

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti

Neft va gaz fakulteti

«Texnologik mashina va jihozlar» kafedrası

“Fizika” fanidan

REFERAT

TMJ-120guruh talabasi

Botirov Akbar

AYLANMA HARAKAT KINEMATIKASI VA DINAMIKASI

Qarshi-2015

AYLANMA HARAKAT KINEMATIKASI VA DINAMIKASI

REJA:

- 1. Qattiq jism aylanma harakati kinematikasi**
- 2. Qo'zg'almas o'qqa nisbatan mexanik sistemaning impuls momenti bilan shu nuqtaga nisbatan sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning momenti.**
- 3. Jismning inersiya momenti**

Qattiq jismning, u bilan mustahkam bog'langan AB to'g'ri chiziqlarning hamma nuqtalari qo'zg'almasdan qoladigan harakatiga jismning AB qo'zg'almas o'q atrofida aylanishi deyiladi.

AB to'g'ri chiziq **jismningaylanish** o'qi deyiladi. Aytaylik D, qo'zg'almas AB o'q atrofida aylanuvchi qattiq jismning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Jism qattiq bo'lgani uchun (mutlaq qattiq), uning aylanishida AB, AD va BD masofalar o'zgarishsiz qoladi. Demak, jismning D nuqtasi markazi aylanish o'qida yotgan, tekisligi esa unga tik bo'lgan aylana bo'ylab harakatlanadi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism bitta erkinlik darajasiga ega. Uning fazodagi holati bu jismning qandaydir shartli tanlangan boshlang'ich holatining aylanish o'qi atrofida burilish burchagining qiymati bilan to'liq aniqlanadi. Jismning ko'rilayotgan nuqtasi aylanish o'qidan qancha uzoqda tursa, bir xil dt vaqt oralig'ida u shuncha ko'p ds yo'lni o'tadi. Bunga muvofiq ravishda uning $v=ds/dt$ tezligi ham shuncha katta bo'ladi. Shuning uchun jismning aylanma harakatini tasvirlash uchun kinematikaning nuqta, siljish, bosib o'tilgan yo'l, nuqtaning tezligi va tezlanishi tushunchalaridan foydalanish noqulay. Bunday holda kichik dt vaqt oralig'ida butun jismning siljishini o'lchovi sifatida **jismning elementar burilish vektori** $d\vec{\varphi}$ xizmat qiladi. U moduli bo'yicha dt vaqt ichida jismning o'q atrofida burilish burchagi $d\varphi$ ga teng va **o'ng parma qoidasi** bo'yicha aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan: $d\vec{\varphi}$ vektorning uchidan qaralganda jismning burilishi soat strelkasi yurishiga teskari sodir bo'layotgani ko'rinadi.

* * O'ng emas, balki chap koordinat sistemasidan foydalanilgan holda $d\vec{\varphi}$ vektori aylanish o'qi bo'ylab teskari tomonga yo'naladi, ya'ni bunda uni uchidan qaralganda jismning burilishi soat strelkasi yo'nalishda sodir bo'layotgan bo'lib ko'rinadi. Matematikada o'ng koordinat sistemasidan chapiga o'tganda o'zining yo'nalishini saqlaydigan odatdagi **qutbli vektorlardan** farqli ravishda, ko'rsatilgan koordinata almashtirishlarda o'z yo'nalishini o'zgartiruvchi vektorlar, **psedovektorlar** yoki **aksial' vektorlar** deyiladi. Qutbli vektorlarga misol qilib nuqtaning radius-vektorini, uning tezlik va tezlanishini, kuch vektori va shu

kabilarni olish mumkin. Shu bilan bir vaqtda ikki qutbli vektorning vektor ko'paytmasi-pseudovektor.

1. Jismning yo'nalishi va aylanish tezligining kinematik xarakteristikasi bo'lib, *jismning elementar burilish vektorini, bu burilishni davom etish vaqtiga nisbatiga teng bo'lgan kattalik – jismning burchak tezligi xizmat qiladi:*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad \text{yoki} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} . \quad (1)$$

Agar burchakli tezlik moduli doimiy bo'lsa, jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanishi **tekis aylanish** deyiladi:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} . \quad (2)$$

Bu holda jismning burilish burchagi aylanish vaqti t ga to'g'ri proporsional:

$$\varphi = \omega t \quad (4.3)$$

Jismning qo'zg'almas aylanish o'qi OA dan ρ masofada turgan ixtiyoriy N nuqtaning $\vec{v}$ tezligini topamiz (4.1-rasm). Aylanish o'qining O nuqtasini koordinata boshi sifatida olamiz, N nuqta harakatlanayotgan aylana markazini O' bilan belgilaymiz. Uholda N nuqtaning radius-vektori

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{\rho} \quad (4)$$

bo'ladi, bu yerda $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'N}$ vektori. Aksial vektorlar $d\vec{\varphi}$ va $\vec{\omega} OA$ aylanish o'qida aniq qo'yilish nuqtasiga ega emas. 4.1-rasmda ular O nuqtadan yo'nalgan. N nuqta kichik dt vaqtda rasmda shtrix chiziq bilan ko'rsatilgan aylana yoyi bo'ylab harakatlanib

$$ds = \rho d\varphi = \rho \omega dt$$

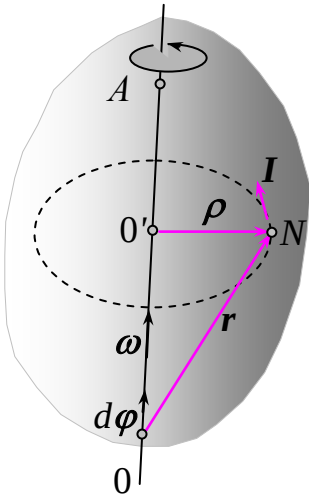
yo'lni bosib o'tadi.

