_2 ko'pxilliklar ham diffeomorfizm ko'pxilliklar deyiladi.

Teorema 2.1. M_1 va M_2 larda aniqlangan $f(f: M_1 \rightarrow M_2)$ akslantirish C^r sinfnining silliq gomeomorfizmi bo'lsa, u holda

$$\dim M_1 = \dim M_2$$

bo'ladi.

$$dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial x^1} & \frac{\partial h^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial h^2}{\partial x^1} & \frac{\partial h^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h^m}{\partial x^1} & \frac{\partial h^m}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Lemma 2.3. Faraz qilaylik, $U_0 \subset R^n$, $V_0 \subset R^m$, $W_0 \subset R^k$ lar Yevklid fazosidagi ochiq sohalar bo'lib, $f: U_0 \rightarrow V_0, g: V_0 \rightarrow W_0$ -lar uzliksiz differensiallanuvchi akslantirish, $h: U_0 \rightarrow W_0$ esa f va g larning kompozitsiyasi ya'ni $h(P) = g(f(P))$ bolsin. U holda f, g va h akslantirishlarning yakobi matrisalari uchun $P \in U_0$ da

munosabat o'rinli. Boshqacha aytganda, $h = g \circ f$ kompozisiyaning yakobi matrisasi, f va g akslantirishlarning yakobi matrisalari ko'paytmasiga teng.

Isbot. Lemmaning isboti bevosita murakkab funksiyani differensiallashdan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $(x^1, x^2, \dots, x^n), (y^1, y^2, \dots, y^m)$ va $(z^1, z^2, \dots, z^k)$ - lar mos ravishda U_0, V_0 va W_0 sahalarining dekart koordinatalar bo'lsin.

U holda

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad z^j = g^j(y^1, y^2, \dots, y^m)$$

$$\begin{aligned} z^j &= h^j(x^1, x^2, \dots, x^n) = \\ &= g^j(f^1(x^1, x^2, \dots, x^n), f^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, x^2, \dots, x^n)) \end{aligned}$$

bo'ladi. Endi h^j funksiyalarni x^j o'zgaruvchilar bo'yicha differensiallab quyidagi tenglikga kelamiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^j}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n) &= \\ &= \sum_{e=1}^m \frac{\partial g^j}{\partial y^e}(f^1(x^1, x^2, \dots, x^n), f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \dots) \frac{\partial f^e(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Ko'rinib turibdiki oxirgi formula ikkita matrisa umumiy elementlarining ko'paytmasi bilan ustma – ust tashadi, ya'ni

$$dh(x^1, x^2, \dots, x^n) = dg(f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \dots) \cdot df(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Agar P nuqta $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinatalarga ega bo'lsa, u holda oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$d(h(P)) = dg(f(P)) \cdot d(P).$$

Lemma 2.3 to'liq isbot bo'ldi.

Lemma 2.4. M silliq ko'pxillikda, shunday $\{U_i\}$ xaritalar atlas mavjudki, har bir U_i xaritalar R^n ga diffeomorf bo'ladi.

Isbot: Dastkab har bir xarita R^n dagi biror ε radiusli ochiq sharga diffeomorf bo'lgan xaritalar atlasni qurish mumkinligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $P_0 \in M$ – ixtiyoriy nuqta va $U_i \ni P_0, \varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset R^n$ koordinata gomeomorfizmi bo'lib, $Q_0 = \varphi_i(P_0)$ bo'lsin. Ma'lumki, $V_i - R^n$ dagi ochiq to'plam bo'lgan uchun, shunday ε son topiladiki, markazi Q_0 nuqtada radiusi ε ga

teng bo'lgan ochiq shar V_i da yotadi. Bu sharni $O_\varepsilon(Q_0)$ orqali, uning $\varphi_i^{-1}(O_\varepsilon(Q_0))$ proobrazini esa W_P orqali belgilaymiz. Bizga ma'lumki, $\{W_P\}$ ochiq to'plamlar oyilasi M ko'pxillikda xaritalar atlas bo'ladi va har bir W_P xarita R^n dagi ochiq sharga diffeomorf bo'ladi. Endi bu lemmani to'liq isbotini yakunlash uchun har qanday ε radiusli ochiq sharni R^n ga diffeomorfligini ko'rsatishimiz etarli. Buning uchun $\varepsilon = 1$ holni qarash yetarli. Faraz qilaylik, $(x^1, \dots, x^n)$ nuqta radiusi 1 bo'lgan sharning nuqtasi bo'lsin, ya'ni $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1$ bo'lsin.

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}} \quad (2.7)$$

$$x^k = \frac{y^k}{\sqrt{1 + (y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}} \quad (2.8)$$

deb olamiz. (2.7) va (2.8) funksiyalar silliq bo'ladi va 1 radiusli shar va R^n lar orasida o'zaro teskari akslantirishlarni amalga oshiradi.

Lemma 2.5. M - silliq kompakt ko'pxillik bo'lib, $\{U_i\}$ – undagi xaritalar atlas bo'lsin. U holda $\{U_i\}$ - qoplashga bo'ysingan, birning ψ_i silliq bo'linishi mavjud.

6 §. k – o'lchovli chegarali ko'pxillik.