Shuning uchun jism N nuqtasining tezlik moduli

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \omega \quad (5)$$

bo'ladi.

Bunda $\vec{\rho}$ va $\vec{\omega}$ vektorlarning o'zarotikekanligini, Nnuqtaning tezlik vektori $\vec{v}$ bu ikkala vektortekisligi - 4.1-rasm tekisligiga tekisligini hisobga olsak quyidagini yozishimiz mumkin:



1-rasm

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{\rho}] \quad (6)$$

Jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanishida $\vec{OO'}$ vektordoi miy bo'lgani uchun bu holda (4.4) dan

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad (7)$$

bo'lishi kelib chiqadi. $\vec{OO'}$ va $\vec{\omega}$ vektorlar kollinear, shuning uchun (4.4) dan (4.6) formulani

$$v = \frac{dr}{dt} = [\vec{\omega} r] \quad (6')$$

ko'rinishda qayta yozish mumkinligi kelib chiqadi. Jismning burchakli tezligi $\vec{\omega}$ dan farqli holda $\vec{v}$ tezlik ko'pincha jism N nuqtasining **chiziqli tezligi** deyiladi. Bunda $\vec{v}$ vektori ham o'ng parma qoidasi bo'yicha yo'nalgan: $\vec{v}$ vektorning uchidan qaralganda $\vec{\omega}$ vektorining $\vec{r}$ vektorga burilishi, qisqa masofadan soat strelkasiga teskari yo'nalishda sodir bo'layotgani ko'rinadi.

ω burchakli tezlik bilan tekis aylanayotgan jismning to'liq bir marta aylanishi, ya'ni $\varphi = 2\pi$ burchakka burilishi uchun ketgan $T = 2\pi / \omega$ vaqt oralig'i aylanish davri deyiladi.

Aylanish chastotasi, ω burchak tezlik bilan tekis aylanayotgan jismning vaqt birligi ichida necha marta aylanishini ko'rsatadi:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8)$$

3. Qo'zg'almas o'q atrofida jism notekis aylanganda, uning burchakli tezligi o'zgaradi. Burchakli tezlikning o'zgarish tezligini xarakterlovchi vektorga burchakli tezlanish deyiladi:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (9)$$

Agar jism qo'zg'almas o'q atrofida tezlanuvchan aylanayotgan, ya'ni $d\omega/dt > 0$ bo'lsa, $\vec{\varepsilon}$ vektor ham aylanish o'qi bo'ylab $\vec{\omega}$ vektor tomonga,

sekinlanuvchan aylanishda $\vec{\varepsilon}$ vektori $\vec{\omega}$ vektoriga qarama-qarshi tomonga yoʻnaladi.

Qoʻzgʻalmas oʻq atrofida aylanuvchi jism N nuqtasining $\vec{a}$ tezlanishini topamiz. (4.6), (4.7) va (4.9) dan

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\varepsilon} \vec{\rho}] + [\vec{\omega} \vec{v}]$$

yoki

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{\rho}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{\rho}]] \quad (10)$$

formulalarga ega boʻlamiz.

(4.10) formulaning oʻng qismidagi birinchi had N nuqtaning $\vec{a}_r$ urinma tezlanishini koʻrsatadi:

$$\vec{a}_r = [\vec{\varepsilon} \vec{\rho}] = [\vec{\varepsilon} r], \quad (11)$$

ikkinchi had esa $-N$ nuqtaning normal tezlanishi:

$$\vec{a} = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{\rho}]] = -\omega^2 \vec{\rho}. \quad (12)$$

4.Qattiq jismning faqat bitta O nuqtasi hamma vaqt qoʻzgʻalmasdan qoladigan harakatiga qattiq jismning qoʻzgʻalmas nuqta atrofidagi harakati (aylanishi) deyiladi.

Bu holda jismning hamma nuqtalari markazi O nuqtada joylashgan kontsentrik sferalar sirtida harakatlanadi. Shuning uchun qattiq jismning bunday harakatiga koʻpincha **jismning sferik harakati** deyiladi. Qattiq jismning qoʻzgʻalmas nuqta atrofidagi harakatini, vaqtning har bir momentida jismning shu qoʻzgʻalmas nuqtasidan oʻtgan va **aylanishning oniy oʻqi** deb ataluvchi oʻq atrofidagi aylanish sifatida qarash mumkinligi nazariy mexanikada isbot qilinadi. Umumiy holda oniy aylanish oʻqining holati vaqt oʻtishi bilan qoʻzgʻalmas sanoq sistemasiga nisbatan qanday oʻzgarsa, harakatlanuvchi jism bilan qattiq bogʻlangan sanoq sistemasida ham shunday oʻzgaradi. Elementar burilish vektori $d\vec{\varphi}$ va burchakli tezlik $\vec{\omega}$ jismning oniy aylanish oʻqi boʻylab yoʻnalgan, burchakli tezlanish vektori $\vec{\varepsilon}$ (4.9) esa bu oʻq boʻylab yoʻnalmagan.

Jismning N nuqtasi tezligi $\vec{v} = d\vec{r} / dt$ uchun oldingidek, (4.6') formula o'rinli, bu yerda $\vec{r}$ – jismning qo'zg'almas O nuqtasidan o'tkazilgan N nuqtaning radius-vektori. N nuqtaning tezlanishi

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \vec{r}] = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}]$$

yoki

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] \quad (10')$$

bo'ladi.

Bunda $\vec{a}_{ayl} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}]$ vektorijism N nuqtasining aylanmatezlanishideyiladi, $\vec{a}_{o'q,s} = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$ vektorea N nuqtaning o'qqaintilmatezlanishideyiladi, chunki $\vec{a}$ vektorning butashkiletuvchisi N nuqtadan aylanishning oniy o'qigatikyo'nalgan.

Qo'zg'almas O nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jism uchta erkinlik darajaga ega: O nuqtadan o'tgano'zarotik qo'zg'almas uchta o'q atrofida mustaqil aylanishim mumkin. Bunday jismning fazodagi holatini bir qiymatli berish uchun uchta mustaqil koordinata zarur. Buning uchun **Eyler burchaklari** deb ataluvchi uchta burchakdan foydalaniladi. Lekin Euler burchaklarini ko'rib o'tish bizning kursimiz doirasiga kirmaydi.

5. Erkin qattiq jism, masalan havoda uchayotgan samolyot oltita erkinlik darajaga ega. Ulardan uchta, uchta koordinat o'qlari bo'ylab bo'ladigan mustaqil ilgarilanma harakatga, qolgan uchta esa bu o'qlar atrofida aylanishga mos keladi. Shuning uchun, erkin qattiq jism uchta ilgarilanma, uchta aylanma erkinlik darajasiga ega deyiladi.

Qattiq jismning har qanday harakatini bir vaqtda sodir bo'ladigan ikki harakatning kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin: **jismning qutbi** deb ataluvchi ixtiyoriy tanlangan qandaydir A nuqtasining $\vec{V}_a$ tezlik bilan ilgarilanma harakati, hamda qutb orqali o'tuvchi oniy o'q atrofida aylanishi. Bunda qutbning tanlanishi, jismning har bir ko'rilayotgan vaqt momentida (odatda $\vec{\omega}$ vaqt o'tishi bilan o'zgaradi) qutb atrofida aylanish burchakli tezligi qiymatiga ta'sir etmas ekan.

Jismning ixtiyoriy N nuqtasining tezligi

$$\vec{v} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}(\vec{r} - \vec{r}_A)] \quad (13)$$

bo'ladi. Bu yerda $\vec{r}_A$ va $\vec{v}_A = d\vec{r}_A/dt$ – A qutbning radius-vektori va tezligi; $\vec{r}$ – N nuqtaning radius-vektori.

Qattiq jismlar dinamikasi masalalarida ko'pincha qutb sifatida jismning massa markazi S ni tanlash qulay. Bu holda

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}(\vec{r} - \vec{r}_c)] \quad (13')$$

bo'ladi. Bir jinsli doiraviy silindr tekislikda dumalaganda uning hamma nuqtalari parallel tekisliklarda harakatlanadi. Qattiq jismning bunday harakatiga **yassi parallel** yoki **yassi harakat** deyiladi. Bunday harakat turi texnikada juda ko'p uchraydi. Ko'p mashina detal' va mexanizmlari (masalan, statsionar ichki yonuv dvigatelining shatuni, kulisli mexanizm detallari va boshqalar) shunday harakat qiladi. Yassi harakat holida A qutb atrofida oniy aylanish o'qi fazoda o'zining yo'nalishini o'zgartirmasdan ilgarilanma siljiydi, $\vec{\omega}$ va $\vec{v}_A$ vektorlari esa o'zaro tik.

Qattiq jismning murakkab harakatiga yana bir misol qilib uning **vintsimon harakatini** olish mumkin. Bu harakat jismning qandaydir o'q atrofida aylanma harakati bilan, shu o'q bo'yicha ilgarilanma harakatning qo'sxilishi natijasida olinadi. Vint va bol'tlar, ularni burab kiritishda va chiqarishda xuddi shunday harakat qiladi.

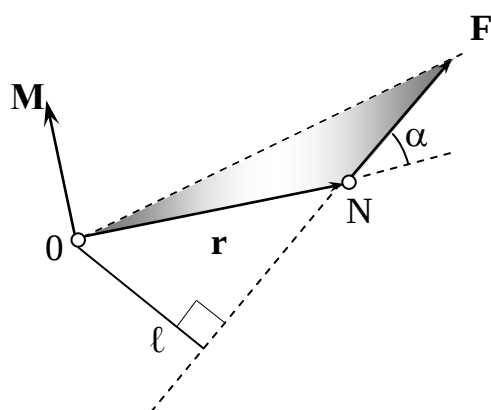
Impuls momentining o'zgarish qonuni

1. *Qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan $\vec{F}$ kuchning momenti deb, O nuqtadan $\vec{F}$ kuch qo'yilgan N nuqtaga o'tkazilgan $\vec{r}$ radius-vektor bilan shu kuchning vektor ko'paytmasiga aytiladi:¹⁾*

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}] \quad (14)$$

¹⁾ Bu yerda va bundan buyon O nuqta inertsiyal sanoq sistemaning hisob boshi sifatida qabul qilinadi.

$\vec{M}$ vektori $\vec{r}$ va $\vec{F}$ vektorlar tekisligiga o'ng parma qoidasi bo'yicha tik yo'nalgan (4.2-rasm). Kuchmomentiningmoduli



2-rasm

$$\vec{M} = Fr \sin \alpha = F\ell \quad (15)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda α - $\vec{r}$ bilan $\vec{F}$ orasidagi burchak, $\ell = r \sin \alpha$ - 0 nuqtadan $\vec{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan tik chiziqning uzunligi. Bunda ℓ kattalik $\vec{F}$ **kuchning yelkasi** deyiladi.