1. (X, τ) – topologik fazo bo'lsin. Bu fazodagi k – o'lchovli koordinata sistemasi deb, biror $U \subset X$ ochiq to'plamni R^k son fazosining ochiq to'plamiga akslantiruvchi φ gomeomorfizmga aytiladi. Bunda (U, φ) juftlik k – o'lchovli xarita, U to'plamga esa – bu xaritaning koordinata atrofi deb ataladi.

Agar $x \in U$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^k) \in R^k$ bo'ladi. x^i haqiqiy sonlar, x nuqtaning berilgan xaritadagi koordinatalari deb ataladi.

k – o'lchovli topologik ko'pxillilik (yoki oddiy k – o'lchovli ko'pxillilik) deb sanoqli bazaga ega ajraluvchan (X, τ) topologik fazoga aytiladi, agar bu fazoni k – o'lchovli kartalar koordinata atroflari bilan qoplash mumkin bo'lsa.

Topologiyada k soni (ko'pxillilik o'lchovi) topologik invariant bo'lishini, ya'ni (X, τ) fazoning ixtiyoriy gomeomorfizmlarida o'zgarmasligini isbotlaymiz.

Biz faqat bir o'lchovli va ikki o'lchovli ko'pxilliliklarni qarash bilan chegaralanamiz. Bunday ko'pxilliklarga misollar qaraymiz.

1-misol. R^k ($k = 1, 2$) son fazosi ajraluvchan va sanoqli bazaga ega bo'ladi. (U, φ) k – o'lchovli kartani qarash mumkin, bu yerda $U = R^k \cdot \varphi - R^k$ fazoni aynan almashtirish bo'lsin. U holda R^k – o'lchovli ko'pxillikdan iborat bo'ladi.

Xuddi shunday A_k affin fazo va E_k yevklid fazolar k – o'lchovli ko'pxilliklar bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. P_k proyektiv fazo ham k – o'lchovli ko'pxillilik bo'lishini isbotlash mumkin.

2-misol. $\gamma - E_2$ yevklid tekislikda r radiusi aylana bo'lsin. Boshi aylana markazida bo'lgan Oxy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olamiz va A va B lar orqali aylananing Oy o'qi bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz (3-rasm). $U_1 = \gamma \setminus \{A\}$ (A nuqtada “teshilgan” γ aylana) va $U_2 = \gamma \setminus \{B\}$ (B nuqtada “teshilgan” γ aylana) to'plamlarni qaraymiz. Endi φ va ψ akslantirishlarni quyidagicha tuzib olamiz, A

bu yerda $\varphi: U_1 \rightarrow Ox$; agar $M \in U_1$ bo'lsa,

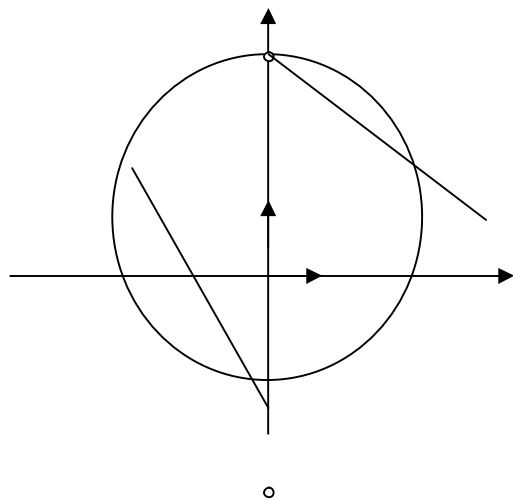
$\varphi(M) = M_0 - AM$ nurning Ox o'qi bilan

kesishish nuqtasi qonuni bo'yicha; M_0

$\psi: U_2 \rightarrow Ox$; agar $N \in U_2$ bo'lsa, u holda

$\varphi(N) = N_0 - BN$ nurning Ox o'qi bilan

kesishish nuqtasi. B (3-rasm)



Ko'rinib turibdiki, $U_1, U_2 - \gamma$ aylanada (induksirlangan topologiyada) ochiq to'plamlar, $\varphi - U_1 \subset \gamma$ ochiq qism to'plamni Ox o'qqa (u R ga gomeomorf) gomeomorfizm ekanligini ta'kidlash qiyin emas. Shunday qilib, $(U_1, \varphi) - \gamma$ aylana

xaritasi, (U_2, ψ) — esa shu γ aylanani boshqa xaritasi. Bu U_1, U_2 xaritalarning koordinat atroflari butun γ aylanani qoplaydi. Demak, aylana — bir o'lchovli ko'pxillik ekan. Ixtiyoriy bog'lamli nokompakt bir o'lchovli ko'pxillik to'g'ri chiziqqa gomeomorf, bog'lamli bir o'lchovli kompakt ko'pxillik esa aylanaga gomeomorf ekanligini isbotlash mumkin.

2-misolga o'xshash E_3 Evklid fazosida sfera ikki o'lchovli ko'pxillik bo'lishini isbotlash mumkin. Haqiqiy ellipsoid, giperboloidlar, paraboloidlar, ikkinchi tartibli haqiqiy silindrlar ham ikki o'lchovli ko'pxillik bo'lib hisoblanadi.

Yuqoridagi sfera va ellipsoid kompakt (Evklid fazosida chegaralangan yopiq qism to'plamlar sifatida), qolgan ko'rsatilgan ikkinchi tartibli sirtlar nokompakt ikki o'lchovli ko'pxillik bo'lishini ta'kidlaymiz.