2. Biz n moddiy nuqtadan tashkil topgan mexanik sistemani ko'ramiz (xususan bu qattiq jism ham bo'lishi mumkin, lekin biz hozircha bunday cheklashni qo'ymaymiz).

Moddiy nuqtaning qo'zg'almas 0 nuqtaga nisbatan impuls momenti $\vec{L}_i$ - deb, moddiy nuqtaning 0 nuqtadan o'tgan $\vec{r}_i$ - radius vektori bilan shu moddiy nuqtaning $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ impulsining vektor ko'paytmasiga aytiladi (4.3-rasm):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i] = [\vec{r}_i \vec{p}_i] \quad (16)$$

Mos holda, qo'zg'almas 0 nuqtaganisbatanmexaniksistemaningimpulsmomentideb, sistemaningbarchamoddiynuqtalariningshunuqtaganisbatanimpulsmomentlarining geometrikyig'indisigatengbo'lganvektorgaaytiladi:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \vec{p}_i] \quad (17)$$

(4.17) ifodani t vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

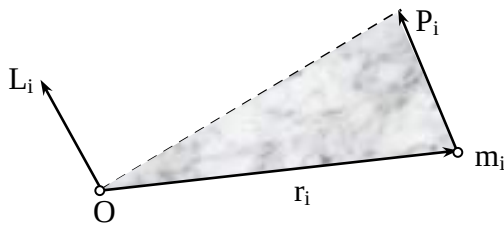
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right],$$

bo'ladichunki,
$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{P}_i \right] = [\vec{V}_i \vec{P}_i] = 0.$$

(2.13) va (2.14) ifodalardan

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \vec{F}_i^{tash}] + \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \right] \quad (18)$$

bo'lishi kelib chiqadi.



3-rasm

3.Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi hamma tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan vektor O nuqtaga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti deyiladi.

(19)

(4.18) tenglamaning o'ng tomonidagi 0

nuqtaga nisbatan barcha ichki kuchlarning yig'indisi niko'rsatuvchi ikkinchi summanolga tengekanini kursatamiz. Bu summada $\vec{F}_{ik}$ va $\vec{F}_{ki}$ kuchlarning juft momentlari ishtirok etadi: $\vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}]$ va $\vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k \vec{F}_{ki}]$.

N'yutonning uchinchi qonunidan

$$\vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} = [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}] - [\vec{r}_k \vec{F}_{ki}] = [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}] - [\vec{r}_k \vec{F}_{ik}] = [(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \vec{F}_{ik}]$$

bo'lishi kelib chiqadi.

3.3- rasmdan ko'rinadiki, $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ va $\vec{F}_{ik}$ vektorlar kollinear. Shuning uchun ularning vektor ko'paytmalari nolga teng. Demak,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \right] = 0, \quad (19')$$

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}^{tash} \quad (20)$$

bo'ladi.

(4.20) tenglama **impuls momentining o'zgarish qonunini** ifodalaydi:

Qo'zg'almas nuqtaga nisbatan mexanik sistemaning impuls momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng.

4. Mexanik sistemaning o'qqa nisbatan impuls momenti deb, ko'rilayotgan o'qdan ixtiyoriy tanlangan nuqtaga nisbatan sistema impuls momenti vektorining shu o'qqa proeksiyasiga aytiladi. Mos xolda, o'qqa nisbatan kuch momenti deb, shu o'qdan ixtiyoriy tanlangan nuqtaga nisbatan kuch momenti vektorining shu o'qqa proeksiyasiga aytiladi.

O'qda nuqtani tanlash shu nuqtaga nisbatan impuls momenti va kuch momenti qiymatlariga ta'sir qiladi, lekin shu bilan bir vaqtda o'qqa nisbatan impuls va kuch momentlari qiymatiga hech qanday ta'sir qilmasligini isbot qilish mumkin.

(4.20) tenglamani markazi 0 nuqtada bulgan to'g'ri burchakli dekart koordinata sistemasi o'qlaridagi proeksiyalardan

$$\frac{dL_x}{dt} = \vec{M}_x^{tash}, \quad \frac{dL_y}{dt} = \vec{M}_y^{tash}, \quad \frac{dL_z}{dt} = \vec{M}_z^{tash} \quad (21)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.

(4.21) tenglamalardan ko'rinadiki, qo'zg'almas o'qqa nisbatan mexanik sistemaning impuls momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan bosh momentiga teng.