2. Geometriyada ko'pincha chegarali ko'pxilliklar uchraydi.

R_+^k orqali $R^k (k = 1, 2)$ ning x^k koordinatalari $x^k \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini belgilaymiz. Demak, $R_+^k - R^k$ da yopiq yarim fazo.

(X, τ) fazo k — o'lchovli chegarali ko'pxillik deyiladi, agar u ajraluvchan, sanoqli bazaga ega bo'lsa va ularning nuqtalarini shunday bo'sh bo'lmagan sinfga ajratish mumkinki, bir sinfnig har bir nuqtaga (ichki nuqta) atrofga ega, ikkinchi sinfnig har bir nuqtasi (chegaraviy nuqtalar) R_+^k ga gomeomorf atrofga ega, lekin R^k ga gomeomorf atrofga ega emas.

Barcha chegaraviy nuqtalar to'plami (X, τ) ko'pxillik chegarasi deb ataladi.

3-misol. R son o'qining $[a, b]$ kesmasi (induksirlangan topologiyada) chegarali bir o'lchovli ko'pxillik hisoblanadi. Chegara a va b nuqtalardan iborat.

Shunga o'xshash A_3 affin fazosida (yoki E_3 yevklid fazosida) kesma va yopiq nur chegarasi bir o'lchovli ko'pxilliklar bo'ladi. Kesma chegarasi uning uchlaridan, nurning chegarasi esa — uning boshidan iborat bo'ladi. Ixtiyoriy

bog'lanma bir o'lchovli chegarali ko'pxillik r kesmada yoki yopiq nurga gomeomorf.

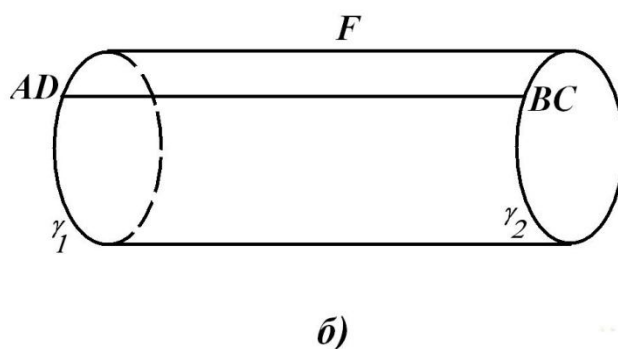
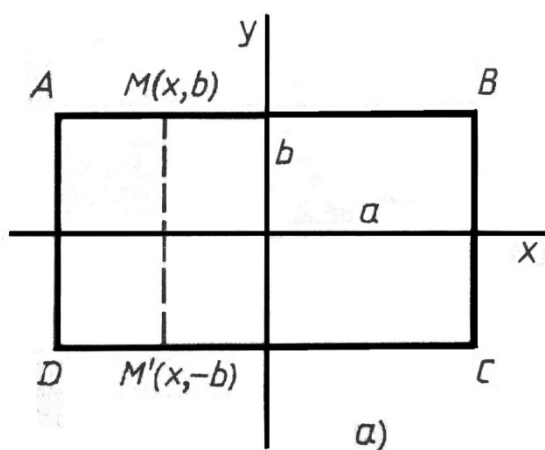
4-misol. Yevklid tekisligida qavariq ko'pburchak chegarali ikki o'lchovli ko'pxillik hisoblanadi. Chekli bo'lib bu ko'pburchakning chegarasi xizmat qiladi. Bu ko'pburchakning ichkarisi oddiy ma'nodagi ikki o'lchovli ko'pxillik (chekkasiz), vaholanki bu to'plam tekislikda chegaraga ega, lekin uni o'z ichiga olmaydi.

5-misol. Yopiq yevklid yarim tekisligi, ya'ni yarim tekislik uni chegaralovchi α to'g'ri chiziq bilan birgalikda— chekkali ikki o'lchovli ko'pxillik, chekka bo'lib α to'g'ri chiziq xizmat qiladi. Bu chekkali nokompakt ko'pxillikka misol.

6-misol. E_3 evklid fazosida to'g'ri burchakli Oxy koordinatalar sistemasini beramiz Ozy tekislikda

$$ABCD = [M(x, y, 0) | |x| \leq a, |y| \leq b], \quad a > 0 \text{ va } b > 0 \text{ kom.} \quad (4.1)$$

to'g'ri to'rtburchakni qaraymiz.