5. (4.20) tenglama qo'zg'almas 0 nuqtaga nisbatan $\vec{L}$ impuls va $\vec{M}^{tash}$ tashqi kuch momenti uchun o'rinli. Endi, $\vec{L}$ bilan A nuqtaga nisbatan erkin holda harakatlanayotgan mexanik sistemaning L_A impuls momenti orasida qanday bog'lanish borliini tushuntiramiz. L_A ni hisoblashda biz sistema moddiy nuqtalarining koordinata boshi 0 nuqtada bo'lgan qo'zg'almas inersial sanoq sistemasiga nisbatan harakatiga mos keluvchi $\vec{p}_i$ impulslari qiymatlarini qo'yamiz (ya'ni, $\vec{L}$ ni hisoblashda qanday bo'lsa, o'shandek). Bunda $\vec{r}_A$ A nuqtaning K sanoq

sistemasidagi radius-vektori bo'lsin. U holda A nuqtadan sistemaning birinchi nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektori $r'_i \vec{r}_i - \vec{r}_A$ bo'ladi. Shuning uchun

$$L_A = \sum_{i=1}^n [r'_i P_i] = \sum_{i=1}^n [r_i P_i] - \left[r_A \sum_{i=1}^n P_i \right],$$

yoki

$$\vec{L}_A = \vec{L} - [\vec{r} \vec{p}] \quad (22)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu yerda $\vec{p}$ - sistemaning K sanoq sistemasiga nisbatan impulsi. Bu munosabatni differensiyalab

$$\frac{dL_A}{dt} = \frac{dL}{dt} - [V_A P] - \left[r_A \frac{dP}{dt} \right]$$

ifodani olamiz.

$$(2.20) \quad \text{gabinolamiz,} \quad \frac{dP}{dt} = F^{tash} \text{ bo'lgani uchun yuqoridagi ifoda}$$

quyidagik o'rinishni oladi:

$$\frac{dL_A}{dt} = \frac{dL}{dt} - [[V_A P] - r_A F^{tash}]. \quad (23)$$

A nuqtaga nisbatan tashqi kuchlarning momenti

$$\vec{M}_A^{tash} = \sum_{i=1}^n [r'_i F_i^{tash}] = \sum_{i=1}^n [r_i F_i^{tash}] - \left[r_A \sum_{i=1}^n F_i^{tash} \right],$$

ya'ni,

$$M_A^{tash} = M^{tash} - [r_A F^{tash}]. \quad (23')$$

(20), (23) va (23') lardan

$$\frac{dL_A}{dt} = \vec{M}_A^{tash} - [V_A P] \quad (24)$$

kelib chiqadi.

Xususan, agar A nuqta sifatida sistemaning massa markazi olinsa, $V_A = V_c$ bo'lib, $[V_c R] = 0$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{dL_A}{dt} = \vec{M}^{tash} \quad (25)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Mexanik sistemaning massa markaziga nisbatan impuls momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng.

Ko'rsatish mumkinki, $\dot{L}_c$ hisoblashda teng xuquqli ravishda sistema barcha nuqtalarining K qo'zg'almas sanoq sistemasidagi yoki unga nisbatan massa markazi tezligi $\vec{v}_c$ bilan ilgarilanma harakatlanayotgan sanoq sistemasidagi harakatlarining impulslarini olish mumkin. Xaqiqatdan ham 2,6-§dakiritilgan $\vec{r}'_i = \vec{r}^*_i = \vec{r}_i - \vec{r}_c$ va $\vec{v}^*_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$ belgilardanfoydalanib,

$$L_N = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i^* \cdot \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n [m_i \vec{r}_i^* (\vec{v}_i^* + \vec{v}_c)] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i^* \cdot \vec{p}_i^*] + m [\vec{r}_c^* \cdot \vec{v}_c] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i^* \cdot \vec{p}_i^*]$$

formulaniolamiz, chunki $\vec{r}_c^* = 0$.

Qo'zg'almaso'qatrofidaaylanuvchiqattiqjismdinamikasi

1. Dekartkoordinatasistemaningshundayjoylashtiramizki,

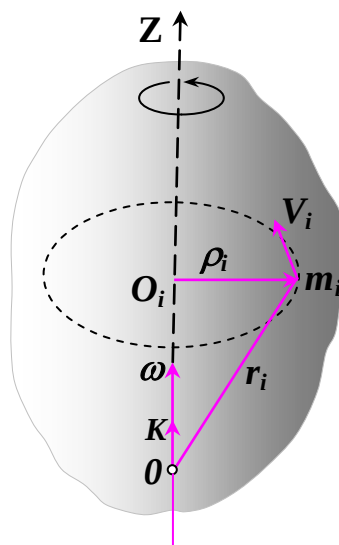
OZo'qjismningaylanisho'qibilanmostushsin, uning kortiesajismning $\vec{\omega}$ burchaklitezligibilanbirxilyo'nalsin (4-rasm). Bunda $\vec{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$, buyerda $\omega_z = \omega > 0$.

Qo'zg'almasOZo'qatrofidaaylanuvchiqattiqjismdinamikasining asosiy tenglamasi

$$\frac{dL_z}{dt} = \vec{M}_z^{tash} \quad (26)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Aylanuvchi jismning o'qqa nisbatan impuls momenti bilan $\bar{\omega}$ burchakli tezlik orasidagi bog'lanishni topamiz. 4.4-rasmdan ko'rinadiki, jism tarkibiga kiruvchi m_i massali moddiy nuqtaning radius-vektori $\vec{r}_i = \vec{OO_i} + \vec{\rho_i}$ bo'ladi, bunda O_i -tekshirilayotgan moddiy nuqta harakatlanayotgan ρ_i radiusli aylananing markazi. Koordinata boshi 0 ga nisbatan jismning impuls momenti



4-rasm

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \ m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^n [\vec{OO_i} m_i \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{\rho_i} m_i \vec{v}_i]$$

$[\vec{OO_i} m_i \vec{v}]$ vektor OZ o'qqatik, /*vektorsa OZ o'q bo'ylab yo'nalgan. Shunday qilib,

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 \omega_z \quad (27)$$

2. Mexanik sistemani tashkil qiluvchi hamma moddiy nuqta m_i massalarining aylana o'qidan ulargacha bo'lgan ρ_i masofaning kvadratiga ko'paytmasining yig'indisiga teng bo'lgan J kattalik sistemaning shu o'qqa nisbatan inersiya momenti deyiladi:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 \quad (28)$$