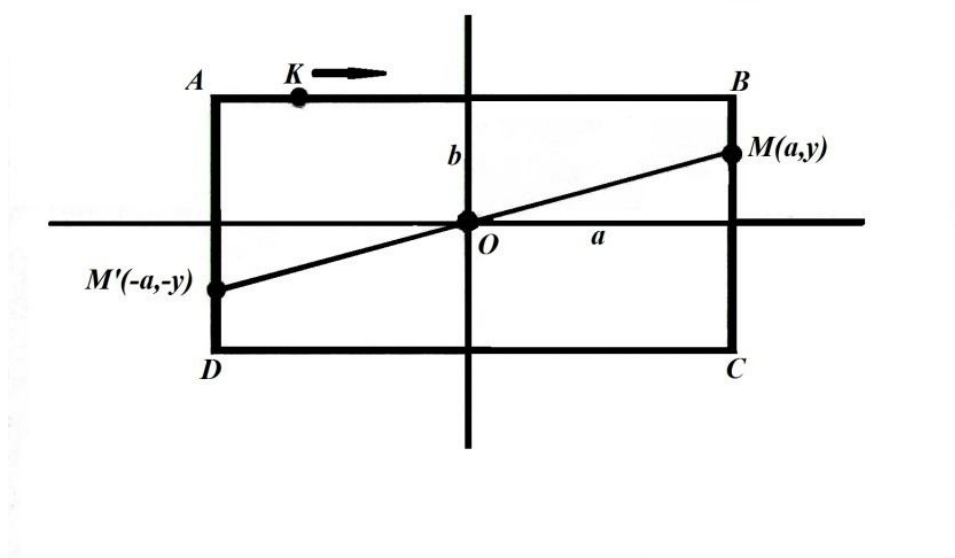


AB tomonning har bir $M(x, b)$ nuqtasini M nuqtaga Ox o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan DC tomonining $M'(x, -b)$ nuqtasi bilan aynanlashtiramiz (a) rasm). U holda to'g'ri to'rtburchak silindrning yon sirtini eslatuvchi F figuraga aylanadi. E_3 fazoning topologiyasi F figurada biror T topologiyani induksirlaydi

(b) rasm). (F, T) fazo chekkali ikki o'lchovli ko'pxillik bo'ladi. Uning chekalaridan har biri aylanaga gomeomorf ikkita γ_1, γ_2 figuradan iborat.

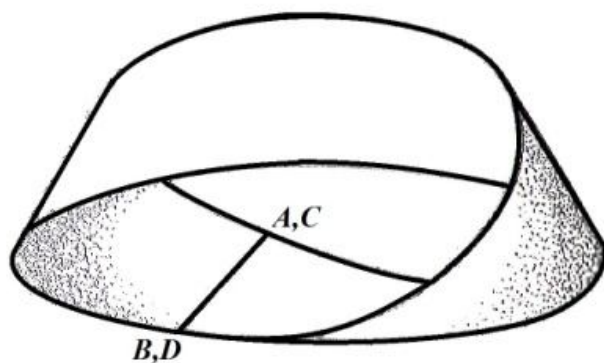
Bu olingan (F, T) cheklash ko'pxillik dasta deb ataladi. Bu dasta $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakdan yuqorida aynanlashtirilgan M va M' nuqtalar yordamida qarama-qarshi tomonlar juftlari bo'yicha yopishtirish bilan olingan.

7-misol. O'sha $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakni qaraymiz, lekin endi BC tomonning har bir $M(a, y)$ nuqtasini O nuqtaga nisbatan simmetrik DA tomondagi $M'(-a, -y)$ nuqtasini aynanlashtiramiz quyidagi rasmga qarang.



Shunday qilib Φ figurani hosil qilamiz, unda E_3 dagi topologiya biror τ_1 topologiyani induksirlaydi. (F, τ_1) fazo Myobius varag'i deb ataladi va chekkali ikki o'lchovli ko'pxillik hisoblanadi.

Myobius varag'i chekkasi tuzilishini aniqlash uchun A nuqtadan Myobius varag'i chekkasini yasaydigan K nuqtani tasavvur qilamiz. AB kesmani yasab K nuqta D nuqtada bo'lishi mumkin (chunki V va D nuqtalar aynanlashtirilgan, ya'ni bitta nuqta deb qaraladi). Keyin DC kesmani yasab, K nuqta yana A nuqtada bo'ladi (chunki C va A nuqtalar aynanlashtirilgan). Myobius varag'i chekkasi bir o'lchovli kompakt ko'pxillik degan xulosaga kelimiz va demak, u aylanaga gomeomorf. Myobius varag'i $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak $\overline{BC}$ va $\overline{DA}$ yo'nalgan kesmalar bo'yicha yopishtirish yo'li bilan olinga



7 §.

Xonali ajratish haqida tushuncha.

Ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi.

1. Qavariq ko'pburchakka gomeomorf ixtiyoriy chekkali ko'pxillik xonacha deb ataladi. Bunda berilgan xonacha uchun bu gomeomorfizm tayinlangan deb faraz qilinadi. Bu gomeomorfizmga ko'pburchak uchining obrazi xonacha uchi, ko'p burchak tomoni obrazini – xonacha tomoni deb ataymiz.

F ikki o'lchovli ko'pxillik $F_1, \dots, F_n$ xonachalar chekli to'plamiga yoyilgan deyimiz, agar quyidagi ikkita shart bajarilsa:

- 1) Bu xonachalar F ko'p xillik qoplamasini tashkil etadi.
- 2) Ixtiyoriy ikkita F_i va $F_j (i \neq j)$ xonachalar kesishmasi yoki bo'sh, yoki bu xonachalar uchi, yoki ularning har birining tomoni bo'ladi.

Masalan, tetraedr yoqlari bu tetraedr sirti (uning chegarasi) bo'yicha xonachalar yoyilmasini tashkil etadi.

Topologiyada ixtiyoriy ikki o'lchovli kompakt ko'pxillik va ixtiyoriy ikki o'lchovli chekkali kompakt ko'pxillikni xonalar chekli to'plamiga yoyish mumkin va bunday yoyilmani ko'pgina usullar bilan bajarish mumkin.

2. $K - F$ kompakt yoki chekkali kompakt ikki o'lchovli ko'pxillikning xonali yoyilmasi bo'lsin. $x \in F$ nuqta K xonali yoyilma uchi deb ataladi agar

x K dagi hech bo'lmaganda bitta xonaning uchi bo'lsa. $\gamma \subset F$ figura K yoyilma tomoni deb ataladi, agar u K dagi hyech bo'lmaganda bitta xonaning tomoni bo'lsa. Belgilash kiritamiz. K yoyilmaning α_0 – uchlari soni, α_1 – tomonlari soni, α_2 – xonalari soni.

$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ son F ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi deyiladi. Masalan, agar F – tetraedr sirti, K xonali yoyilma uning yoqlaridan iborat bo'lsa, u holda $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4$ ekanligini ko'rish qiyin emas, shuning uchun $\chi(F) = 2$.

Ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi uning xonali yoyilmasi tanlanishiga bog'liq emasligini isbotlash mumkin [6].

Eyler xarakteristikasi ko'pxillikning topologik invarianti ekanligini isbotlash mumkin. Haqiqatdan, F va F_1 – gomeomorf kompakt ikki o'lchovli ko'pxiliklar (yoki chekkali ikki o'lchovli kompakt gomeomorf ko'pxilliklar) va $f: F \rightarrow F'$ – gomeomorfizm bo'lsin (topologiyada bunda F ko'pxillik chekkasi F' ko'pxillik chekkasiga o'tishi isbotlanadi).

Bu gomomorfizm F ko'pxillikning K xonali yoyilmasini F' ko'pxillikning K' xonali yoyilmasiga o'tkazadi. Ravshanki, bu K' yoyilma K yoyilma kabi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sonlarga ega bo'ladi. Demak, $\chi(F) = \chi(F')$, shuni isbotlash talab qilingan edi.

Sferaning Eyler xarakteristikasini topamiz. $S \subset E_3$ sferaga qandaydir tetraedr ichki yasaymiz, uning chegarasini F orqali blgilaymiz. Tetraedrning F chegarasi kompakt ikki o'lchovli ko'pxillikdan iborat.

M_0 – tetraedrning qandaydir ichki nuqtasi bo'lsin. $f: F \rightarrow S$ akslantirish, agar $P \in F$ bo'lsab, u holda $f(P) = P_0 - M_0P$ nurning S sfera bilan kesishish nuqtasi bo'lgan qonun bo'yicha f akslantirish gomeomorfizm va demak, $\chi(S) = \chi(F)$. Lekin yuqorida isbotlanganidek $\chi(F) = 2$, shuning uchun $\chi(S) = 2$.

IKKI O'LCHOVLI KO'PXILLIKLAR

1. F – ikki o'lchovli kompakt ko'pxillik (yoki ikki o'lchovli chekkali kompakt ko'pxillik) va K – bu ko'pxillikning qandaydir xonali yoyilmasi bo'lsin. Qandaydir $ABCD$ xonani qaraymiz .

Xona tomonini yo'naltirilgan deb ataymiz, agar uning uchlari ko'rsatilgan tartibni e'tiborga olamiz: ko'rsatilgan uchlardan biri – boshi, ikkinchisi – yo'nalishli tomon oxiri. Bunda AB va BA tomonlar qarama-qarshi yo'naltirilgan deb aytiladi.

Agar $ABCD$ xonaning tomonlaridan biri, masalan AB tomon yo'naltirilgan bo'lsa, u holda xonaning butun chegarasining kelishilgan yo'nalishini kiritish mumkin (ya'ni AB tomonning B oxirini BC tomonning boshi, C nuqtani oxiri deb hisoblaymiz, BC tomon yo'nalishli bo'ladi va x.k.)

Xona yo'nalishli deyiladi, agar uning chegarasi bu yerda tavsiflangan usul bilan yo'naltirilgan bo'lsa. Har bir xonani ikki xil usul bilan yo'naltirish mumkin: (ikkinchi usulni AB tomondan emas BA tomondan hisoblab hosil qilamiz).

F ko'pxillikning K xonali yoyilmasini qaraymiz. Umumiy tomonga ega ikkita F_1 va F_2 xonalarni olamiz va ularning har birini ikkita mumkin bo'lgan usullardan qandaydir biri bo'yicha yo'naltiramiz. Agar bunda, bu F_1, F_2 xonalar yo'naltirishlarida ularning umumiy tomonlari qarama-qarshi yo'nalishga ega bo'lsa, u holda F_1, F_2 xonalar bir xil yo'nalishli deb aytamiz. Agar ularning umumiy tomoni bir xil yo'nalish olsa, u holda bu xonalar qarama-qarshi yo'nalishli deymiz.

Agar F ko'pxillikning biror K xonasi yoyilmasi umumiy tomonga ega har bir ikki xona bir xil yo'nalish oladigan qilib yo'naltirsak, u holda F ko'pxillik yo'nalishli deb ataladi. Agar bunday xonali yoyilma mavjud bo'lmasa, u holda F ko'pxillik yo'nalishsiz deb ataladi.

Topologiyada ko'pxillik yo'nalishi tushunchasi uning xonali yoyilmasi tanlanishiga bog'liq emasligi isbotlanadi.

Ko'pxillik yo'nalishligi uning topologik invarianti ekanligini isbotlaymiz.