Shunday qilib, jismning OZ o'qqa nisbatan impuls momenti

$$L_z = J \omega_z \quad (27')$$

bo'ladi. Bu yerda J jismning OZ aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti. (27') ni hisobga olib, (4.26) ni quyidagi shaklda qayta yozishimiz mumkin:

$$\frac{d}{dt}(J \omega_z) = M_z^{tash} \quad (29)$$

Agar jism aylanish jarayonida deformasiyalanmasa, uning inersiya momenti o'zgarmaydi va (4.29) da uni differensial belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$J \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^{tash}$$

yoki

$$I \varepsilon_z = M_z^{tash}, \quad (29')$$

bu yerda $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$ - burchak tezlanish $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k}$ vektorining OZ aylanish o'qiga proyeksiyasi.

(4.29') dan ko'rinadiki, ε_z inersiya momenti J ga teskari proporsional. Demak, jismning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti uning shu o'q atrofida aylanishidagi jism inertligining o'lchovidir.

3. Qat'iy qilib aytganda, jismni m massasi uning V hajmi bo'yicha uzluksiz taqsimlangan mexanik sistema sifatida qarash lozim, bunda jismning inersiya momenti

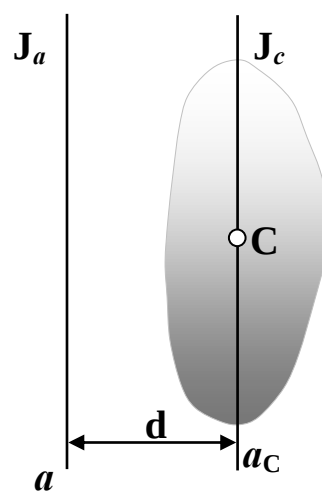
$$J = \int_{(m)} \rho^2 dm = \int_{(v)} \rho^2 D dV \quad (30)$$

bo'ladi. Bu yerda D - jismning zichligi, $dm = D dV$ - jismning aylanish o'qidan ρ masofada turgan dV hajm kichik elementining massasi. Jismning inersiya momenti uning materialiga, shakliga, o'lchamiga, shuningdek jismning aylanish o'qiga nisbatan joylashishiga bog'liq.

Agar **shteyner teoremasidan** foydalanilsa, ixtiyoriy o'qqa nisbatan jismning inersiya momentini hisoblash osonlashadi:

jismning ixtiyoriy a o'qqa nisbatan inersiya momenti, bu o'qqa parallel va jismning S massa markazidan o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momenti J_s bilan jism massasi m ni shu o'qlar orasidagi masofaning kvadratiga ko'paytmasining yig'indisiga teng (5-rasm):

$$J_a = J_c + md^2 \quad (31)$$

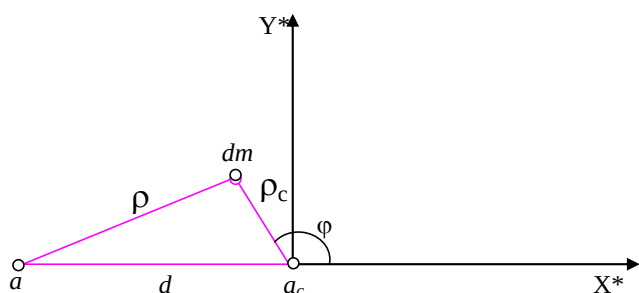


5-rasm

Buteoremaniisbotlaymiz.

4.6-rasmda a va a_s o'qlar chizmate kisligatikyo'nalgan, massasidm bo'lgan jismning kichik elementi dan bu o'qlargacha bo'lgan masofalar ρ va ρ_c bilan belgilangan.

Kosinuslar teoremasi bo'yicha



6-rasm

$$\rho^2 = \rho_0^2 + d^2 + 2d\rho_c \cos \varphi \text{ va}$$

$$J_a = \int_{(m)} \rho^2 dm = \int_{(m)} \rho_c^2 dm + md^2 + 2d \int_{(m)} x^* dm$$

bo'ladi. Bu yerda $x^* = \rho_s \cos \varphi$ - jism dm elementining boshlanishi jism massa markazida va abstsissasi a va a_s o'qlar bilan kesishuvchi va ular yotgan tekislikka tik bo'lgan koordinatalar sistemasidagi abstsissasi. Massamarkazinita'rifida (22'')

$$\int_{(m)} x^* dm = mx_c^* = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi, chunki jismning massa markazi koordinata boshi bilan mos tushadi. Shunday qilib (4.31) munosabatning to'g'riligi isbotlandi.

4. Sodda shaklli jismlar inersiya momentlarini hisoblashga bir necha misollar ko'ramiz.

1-misol. Massasi m va radiusi R bo'lgan yupqa devorli doiraviy silindrning o'qiga nisbatan inersiya momenti.

Bunday silindrning hamma kichik elementlari uning massa markazi S dan o'tgan o'qdan bir xil R masofada joylashgan.

Shuning uchun

$$J_c = \int_{(m)} R^2 dm = mR^2 \quad (32)$$

bo'ladi.

2-misol. Massasi m va radiusi R bo'lgan bir jinsli yaxlit silindrning o'qiga nisbatan inersiya momenti.