F – yo'naltirilgan ko'pxillik, F' – unga gomeomorf ko'pxillik: $F' = f(F)$, bu yerda f – gomeomorfizm. F ko'pxillikda K xonali yoyilma mavjud, uning xonalarini yo'naltirish mumkin, (yo'nalishli ko'pxillik ta'rifida ko'rsatilgani kabi). f gomeomorfizm F ko'pxillikning xonali yoyilmasi F' ko'pxillikning K' xonali yoyilmasiga o'tkazadi. Bunda K dagi har bir xona yo'nalishi K' dagi tegishli xonasiga o'tadi. Demak, umumiy tomonga ega K' dagi har bir ikkita xona bir xil yo'nalgan bo'ladi (chunki bunday xossaga ega xonalar - K yoyilmasidagi ularning proobrazlari). Bu demak, F' ko'pxillik yo'nalishli ekanini bildiradi.

Shunday qilib, ko'pxillikning yo'nalishli bo'lish xossasi gomeomorfizmlarda saqlanadi.

2. Berilgan F ko'pxillik yo'nalishli yoki yo'nalishsiz ekanligini qanday bilish mumkin?

K – bu ko'pxillikning qandaydir xonali yoyilmasi bo'lsin. F ning xonalaridan birini olamiz va uni mumkin bo'lgan usullarning ixtiyoriy bittasi bilan yo'naltiramiz, so'ngra F xona bilan umumiy tomonga ega xonani olamiz va bu xonani shunday yo'naltiramizki, ularning umumiy tomoni bu tomon F xona yo'naltirishda olgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishni olsin. So'ngra navbatdagi qo'shni xonani olamiz va h.k. Biz quyidagi ikkita mumkin bo'lgan holga kelamiz:

a) umumiy tomonga ega har bir ikkita xona bitta yo'nalishli bo'ladi, va demak, F ko'pxillik yo'nalishli.

b) qarama-qarshi yo'nalishli ikkita xona topiladi. Bu ko'pxillik xonali yoyilmasini ixtiyoriy tanlanganda ham shunday bo'ladi va demak, F ko'pxillik yo'nalishsiz.

Shunday qilib, ko'pxillikning yo'naltirishga tekshirganda uning ixtiyoriy xonali yoyilmasidan foydalanish mumkin.

Ixtiyoriy tetraedrning F chegarasi yo'nalishli. Tetraedr yoqlari uning chegarasi xonali yoyilmasini tashkil etadi.

Qulaylik uchun tetraedrning yoyilmasini qaraymiz. Bu yoyilma 4 ta ABC, ABD_1, BCD_2 va ACD_3 uchburchakdan iborat (D_1, D_2, D_3 nuqtalariga tetraedr chegarasida bitta D nuqta mos keladi). $\triangle ABC$ ning AB tomonini shunday yo'naltiramizki, A nuqta boshi va oxiri B nuqta. Bu $\triangle ABC$ yo'nalishini aniqlaydi. $\triangle ABD_1$ ni olamiz va uni shunday yo'naltiramizki, uning $\triangle ABC$ bilan umumiy tomoni BA B nuqtadan A nuqtaga yo'nalish oladi. $\triangle ABD_1$ yo'nalishli bo'ladi. Qolgan $\triangle$ lar shunga o'xshash yo'nalishli bo'ladi. Bunda ABD_1 va ACD_3 xonalarning umumiy tomoni AD qarama-qarshi yo'nalish oladi (ABD_1 xonada: bu A nuqtadan D_1 nuqtaga yo'nalish, ACD_3 xonada - D_3 nuqtadan A nuqtaga yo'nalish).

Xuddi shunday boshqa qo'shni xonalar bilan hol ro'y beradi. Bundan tetraedr yoqlari yo'nalishli ekanligi kelib chiqadi [6].

Sfera tetraedr chegarasiga gomeomorf bo'lgani uchun sfera ham yo'nalishli.

Myobius varag'i chekkali yo'nalishsiz kompakt ko'pxillikka misol bo'ladi. Haqiqatdan Myobius varag'i $\overline{BC}$ va $\overline{DA}$ kesmalar bo'yicha yo'nalgan yopishtirish bilan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakdan olingan bo'lsin. Myobius varag'ining $AEFD$ va $EBCF$ ikkita tomonga yoyilmasini olamiz. Bu yerda E — AB kesma nuqtasi, F — CD kesma nuqtasi. Bu xonalarni yuqoridagi holda bo'yicha yo'naltiramiz (EF kesmadan boshlab), u holda ularning umumiy tomoni $BC = DA$ bitta yo'nalish oladi. Demak, Myobius varag'i yo'nalishsiz.

9 §. **KOMPAKT IKKI O'LCHOVLI KO'PXILLIKLARNI SINFLASH**

Ushbu paragrafda asosan kompakt ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflashga bag'ishlangan bo'lib, unda ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflashning asosida yotuvchi bir nechta teoremlar bayon qilingan.

1. Bizga R^3 yevklid fazosida markazi O nuqtada radiusi r bo'lgan S sfera va O nuqtadan h , ($0 < h < r$) masofa uzoqlikda joylashgan π tekislik berilgan bo'lsin. Ko'rinib turibdiki π tekislik sferani ikkita qismga ajratadi, sferaning O nuqta bilan tutashturganda π tekislikni kesib o'tadigan nuqtalar to'plamini F orqali belgilaymiz. U holda $Q_1 = S \setminus F$ nuqtalar to'plami chekkali ko'pxillik bo'ladi, va u yopiq doiraga gomeomorf. Ammo yopiq doira uchburchakka gomeomorf bo'lgani uchun, bu uchta ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi bir xil bo'lib u 1 ga teng bo'ladi. Q_1 ko'pxillik bitta teshikli sfera deb ataladi. Uning uchun $\chi(Q_1) = 1$ tenglik o'rinli.

Xuddi shunday r ta teshikli sfera deb ataluvchi Q_r – ko'pxillikni ham olish mumkin. Bu teshiklarni shunday kesib olamizki, ko'pxillik chekkasini tashkil etuvchi aylanalardan hech qanday ikkitasi umumiy nuqtaga ega emas.

Q_2 ko'pxillik (ikkita teshikli sfera) bir teshikli yopiq doiraga gomeomorf (rasm 1). Uning Eyler xarakteristikasini oson hisoblash mumkin. 1-chi rasmda ko'rsatilgan xonali yoyilmani olib $\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 9$, $\alpha_2 = 3$ ni topamiz. Demak, Q_2 ning Eyler xarakteristikasi $\chi(Q_2) = 6 - 9 + 3 = 0$ bo'lar ekan.

Ko'rinib turibdiki har bir teshik Eyler xarakteristikasini bittaga kamaytiradi. Matematik induksiya usulini qo'llab r ta teshikli Q_r sfera uchun

$$\chi(Q) = 2 - r \quad (4.2)$$

formula o'rinli ekanligini isbotlash mumkin [6].

2. Ikkita teshikli Q_2 sfera chekkasi ikkita γ'_1, γ'_2 aylanalardan iborat bo'lsin. Dasta ham chekkali ko'pxillik bo'ladi va uning chekkasi har biri aylanaga gomeomorf bo'lgan bir o'lchovli γ_1, γ_2 ko'pxilliklardan iborat. Demak,

$$\begin{aligned} f_1: \gamma_1 &\rightarrow \gamma'_1 \\ f_2: \gamma_2 &\rightarrow \gamma'_2 \end{aligned}$$

homeomorfizmlar mavjud. Bu homeomorfizmlar yordamida γ_1 ni γ'_1 bilan γ_2 ni γ'_2 bilan aynanlashtiramiz.

Bunda dastanini Q_2 sferaga yopishtiramiz. Bu yopishtirish shunday bajarilganki, dastning ichki nuqtalari chegarasi Q_2 ko'pxillikni o'z ichicha olgan $\bar{B}(O, r)$ sharga nisbatan tashqi hisoblanadi. Hosil bo'lgan ko'pxillik bitta dastali sfera deyiladi. Bu ko'pxillik torga homeomorf. Tor deb biror γ aylanani bu aylana bilan bir tekislikda yotuvchi, uni kesib o'tmaydigan a to'g'ri chiziqli atrofida aylantirishdan olingan sirtga aytiladi.

Endi Q_{2p+r} ko'pxillikni $2p+r$ ta teshikli sferani olamiz va bu teshiklarning p jufti dastalar bilan yopishtiramiz. r ta teshikni qoldiramiz. Q_p ko'pxillikni olamiz, u p ta dastali va r ta teshikli sfera deb ataladi. Quyidagi teorema o'rinli [1,6].

Teorema 2.2. Har qanday ikki o'lchovli kompakt, yo'nalishli ko'pxillik biror $Q_{p,0}$ ko'pxillikka homeomorf, har qanday kompakt, chekkali yo'nalishli ko'pxillik biror $Q_{p,r}$ ko'pxillikka homeomorf bo'ladi.

p soni berilgan ko'pxillik jinsi, r soni esa – bu ko'pxillik konturlar soni deb ataladi.

$Q_{p,r}$ uchun ushbu formula o'rinli,

$$\chi(Q_{p,r}) = 2 - 2p - r \quad (4.3)$$

(4.3) tenglik (4.2) formulaning umumlashmasi. (4.3) formuladan torning Eyler xarakteristikasi $\chi(Q_{1,n}) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Ikkita yo'nalishli kompakt ko'pxilliklar homeomorfligi haqida quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 2.3. Ikkita yo'nalishli kompakt ko'pxilliklar faqat va faqat shunda gomeomorf bo'ladi, agar ular bitta va bir xil jinsga (yoki bitta va bir xil Eyler xarakteristikaga) ega bo'lsa. Ikkita chyekkali yo'nalishli kompakt ko'pxilliklar faqat va faqat shunda gomeomorf bo'ladi, agar ular bitta va bir xil jinsga va bir xil konturlar soniga ega bo'lsa.

p – dastali sfera p jinsli ikki o'lchovli yo'nalishli kompakt ko'pxillikning normal shaklidan, p dastali va r ta tekshikli p jinsli sfera, chekkasi r konturdan iborat ikki o'lchovli yo'nalishli kompakt ko'pxillikning normal shaklidan iborat.

3. Yo'nalishsiz kompakt ko'pxilliklar haqida faqat asosiy ma'lumotlarni keltiramiz. Bilamizki, Myobius varag'i chekkasi aylanaga gomeomorf. Shuning uchun $(p + 1)$ ta teshikli Q_{p+1} sferani olish mumkin va barcha teshiklar Myobius varaqlari bilan berkitish mumkin. Bunda kompakt yo'nalishsizko'pxillik φ_p –ga ega bo'lamiz $\chi(\psi_p) = \chi(Q_{p+1})$ deb hisoblash mumkin. (4.2) formula bo'yicha

$$\chi(\psi_p) = 1 - p \quad (4.4)$$

ni olamiz.