Silindrni fikran juda ko'p sonli umumiy o'qli yupqa silindrlarga bo'lamiz. Aytaylik ulardan birortasining radiusi r , devorining qalinligi esa $dr \ll r$ bo'lsin bu yaxlit silindrning inersiya momenti

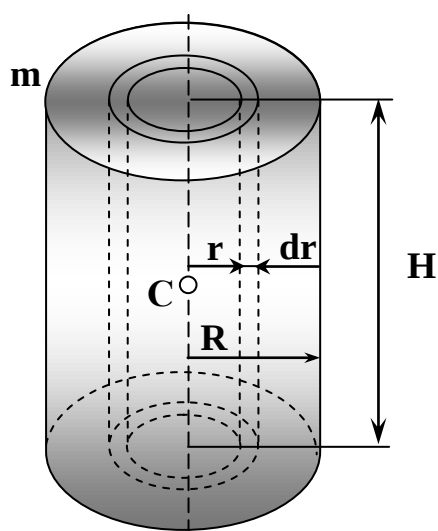
$$dJ_c = r^2 dm = r^2 2\pi r H dr \quad (4.33)$$

bo'ladi. Bu yerda N - silindr balandligi; D - uning zichligi. Yaxlit silindrning inersiya momentini uning hamma kichik elementlari inersiya momentlarini summasini olib, ya'ni (4.33) ifodani r bo'yicha 0 dan R gacha integrallab topamiz:

$$J_c = 2\pi HD \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^2 HD = \frac{mR^2}{2}, \quad (34)$$

chunki silindr massasi $m = D\pi R^2 N$.

3-Misol. Massasi m va uzunligi l bo'ulgan bir jinsli ingichka sterjenning o'rtasidan



7-rasm

o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momenti. Sterjenni fikran kichik bo'lakchalarga bo'lamiz. Aytaylik x - bunday bo'laklardan birining aylanish o'qigacha bo'lgan masofasi, dx - bo'lakchani uzunligi. U holda bu elementning inersiya momenti

$$dJ_c = x^2 dm = x^2 D S dx \quad (35)$$

bo'ladi. Bu yerda S - sterjenning ko'ndalang kesim yuzasi ($\sqrt{S} \ll l$); D - uning zichligi. Sterjenning bitta yarmining inersiya momentini (4.35) ifodani x bo'yicha 0 dan $l/2$ gacha integrallab topamiz, butun sterjenning

inersiya momenti ikki marta katta:

$$J_c = 2DS \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{2}{3} DS \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{ml^2}{12}, \quad (36)$$

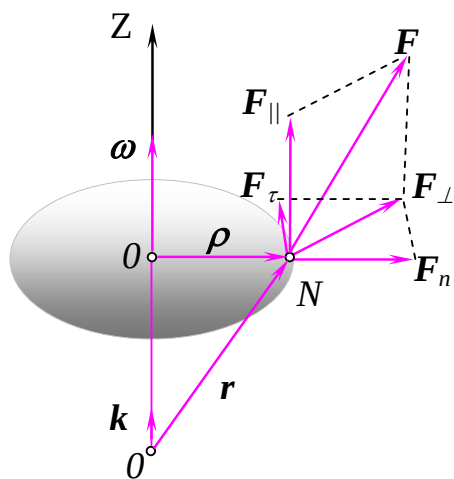
chunki sterjenning massasi $m = D/S$. Pirovordida m massali va R radiusli bir jinsli sharning uning markazidan o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momentini tayyor xolda keltiramiz:

$$J_c = \frac{2}{5} mR^2 \quad (37)$$

5. Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanganda unga ta'sir etayotgan kuchning faqat bir tashkil etuvchisi, aynan troektoriyaga urinma holda qo'yilgan tashkil etuvchisi bu o'qqa nisbatan moment hosil qiladi. Aslida, aylanayotgan jismning N

nuqtasiga qo'yilgan F kuchni 4.8- rasmda ko'rsatilgandek oldin ikki tashkil etuvchiga

ajratamiz: OZ aylanish o'qiga parallel ($F_{//}$) va unga tik ($F_{\perp}$). O'z navbatida $F_{\perp}$



8-rasm

kuchni ham ikki tashkil etuvchiga ajratamiz: F_{τ} - markazi O' nuqtada bo'lgan aylanaga urinma bo'lgan N nuqta harakatlanuvchi va F_n - $O'N$ radius bo'ylab yo'nalgan normal, ya'ni jismning aylanish o'qiga tik bo'lgan. Koordinataboshi O nisbatan F kuchmomenti

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}(\vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp})]$$

bo'ladi. Chunki $\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{\rho}, \vec{OO'}$ va $\vec{F}_{//}$, $\vec{\rho}$ va $\vec{F}_n$ vektorlar o'zaro kollinear, shunday ekan ularning vektor ko'paytmalari nolga teng, unda

$$\vec{M} = [\vec{\rho}F_{//}] + [\vec{OO'} F_n] + [\vec{OO'} \vec{F}_{\tau}] + [\vec{\rho}\vec{F}_{\tau}]$$

bo'ladi.

Butenglikning o'ng tomonidagi birinchi uchta

had jismning aylanish o'qiga tik yo'nalgan vektorlardan iborat, to'rtinchisi esa bu o'q bo'yicha yo'nalgan vektor. Demak, OZ o'qqa nisbatan F kuch momenti

$$M_z = [\vec{\rho}\vec{F}_{\tau}]_z = \rho F_{\tau} \quad (38)$$

ifodaga teng. Bu yerda ρ - kuch qo'yilgan nuqtadan o'qqacha bo'lgan masofa, F_{τ} - F kuchning $\vec{\tau} = \vec{v}/v$ vektor yo'nalishidagi proeksiyasi, bu yerda v - aylanuvchi jism N nuqtasining chiziqli tezligi^{*)}. Kichik dt vaqt ichida N nuqtaning siljishi

$$d\vec{r} = v dt = \left[\vec{\omega} \vec{\rho} \right] dt = [d\vec{\varphi} \vec{\rho}]$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda $d\vec{\varphi}$ - jismning dt vaqt ichidagi elementar burilishi.

Bunda jismga qo'yilgan F kuch elementar

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} |d\vec{r}|$$

ish bajaradi. Bunda $d\vec{\varphi}$ va $\vec{\rho}$ o'zaro ortogonal bo'lgani uchun $|d\vec{r}| = \rho d\varphi$ va

$$\delta A = \rho F_{\tau} d\varphi = M_z d\varphi = \vec{M} d\vec{\varphi} \quad (39)$$

bo'ladi.

^{*)} OZ o'qining musbat yo'nalishi paragrafning boshida ko'rsatilgandek tanlangan.

6. Qo'zg'almas OZ o'q atrofida aylanuvchi jismning kinetik energiyasi uchun ifoda topaylik. Aylanish o'qidan ρ masofada turuvchi jismning dm massaga ega bo'lgan kichik elementining dW_k kinetik energiyasi

$$dW_k = 1/2 v^2 dm = 1/2 \omega \rho^2 dm$$

ifodaga teng bo'ladi.

Butun jismning kinetik energiyasi

$$W_k = \frac{\omega^2}{2} \int_{(m)} \rho^2 dm = \frac{J \omega^2}{2} \quad (40)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda J - aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti.

Ko'rsatish mumkinki (Kyoning teoremasiga qarang), qattiq jismning erkin harakatida uning kinetik energiyasi V_s tezlik bilan ilgarilanma harakat qilayotgan massa markazining kinetik energiyasi ($W_k^{ul} = 1/2 m v_c^2$, m - jism massasi) bilan massa markazidan o'tgan oniy o'q atrofida ω burchakli tezlik aylanayotgan jismning aylanish kinetik energiyasi ($W_k^{ail} = 1/2 J_c \omega^2$, (J_s -oniy o'qqa nisbatan jismning inersiya momenti) yig'indisiga teng:

$$W_k = 1/2 m v_c^2 + 1/2 J_c \omega^2. \quad (41)$$

Shuni nazarda tutish kerakki, umumiy holda bu jismning massa markazi atrofida oniy aylanish o'qining jismga nisbatan holati vaqt o'tishi bilan o'zgaradi, bunda $J_c \neq const$. Ammo ko'p hollarda (masalan bir jinsli silindr yoki sharning tekislikda tebranishida) $J_c = const$.

7. Agar qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida $\bar{\omega}$ burchakli tezlik bilan aylanayotgan bo'lsa, uning kinetik energiyasi

$$W_k = 1/2 \bar{\omega} L \quad (42)$$

bo'ladi. Bu yerda $L = \int_{(m)} [rV] dm$ - koordinata boshi uchun qabul qilingan O nuqtaga

nisbatan jismning impuls momenti. Aslida, jism kichik elementining tezligi $\mathbf{v} = [\bar{\omega} \mathbf{r}]$ bo'ladi. Shuning uchun uning kinetik energiyasi

$$dW_k = 1/2 \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} dm = 1/2 dm \bar{\mathbf{v}} [\bar{\omega} \bar{\mathbf{r}}] = 1/2 \bar{\omega} [\bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{v}}] dm,$$

chunki uchvektorning aralash ko'paytmasi hamma ko'paytuvchilarning siklikalmashtirishda o'zgarmaydi. Bu ifodani integrallab butun jismning kinetik energiyasini topamiz:

$$W_k = \frac{1}{2} \bar{\omega} \int_{(m)} [\vec{r} \vec{v}] dm = \frac{1}{2} \bar{\omega} \vec{L}$$

Xulosa.

Ushbu referatda aylanma harakat kinematikasi va dinamikasi haqida fikr yuritilgan. Qattiq jismning, u bilan mustahkam bog'langan AB to'g'ri chiziqlarning hamma nuqtalari qo'zg'almasdan qoladigan harakatiga jismning AB qo'zg'almas o'q atrofida aylanishi deyiladi. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism bitta erkinlik darajasiga ega. Uning fazodagi holati bu jismning qandaydir shartli tanlangan boshlang'ich holatining aylanish o'qi atrofida burilish burchagining qiymati bilan to'liq aniqlanadi. Jismning yo'nalishi va aylanish tezligining kinematik xarakteristikasi bo'lib, jismning elementar burilish vektorini, bu burilishni davom etish vaqtiga nisbatiga teng bo'lgan kattalik – jismning burchak tezligi xizmat qiladi. Mexanik sistemaning massa markaziga nisbatan impuls momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng.

Qo'zg'almas nuqtaga nisbatan mexanik sistemaning impuls momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng.

Mexanik sistemaning o'qqa nisbatan impuls momenti deb, ko'rilayotgan o'qdan ixtiyoriy tanlangan nuqtaga nisbatan sistema impuls momenti vektorining shu o'qqa proeksiyasiga aytiladi. Mos xolda, o'qqa nisbatan kuch momenti deb, shu o'qdan ixtiyoriy tanlangan nuqtaga nisbatan kuch momenti vektorining shu o'qqa proeksiyasiga aytiladi.