Agar bitta teshikli $(p = 0)Q_1$ sferani olsak va uni Myobius varag'i bilan yopsak, $\chi(\psi_0) = 1$ bo'lgan ψ_0 ko'pxillikni olamiz. Isbotsiz ikkita teoremani keltiramiz:

Teorema 2.4. Har qanday kompakt ikki o'lchovli yo'nalishsiz ko'pxillik biror ψ_p ko'pxillikka gomeomorf. p soni berilgan ko'pxillikning jinsi deb ataladi.

Teorema 2.5. Ikkita kompakt ikki o'lchovli yo'nalishsiz ko'pxillik faqat va faqat shunda gomeomorf bo'ladi, agar ular bitta va bir xil jinsga (yoki bitta va o'sha Eyler xarakteristikasiga) ega bo'lsa.

II BOB UCHUN X U L O S A

Malakaviy bitiruv ishining bu bobi ko'pxillik tushunchalari va ko'pxilliklarni sinflash masalalariga bog'ishlangan u 9 ta paragrafni o'z ichiga oladi.

Birinchi paragrafda asosan ko'pxillikning asosiy tushunchalari keltirilgan. Bundan tashqari umuman olganda har qanday ko'pxillikda bir nechta har xil xatiralar atlasini tayinlash mumkinligi haqidagi ikkita lemma isbotlangan, bular lemma 2.1 va lemma 2.2 larda o'z ifodasini topgan.

Bu bobning 2-§ da ko'pxilliklarga doir oddiy misollar keltirilgan.

Umuman olganda metrik yoki topologik fazolar ichida ko'pxilliklarni ajratish anchagina qulayliklarga olib keladi. Shu maqsadda uchinchi paragraf koordinatalarni almashtirishga bag'ishlangan.

4-§ da avvalo n – o'lchovli silliq ko'pxillik ta'rifi keyinchalik esa bundanda umumiyroq ta'tifi keltirilgan bular ta'rif 2.2 va ta'rif 2.2' lardir. Bundan tashqari haqiqiy analitik ko'pxillik va kompleks analitik ko'pxilliklarga doir misollar keltirilgan. Paragraf oxirida ixtiyoriy silliq ko'pxillik kompleks analitik bo'lishi shart emasligi asoslangan.

Bu bobning beshinchi paragrafi silliq akslantirish va diffeomorfizm va ularning xossalari bag'ishlangan.

Agar ikkita ko'pxillik o'rtasida C^r sinfnining sillqlik gomeomorfizmi bo'lsa, bu ko'pxilliklarning o'lchovlari tengligi haqidagi teorema isbotlangan bu teorama 2.1 teoremada o'z aksini topgan va $h = f \circ g$ kompositsiyaning yakobi matrisasi f va g akslantirishlarning yakobi matrisalari ko'paytmasiga tengligi 2.3 lemmada isbotlab ko'rsatilgan.

Bundan tashqari, har qanday silliq ko'pxillikda shunday, R^n ga diffeomorf haritalar atlas mavjudligi haqidagi 2.4 lemma isbotlangan.

Bundan tashqari ixtiyoriy bog'lamli nokompakt bir o'lchovli ko'pxillik to'g'ri chiziqqa gomeomorf ekanligi, bog'lamli bir o'lchovli kompakt ko'pxillik esa aylanaga gomeomorf ekanligi takidlangan. Shu bilan birgalikda E_3 Evklid fazosidagi sfera ikki o'lchovli ko'pxillik hamda haqiqiy ellips, giperboloid, paraboloidlar, ikkinchi tartibli haqiqiy silindrlar ham ikki o'lchovli ko'pxillik bo'ladi. Bu paragrafda yana chegarali ko'pxilliklarga ham misollar keltirilgan.

Etinchi paragrafda xonali ajratish haqida tushuncha, ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi tushunchasi keltirilgan. Shu bilan birgalikda ko'pxillikning Eyler xarakteristikasi uning xonali yoyilmasiga bog'liq emasligi hamda Eyler xarakteristikasi ko'pxillikning topologik invariant ekanligi isbotlangan.

Bu bobning toqqizinchi paragrafi asosan kompakt ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflashga bag'ishlangan bo'lib, unda ikki o'lchovli ko'pxilliklarni sinflashning asosida yotuvchi bir nechta teoremlar bayon qilingan.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. А.Т.Фоменко. Дифференциальной геометрии и топологии дополнительные главы Изд.: дом «Удмуртский университет» 1999
2. А.Т.Колмогоров., С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа Изд.: «Наука» Москва 1976 г.
3. В.А.Треногин.,Б.М.Писаревский.,Т.С.Собелева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Москва ФИЗМАТЛИТ 2002
4. В.Босс. Лекции по математике Т.13 Топология. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» 2009 г.
5. И.А.Тайманов. Лекции по дифференциальной геометрии Изд.:Институт компьютерных исследований 2002 г.
6. Л.С.Атанасян., В.Т.Базылев Геометрия ч 1-2 Москва 1987 г.
7. www.ziyonet.uz
8. www.math.ru
9. www.exponenta.ru